Cálculo

Trascendentes tempranas

Cuarta edición

Dennis G. Zill • Warren S. Wright



CÁLCULO

Trascendentes tempranas

CÁLCULO

Trascendentes tempranas

Cuarta edición

Dennis G. Zill
Loyola Marymount University

Warren S. Wright
Loyola Marymount University

Revisión técnica:

Marlene Aguilar Ábalo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Ciudad de México

Crisanto Castillo Castillo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Cuernavaca, México

Fidel Castro López
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME), Instituto Politécnico Nacional, México

Rocío Cerecero López
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Cuernavaca, México

Ramón Espinosa Armenta
Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM)

Eugenio L. Fautsch Tapia
Facultad de Química, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

José Job Flores Godoy
Universidad Iberoamericana, Ciudad de México

Enrique Arturo Galván Flores
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME), Instituto Politécnico Nacional, México

Joel Ibarra Escutia
Instituto Tecnológico de Toluca, Toluca, México

Linda Margarita Medina Herrera
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Ciudad de México

Santiago Neira Rosales
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León, México

Carlos Enrique Peralta Santa Cruz
Universidad Continental de Ciencias e Ingeniería, Huancayo, Perú

John Alexander Pérez Sepúlveda
Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia

Jorge Augusto Pérez Alcázar
Universidad Escuela de Administración de Negocios, Universidad Sergio Arboleda y Escuela Colombiana de Ingeniería, Bogotá, Colombia

Ignacio Ramírez Vargas
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Hidalgo, México

Héctor Joé Rosas Toledo
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Ramiro Saldaña Acosta
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Laguna, México

Tonatihu Valdez Hernández
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Petr Zhevandrov
Facultad de Ingeniería, Universidad de la Sabana, Bogotá, Colombia



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha M.
Editor de desarrollo: Edmundo Carlos Zúñiga Gutiérrez
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traductores: Hugo Villagómez Velázquez y Gabriel Nagore Cázares

CÁLCULO. TRASCENDENTES TEMPRANAS
Cuarta edición


Educación

*A Subsidiary of **The McGraw-Hill** Companies, Inc.*
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón,
C.P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN 13: 978-607-15-0502-6

Translated from the 4th edition of: *Calculus*. *Early transcendentals* by Dennis G. Zill and Warren S. Wright.

978-0-7637-5995-7

1234567890 1098765432101

Impreso en China *Printed in China*

Prefacio

Para el instructor

Filosofía

La cuarta edición de *Cálculo*: *trascendentes tempranas* constituye una revisión sustancial de la última edición. Aunque en esta edición hay mucho material nuevo, he intentado preservar intacto mi objetivo original de compilar un texto de cálculo que no sea sólo una colección de definiciones y teoremas, habilidades y fórmulas para memorizar, así como problemas para resolver, sino un libro que se comunique con sus lectores más importantes: los estudiantes. Deseo que estos cambios hagan más relevante e interesante el texto tanto para el estudiante como para el profesor.

Características de esta edición

Secciones y ejercicios La mayor parte del material se ha actualizado y, en algunos casos, reorganizado. Muchas secciones y conjuntos de ejercicios se han reescrito por completo; asimismo, se les han agregado muchos problemas nuevos, en especial aplicaciones, problemas que requieren el uso de calculadora y computadora, problemas conceptuales y problemas de proyectos. En su mayoría, las aplicaciones agregadas pertenecen al ámbito de la "vida real" en el sentido de que se han investigado exhaustivamente usando fuentes originales. También se han agregado problemas relacionados con la interpretación de gráficas. Además, se ha hecho énfasis en las funciones trigonométricas tanto en los ejemplos como en los conjuntos de ejercicios a lo largo del texto. En esta edición hay más de 7 300 problemas.

Como ayuda en la asignación de problemas, cada conjunto de ejercicios está dividido claramente en grupos de problemas identificados con títulos como *Fundamentos*, *Aplicaciones*, *Modelos matemáticos*, *Proyectos*, *Problemas con calculadora/SAC*, etcétera. Creo que la mayoría de los títulos son autosuficientes, de modo que los problemas que aparecen bajo el encabezado *Piense en ello* tratan aspectos conceptuales del material cubierto en esa sección y son idóneos como tareas o para discutir en clase. En el texto no se proporciona respuesta alguna para estos problemas. Algunos están identificados como *Clásicos matemáticos* y reflejan el hecho de que han existido durante largo tiempo, aparecen en la mayor parte de los textos o presentan algún detalle interesante, mientras que otros problemas identificados como *Un poco de historia* muestran algún aspecto histórico.

El capítulo 1 es un repaso de funciones, y siguiendo la moda prevaleciente actual, las funciones se presentan desde los puntos de vista algebraico, gráfico, numérico o verbal. De hecho, la última sección del capítulo 1 se titula *De las palabras a las funciones*. Debido a que muchos estudiantes invariablemente encontrarán dificultades para resolver problemas relacionados con tasas y optimización aplicada, he incluido esta sección a fin de proporcionar una visión previa sobre cómo establecer, o construir, una función a partir de una descripción verbal (donde se ha eliminado el contexto del cálculo). En efecto, muchos problemas en la sección 1.7 vuelven a aparecer en un contexto de cálculo en la sección 4.8.

En este texto las ecuaciones diferenciales aparecen en dos capítulos: 8 y 16. Las ecuaciones de primer orden se consideran en el capítulo 8 para beneficio de aquellos estudiantes que encuentren sus aplicaciones en cursos de física e ingeniería. En el capítulo 16 se consideran la solución y las aplicaciones de ecuaciones diferenciales de orden superior. Por supuesto, los capítulos 8 y 16 pueden combinarse y cubrirse como una unidad en cualquier punto del curso, una vez que se haya concluido el capítulo 4. En el apéndice se proporcionan demostraciones de algunos de los teoremas más largos. Al final de las secciones correspondientes aparecen esbozos biográficos de algunos matemáticos que han impactado de manera importante el desarrollo del cálculo bajo la rúbrica de *Posdata: Un poco de historia*.

Características especiales Cada capítulo empieza con su propia tabla de contenido y una introducción al material referido en ese capítulo. En la parte final del libro, después del apéndice, el lector encontrará la sección *Fórmulas matemáticas*, que constituye una revisión compacta de conceptos básicos de álgebra, geometría, trigonometría y cálculo: las leyes de los exponentes, fórmulas de factorización, desarrollos binomiales, triángulo de Pascal, fórmulas de geometría, gráficas y funciones, funciones trigonométricas, funciones exponenciales y logarítmicas, y fórmulas de diferenciación e integración.

La sección denominada *Autoevaluación,* que fue introducida en la última edición, consta de 56 reactivos sobre cuatro amplias áreas de precálculo en matemáticas. Esta evaluación intenta alentar a los estudiantes a revisar por sí mismos algunos de los temas de prerrequisito esenciales, como valores absolutos, plano cartesiano, ecuaciones de rectas, círculos, etc., que se aplican a lo largo del texto. En la sección de respuestas se proporcionan las soluciones a todos estos reactivos.

Los usuarios de las tres ediciones previas han sido muy receptivos a las *Observaciones* con las que a menudo termina una sección. En consecuencia, el número de éstas ha aumentado y se les ha denominado *Notas desde el aula*. Se pretende que estas notas sean análisis informales dirigidos directamente al estudiante. Estos análisis varían desde advertencias sobre errores algebraicos, de procedimiento y de notación comunes, pasando por la interpretación errónea de teoremas y consejos, hasta preguntas que piden al estudiante pensar en el tema y ampliar las ideas recién presentadas.

También, a solicitud de los usuarios, se ha incrementado el número de notas al margen y anotaciones de orientación en los ejemplos.

Figuras, definiciones, teoremas Debido a la gran cantidad de figuras, definiciones y teoremas que hay en este texto, he cambiado a un sistema de numeración doble decimal. Por ejemplo, la interpretación de “figura 1.2.3” es

Capítulo Sección del capítulo 1
↓ ↓
1.2.3 ← Tercera figura de la sección 1.2

Considero que este tipo de numeración facilita encontrar, por ejemplo, un teorema o una figura a la que se hace referencia en una sección o en un capítulo posterior. Además, para relacionar mejor una figura con el texto, la *primera* referencia textual a cada figura aparece con el mismo estilo y color de letra que el número de la figura. Por ejemplo, la primera referencia a la primera figura en la sección 7.5 se proporciona como FIGURA 7.5.1, y todas las referencias subsecuentes se escriben en el estilo tradicional de la figura 7.5.1. También, en esta edición cada figura en el texto presenta un breve subtítulo explicatorio.

Materiales de apoyo

Esta obra cuenta con interesantes complementos para fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje y su evaluación, y se otorgan a profesores que adoptan este texto para sus cursos. Para obtener más información respecto de estos materiales, contacte a su representante McGraw-Hill.

Para el estudiante

Usted se ha matriculado en uno de los cursos más interesantes de matemáticas. Hace muchos años, cuando yo era estudiante de Cálculo I, me sorprendieron el poder y la belleza del material. Era distinto de cualquier tipo de matemáticas que hubiera estudiado hasta ese momento. Era

divertido, emocionante y constituía un desafío. Después de enseñar matemáticas universitarias por muchos años, he conocido infinidad de tipos de estudiante, desde el genio incipiente que inventó su propio cálculo hasta estudiantes que luchaban por dominar la mecánica más elemental del tema. A lo largo de estos años también he sido testigo de un fenómeno triste: algunos estudiantes fracasan en cálculo no porque encuentren que el tema es imposible, sino porque tienen habilidades deficientes de álgebra y un conocimiento inadecuado del trabajo en trigonometría. El cálculo construye de inmediato sobre su conocimiento y habilidades previos, donde hay mucho terreno nuevo por cubrir. En consecuencia, hay muy poco tiempo para repasar las bases en el planteamiento formal del aula. Así, quienes enseñamos cálculo debemos asumir que usted puede factorizar, simplificar y resolver ecuaciones, resolver desigualdades, manejar valores absolutos, usar una calculadora, aplicar las leyes de los exponentes, encontrar ecuaciones de rectas, graficar puntos, trazar gráficas elementales y aplicar importantes identidades logarítmicas y trigonométricas, la habilidad de hacer álgebra y trigonometría, trabajar con exponentes y logaritmos, así como trazar *a mano,* con rapidez y precisión, gráficas básicas que son claves para tener éxito en un curso de cálculo.

En la página xvii encontrará la sección "Autoevaluación", que contiene 56 preguntas. Esta "prueba" es una oportunidad para que usted verifique sus conocimientos acerca de algunos temas que se tratan en este texto. Relájese, tome su tiempo, lea y trabaje cada pregunta, y luego compare sus respuestas con las que se proporcionan en la página RES-1. Sin tomar en cuenta su "calificación", lo alentamos a que revise material de precálculo en algún texto acerca de la materia.

Unas palabras para los estudiantes que han cursado cálculo en preparatoria: por favor, no asuman que pueden lograrlo con un esfuerzo mínimo porque identifican algunos de los temas en cálculo diferencial e integral. Un sentimiento de familiaridad con el tema combinado con una actitud de complacencia a menudo es la razón del fracaso de algunos estudiantes.

Aprender matemáticas no es como aprender a andar en bicicleta: en que una vez que se aprende, la habilidad permanece para siempre. Las matemáticas son más como aprender otro idioma o tocar un instrumento musical: requiere tiempo, esfuerzo y mucha práctica para desarrollar y mantener la habilidad. Aun los músicos experimentados continúan practicando escalas fundamentales. Por lo anterior, usted, el estudiante, sólo puede aprender matemáticas (es decir, hacer "que se le pegue") mediante el trabajo arduo de hacer matemáticas. Aunque he intentado hacer más claros para el lector *la mayoría* de los detalles en la solución de un ejemplo, inevitablemente usted tiene que completar los pasos faltantes. No puede leer un texto de este tipo como si fuese una novela; debe abrirse camino a lo largo de él con lápiz y papel en mano.

En conclusión, le deseo la mejor de las suertes en este curso.

Agradecimientos

Compilar un libro de texto de esta complejidad es una tarea monumental. Además de los autores, mucha gente invirtió tiempo y energía en el proyecto. En primer lugar, me gustaría expresar mi aprecio para los equipos editorial, de producción y mercadotecnia de Jones y Bartlett, y a los siguientes revisores de esta edición y las ediciones previas, quienes contribuyeron con numerosas sugerencias, críticas válidas e incluso ocasionalmente con algunas palabras de apoyo:

Scott Wilde, *Baylor University*
Salvatore Anastasio, *SUNY*, *New Paltz*
Thomas Bengston, *Penn State University, Delaware County*
Steven Blasberg, *West Valley College*
Robert Brooks, *University of Utah*
Dietrich Burbulla, *University of Toronto*
David Burton, *Chabot College*
Maurice Chabot, *University of Southern Maine*
H. Edward Donley, *Indiana University of Pennsylvania*
John W. Dulin, *GMI Engineering & Management Institute*
Arthur Dull, *Diablo Valley College*
Hugh Easler, *College of William and Mary*
Jane Edgar, *Brevard Community College*
Joseph Egar, *Cleveland State University*
Patrick J. Enright, *Arapahoe Community College*
Peter Frisk, *Rock Valley College*
Shirley Goldman, *University of California at Davis*
Joan Golliday, *Santa Fe Community College*
David Green, Jr., *GMI Engineering & Management Institute*
Harvey Greenwald, *California Polytechnic State University*
Walter Gruber, *Mercy College of Detroit*
Dave Hallenbeck, *University of Delaware*
Noel Harbetson, *California State University at Fresno*
Bernard Harvey, *California State University, Long Beach*
Christopher E. Hee, *Eastern Michigan University*
Jean Holton, *Tidewater Community College*

Rahim G. Karimpour, *Southern Illinois University*
Martin Kotler, *Pace University*
Carlon A. Krantz, *Kean College of New Jersey*
George Kung, *University of Wisconsin at Stevens Point*
John C. Lawlor, *University of Vermont*
Timothy Loughlin, *New York Institute of Technology*
Antonio Magliaro, *Southern Connecticut Slate University*
Walter Fred Martens, *University of Alabama at Birmingham*
William E. Mastrocola, *Colgate University*
Jill McKenney, *Lane Community College*
Edward T. Migliore, *Monterey Peninsula College*
Carolyn Narasimhan, *DePaul University*
Harold Olson, *Diablo Valley College*
Gene Ortner, *Michigan Technological University*
Aubrey Owen, *Community College of Denver*
Marvin C. Papenfuss, *Loras College*
Don Poulson, *Mesa Community College*
Susan Prazak, *College of Charleston*
James J. Reynolds, *Pennsylvania State University*, *Beaver Campus*
Susan Richman, *Penn State University, Harrisburg*
Rodd Ross, *University of Toronto*
Donald E. Rossi, *De Anza College*
Lillian Seese, *St. Louis Community College at Meramec*
Donald Sherbert, *University of Illinois*
Nedra Shunk, *Santa Clara University*
Phil R. Smith, *American River College*
Joseph Stemple, *CUNY Queens College*
Margaret Suchow, *Adirondack Community College*
John Suvak, *Memorial University of Newfoundland*
George Szoke, *University of Akron*
Hubert Walczak, *College of St. Thomas*
Richard Werner, *Santa Rosa Junior College*
Loyd V. Wilcox, *Golden West College*
Jack Wilson, *University of North Carolina, Asheville*

También me gustaría extender un agradecimiento extraespecial para las siguientes personas:

- Jeff Dodd, Jacksonville State University, por el proyecto del problema 37 de los ejercicios 8.3.
- John David Dionisio, Loyola Marymount University, y Brian y Melanie Fulton, High Point University, por proporcionar las soluciones de problemas y ejercicios.
- Roger Cooke, University of Vermont, y Fred S. Roberts, Rutgers University, por haber dedicado tiempo de sus ocupados programas y contribuido con los excelentes ensayos de cálculo.
- Carol Wright, por su ayuda en las etapas finales de preparación del manuscrito de éste y otros textos.
- David Pallai, distribuidor, y Tim Anderson, editor, por soportar toda la liberación verbal de mis frustraciones.
- Jennifer Bagdigian, gerente de producción, por coordinar amablemente las fases de producción y por su paciencia para aguantar mis cambios de carácter sin fin, y a
- Irving Drooyan y Charles Carico, por iniciar todo.

Incluso con toda la ayuda mencionada, la precisión de cada letra, palabra, símbolo, ecuación y figura contenidos en este producto final es responsabilidad del autor. Estaré muy agradecido de contar con el aviso de cualquier error o errores tipográficos que llamen la atención. Las correcciones pueden enviarse a

pablo_roig@mcgraw-hill.com

En conclusión, doy la bienvenida a Warren Scott Wright, mi colega desde hace mucho tiempo en Loyola Marymount University, y autor de muchos de los suplementos que acompañan mis textos, como coautor de este texto.

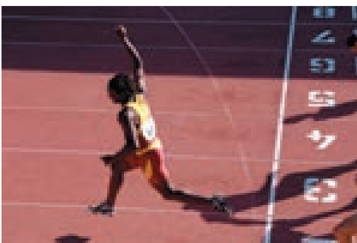

Dennis G. Zill


Warren S. Wright

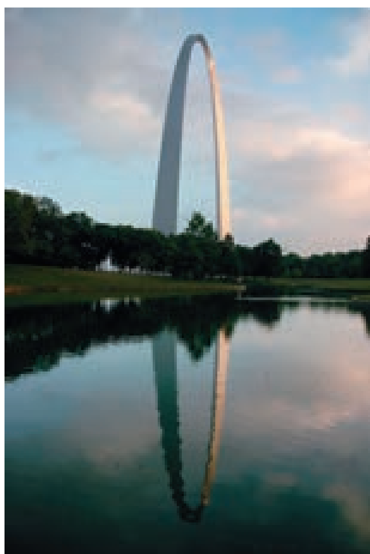
Contenido



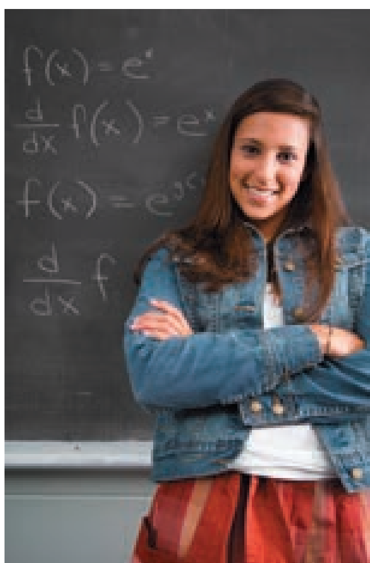
1 Funciones 1

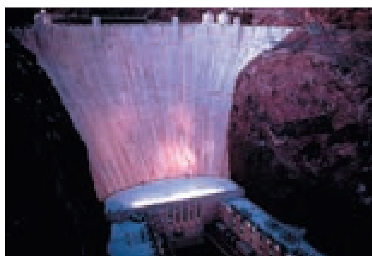


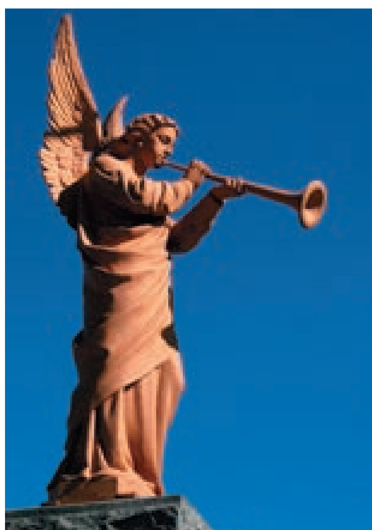
2 Límite de una función 67

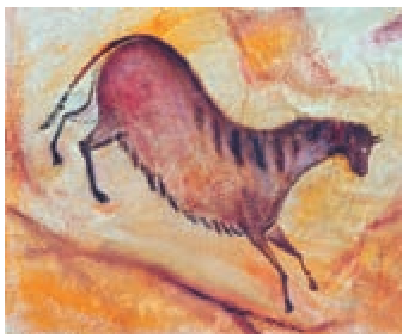





$f(x)=e^x$
$\frac{d}{dx}f(x)=e^x$























Autoevaluación

Las respuestas a todas las preguntas están en la página RES-1.

Como preparación para el cálculo

☰ Matemáticas básicas

1. (Falso/verdadero) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$. __________
2. (Falso/verdadero) Para $a > 0$, $(a^{4/3})^{3/4} = a$. __________
3. (Falso/verdadero) Para $x \neq 0$, $x^{-3/2} = \frac{1}{x^{2/3}}$. __________
4. (Falso/verdadero) $\frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2^n}$. __________
5. (Llene el espacio en blanco) En el desarrollo de $(1 - 2x)^3$, el coeficiente de x^2 es __________.
6. Sin usar calculadora, evalúe $(-27)^{5/3}$.
7. Escriba lo siguiente como una expresión sin exponentes negativos:

$$x^2\frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-1/2}2x + 2x\sqrt{x^2 + 4}.$$

8. Complete el trinomio cuadrado: $2x^2 + 6x + 5$.
9. Resuelva las ecuaciones:

   a) $x^2 = 7x$ ***b***) $x^2 + 2x = 5$ ***c***) $\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{x} = 0$ ***d***) $x + \sqrt{x - 1} = 1$

10. Factorice completamente:

    a) $10x^2 - 13x - 3$
    b) $x^4 - 2x^3 - 15x^2$
    c) $x^3 - 27$
    d) $x^4 - 16$

☰ Números reales

11. (Falso/verdadero) Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$. __________
12. (Falso/verdadero) $\sqrt{(-9)^2} = -9$. __________
13. (Falso/verdadero) Si $a < 0$, entonces $\frac{-a}{a} < 0$. __________
14. (Llene el espacio en blanco) Si $|3x| = 18$, entonces $x =$ __________ o $x =$ _______.
15. (Llene el espacio en blanco) Si $a - 5$ es un número negativo, entonces $|a - 5| =$ __________.
16. ¿Cuáles de los siguientes números son racionales?

    a) 0.25 ***b***) 8.131313 . . . ***c***) π
    d) $\frac{22}{7}$ ***e***) $\sqrt{16}$ ***f***) $\sqrt{2}$
    g) 0 ***h***) -9 ***i***) $1\frac{1}{2}$
    j) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ ***k***) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ***l***) $\frac{-2}{11}$

17. Relacione el intervalo dado con la desigualdad idónea.

    i) (2, 4] *ii)* [2, 4) *iii)* (2, 4) *iv)* [2, 4]
    a) $|x - 3| < 1$ ***b***) $|x - 3| \leq 1$ ***c***) $0 \leq x - 2 < 2$ ***d***) $1 < x - 1 \leq 3$

18. Exprese el intervalo $(-2, 2)$ como

    a) una desigualdad y ***b***) una desigualdad que implique valores absolutos.

19. Trace la gráfica de $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$ en la recta numérica.

20. Encuentre todos los números reales x que satisfacen la desigualdad $|3x - 1| > 7$. Escriba su solución usando notación de intervalos.

21. Resuelva la desigualdad $x^2 \geq -2x + 15$ y escriba su solución usando notación de intervalos.

22. Resuelva la desigualdad $x \leq 3 - \dfrac{6}{x + 2}$ y escriba su solución usando notación de intervalos.

☰ Plano cartesiano

23. (Llene el espacio en blanco) Si (a, b) es un punto en el tercer cuadrante, entonces $(-a, b)$ es un punto en el __________ cuadrante.

24. (Llene el espacio en blanco) El punto medio del segmento de recta desde $P_1(2, -5)$ hasta $P_2(8, -9)$ es __________.

25. (Llene el espacio en blanco) Si $(-2, 6)$ es el punto medio del segmento de recta desde $P_1(x_1, 3)$ hasta $P_2(8, y_2)$, entonces x_1 =__________ y y_2 = __________.

26. (Llene los espacios en blanco) El punto (1, 5) está en una gráfica. Proporcione las coordenadas de otro punto de la gráfica si la gráfica es:

a) simétrica con respecto al eje x. __________

b) simétrica con respecto al eje y. __________

c) simétrica con respecto al origen. __________

27. (Llene los espacios en blanco) Las intersecciones x y y de la gráfica de $|y| = 2x + 4$ son, respectivamente, __________ y __________.

28. ¿En cuáles cuadrantes del plano cartesiano es negativo el cociente x/y?

29. La coordenada y de un punto es 2. Encuentre la coordenada x del punto si la distancia del punto a (1, 3) es $\sqrt{26}$.

30. Encuentre una ecuación del círculo para el cual $(-3, -4)$ y $(3, 4)$ son los puntos extremos de un diámetro.

31. Si los puntos P_1, P_2 y P_3 son colineales como se muestra en la FIGURA A.1, encuentre una ecuación que relacione las distancias $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$, y $d(P_1, P_3)$.

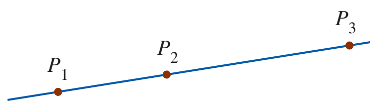


FIGURA A.1 Gráfica para el problema 31

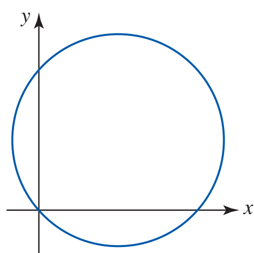


FIGURA A.2 Gráfica para el problema 32

32. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones describe mejor el círculo de la FIGURA A.2? Los símbolos a, b, c, d y e representan constantes diferentes de cero.

a) $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$

b) $ax^2 + ay^2 + cx + dy + e = 0$

c) $ax^2 + ay^2 + cx + dy = 0$

d) $ax^2 + ay^2 + c = 0$

e) $ax^2 + ay^2 + cx + e = 0$

☰ Rectas

33. (Falso/verdadero) Las rectas $2x + 3y = 5$ y $-2x + 3y = 1$ son perpendiculares. __________

34. (Llene el espacio en blanco) Las rectas $6x + 2y = 1$ y $kx - 9y = 5$ son paralelas si k = __________.

35. (Llene el espacio en blanco) Una recta con intercepción x $(-4, 0)$ e intersección y $(0, 32)$ tiene pendiente __________.

36. (Llene los espacios en blanco) La pendiente y las intersecciones x y y de la recta $2x - 3y + 18 = 0$ son, respectivamente, __________, __________, y __________.

37. (Llene el espacio en blanco) Una ecuación de la recta con pendiente -5 e intersección y $(0, 3)$ es __________.

38. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(3, -8)$ y es paralela a la recta $2x - y = -7$.

39. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos (−3, 4) y (6, 1).

40. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto de intersección de las gráficas de $x + y = 1$ y $2x - y = 7$.

41. Una recta tangente a un círculo en un punto P del círculo es una recta que pasa por P y es perpendicular a la recta que pasa por P y el centro del círculo. Encuentre la ecuación de la recta tangente L indicada en la FIGURA A.3.

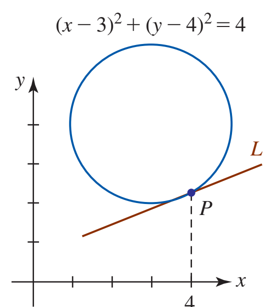
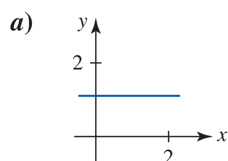
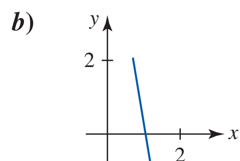


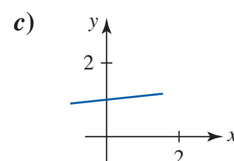
FIGURA A.3 Gráfica para el problema 41

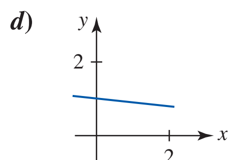
42. Relacione la ecuación dada con la gráfica idónea en la FIGURA A.4.

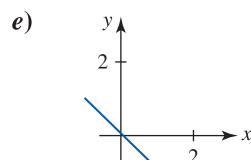
i) $x + y - 1 = 0$ *ii)* $x + y = 0$ *iii)* $x - 1 = 0$
iv) $y - 1 = 0$ *v)* $10x + y - 10 = 0$ *vi)* $-10x + y + 10 = 0$
vii) $x + 10y - 10 = 0$ *viii)* $-x + 10y - 10 = 0$

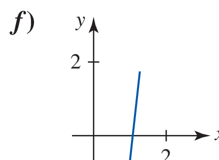
a)


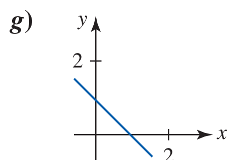
b)


c)


d)


e)


f)


g)


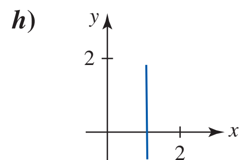
h)


FIGURA A.4 Gráficas para el problema 42

≡ Trigonometría

43. (Falso/verdadero) $1 + \sec^2\theta = \tan^2\theta$. __________

44. (Falso/verdadero) $\operatorname{sen}(2t) = 2 \operatorname{sen} t$. __________

45. (Llene el espacio en blanco) El ángulo 240 grados es equivalente a __________ radianes.

46. (Llene el espacio en blanco) El ángulo $\pi/12$ radianes es equivalente a __________ grados.

47. (Llene el espacio en blanco) Si $\tan t = 0.23$, $\tan(t + \pi) =$ __________.

48. Encuentre $\cos t$ si $\operatorname{sen} t = \frac{1}{3}$ y el lado terminal del ángulo t está en el segundo cuadrante.

49. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ dado en la FIGURA A.5.

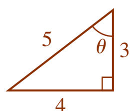


FIGURA A.5 Triángulo para el problema 49

50. Exprese las longitudes b y c de la FIGURA A.6 en términos del ángulo θ.

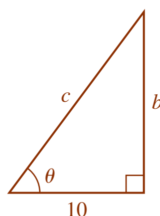


FIGURA A.6 Triángulo para el problema 50

Logaritmos

51. Exprese el símbolo k en la declaración exponencial $e^{(0.1)k} = 5$ como un logaritmo.

52. Exprese la declaración logarítmica $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$ como una declaración exponencial equivalente.

53. Exprese $\log_b 5 + 3\log_b 10 - \log_b 40$ como un logaritmo simple.

54. Use una calculadora para evaluar $\dfrac{\log_{10} 13}{\log_{10} 3}$.

55. (Llene el espacio en blanco) $b^{3\log_b 10} =$ __________.

56. (Falso/verdadero) $(\log_b x)(\log_b y) = \log_b(y^{\log_b x})$. __________

Ensayo

La historia del cálculo

Por Roger Cooke
University of Vermont


Isaac Newton


Gottfried Leibniz

Suele considerarse que el cálculo es una creación de los matemáticos europeos del siglo XVII, cuyo trabajo más importante fue realizado por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1711). Esta percepción tradicional en general es correcta. No obstante, cualquier teoría a gran escala es un mosaico cuyas baldosas fueron colocadas a lo largo de mucho tiempo; y en cualquier teoría viviente las baldosas continúan colocándose de manera continua. La declaración más poderosa que los historiadores se arriesgan a hacer es que un patrón se hizo evidente en cierto momento y lugar. Es el caso del cálculo. Podemos afirmar con cierta confianza que los primeros trabajos del tema aparecieron en el siglo XVII y que el patrón se aclaró mucho más gracias al trabajo de Newton y Leibniz. Sin embargo, muchos de los principios esenciales del cálculo se descubrieron desde mucho antes, en la época de Arquímedes (287-211 a.C.), y algunos de esos mismos descubrimientos se lograron de manera independiente en China y en Japón. Además, si se escudriña con más profundidad en los problemas y métodos del cálculo, uno pronto se encuentra en la persecución de problemas que conducen a las áreas modernas de la teoría de funciones analíticas, geometría diferencial y funciones de una variable real. Para cambiar la metáfora del arte al transporte, podemos pensar que el cálculo es una gran estación de ferrocarril, donde los pasajeros que llegan de muchos sitios diferentes están juntos durante un tiempo breve antes de embarcarse hacia destinos diversos. En este ensayo tratamos de mirar en ambas direcciones desde esta estación, hacia los puntos de origen y los destinos. Empecemos con la descripción de la estación.

¿Qué es el cálculo? El cálculo suele dividirse en dos partes, denominadas *cálculo diferencial* y *cálculo integral*. El cálculo diferencial investiga las propiedades de las razones de cambio comparativas de variables que están vinculadas por medio de ecuaciones. Por ejemplo, un resultado fundamental del cálculo diferencial es que si $y = x^n$, entonces la razón de cambio de y con respecto a x es nx^{n-1}. Resulta que cuando se usa la intuición para pensar en ciertos fenómenos —movimiento de los cuerpos, cambios en la temperatura, crecimiento de poblaciones y muchos otros—, se llega a postular ciertas relaciones entre estas variables y sus razones de cambio. Estas relaciones se escriben en una forma conocida como *ecuaciones diferenciales*. Así, el objetivo principal de estudiar cálculo diferencial consiste en comprender qué son las razones de cambio y cómo escribir ecuaciones diferenciales. El cálculo integral proporciona métodos para recuperar las variables originales conociendo sus razones de cambio. La técnica para hacer esto se denomina *integración*, y el objetivo fundamental del estudio del cálculo integral es aprender a *resolver* las ecuaciones diferenciales proporcionadas por el cálculo diferencial.

A menudo estos objetivos están encubiertos en libros de cálculo, donde el cálculo diferencial se utiliza para encontrar los valores máximo y mínimo de ciertas variables, y el cálculo integral se usa para calcular longitudes, áreas y volúmenes. Hay dos razones para recalcar estas aplicaciones en un libro de texto. Primero, la utilización completa del cálculo usando ecuaciones diferenciales implica una teoría más bien complicada que debe presentarse de manera gradual; entre tanto, al estudiante debe enseñársele *algún* uso de las técnicas que se proponen. Segundo,

estos problemas fueron la fuente de las ideas que condujeron al cálculo; los usos que ahora hacemos del tema sólo se presentaron después del descubrimiento de aquél.

Al describir los problemas que llevaron al cálculo y los problemas que pueden resolverse usando cálculo, aún no se han indicado las técnicas fundamentales que hacen de esta disciplina una herramienta de análisis mucho más poderosa que el álgebra y la geometría. Estas técnicas implican el uso de lo que alguna vez se denominó *análisis infinitesimal*. Todas las construcciones y las fórmulas de la geometría y el álgebra de preparatoria poseen un carácter finito. Por ejemplo, para construir la tangente de un círculo o para bisecar un ángulo se realiza un número finito de operaciones con regla y compás. Aunque Euclides sabía considerablemente más geometría que la que se enseña en cursos actuales modernos de preparatoria, él también se autoconfinó esencialmente a procesos finitos. Sólo en el contexto limitado de la teoría de las proporciones permitió la presencia de lo infinito en su geometría, y aun así está rodeado por tanto cuidado lógico que las demostraciones implicadas son extraordinariamente pesadas y difíciles de leer. Lo mismo ocurre en álgebra: para resolver una ecuación polinomial se lleva a cabo un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíz. Cuando las ecuaciones pueden resolverse, la solución se expresa como una fórmula finita que implica coeficientes.

Sin embargo, estas técnicas finitas cuentan con un rango limitado de aplicabilidad. No es posible encontrar las áreas de la mayoría de las figuras curvas mediante un número finito de operaciones con regla y compás, y tampoco resolver ecuaciones polinomiales de grado mayor o igual que cinco usando un número finito de operaciones algebraicas. Lo que se quería era escapar de las limitaciones de los métodos finitos, y esto condujo a la creación del cálculo. Ahora consideraremos algunos de los primeros intentos por desarrollar técnicas para manipular los problemas más difíciles de la geometría, luego de lo cual trataremos de resumir el proceso mediante el que se trabajó el cálculo, y finalmente exhibiremos algo de los frutos que ha producido.

Las fuentes geométricas del cálculo Uno de los problemas más antiguos en matemáticas es la cuadratura del círculo; es decir, construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado. Como se sabe, este problema no puede resolverse con regla y compás. Sin embargo, Arquímedes descubrió que si es posible trazar una espiral, empezando en el centro de un círculo que hace exactamente una revolución antes de llegar al círculo, entonces la tangente a esa espiral, en su punto de intersección con el círculo, forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya área es exactamente igual al círculo (vea la figura 1). Entonces, si es posible trazar esta espiral y su tangente, también lo es cuadrar el círculo. Arquímedes, no obstante, guardó silencio sobre cómo podría trazarse esta tangente.

Observamos que uno de los problemas clásicos en matemáticas puede resolverse sólo si es posible trazar cierta curva y su tangente. Este problema, y otros parecidos, originaron que el problema puramente matemático de encontrar la tangente a una curva se volviera importante. Este problema constituye la fuente más importante del cálculo diferencial. El truco “infinitesimal”

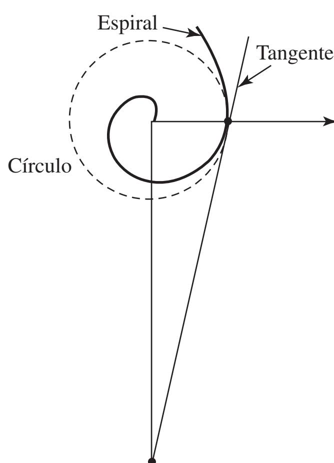


FIGURA 1 *La espiral de Arquímedes.* La tangente al final de la primera vuelta de la espiral y los dos ejes forman un triángulo con área igual a la del círculo centrado en el origen y que pasa por el punto de la tangente

que permite la solución del problema es considerar la tangente como la recta determinada por dos puntos en la curva “infinitamente próximos” entre sí. Otra forma de decir lo mismo es que una pieza “infinitamente corta” de la curva es recta. El problema es que resulta difícil ser preciso sobre los significados de las frases “infinitamente próximos” e “infinitamente cortos”.

Poco avance se logró en este problema hasta la invención de la geometría analítica en el siglo XVII por Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650). Una vez que se pudo representar una curva por medio de una ecuación, fue posible afirmar con más confianza lo que se entendía por puntos “infinitamente próximos”, al menos para ecuaciones polinomiales como $y = x^2$. Con simbolismo algebraico para representar puntos en la curva, era posible considerar dos puntos sobre la curva con coordenadas x_0 y x_1, de modo que $x_1 - x_0$ es la distancia entre las coordenadas x. Cuando la ecuación de la curva se escribía en cada uno de estos puntos y una de las dos ecuaciones se restaba de la otra, un lado de la ecuación resultante contenía el factor $x_1 - x_0$, que entonces podía eliminarse por división. Por lo tanto, si $y_0 = x_0^2$ y $y_1 = x_1^2$, entonces $y_1 - y_0 = x_1^2 - x_0^2 = (x_1 - x_0) = (x_1 + x_0)$, de modo que $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = x_1 + x_0$. Cuando $(x_1 = x_0)$, se concluye que $(y_1 = y_0)$, y la expresión $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ carece de sentido. Sin embargo, la expresión $x_1 + x_0$ tiene el valor perfectamente definido $2x_0$. Entonces, es posible considerar a $2x_0$ como la razón de la diferencia infinitamente pequeña en y; es decir, $y_1 - y_0$ a la diferencia infinitamente pequeña en x; es decir, $x_1 - x_0$, cuando el punto (x_1, y_1) está infinitamente cerca del punto (y_1, y_0) sobre la curva $y = x^2$. Como aprenderá al estudiar cálculo, esta razón proporciona suficiente información para trazar la recta tangente a la curva $y = x^2$.

Excepto por pequeños cambios en la notación, el razonamiento anterior es exactamente la forma en que Fermat encontró la tangente a una parábola. Sin embargo, estaba abierta a una objeción lógica: en un momento, ambos lados de la ecuación se dividen entre $x_1 - x_0$, entonces en un paso posterior decidimos que $x_1 - x_0 = 0$. Puesto que la división entre cero es una operación ilegal, parece que estamos tratando de comernos nuestro pastel y no hacerlo; es decir, no se pueden hacer ambas cosas. Tuvo que pasar algún tiempo para responder de manera convincente a esta objeción.

Hemos visto que Arquímedes no pudo resolver el problema fundamental del cálculo diferencial: trazar la tangente a una curva. Sin embargo, Arquímedes *pudo* resolver algunos de los problemas fundamentales del cálculo integral. De hecho, encontró el volumen de una esfera mediante un sistema extremadamente ingenioso: consideró un cilindro que contenía un cono y una esfera e imaginó cortar esta figura en una infinidad de rebanadas delgadas. Al suponer las áreas de estas secciones del cono, la esfera y el cilindro, pudo demostrar cómo el cilindro equilibraría al cono y a la esfera si las figuras se colocan en los platos opuestos de una balanza. Este equilibrio proporcionó una relación entre las figuras, y como Arquímedes ya conocía los volúmenes del cono y del cilindro, entonces pudo calcular el volumen de la esfera.

Este razonamiento ilustra la segunda técnica infinitesimal que se encuentra en los fundamentos del cálculo: un volumen puede considerarse como una pila de figuras planas, y un área puede considerarse como una pila de segmentos de rectas, en el sentido de que si cada sección horizontal de una región es igual a la misma sección horizontal de otra región, entonces las dos regiones son iguales. Durante el Renacimiento europeo este principio se volvió de uso muy común bajo el nombre de *método de los indivisibles* para encontrar las áreas y los volúmenes de muchas figuras. Hoy en día se denomina principio de Cavalieri en honor de Bonaventura Cavalieri (1598-1647), quien lo usó para demostrar muchas de las fórmulas elementales que ahora forman parte del cálculo integral. El principio de Cavalieri también fue descubierto en otras tierras donde jamás llegó la obra de Euclides. Por ejemplo, los matemáticos chinos del siglo V Zu Chongzhi y su hijo Zu Geng hallaron el volumen de una esfera usando una técnica bastante parecida al método de Arquímedes.

Así, encontramos matemáticos que anticiparon el cálculo integral usando métodos infinitesimales para encontrar áreas y volúmenes en una etapa muy temprana de la geometría, tanto en la Grecia como la China antiguas. Así ocurre con el método infinitesimal para trazar tangentes; no obstante, este método para encontrar áreas y volúmenes estaba sujeto a objeciones. Por ejemplo, el volumen de cada sección plana de una figura es cero; ¿cómo es posible reunir una colección de ceros para obtener algo que no es cero? Además, ¿por qué el método no funciona en una dimensión? Considere las secciones de un triángulo rectángulo paralelas a uno de sus catetos.

Cada sección corta a la hipotenusa y al otro cateto en figuras congruentes; a saber, en un punto a cada uno. Sin embargo, la hipotenusa y el otro cateto no miden lo mismo. Objeciones como ésta eran preocupantes. Los resultados obtenidos con estos métodos fueron espectaculares. No obstante, los matemáticos prefirieron aceptarlos como un acto de fe, seguir usándolos e intentar construir sus fundamentos más tarde, justo como en un árbol cuando la raíz y las ramas crecen al mismo tiempo.

La invención del cálculo A mediados del siglo XVII se conocían muchas de las técnicas y hechos elementales del cálculo, incluso métodos para encontrar las tangentes de curvas simples y fórmulas de áreas acotadas por estas curvas. En otras palabras, muchas de las fórmulas que usted encontrará en los primeros capítulos de cualquier libro de texto de cálculo ya eran conocidas antes de que Newton y Leibniz iniciaran su obra. Lo que faltaba hasta fines del siglo XVII era tomar conciencia de que estos dos tipos de problemas están relacionados entre sí.

Para ver cómo se descubrió la relación, es necesario abundar más en las tangentes. Ya mencionamos que para trazar una tangente a una curva en un punto dado se requiere saber cómo encontrar un segundo punto en la recta. En la etapa inicial de la geometría analítica este segundo punto solía tomarse como el punto en que la tangente corta al eje x. La proyección sobre el eje x de la porción de la tangente entre el punto de tangencia y la intersección con el eje x se denominaba *subtangente*. En el estudio de las tangentes surgió un problema muy natural: *reconstruir una curva, dada la longitud de su subtangente en cualquier punto*. Por medio del estudio de este problema fue posible percibir que las ordenadas de cualquier curva son proporcionales al área bajo una segunda curva cuyas ordenadas son las longitudes de las subtangentes a la curva original. El resultado es el teorema fundamental del cálculo. El honor de haber reconocido de manera explícita esta relación pertenece a Isaac Barrow (1630-1677), quien lo indicó en un libro denominado *Lectiones Geometricae* en 1670. Barrow planteó varios teoremas semejantes al teorema fundamental del cálculo. Uno de ellos es el siguiente: *Si se traza una curva de modo que la razón de su ordenada a su subtangen*te [esta razón es precisamente lo que ahora se denomina derivada] *es proporcional a la ordenada de una segunda curva, entonces el área bajo la segunda curva es proporcional a la ordenada de la primera*.

Estas relaciones proporcionaron un principio unificado para el gran número de resultados particulares sobre tangentes y áreas que se habían encontrado con el método de indivisibles a principios del siglo XVII: para encontrar el área bajo una curva había que hallar una segunda curva para la cual la razón de la ordenada a la subtangente sea igual a la ordenada de la curva dada. Así, la ordenada de esa segunda curva proporciona el área bajo la primera curva.

En este punto el cálculo estaba preparado para surgir. Sólo requería de alguien que proporcionara métodos sistemáticos para el cálculo de tangentes (en realidad, subtangentes) e invertiera ese proceso para encontrar áreas. Es el trabajo realizado por Newton y Leibniz. Estos dos gigantes de la creatividad matemática siguieron senderos bastante distintos en sus descubrimientos.

El método de Newton era algebraico y desarrolló el problema de encontrar un método eficiente para extraer las raíces de un número. Aunque apenas empezó a estudiar álgebra en 1662, ya alrededor de 1665 las reflexiones de Newton sobre el problema de extraer raíces lo condujeron al descubrimiento de la serie infinita que actualmente se denomina teorema del binomio; es decir, la relación

$$(1 + x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}r^3 + \cdots$$

Al combinar el teorema del binomio con técnicas infinitesimales, Newton pudo deducir las fórmulas básicas del cálculo diferencial e integral. Crucial en el enfoque de Newton fue el uso de series infinitas para expresar las variables en cuestión, y el problema fundamental que Newton no resolvió fue establecer que tales series podían manipularse justo como sumas finitas. Por tanto, en un sentido Newton llevó al infinito desde una entrada a su madriguera sólo para encontrar que una cara estaba frente a la otra.

A partir de la consideración de las variables como cantidades físicas que cambian su valor con el tiempo, Newton inventó nombres para las variables y sus razones de cambio que reflejaban esta intuición. Según Newton, un *fluent* (x) es una cantidad en movimiento o que fluye; su *fluxión* (x) es su razón de flujo, lo que ahora se denomina velocidad o *derivada*. Newton expuso

sus resultados en 1671 en un tratado denominado *Fluxions* escrito en latín, pero su obra no fue publicada sino hasta que apareció una versión en inglés en 1736. (La versión original en latín fue publicada por primera vez en 1742.)

A pesar de la notación y de sus razonamientos que parecen insuficientes y rudimentarios hoy en día, el tremendo poder del cálculo brilla a través del *método de las fluxiones* de Newton en la solución de problemas tan difíciles como encontrar la longitud de arco de una curva. Se pensaba que esta "rectificación" de una curva era imposible, pero Newton demostró que era posible encontrar un número finito de curvas cuya longitud podía expresarse en términos finitos.

El método de Newton para el cálculo era algebraico, como hemos visto, y heredó el teorema fundamental de Barrow. Por otro lado, Leibniz trabajó el resultado fundamental desde 1670, y su enfoque era diferente al de Newton. Se considera a Leibniz como el pionero de la lógica simbólica, y su opinión acerca de la importancia de la buena notación simbólica era mucho mejor que la de Newton. Inventó la notación dx y dy que sigue en uso. Para él, dx era una abreviación de "diferencia en x", y representaba la diferencia entre dos valores infinitamente próximos de x. En otras palabras, expresaba exactamente lo que teníamos en mente hace poco cuando consideramos el cambio infinitamente pequeño $x_1 - x_0$. Leibniz consideraba que dx era un número "infinitesimal", diferente de cero, pero tan pequeño que ninguno de sus múltiplos podía exceder cualquier número ordinario. Al ser diferente de cero, podía servir como denominador en una fracción, y así dy/dx era el cociente de dos cantidades infinitamente pequeñas. De esta forma esperaba superar las objeciones al nuevo método establecido para encontrar tangentes.

Leibniz también realizó una aportación fundamental en la técnica controvertida de encontrar áreas al sumar secciones. En lugar de considerar el área [por ejemplo, el área bajo una curva $y = f(x)$] como una colección de segmentos de recta, la consideraba como la suma de las áreas de rectángulos "infinitamente delgados" de altura $y = f(x)$ y base infinitesimal dx. Por tanto, la diferencia entre el área hasta el punto $x + dx$ y el área hasta el punto x era la diferencia infinitesimal en área $dA = f(x)\,dx$, y el área total se encontraba sumando estas diferencias infinitesimales en área. Leibniz inventó la S alargada (el signo integral $\int$) que hoy en día se usa universalmente para expresar este proceso de suma. Así expresaba el área bajo la curva $y = f(x)$ como $A = \int dA = \int f(x)\,dx$, y cada parte de este símbolo expresaba una idea geométrica simple y clara.

Con la notación de Leibniz, el teorema fundamental del cálculo de Barrow simplemente indica que el par de ecuaciones

$$A = \int f(x)\,dx, \qquad dA = f(x)\,dx$$

son equivalentes. Debido a lo que acaba de plantearse, esta equivalencia es casi evidente.

Tanto Newton como Leibniz lograron grandes avances en matemáticas, y cada uno posee bastante crédito por ello. Resulta lamentable que la estrecha coincidencia de su obra haya conducido a una enconada discusión sobre la prioridad entre sus seguidores.

Algunas partes del cálculo, que implican series infinitas, fueron inventadas en India durante los siglos XIV y XV. Jyesthadeva, matemático indio de fines del siglo XV, proporcionó la serie

$$\theta = r\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3\cos^3\theta} + \frac{\operatorname{sen}^5\theta}{5\cos^5\theta} - \cdots\right)$$

para la longitud de un arco de círculo, demostró este resultado y de manera explícita planteó que esta serie converge sólo si θ no es mayor que 45°. Si se escribe $\theta = \arctan x$ y se usa el hecho de que $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = x$, esta serie se convierte en la serie normal para arctan x.

De modo independiente, otras series fueron desarrolladas en Japón casi al mismo tiempo que en Europa. El matemático japonés Katahiro Takebe (1664-1739) encontró un desarrollo en serie equivalente a la serie para el cuadrado de la función arcsen. Él consideró el cuadrado de la mitad de arco a la altura h en un círculo de diámetro d; esto resultó ser la función $f(h) = \left(\dfrac{d}{2}\operatorname{arcsen}\dfrac{h}{d}\right)^2$. Takebe carecía de notación para el término general de una serie, aunque descubrió patrones en los coeficientes al calcular geométricamente la función en el valor particular de $h = 0.000001$, $d = 10$ hasta un valor muy grande de cifras decimales —más de 50—, y luego al usar esta precisión extraordinaria para refinar la aproximación al sumar sucesivamente términos correctivos.

Al proceder de esta manera pudo discernir un patrón en las aproximaciones sucesivas, a partir de lo cual, por extrapolación, pudo plantear el término general de la serie:

$$f(h) = dh\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}\left(\frac{h}{d}\right)^n\right]$$

Después de Newton y de Leibniz quedaba el problema de dar contenido al esqueleto inventado por estos dos genios. La mayor parte de su obra fue completada por matemáticos de la Europa continental, en especial por el círculo creado por los matemáticos suizos James Bernoulli (1655-1705) y John Bernoulli (1667-1748), así como el estudiante de este último, el marqués de L´Hôpital (1661-1704). Éstos y otros matemáticos trabajaron las conocidas fórmulas para las derivadas e integrales de funciones elementales que aún se encuentran en libros de texto actuales. Las técnicas esenciales de cálculo eran conocidas a principios del siglo XVIII, y un libro de texto del siglo XVIII como la *Introducción al análisis del infinito,* de Euler (1748), en caso de haber estado traducida al español se vería bastante como un libro de texto moderno.

El legado del cálculo Una vez que hemos abordado las fuentes del cálculo y el procedimiento con el que fue elaborado, a continuación analizaremos brevemente los resultados que produjo.

El cálculo obtuvo una cantidad impresionante de triunfos en sus dos primeros siglos. Resultó que docenas de fenómenos físicos previamente oscuros que implican calor, fluidez, mecánica celeste, elasticidad, luz, electricidad y magnetismo poseían propiedades mensurables cuyas relaciones podían describirse como ecuaciones diferenciales. La física se comprometió para siempre en hablar el lenguaje del cálculo.

Sin embargo, de ninguna manera fueron resueltos todos los problemas surgidos de la física. Por ejemplo, no era posible encontrar, en términos de funciones elementales conocidas, el área bajo una curva cuya ecuación implicaba la raíz cuadrada de un polinomio cúbico. Estas integrales surgieron a menudo tanto en geometría como en física, y llegaron a conocerse como *integrales elípticas* porque el problema de encontrar la longitud sólo podía comprenderse cuando la variable real x se sustituye por una variable compleja $z = x + iy$. El replanteamiento del cálculo en términos de variables complejas condujo a mucho descubrimientos fascinantes, que terminaron por ser codificados como una nueva rama de las matemáticas denominada teoría de funciones analíticas.

La definición idónea de integración siguió siendo un problema durante algún tiempo. Como consecuencia del uso de procesos infinitesimales para encontrar áreas y volúmenes surgieron las integrales. ¿Debía la integral definirse como una “suma de diferencias infinitesimales” o como la inversa de la diferenciación? ¿Qué funciones podían integrarse? En el siglo XIX se propusieron muchas definiciones de la integral, y la elaboración de estas ideas llevó al tema conocido actualmente como análisis real.

Mientras las aplicaciones del cálculo han continuado cosechando cada vez más triunfos en un flujo interminable durante los últimos trescientos años, sus fundamentos permanecieron en un estado insatisfactorio durante la primera mitad de este periodo. El origen de la dificultad era el significado que había de asociarse a la dx de Leibniz. ¿Qué era esta cantidad? ¿Cómo podía no ser positiva ni cero? De ser cero, no podía usarse como denominador; de ser positiva, entonces las ecuaciones en que aparecía no eran realmente ecuaciones. Leibniz consideraba que los infinitesimales eran entes verdaderos, que las áreas y los volúmenes podían sintetizarse al “sumar” sus secciones, como habían hecho Zu Chongzhi, Arquímedes y otros. Newton tenía menos confianza acerca de la validez de los métodos infinitesimales, e intentó justificar sus razonamientos en formas que pudiesen cumplir las normas del rigor euclideano. En su *Principia Mathematica* escribió:

> Estos lemas tienen el cometido de evitar el tedio de deducir *ad absurdum* demostraciones implícitas, según el método de los geómetras de la antigüedad. Las demostraciones son más breves según el método de indivisibles, pero debido a que la hipótesis de indivisibles parece ser algo más dura y, en consecuencia, ese método se acepta como menos geométrico, en lugar de ello elijo reducir las demostraciones de las siguientes proposiciones a las sumas y razones primera y última de cantidades que desaparecen; es decir, a los límites de estas sumas y razones... En consecuencia, si en lo sucesivo debo considerar que las cantidades están formadas de partículas, o debo usar pocas líneas curvas por las [rectas] idóneas, no debe interpretarse que estoy queriendo decir cantidades indivisibles, sino cantidades divisibles que desaparecen. . .

. . . En cuanto a estas últimas razones con las que desaparecen las cantidades, no son en verdad las razones de cantidades últimas, sino límites hacia los cuales las razones de cantidades decrecientes sin límite siempre convergen; y a los que tienden de manera más próxima que con cualquier diferencia dada, aunque nunca van más allá, ni en el efecto alcanzado, hasta que las cantidades disminuyen *in infinitum*.

En este pasaje Newton afirma que la falta de rigor implicado en el uso de razonamientos infinitesimales puede compensarse con el uso de límites. Sin embargo, su planteamiento de este concepto en el pasaje citado no es tan claro como uno desearía. Esta falta de claridad condujo al filósofo Berkeley a referirse desdeñosamente a los fluxiones como "fantasmas de cantidades". Sin embargo, los avances alcanzados en física usando cálculo fueron tan sobresalientes que durante más de un siglo nadie se preocupó en proporcionar el rigor al que aludía Newton (¡y los físicos siguen sin preocuparse al respecto!). Una presentación completamente rigurosa y sistemática del cálculo llegó sólo hasta el siglo XIX.

Según la obra de Augustin-Louis Cauchy (1789-1856) y Karl Weierstrass (1815-1896), la percepción era que los infinitesimales eran meramente de naturaleza heurística y que los estudiantes estaban sujetos a un riguroso enfoque "epsilon-delta" de los límites. De manera sorprendente, en el siglo XX Abraham Robinson (1918-1974) demostró que es posible desarrollar un modelo lógicamente consistente de los números reales en el que hay infinitesimales verdaderos, como creía Leibniz. Sin embargo, parece que este nuevo enfoque, denominado "análisis no estándar", no ha sustituido a la presentación tradicional actual del cálculo.

Ejercicios

1. El tipo de espiral considerada por Arquímedes ahora se denomina así en su honor. Una espiral de Arquímedes es el lugar geométrico de un punto que se mueve a velocidad constante a lo largo de un rayo que gira con velocidad angular constante alrededor de un punto fijo. Si la velocidad lineal a lo largo del rayo (la componente *radial* de su velocidad) es v, el punto está a una distancia vt del centro de rotación (suponiendo que es donde empieza) en el instante t. Suponga que la velocidad angular de rotación del rayo es ω (radianes por unidad de tiempo). Dados un círculo de radio R y una velocidad radial de v, ¿cuál debe ser ω para que la espiral llegue al círculo al final de su primera vuelta? *Res*. $\left(\frac{2\pi v}{R}\right)$

El punto tendrá una velocidad circunferencial $r\omega = vt\,\omega$. Según un principio enunciado en la *Mecánica* de Aristóteles, la velocidad real de la partícula está dirigida a lo largo de la diagonal de un paralelogramo (en este caso un rectángulo) cuyos lados son las componentes. Use este principio para mostrar cómo construir la tangente a la espiral (que es la recta que contiene a la diagonal de este rectángulo). Compruebe que los lados de este rectángulo guardan la relación $1 : 2\pi$. Observe la figura 1.

2. La figura 2 ilustra cómo Arquímedes encontró la relación entre los volúmenes de la esfera, el cono y el cilindro. El diámetro AB está duplicado, haciendo $BC = AB$. Cuando esta figura se hace girar alrededor de esta recta, el círculo genera una esfera, el triángulo DBG genera un cono y el rectángulo $DEFG$ genera un cilindro. Demuestre los hechos siguientes:

a) Si B se usa como fulcro, el cilindro tiene como centro de gravedad el centro K del círculo y, en consecuencia, todo puede concentrarse ahí sin cambiar la torsión alrededor de B.

b) Cada sección del cilindro perpendicular a la recta AB, permaneciendo en su posición actual, equilibraría exactamente la misma sección del cono más la sección de la esfera si éstos dos se desplazaran al punto C.

c) Por tanto, el cilindro concentrado en K equilibraría al cono y a la esfera que se concentran en C.

d) En consecuencia, el cilindro es igual al doble de la suma del cono y la esfera.

e) Puesto que se sabe que el cono es un tercio del cilindro, se concluye que la esfera debe ser un sexto de éste.

f) Que el volumen del cilindro es $8\pi r^2$.

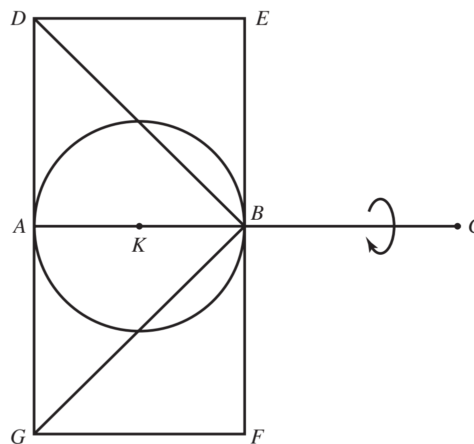


FIGURA 2 Sección de la esfera, el cono y el cilindro de Arquímedes

3. El método con el que Zu Chongzhi y Zu Geng encontraron el volumen de la esfera es el siguiente: imagine que la esfera es una pelota fuertemente adherida dentro de la intersección de dos cilindros que forma ángulos rectos entre sí. Luego, el sólido formado por la intersección de los dos cilindros (denominado *paraguas doble* en chino) y que contiene la pelota se ajusta perfectamente dentro de un cubo cuya arista es igual al diámetro de la esfera.

A partir de esta descripción, trace una sección de la esfera dentro del paraguas doble formado por los ejes de los dos cilindros y a una distancia h debajo de este pleno. Compruebe los hechos siguientes:

a) Si el radio de la esfera es r, el diámetro de su sección circular es $2\sqrt{r^2 - h^2}$.

b) Por tanto, el área del cuadrado formado por esta sección del paraguas doble es $4(r^2 - h^2)$, de modo que el área entre la sección del cubo y la sección del paraguas doble es

$$4r^2 - 4(r^2 - h^2) = 4h^2.$$

c) La sección correspondiente de una pirámide cuya base es la parte inferior de un cubo y cuyo vértice está en el centro de la esfera (o del cubo) también tiene un área de $4h^2$. Por tanto, el volumen entre el paraguas doble y el cubo es exactamente el volumen de esta pirámide más su imagen especular arriba del plano central. Concluya que la región entre el paraguas doble y el cubo es un tercio del cubo.

d) En consecuencia, el paraguas doble ocupa dos tercios del volumen del cubo; es decir, su volumen es $\frac{16}{3}r^3$.

e) Cada sección circular de la esfera está inscrita en la sección cuadrada correspondiente del paraguas doble. Por tanto, la sección circular es $\frac{\pi}{4}$ de la sección del paraguas doble.

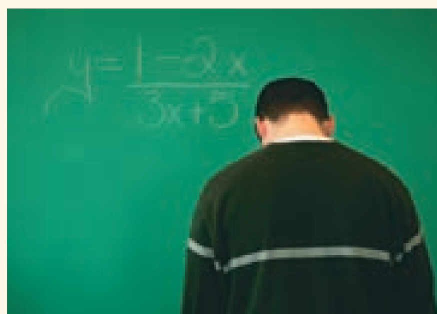
f) En consecuencia, el volumen de la esfera es $\frac{\pi}{4}$ del volumen del paraguas doble; es decir, $\frac{4}{3}\pi r^3$.

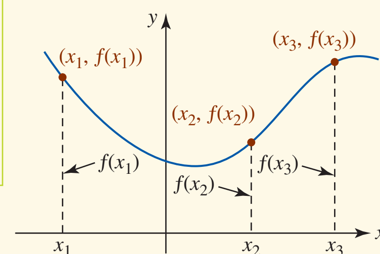
4. Proporcione un razonamiento "infinitesimal" de que el área de la esfera es tres veces su volumen dividido entre su radio, al suponer que la esfera es una colección de pirámides "infinitamente delgadas" donde todos los vértices se encuentren adheridos al origen. [*Sugerencia*: parta del hecho de que el volumen de una pirámide es un tercio del área de su base multiplicada por su altura. Arquímedes afirmaba que éste es el razonamiento que lo condujo al descubrimiento del área de la esfera.]

Capítulo 1

Funciones







En este capítulo ¿Ha escuchado frases como “el éxito está un función del trabajo arduo” y “la demanda está un función del precio”? La palabra *función* se usa a menudo para sugerir una relación o una dependencia de una cantidad con respecto a otra. Como tal vez sepa, en matemáticas el concepto de una función posee una interpretación similar pero ligeramente más especializada.

El cálculo trata, en esencia, sobre funciones. Así, resulta conveniente empezar su estudio con un capítulo dedicado a un repaso de este importante concepto.

1.1 Funciones y gráficas

Introducción Al usar los objetos e interactuar con las personas que nos rodean, resulta fácil establecer una regla de correspondencia que asocie, o apareje, a los miembros o elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto. Por ejemplo, para cada número de seguridad social hay una persona; para cada libro corresponde por lo menos un autor; para cada estado hay un gobernador, etcétera. En matemáticas estamos interesados en un tipo especial de correspondencia: una *correspondencia con valor único* denominada **función**.

Definición 1.1.1 Función

Una **función** de un conjunto X en un conjunto Y es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x en X exactamente un elemento y en Y.

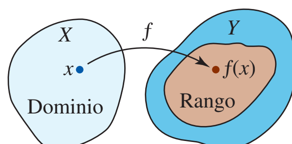


FIGURA 1.1.1 Dominio y rango de una función f

Terminología Una función suele denotarse por una letra como f, g o h. Entonces podemos representar una función f de un conjunto X en un conjunto Y por medio de la notación $f: X \to Y$. El conjunto X se llama **dominio** de f. El conjunto de elementos correspondientes y en el conjunto Y se denomina **rango** de la función. El único elemento y en el rango que corresponde a un elemento x selecto en el dominio X se denomina **valor** de la función en x, o **imagen** de x, y se escribe $f(x)$. Esta expresión se lee "f de x" o "f en x", y se escribe $y = f(x)$. Algunas veces también conviene denotar una función por $y = y(x)$. Observe en la FIGURA 1.1.1 que el rango de f no necesariamente debe ser todo el conjunto Y. A muchos profesores les agrada llamar a un elemento x en el dominio *entrada* de la función, y al elemento correspondiente $f(x)$ en el rango *salida* de la función. Puesto que el valor de y depende de la elección de x, y se denomina **variable dependiente**; x se denomina **variable independiente**. A partir de este momento consideraremos que los conjuntos X y Y constan de números reales; así, la función f se denomina **función con valor real de una sola variable real**.

En todos los análisis y ejercicios de este texto, las funciones se representan de varias formas:

- *analítica*, es decir, por medio de una fórmula como $f(x) = x^2$;
- *verbal*, es decir, mediante una descripción con palabras;
- *numérica*, es decir, mediante una tabla de valores numéricos; y
- *visual*, es decir, con una gráfica.

EJEMPLO 1 Función elevar al cuadrado

La regla para elevar al cuadrado un número real está dada por la ecuación $f(x) = x^2$ o $y = x^2$. Los valores de f en $x = -5$ y $x = \sqrt{7}$ se obtienen al sustituir x, a la vez, por los números -5 y $\sqrt{7}$.

$$f(-5) = (-5)^2 = 25 \quad \text{y} \quad f(\sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 = 7.$$



Correspondencia estudiante/escritorio

EJEMPLO 2 Correspondencia estudiante y escritorio

Una correspondencia natural ocurre entre un conjunto de 20 estudiantes y un conjunto de, por ejemplo, 25 escritorios en un salón de clases cuando cada estudiante escoge y se sienta en un escritorio diferente. Si el conjunto de 20 estudiantes es el conjunto X y el conjunto de 25 escritorios es el conjunto Y, entonces esta correspondencia es una función del conjunto X al conjunto Y, en el supuesto de que ningún estudiante se sienta en dos escritorios al mismo tiempo. El conjunto de 20 escritorios ocupados realmente por los estudiantes constituye el rango de la función.

Algunas veces, para destacar el argumento, escribiremos una función representada por una fórmula usando paréntesis en lugar del símbolo x. Por ejemplo, al escribir la función elevar al cuadrado $f(x) = x^2$ como

$$f(\quad) = (\quad)^2. \tag{1}$$

Entonces, para evaluar (1) en, por ejemplo, $3 + h$, donde h representa un número real, escribimos $3 + h$ entre paréntesis y realizamos las operaciones algebraicas correspondientes:

$$f(3 + h) = (3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2.$$

Consulte la sección *Páginas de recursos*, al final del libro, para tener un repaso del desarrollo del binomio.

Si una función f está definida por medio de una fórmula o ecuación, entonces por lo regular el dominio de $y = f(x)$ no se plantea explícitamente. Por lo general es posible deducir el dominio de $y = f(x)$ ya sea a partir de la estructura de la ecuación o del contexto del problema.

EJEMPLO 3 Dominio y rango

En el ejemplo 1, puesto que cualquier número real x puede elevarse al cuadrado y el resultado x^2 es otro número real, $f(x) = x^2$ es una función de R en R; es decir, f: $R \to R$. En otras palabras, el dominio de f es el conjunto R de números reales. Al usar notación de intervalos, el dominio también puede escribirse como $(-\infty, \infty)$. Debido a que $x^2 \geq 0$ para todo número real x, es fácil ver que el rango de f es el conjunto de números reales no negativos o $[0, \infty)$. ■

Dominio de una función Como ya se mencionó, el dominio de una función $y = f(x)$ que está definido por una fórmula no suele especificarse. A menos que se indique o implique lo contrario, se entiende que

- El **dominio** de una función f es el mayor subconjunto del conjunto de números reales para los que $f(x)$ es un número real.

Este conjunto a veces se refiere como **dominio implícito** o **dominio natural** de la función. Por ejemplo, no es posible calcular $f(0)$ para la **función recíproca** $f(x) = 1/x$ puesto que $1/0$ no es un número real. En este caso se dice que f está **indefinida** en $x = 0$. Puesto que todo número real diferente de cero tiene un recíproco, el dominio de $f(x) = 1/x$ es el conjunto de números reales excepto cero. Por el mismo razonamiento, la función $g(x) = 1/(x^2 - 4)$ no está definida en $x = -2$ ni en $x = 2$, de modo que su dominio es el conjunto de números reales sin los números -2 y 2. La **función raíz cuadrada** $h(x) = \sqrt{x}$ no está definida en $x = -1$ porque $\sqrt{-1}$ no es un número real. Para que $h(x) = \sqrt{x}$ esté definida en el sistema de números reales, debe pedirse que el **radicando**, en este caso simplemente x, sea no negativo. A partir de la desigualdad $x \geq 0$ observamos que el dominio de la función h es el intervalo $[0, \infty)$. El dominio de la **función constante** $f(x) = -1$ es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$ y su rango es el conjunto que consta sólo del número -1.

EJEMPLO 4 Dominio y rango

Determine el dominio y el rango de $f(x) = 4 + \sqrt{x - 3}$.

Solución El radicando $x - 3$ debe ser no negativo. Al resolver la desigualdad $x - 3 \geq 0$ se obtiene $x \geq 3$, de modo que el dominio de f es $[3, \infty)$. Luego, como el símbolo $\sqrt{\ }$ denota la raíz cuadrada no negativa de un número, $\sqrt{x - 3} \geq 0$ para $x \geq 3$ y en consecuencia $4 + \sqrt{x - 3} \geq 4$. El menor valor de $f(x)$ ocurre en $x = 3$ y es $f(3) = 4 + \sqrt{0} = 4$. Además, debido a que $x - 3$ y $\sqrt{x - 3}$ aumentan cuando x crece, se concluye que $y \geq 4$. Por consiguiente, el rango de f es $[4, \infty)$. ■

EJEMPLO 5 Dominios de dos funciones

Determine el dominio de

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$ ***b***) $g(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 3x - 4}$.

Solución

a) Como en el ejemplo 4, la expresión dentro del radical —el radicando— debe ser no negativa; es decir, el dominio de f es el conjunto de números reales x para los cuales $x^2 + 2x - 15 \geq 0$ o $(x - 3)(x + 5) \geq 0$. El conjunto solución de la desigualdad $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$ es también el dominio de f.

En precálculo se suelen resolver desigualdades cuadráticas como $(x - 3)(x + 5) \geq 0$ utilizando una tabla de signos.

b) Una función que está dada por una expresión fraccionaria no está definida en los valores x para los cuales el denominador es igual a 0. Puesto que el denominador de $g(x)$ se factoriza como $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$, vemos que $(x + 1)(x - 4) = 0$ para $x = -1$ y $x = 4$. Éstos son los *únicos* números para los cuales g no está definida. Por tanto, el dominio de la función g es el conjunto de números reales, a excepción de $x = -1$ y $x = 4$. ■

Al usar notación de intervalos, el dominio de g en el inciso *b*) del ejemplo 5 puede escribirse como $(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, \infty)$. Como alternativa para esta desgarbada unión de intervalos ajenos, este dominio también puede escribirse usando notación de construcción de conjuntos $\{x \mid x \neq -1 \text{ y } x \neq 4\}$.

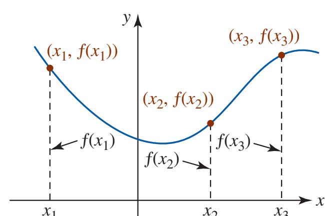


FIGURA 1.1.2 Puntos sobre la gráfica de una ecuación $y = f(x)$

Gráficas En campos como ciencia, ingeniería y negocios, a menudo se usa una función para describir los fenómenos. A fin de interpretar y utilizar datos, es útil representar estos datos en forma de gráfica. En el **sistema de coordenadas cartesianas** o **rectangulares**, la gráfica de una función f es la gráfica del conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$, donde x está en el dominio de f. En el plano xy, un par ordenado $(x, f(x))$ es un punto, de modo que la gráfica de una función es un conjunto de puntos. Si una función se define por medio de una ecuación $y = f(x)$, entonces la gráfica de f es la gráfica de la ecuación. Para obtener los puntos sobre la gráfica de una ecuación $y = f(x)$, escogemos prudentemente números $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en su dominio, calculamos $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$, trazamos los puntos correspondientes $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)), \ldots$, y luego unimos estos puntos con una curva suave (en caso de ser posible). Vea la FIGURA 1.1.2. No olvide que

- un valor de x es una distancia dirigida desde el eje y, y
- un valor funcional $f(x)$ es una distancia dirigida desde el eje x.

A continuación se hacen algunos comentarios sobre las figuras en este texto. Con pocas excepciones, suele ser imposible representar la gráfica completa de una función, por lo que a menudo sólo se muestran las características más importantes de la gráfica. En la FIGURA 1.1.3*a*) observe que la gráfica se dirige hacia abajo en sus lados izquierdo y derecho. A menos que se indique lo contrario, puede asumirse que no hay sorpresas mayores más allá de lo que se ha mostrado y que la gráfica continúa simplemente de la manera indicada. La gráfica en la figura 1.1.3*a*) indica el denominado **comportamiento extremo** o **comportamiento global** de la función. Si una gráfica termina ya sea en su extremo derecho o izquierdo, este hecho se indica por medio de un punto cuando es necesario. Para representar el hecho de que el punto extremo está incluido en la gráfica se usa un punto sólido, y para indicar que el punto extremo no está incluido en la gráfica se usa un punto vacío.

Prueba de la recta vertical A partir de la definición de una función se sabe que para toda x en el dominio de f corresponde un solo valor $f(x)$ en el rango. Esto significa que una recta vertical que corta la gráfica de una función $y = f(x)$ (esto equivale a escoger una x) puede cortar a la gráfica de una función en cuanto mucho un punto. A la inversa, si *toda* recta vertical que corte la gráfica de una ecuación lo hace en cuanto mucho un punto, entonces la gráfica es la gráfica de una función. La última declaración se denomina **prueba de la recta vertical** para una función. Por otra parte, si *alguna* recta vertical corta la gráfica de una ecuación más de una vez, entonces la gráfica no es la gráfica de una función. Vea las figuras 1.1.3*a*)-*c*). Cuando una recta vertical corta una gráfica en varios puntos, el mismo número x corresponde a diferentes valores de y, en contradicción con la definición de función.

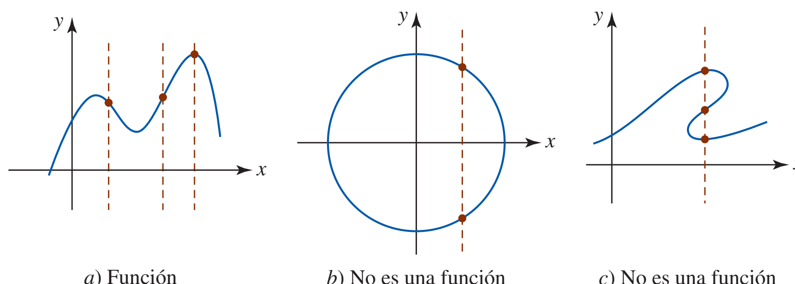


FIGURA 1.1.3 Prueba de la recta vertical

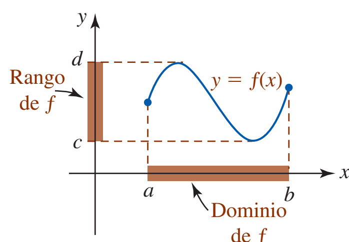


FIGURA 1.1.4 Dominio y rango interpretados gráficamente

Si se cuenta con una gráfica exacta de una función $y = f(x)$, a menudo es posible *ver* el dominio y el rango de f. En la FIGURA 1.1.4 suponga que la curva azul es la gráfica entera, o completa, de alguna función f. Así, el dominio de f es el intervalo $[a, b]$ sobre el eje x, y el rango es el intervalo $[c, d]$ sobre el eje y.

EJEMPLO 6 Otra perspectiva del ejemplo 4

A partir de la gráfica de $f(x) = 4 + \sqrt{x - 3}$ dada en la FIGURA 1.1.5, podemos ver que el dominio y el rango de f son, respectivamente, $[3, \infty)$ y $[4, \infty)$. Esto concuerda con los resultados del ejemplo 4. ■

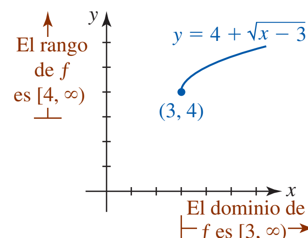
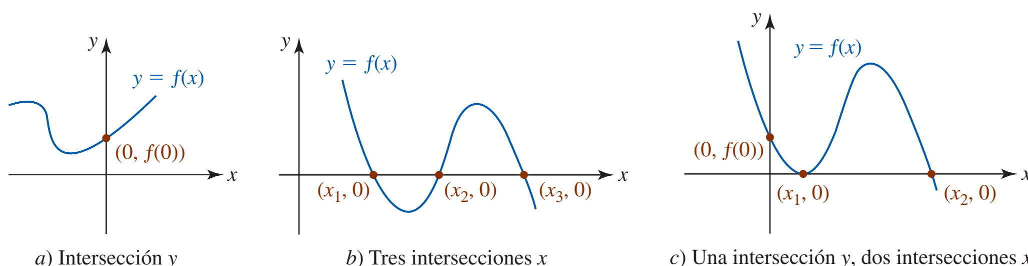


FIGURA 1.1.5 Gráfica de la función f en el ejemplo 6

Intersecciones Para graficar una función definida por una ecuación $y = f(x)$, una buena idea suele ser determinar primero si la gráfica de f tiene intersecciones. Recuerde que todos los puntos sobre el eje y son de la forma $(0, y)$. Entonces, si 0 es el dominio de una función f, la **intersección *y*** es el punto sobre el eje y cuya coordenada y es $f(0)$; en otras palabras, $(0, f(0))$. Vea la FIGURA 1.1.6*a*). De manera semejante, todos los puntos sobre el eje x tienen la forma $(x, 0)$. Esto significa que para encontrar las **intersecciones *x*** de la gráfica de $y = f(x)$, se determinan los valores de x que hacen $y = 0$. Es decir, es necesario resolver la ecuación $f(x) = 0$ para x. Un número c para el que $f(c) = 0$ se denomina **cero** de la función f o **raíz** (o **solución**) de la ecuación $f(x) = 0$. Los ceros *reales* de una función f son las coordenadas x de las intersecciones x de la gráfica de f. En la figura 1.1.6*b*) se ha ilustrado una función que tiene tres ceros x_1, x_2 y x_3 porque $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$ y $f(x_3) = 0$. Las tres intersecciones x correspondientes son los puntos $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ y $(x_3, 0)$. Por supuesto, la gráfica de la función puede no tener intersecciones. Este hecho se ilustra en la figura 1.1.5.



a) Intersección *y* *b*) Tres intersecciones *x* *c*) Una intersección *y*, dos intersecciones *x*

FIGURA 1.1.6 Intersecciones de la gráfica de una función f

Una gráfica no necesariamente tiene que *cruzar* un eje de coordenadas en una intersección; una gráfica puede simplemente tocar, o ser *tangente*, a un eje. En la figura 1.1.6*c*), la gráfica de $y = f(x)$ es tangente al eje x en $(x_1, 0)$.

EJEMPLO 7 Intersecciones

Encuentre, de ser posible, las intersecciones x y y de la función dada.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$ ***b***) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x}$

Solución

a) Puesto que 0 está en el dominio de f, $f(0) = -2$ y así la intersección y es el punto $(0, -2)$. Para obtener las intersecciones x, es necesario determinar si f tiene ceros reales, es decir, soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$. Puesto que el miembro izquierdo de la ecuación $x^2 + 2x - 2 = 0$ no tiene factores evidentes, se usa la fórmula general para polinomios cuadráticos para obtener $x = -1 \pm \sqrt{3}$. Las intersecciones x son los puntos $(-1 - \sqrt{3}, 0)$ y $(-1 + \sqrt{3}, 0)$.

b) Debido a que 0 no está en el dominio de f, la gráfica de f no posee intersección y. Ahora, puesto que f es una expresión fraccionaria, la única forma en que es posible que $f(x) = 0$ es que el numerador sea igual a cero y el denominador sea diferente de cero al evaluar la función en el mismo número. Al factorizar el miembro izquierdo de $x^2 - 2x - 3 = 0$ se obtiene $(x + 1)(x - 3) = 0$. En consecuencia, los ceros de f son los números -1 y 3. Las intersecciones x son los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$. ■

Funciones definidas por partes Una función f puede implicar dos o más expresiones o fórmulas, cada una definida en partes distintas sobre el dominio de f. Una función definida de esta manera se denomina **función definida por partes**. Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

no son dos funciones, sino una sola función donde la regla de correspondencia está dada en dos partes. En este caso, una parte se usa para los números reales negativos ($x < 0$) y la otra parte para los números reales no negativos ($x \geq 0$); el dominio de f es la unión de los intervalos $(-\infty, 0) \cup [0, \infty) = (-\infty, \infty)$. Por ejemplo, puesto que $-4 < 0$, la regla indica que se eleve al cuadrado el número: $f(-4) = (-4)^2 = 16$; por otra parte, puesto que $6 \geq 0$ se suma 1 al número: $f(6) = 6 + 1 = 7$.

EJEMPLO 8 Gráfica de una función definida por partes

Considere la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

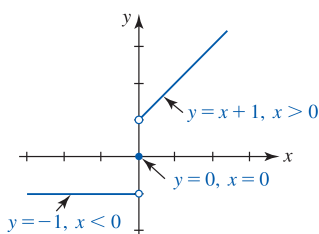


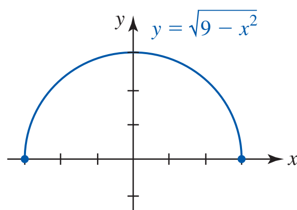
FIGURA 1.1.7 Gráfica de una función definida por partes en el ejemplo 8

Aunque el dominio de f consta de todos los números reales $(-\infty, \infty)$, cada parte de la función está definida sobre una parte diferente de su dominio. Se grafican

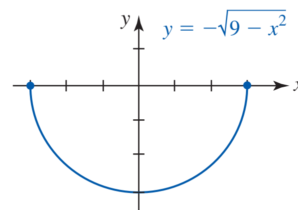
- la recta horizontal $y = -1$ para $x < 0$,
- el punto $(0, 0)$ para $x = 0$ y
- la recta $y = x + 1$ para $x > 0$.

La gráfica se proporciona en la FIGURA 1.1.7. ■

Semicírculos Como se muestra en la figura 1.1.3*b*), un círculo no es la gráfica de una función. En realidad, una ecuación como $x^2 + y^2 = 9$ define (por lo menos) dos funciones de x. Si esta ecuación se resuelve para y en términos de x, se obtiene $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Debido a la convención del valor único del signo $\sqrt{\ }$, ambas ecuaciones $y = \sqrt{9 - x^2}$ y $y = -\sqrt{9 - x^2}$ definen funciones. La primera ecuación define un **semicírculo superior**, y la segunda un **semicírculo inferior**. Con base en las gráficas mostradas en la FIGURA 1.1.8, el dominio de $y = \sqrt{9 - x^2}$ es $[-3, 3]$ y el rango es $[0, 3]$; el dominio y el rango de $y = -\sqrt{9 - x^2}$ son $[-3, 3]$ y $[-3, 0]$, respectivamente.



a) Semicírculo superior



b) Semicírculo inferior

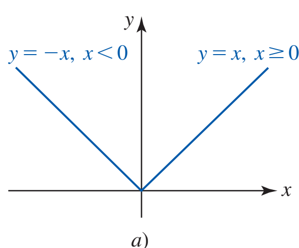
FIGURA 1.1.8 Estos semicírculos son gráficas de funciones

Función valor absoluto La función $f(x) = |x|$, denominada **función valor absoluto**, aparece a menudo en el análisis de capítulos ulteriores. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$ y su rango es $[0, \infty)$. En otras palabras, para cualquier número real x, los valores de la función $f(x)$ son no negativos. Por ejemplo,

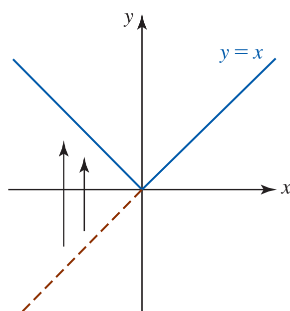
$$f(3) = |3| = 3, \quad f(0) = |0| = 0, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left|-\frac{1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Por definición del valor absoluto de x, observamos que f es una función definida por partes o pedazos, que consta de dos partes

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$



a)



b)

FIGURA 1.1.9 Función valor absoluto (3)

Su gráfica, mostrada en la FIGURA 1.1.9*a*), consta de dos semirrectas perpendiculares. Puesto que $f(x) \geq 0$ para toda x, otra forma de graficar (3) consiste en simplemente trazar la recta $y = x$ y luego reflejar en el eje x esa porción de la recta que está abajo del eje x. Vea la figura 1.1.9*b*).

Función entero mayor A continuación se considerará una función f definida por partes denominada **función entero mayor**. Esta función, que tiene muchas notaciones, se denotará aquí por $f(x) = \lfloor x \rfloor$ y está definida por la regla

La función entero mayor también se escribe como $f(x) = [\![x]\!]$.

$$\lfloor x \rfloor = n, \quad \text{donde } n \text{ es un entero que satisface } n \leq x < n + 1. \tag{4}$$

La expresión (4), traducida a lenguaje coloquial, significa lo siguiente:

- El valor funcional $f(x)$ es el entero mayor n que es menor o igual a x.

Por ejemplo,

$$f(-1.5) = -2,\ f(0.4) = 0,\ f(\pi) = 3,\ f(5) = 5,$$

y así en lo sucesivo. El dominio de f es el conjunto de números reales y consta de la unión de una infinidad de intervalos ajenos; en otras palabras, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ es una función definida por partes dada por

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \begin{cases} \quad\vdots \\ -2, & -2 \leq x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ \ \ 0, & \ \ 0 \leq x < 1 \\ \ \ 1, & \ \ 1 \leq x < 2 \\ \ \ 2, & \ \ 2 \leq x < 3 \\ \quad\vdots \end{cases} \tag{5}$$

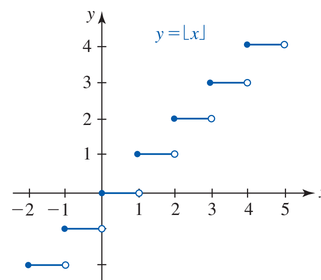


FIGURA 1.1.10 Función mayor entero

El rango de f es el conjunto de enteros. La porción de la gráfica de f sobre el intervalo cerrado $[-2, 5]$ se proporciona en la FIGURA 1.1.10.

En informática la función entero mayor se conoce como **función redondeo hacia el entero inferior anterior**. Una función relacionada denominada **función redondeo hacia el entero superior siguiente*** $g(x) = \lceil x \rceil$ se define como el menor entero n que es mayor o igual a x. Vea los problemas 57 a 59 en los ejercicios 1.1.

Un modelo matemático A menudo resulta aconsejable describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno de la vida real, ya sea físico, sociológico e incluso económico, en términos matemáticos. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se denomina **modelo matemático** y puede ser tan complicada como cientos de ecuaciones simultáneas o tan sencilla como una sola función. Esta sección concluye con una ilustración del mundo real de una función definida por partes denominada *función timbre postal*. Esta función es semejante a $f(x) = \lfloor x \rfloor$ en el sentido de que ambos son ejemplos de *funciones escalón*; cada función es constante sobre un intervalo y luego salta a otro valor constante al siguiente intervalo colindante.

Al momento de escribir esto, la tarifa de primera clase del Servicio Postal de Estados Unidos de América para el porte de una carta en un sobre de tamaño normal dependía de su peso en onzas:

$$\text{Porte} = \begin{cases} \$0.42, & 0 < \text{peso} \leq 1 \text{ onza} \\ \$0.59, & 1 < \text{peso} \leq 2 \text{ onzas} \\ \$0.76, & 2 < \text{peso} \leq 3 \text{ onzas} \\ \quad\vdots \\ \$2.87, & 12 < \text{peso} \leq 13 \text{ onzas.} \end{cases} \tag{6}$$

La regla en (6) es una función de P que consta de 14 partes (las cartas que pesan más de 13 onzas se envían como correo prioritario). Un valor de la función $P(w)$ es una de 14 constantes; la constante cambia dependiendo del peso w (en onzas) de la carta.† Por ejemplo,

$$P(0.5) = \$0.42,\ P(1.7) = \$0.59,\ P(2.2) = \$0.76,\ P(2.9) = \$0.76 \text{ y } P(12.1) = \$2.87.$$

El dominio de la función P es la unión de los intervalos:

$$(0, 1] \cup (1, 2] \cup (2, 3] \cup \cdots \cup (12, 13] = (0, 13].$$

---

* Las funciones redondeo hacia el entero inferior anterior y redondeo hacia el entero superior siguiente y sus notaciones se deben al renombrado científico canadiense Kenneth E. Iverson (1920-2004).

† En (6) no se muestra que el porte de una carta cuyo peso se encuentra en el intervalo (3, 4] es determinado por si su peso está en (3, 3.5] o en (3.5, 4]. Éste es el único intervalo dividido de esta manera.

$f(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

Cuando se traza la gráfica de una función, nunca se debe acudir a graficar muchos puntos manualmente. Esto es algo que una calculadora gráfica o un sistema de álgebra computacional (SAC) hacen bien. Por otra parte, usted no debe volverse dependiente de una calculadora para obtener una gráfica. Lo crea o no, hay muchos profesores de cálculo que no permiten el uso de calculadoras gráficas al aplicar cuestionarios o exámenes. Por lo general, no hay objeción para que usted use calculadoras o computadoras como ayuda para comprobar algunos problemas de tarea, pero en el salón de clases los maestros desean ver el producto de su propio esfuerzo, es decir, su capacidad de analizar. Así, está usted fuertemente motivado a desarrollar sus habilidades para graficar hasta el punto en que pueda trazar a mano rápidamente la gráfica de una función a partir de alguna propiedad conocida de tipos de funciones y trazar un mínimo de puntos bien escogidos.

Ejercicios 1.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-2.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre los valores funcionales indicados.

1. Si $f(x) = x^2 - 1$; $f(-5), f(-\sqrt{3}), f(3)$ y $f(6)$

2. Si $f(x) = -2x^2 + x$; $f(-5), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(2)$ y $f(7)$

3. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$; $f(-1), f(0), f(3)$ y $f(5)$

4. Si $f(x) = \sqrt{2x+4}$; $f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{5}{2}\right)$ y $f(4)$

5. Si $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$; $f(-1), f(0), f(1)$ y $f(\sqrt{2})$

6. Si $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-2}$; $f(-\sqrt{2}), f(-1), f(0)$ y $f\left(\frac{1}{2}\right)$

En los problemas 7 y 8, encuentre

$$f(x), f(2a), f(a^2), f(-5x), f(2a+1), f(x+h)$$

para la función dada f y simplifique lo más que pueda.

7. $f(\ \ ) = -2(\ \ )^2 + 3(\ \ )$

8. $f(\ \ ) = (\ \ )^3 - 2(\ \ )^2 + 20$

9. ¿Para qué valores de x $f(x) = 6x^2 - 1$ es igual a 23?

10. ¿Para qué valores de x $f(x) = \sqrt{x-4}$ es igual a 4?

En los problemas 11-26, encuentre el dominio de la función f dada.

11. $f(x) = \sqrt{4x-2}$

12. $f(x) = \sqrt{15-5x}$

13. $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{1-x}}$

14. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x-1}}$

15. $f(x) = \dfrac{2x-5}{x(x-3)}$

16. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-10x+25}$

18. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4x-12}$

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x+1}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-1}$

21. $f(x) = \sqrt{25-x^2}$

22. $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$

23. $f(x) = \sqrt{x^2-5x}$

24. $f(x) = \sqrt{x^2-3x-10}$

25. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}$

26. $f(x) = \sqrt{\dfrac{5-x}{x}}$

En los problemas 27-30, determine si la gráfica en la figura es la gráfica de una función.

27.

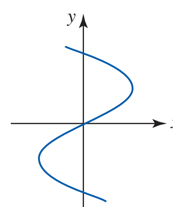


FIGURA 1.1.11 Gráfica para el problema 27

28.

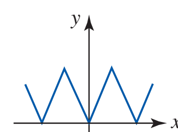


FIGURA 1.1.12 Gráfica para el problema 28

29.

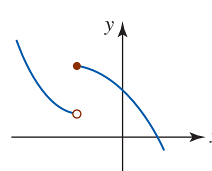


FIGURA 1.1.13 Gráfica para el problema 29

30.

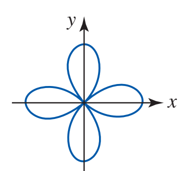


FIGURA 1.1.14 Gráfica para el problema 30

En los problemas 31-34, use el rango de la función f dada en la figura para encontrar su dominio y rango.

31.

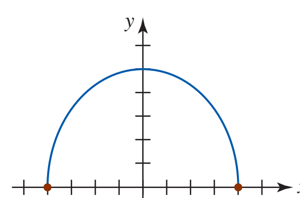


FIGURA 1.1.15 Gráfica para el problema 31

32.

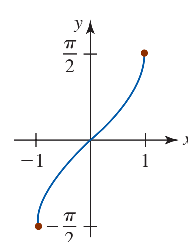


FIGURA 1.1.16 Gráfica para el problema 32

33.

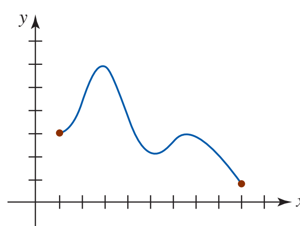


FIGURA 1.1.17 Gráfica para el problema 33

34.

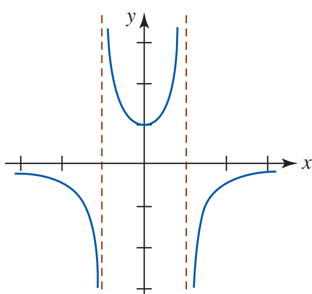


FIGURA 1.1.18 Gráfica para el problema 34

En los problemas 35-44, encuentre las intersecciones *x* y *y* de la gráfica de la función dada *f*, en caso de haberlas. No grafique.

35. $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$ **36.** $f(x) = x^2 - 6x + 5$

37. $f(x) = 4(x - 2)^2 - 1$

38. $f(x) = (2x - 3)(x^2 + 8x + 16)$

39. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ **40.** $f(x) = x^4 - 1$

41. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 16}$ **42.** $f(x) = \dfrac{x(x + 1)(x - 6)}{x + 8}$

43. $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$ **44.** $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2x - 3}$

En los problemas 45 y 46, use la gráfica de la función *f* dada en la figura para estimar los valores $f(-3), f(-2), f(-1), f(1), f(2)$ y $f(3)$. Calcule la intersección *y*.

45.

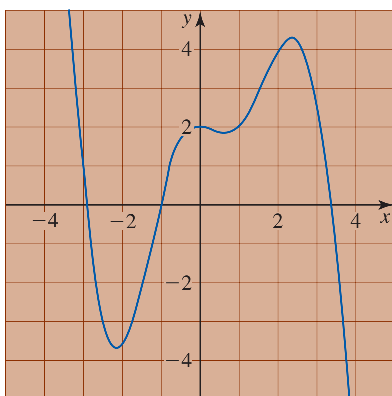


FIGURA 1.1.19 Gráfica para el problema 45

46.

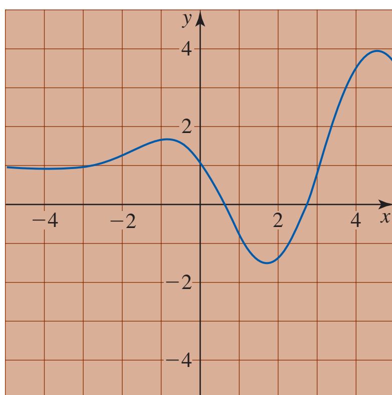


FIGURA 1.1.20 Gráfica para el problema 46

En los problemas 47 y 48, use la gráfica de la función *f* dada en la figura para estimar los valores $f(-2), f(-1.5), f(0.5), f(1), f(2)$ y $f(3.2)$. Calcule las intersecciones *x*.

47.

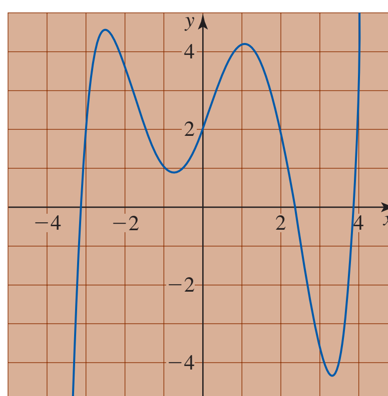


FIGURA 1.1.21 Gráfica para el problema 47

48.

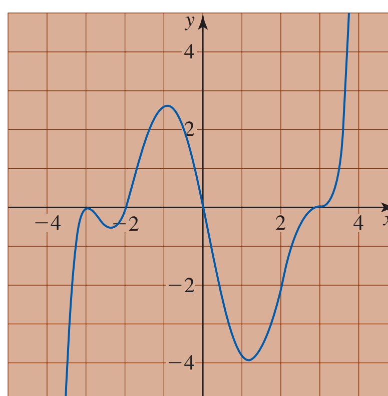


FIGURA 1.1.22 Gráfica para el problema 48

En los problemas 49 y 50, encuentre dos funciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ definidas por la ecuación dada. Encuentre el dominio de las funciones f_1 y f_2.

49. $x = y^2 - 5$ **50.** $x^2 - 4y^2 = 16$

51. Algunas de las funciones que encontrará después en este texto tienen como dominio el conjunto de enteros positivos *n*. La **función factorial** $f(n) = n!$ se define como el producto de los *n* primeros enteros positivos; es decir,

$$f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n.$$

a) Evalúe $f(2), f(3), f(5)$ y $f(7)$.
b) Demuestre que $f(n + 1) = f(n) \cdot (n + 1)$.
c) Simplifique $f(5)/f(4)$ y $f(7)/f(5)$.
d) Simplifique $f(n + 3)/f(n)$.

52. Otra función de un entero positivo *n* proporciona la suma de los *n* primeros enteros positivos al cuadrado:

$$S(n) = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1).$$

a) Encuentre el valor de la suma $1^2 + 2^2 + \cdots + 99^2 + 100^2$.
b) Encuentre *n* tal que $300 < S(n) < 400$. [*Sugerencia*: Use calculadora.]

≡ Piense en ello

53. Determine una ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo dominio es
a) $[3, \infty)$ ***b)*** $(3, \infty)$.

54. Determine una ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo rango es
a) $[3, \infty)$ ***b)*** $(3, \infty)$.

55. Con base en la gráfica de $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ dada en la FIGURA 1.1.23, determine el rango y dominio de la función $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Explique su razonamiento en una o dos frases.

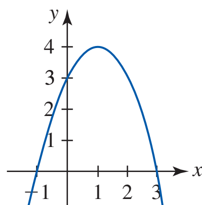


FIGURA 1.1.23 Gráfica para el problema 55

56. Sea P cualquier punto $(x, f(x))$ sobre la gráfica de una función f. Suponga que los segmentos de recta PT y PS son perpendiculares a los ejes x y y. Sean M_1, M_2 y M_3, respectivamente, los puntos medios de PT, PS y ST como se muestra en la FIGURA 1.1.24. Encuentre una función que describa la ruta de los puntos M_1. Repita lo anterior para los puntos M_2 y M_3.

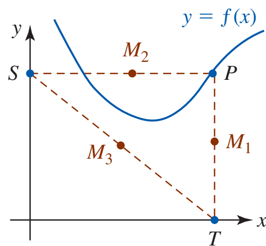


FIGURA 1.1.24 Gráfica para el problema 56

57. En la página 7 se vio que la **función redondeo hacia el entero superior siguiente** $g(x) = \lceil x \rceil$ se define como el menor entero n que es mayor o igual a x. Llene los espacios en blanco.

$$g(x) = \lceil x \rceil = \begin{cases} \vdots & \\ ______, & -3 < x \le -2 \\ ______, & -2 < x \le -1 \\ ______, & -1 < x \le 0 \\ ______, & 0 < x \le 1 \\ ______, & 1 < x \le 2 \\ ______, & 2 < x \le 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

58. Grafique la función redondeo hacia el entero superior siguiente $g(x) = \lceil x \rceil$ definida en el problema 57.

59. La función definida por partes

$$\text{int}(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \ge 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0 \end{cases}$$

se denomina **función entero**. Grafique int(x).

60. Analice cómo graficar la función $f(x) = |x| + |x - 3|$. Lleve a cabo sus ideas.

En los problemas 61 y 62, describa con palabras cómo difieren las gráficas de las funciones dadas.

61. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$,

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \ne 3 \\ 4, & x = 3 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \ne 3 \\ 6, & x = 3 \end{cases}$$

62. $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$,

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, & x \ne 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \ne 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

1.2 Combinación de funciones

Introducción Dos funciones f y g pueden combinarse en varias formas para obtener nuevas funciones. En esta sección se analizarán dos formas en que es posible combinar funciones: mediante operaciones aritméticas y a través de la operación de composición de funciones.

Funciones potencia Una función de la forma

$$f(x) = x^n \tag{1}$$

se denomina **función potencia**. En esta sección consideraremos que n es un número racional. El dominio de la función potencia depende de la potencia n. Por ejemplo, para $n = 2$, $n = \frac{1}{2}$ y $n = -1$, respectivamente,

- el dominio de $f(x) = x^2$ es el conjunto R de números reales o $(-\infty, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ es el conjunto R de números reales excepto $x = 0$.

Las funciones potencia simples, o versiones modificadas de estas funciones, ocurren tan a menudo en problemas en cálculo que no es conveniente desperdiciar tiempo valioso trazando sus gráficas. Se sugiere conocer (memorizar) el breve catálogo de gráficas de funciones potencia que se proporciona en la FIGURA 1.2.1. Usted debe reconocer la gráfica en el inciso *a*) de la figura 1.2.1 como una **recta** y la gráfica en el inciso *b*) como una **parábola**.

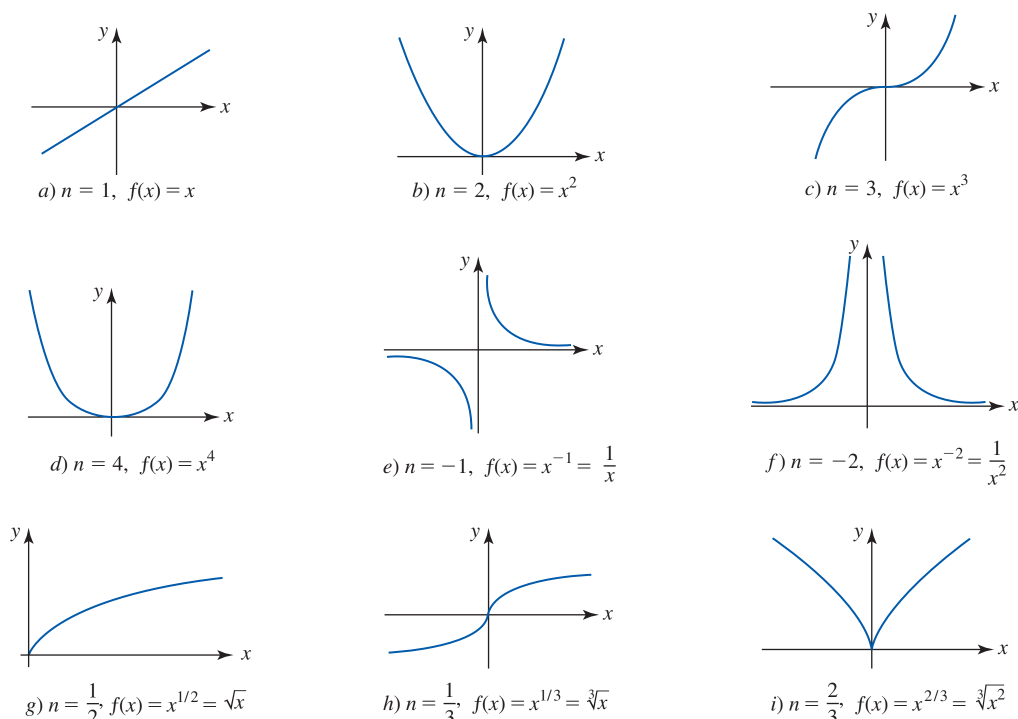


FIGURA 1.2.1 Breve catálogo de gráficas de funciones potencia

Combinaciones aritméticas Dos funciones pueden combinarse por medio de las cuatro conocidas operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división.

Definición 1.2.1 Combinaciones aritméticas

Si f y g son dos funciones, entonces la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg y el **cociente** f/g se definen como sigue:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \tag{2}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \tag{3}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \tag{4}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ da } g(x) \neq 0. \tag{5}$$

Dominio de una combinación aritmética Al combinar dos funciones aritméticamente es necesario que ambas f y g estén definidas en el mismo número x. Por tanto, el **dominio** de las funciones $f + g, f - g$ y fg es el conjunto de números reales que son *comunes* a ambos dominios; es decir, el dominio es la *intersección* del dominio de f con el dominio de g. En el caso del cociente f/g, el dominio también es la intersección de los dos dominios, *pero* también es necesario excluir cualquier valor de x para el que el denominador $g(x)$ sea cero. En otras palabras, si el dominio de f es el conjunto X_1 y el dominio de g es el conjunto X_2, entonces el dominio de $f + g, f - g$ y fg es $X_1 \cap X_2$, y el dominio de f/g es $\{x | x \in X_1 \cap X_2,\ g(x) \neq 0\}$.

EJEMPLO 1 Suma de dos funciones potencia

Ya se ha visto que el dominio de $f(x) = x^2$ es el conjunto R de números reales, o $(-\infty, \infty)$, y el dominio de $g(x) = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$. En consecuencia, el dominio de la suma

$$f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x}$$

es la intersección de los dos dominios: $(-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$. ■

Funciones polinomiales Muchas de las funciones con las que se trabaja en cálculo se construyen al realizar operaciones aritméticas sobre funciones potencia. De especial interés son las funciones potencia (1) donde n es un entero no negativo. Para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, la función $f(x) = x^n$ se denomina **función polinomial de un solo término**. Al usar las operaciones aritméticas de suma, resta y multiplicación es posible construir funciones polinomiales con muchos términos. Por ejemplo, si $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x$ y $f_4(x) = 1$, entonces

$$f_1(x) - f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) = x^3 - x^2 + x + 1.$$

En general, una **función polinomial** $y = f(x)$ es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad (6)$$

donde n es un entero no negativo y los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son números reales. El **dominio** de cualquier función polinomial f es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$. Las siguientes funciones *no son* polinomiales:

$$y = 5x^2 - 3\underset{\text{no es un entero no negativo}}{x^{-1}} \quad \text{y} \quad y = 2\underset{\text{no es un entero no negativo}}{x^{1/2}} - 4.$$

EJEMPLO 2 Suma, diferencias, producto y cociente

Considere las funciones polinomiales $f(x) = x^2 + 4x$ y $g(x) = x^2 - 9$.

a) Con base en los numerales (2)-(4) de la definición 1.2.1 es posible producir tres nuevas funciones polinomiales:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + 4x) + (x^2 - 9) = 2x^2 + 4x - 9,$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 4x) - (x^2 - 9) = 4x + 9,$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^2 + 4x)(x^2 - 9) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 36x.$$

b) Finalmente, con base en el numeral (5) de la definición 1.2.1,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 9}.$$ ■

Observe en el ejemplo 2, puesto que $g(-3) = 0$ y $g(3) = 0$, que el dominio del cociente $(f/g)(x)$ es $(-\infty, \infty)$ con $x = 3$ y $x = -3$ excluidos; en otras palabras, el dominio de $(f/g)(x)$ es la unión de tres intervalos: $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$.

Funciones racionales La función en el inciso *b*) del ejemplo 2 es un caso de funciones racionales. En general, una **función racional** $y = f(x)$ es una función de la forma

Las funciones polinomiales y racionales se analizarán con más detalle en la sección 1.3.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \qquad (7)$$

donde p y q son funciones polinomiales. Por ejemplo, las funciones

$$y = \frac{x}{x^2 + 5}, \quad y = \frac{\overbrace{x^3 - x + 7}^{\text{polinomio}}}{\underbrace{x + 3}_{\text{polinomio}}}, \quad y = \frac{1}{x},$$

son funciones racionales. La función

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1} \quad \leftarrow \text{no es un polinomio}$$

no es una función racional.

Composición de funciones Otro método para combinar las funciones f y g se denomina **composición de funciones**. Para ilustrar la idea, se supondrá que para una x dada en el dominio de g el valor funcional $g(x)$ es un número en el dominio de la función f. Esto significa que es posible evaluar f en $g(x)$; en otras palabras, $f(g(x))$. Por ejemplo, suponga $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$. Entonces, para $x = 1$, $g(1) = 3$, y como 3 es el dominio de f, es posible escribir $f(g(1)) = f(3) = 3^2 = 9$. En efecto, para estas dos funciones particulares resulta que es posible evaluar f en cualquier valor funcional $g(x)$; es decir,

$$f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2.$$

A continuación se define la función resultante, denominada **composición de f y g**.

Definición 1.2.2 Composición de funciones

Si f y g son dos funciones, la **composición de f y g**, denotada por $f \circ g$, es la función definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)). \tag{8}$$

La **composición de g y f**, denotada por $g \circ f$, es la función definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)). \tag{9}$$

EJEMPLO 3 Dos composiciones

Si $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = 2x^2 + 1$, encuentre

a) $(f \circ g)(x)$ y ***b***) $(g \circ f)(x)$.

Solución

a) Para hacer énfasis se sustituye x por el conjunto de paréntesis ( ) y f se escribe en la forma $f(x) = (\ )^2 + 3(\ )$. Entonces, para evaluar $(f \circ g)(x)$, cada conjunto de paréntesis se llena con $g(x)$. Se encuentra

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f(g(x)) &= f(2x^2 + 1)\\ &= (2x^2 + 1)^2 + 3(2x^2 + 1)\\ &= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 1\\ &= 4x^4 + 10x^2 + 4.\end{aligned}$$

b) En este caso, g se escribe en la forma $g(x) = 2(\ )^2 + 1$. Así,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) &= g(x^2 + 3x)\\ &= 2(x^2 + 3x)^2 + 1\\ &= 2(x^4 + 6x^3 + 9x^2) + 1\\ &= 2x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 1.\end{aligned}$$

■

Los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 3 ilustran que la composición de funciones no es conmutativa. Es decir, en general

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

EJEMPLO 4 Escritura de una función como una composición

Exprese $F(x) = \sqrt{6x^3 + 8}$ como la composición de dos funciones f y g.

Solución Si f y g se definen como $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 6x^3 + 8$, entonces

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(6x^3 + 8) = \sqrt{6x^3 + 8}.$$

■

Hay otras dos soluciones para el ejemplo 4. Por ejemplo, si las funciones f y g se definen por $f(x) = \sqrt{6x + 8}$ y $g(x) = x^3$, observe entonces que $(f \circ g)(x) = f(x^3) = \sqrt{6x^3 + 8}$.

Dominio de una composición Para evaluar la composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ el número $g(x)$ debe estar en el dominio de f. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$ y el dominio de $g(x) = x - 2$ es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$. Observe que no es posible evaluar $f(g(1))$ porque $g(1) = -1$ y -1 no está en el dominio de f. Para poder sustituir $g(x)$ en $f(x)$, $g(x)$ debe satisfacer la desigualdad que define al dominio de f, a saber: $g(x) \geq 0$. Esta última desigualdad es la misma que $x - 2 \geq 0$ o $x \geq 2$. El dominio de la composición $f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x - 2}$ es $[2, \infty)$, que sólo es una porción del dominio original $(-\infty, \infty)$ de g. En general, el **dominio de la composición** $f \circ g$ es el conjunto de números x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

Para una constante $c > 0$, las funciones definidas por $y = f(x) + c$ y $y = f(x) - c$ son la *suma* y la *diferencia* de la función $f(x)$ y la función constante $g(x) = c$. La función $y = cf(x)$ es el *producto* de $f(x)$ y la función constante $g(x) = c$. Las funciones definidas por $y = f(x + c)$, $y = f(x - c)$ y $y = f(cx)$ son las *composiciones* de $f(x)$ con las funciones polinomiales $g(x) = x + c$, $g(x) = x - c$ y $g(x) = cx$, respectivamente. Como veremos dentro de poco, la gráfica de cada una de éstas no es una **transformación rígida** ni una **transformación no rígida** de la gráfica de $y = f(x)$.

Transformaciones rígidas Una **transformación rígida** de una gráfica es una transformación que cambia sólo la *posición* de la gráfica en el plano xy, pero no su forma. Para la gráfica de una función $y = f(x)$ se analizan cuatro tipos de desplazamientos o traslaciones.

Traslaciones

Suponga que $y = f(x)$ es una función y c es una constante positiva. Entonces la gráfica de

- $y = f(x) + c$ es la gráfica de f desplazada verticalmente **hacia arriba** c unidades,
- $y = f(x) - c$ es la gráfica de f desplazada verticalmente **hacia abajo** c unidades,
- $y = f(x + c)$ es la gráfica de f desplazada horizontalmente **hacia la izquierda** c unidades,
- $y = f(x - c)$ es la gráfica de f desplazada horizontalmente **hacia la derecha** c unidades.

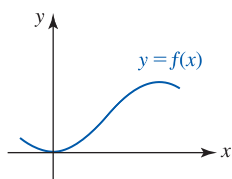
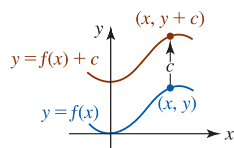
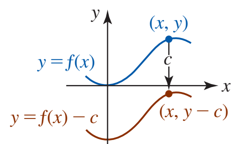


FIGURA 1.2.2 Gráfica de $y = f(x)$

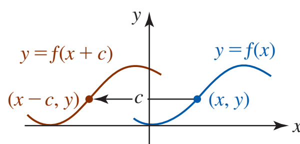
Considere la gráfica de una función $y = f(x)$ dada en la FIGURA 1.2.2. Desplazamientos vertical y horizontal de esta gráfica son las gráficas en rojo en los incisos *a*)-*d*) de la FIGURA 1.2.3. Si (x, y) es un punto sobre la gráfica de $y = f(x)$ y la gráfica de f está desplazada, por ejemplo, hacia arriba por $c > 0$ unidades, entonces $(x, y + c)$ es un punto sobre la nueva gráfica. En general, las coordenadas x no cambian como resultado de un desplazamiento vertical. Vea las figuras 1.2.3*a*) y 1.2.3*b*). En forma semejante, en un desplazamiento horizontal las coordenadas y de puntos sobre la gráfica desplazada son las mismas que sobre la gráfica original. Vea las figuras 1.2.3*c*) y 1.2.3*d*).



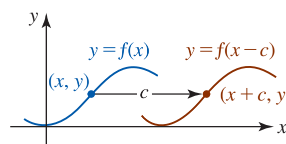
a) Desplazamiento vertical hacia arriba



b) Desplazamiento vertical hacia abajo



c) Desplazamiento horizontal hacia la izquierda

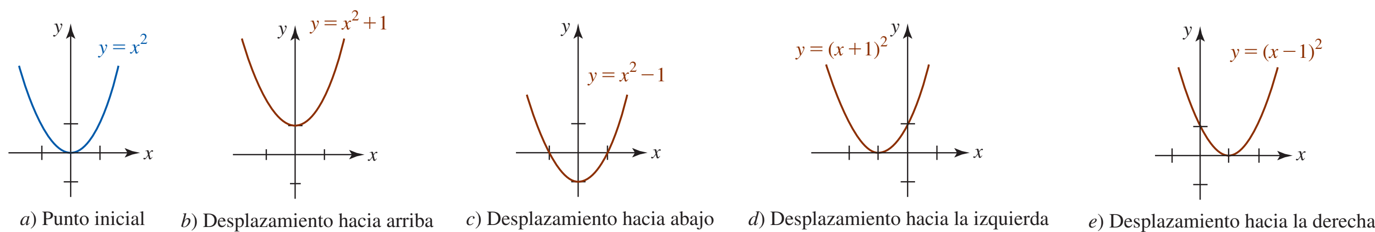


d) Desplazamiento horizontal hacia la derecha

FIGURA 1.2.3 Desplazamientos vertical y horizontal de $y = f(x)$ por una cantidad $c > 0$

EJEMPLO 5 Gráficas desplazadas

Las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = (x + 1)^2$ y $y = (x - 1)^2$ se obtienen a partir de la gráfica de $f(x) = x^2$ en la FIGURA 1.2.4*a*) al desplazar esta gráfica, a la vez, 1 unidad hacia arriba (figura 1.2.4*b*)), 1 unidad hacia abajo (figura 1.2.4*c*)), 1 unidad hacia la izquierda (figura 1.2.4*d*)) y 1 unidad hacia la derecha (figura 1.2.4*e*)).



a) Punto inicial *b*) Desplazamiento hacia arriba *c*) Desplazamiento hacia abajo *d*) Desplazamiento hacia la izquierda *e*) Desplazamiento hacia la derecha

FIGURA 1.2.4 Gráficas desplazadas en el ejemplo 5 ■

Combinación de desplazamientos En general, la gráfica de una función

$$y = f(x \pm c_1) \pm c_2, \tag{10}$$

El orden en que se hacen los desplazamientos es irrelevante.

donde c_1 y c_2 son constantes positivas, combina un desplazamiento horizontal (a la izquierda o a la derecha) con un desplazamiento vertical (hacia arriba o hacia abajo). Por ejemplo, la gráfica $y = (x + 1)^2 - 1$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada 1 unidad hacia la izquierda seguida por un desplazamiento vertical 1 unidad hacia abajo. La gráfica se proporciona en la FIGURA 1.2.5.

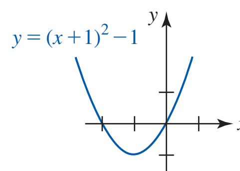


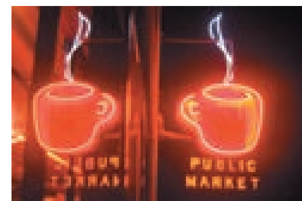
FIGURA 1.2.5 Gráfica obtenida por desplazamientos horizontal y vertical

Otra forma de transformar rígidamente la gráfica de una función es por medio de una **reflexión** en un eje de coordenadas.

Reflexiones

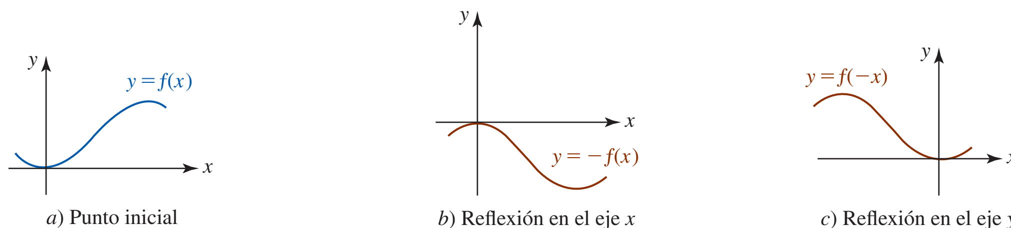
Suponga que $y = f(x)$ es una función. Entonces la gráfica de

- $y = -f(x)$ es la gráfica de f reflejada en el **eje *x***,
- $y = f(-x)$ es la gráfica de f reflejada en el **eje *y***.



Reflexión o imagen especular

En la FIGURA 1.2.6*a*) se ha reproducido la gráfica de una función $y = f(x)$ dada en la figura 1.2.2. Las reflexiones de esta gráfica en los ejes x y y se ilustran en las figuras 1.2.6*b*) y 1.2.6*c*). Cada una de estas reflexiones es una **imagen especular** de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje coordenado respectivo.



a) Punto inicial *b*) Reflexión en el eje *x* *c*) Reflexión en el eje *y*

FIGURA 1.2.6 Reflexiones con respecto a los ejes coordenados

EJEMPLO 6 Reflexiones

Grafique

a) $y = -\sqrt{x}$ ***b***) $y = \sqrt{-x}$.

Solución El punto inicial es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ dada en la FIGURA 1.2.7*a*).

a) La gráfica de $y = -\sqrt{x}$ es la reflexión de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el eje x. Observe en la figura 1.2.7*b*) que como (1, 1) está en la gráfica de f, el punto $(1, -1)$ está en la gráfica de $y = -\sqrt{x}$.

b) La gráfica de $y = \sqrt{-x}$ es la reflexión de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el eje y. Observe en la figura 1.2.7*c*) que como (1, 1) está en la gráfica de f, el punto $(-1, 1)$ está en la gráfica de $y = \sqrt{-x}$. La función $y = \sqrt{-x}$ parece algo extraña, pero no olvide que su dominio está determinado por el requerimiento de que $-x \geq 0$, o, de manera equivalente, $x \leq 0$, y así la gráfica reflejada está definida en el intervalo $(-\infty, 0]$.

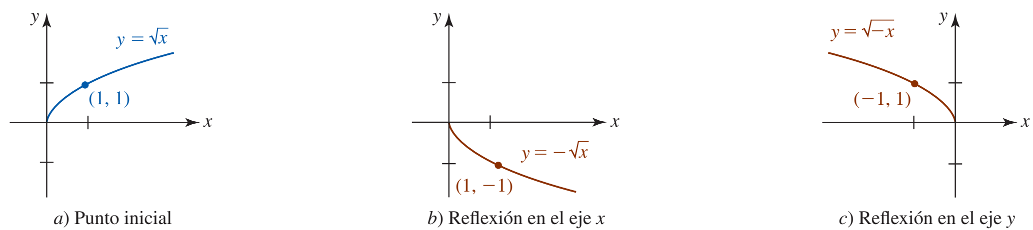


FIGURA 1.2.7 Gráficas en el ejemplo 6

Transformaciones no rígidas Si una función f se multiplica por una constante $c > 0$, la forma de la gráfica cambia pero retiene, *aproximadamente*, su forma original. La gráfica de $y = cf(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ distorsionada verticalmente; la gráfica de f se estira (o elonga) verticalmente o se comprime (o aplana) verticalmente, dependiendo del valor de c. En otros términos, un estiramiento vertical es un estiramiento de la gráfica de $y = f(x)$ alejándose del eje x, mientras que una compresión vertical es una compresión de la gráfica de $y = f(x)$ hacia el eje x. La gráfica de la función $y = f(cx)$ está distorsionada horizontalmente, ya sea por un estiramiento de la gráfica de $y = f(x)$ alejándose del eje y o por una compresión de la gráfica de $y = f(x)$ hacia el eje y. El estiramiento o la compresión de una gráfica constituyen ejemplos de **transformaciones no rígidas**.

Estiramientos y compresiones

Suponga que $y = f(x)$ es una función y que c es una constante positiva. Entonces la gráfica de

- $y = cf(x)$ es la gráfica de f **estirada verticalmente** por un factor de c si $c > 1$,
- $y = cf(x)$ es la gráfica de f **comprimida verticalmente** por un factor de $1/c$ si $0 < c < 1$,
- $y = f(cx)$ es la gráfica de f **estirada horizontalmente** por un factor de $1/c$ si $0 < c < 1$,
- $y = f(cx)$ es la gráfica de f **comprimida horizontalmente** por un factor de c si $c > 1$.

EJEMPLO 7 Dos compresiones

Dada $f(x) = x^2 - x$, compare las gráficas de

a) $y = \dfrac{1}{2}f(x)$ y ***b***) $y = f(2x)$.

Solución La gráfica de la función polinomial dada f se muestra en la FIGURA 1.2.8.

a) Con la identificación $c = \frac{1}{2}$, la gráfica de $y = \frac{1}{2}f(x)$ es la gráfica de f comprimida verticalmente por un factor de 2. De los tres puntos mostrados sobre la gráfica de la figura 1.2.8*a*), observe en la figura 1.2.8*b*) que las coordenadas y de los tres puntos correspondientes miden la mitad. La gráfica original está girada hacia el eje x.

b) Con la identificación $c = 2$, la gráfica de $y = f(2x)$ es la gráfica de f comprimida horizontalmente por un factor de 2. De los tres puntos mostrados sobre la gráfica de la figura 1.2.8*a*), en la figura 1.2.8*c*) las coordenadas x de los tres puntos correspondientes están divididos entre 2. La gráfica original está girada hacia el eje y.

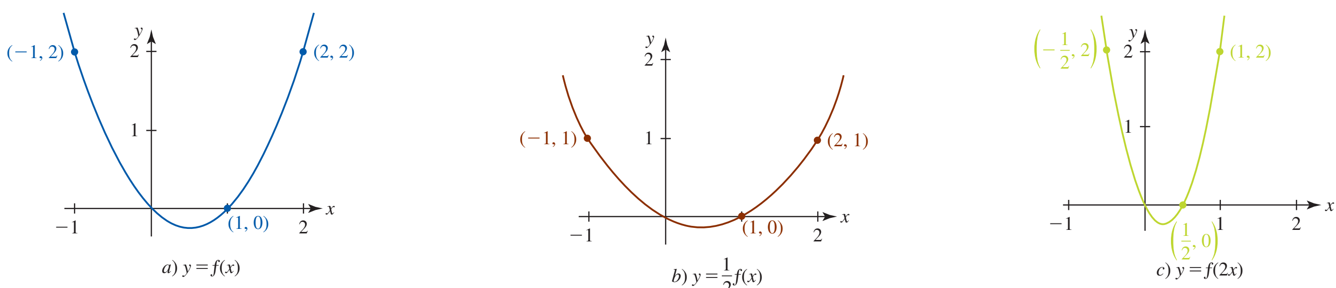


FIGURA 1.2.8 Gráficas de las funciones en el ejemplo 7

El siguiente ejemplo ilustra el desplazamiento, la reflexión y el estiramiento de una gráfica.

EJEMPLO 8 Combinación de transformaciones

Grafique $y = 2 - 2\sqrt{x - 3}$.

Solución Usted debe reconocer que la función dada consta de cuatro transformaciones de la función básica $f(x) = \sqrt{x}$:

desplazamiento vertical hacia arriba (el 2), desplazamiento horizontal hacia la derecha (el -3)

$$y = 2 - 2\sqrt{x - 3}.$$

reflexión en el eje x (el signo $-$), estiramiento vertical (el 2 que multiplica)

Empezaremos con la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en la FIGURA 1.2.9*a*). Las cuatro transformaciones se ilustran en las figuras 1.2.9*b*)-*e*).

a) Punto inicial — $y = \sqrt{x}$, (0, 0)

b) Estiramiento vertical — $y = 2\sqrt{x}$, (0, 0)

c) Reflexión en el eje x — $y = -2\sqrt{x}$, (0, 0)

d) Desplazamiento hacia la derecha — $y = -2\sqrt{x-3}$, (3, 0)

e) Desplazamiento hacia arriba — $y = 2 - 2\sqrt{x-3}$, (3, 2)

FIGURA 1.2.9 Gráfica de la función en el ejemplo 8 ■

Simetría

Si la gráfica de una función es simétrica con respecto al eje y, decimos que f es una **función par**. Se dice que una función cuya gráfica es simétrica con respecto al origen es una **función impar**. Contamos con las siguientes pruebas para simetría.

Pruebas para simetría de la gráfica de una función

La gráfica de una función f con dominio X es simétrica con respecto al

- **eje *y*** si $f(-x) = f(x)$ para toda x en X, o bien, (11)
- **origen** si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en X. (12)

En la FIGURA 1.2.10, observe que si f es una función par y

(x, y) es un punto en su gráfica, entonces necesariamente $(-x, y)$

(con $y = f(x)$ en el primer punto y $y = f(-x)$ en el segundo)

también es un punto sobre su gráfica. De manera semejante, en la FIGURA 1.2.11 se observa que si f es una función impar y

(x, y) es un punto en su gráfica, entonces necesariamente $(-x, -y)$

(con $y = f(x)$ en el primer punto y $-y = f(-x) = -f(x)$ en el segundo)

es un punto sobre su gráfica.

FIGURA 1.2.10 Función par; la gráfica tiene simetría con respecto al eje y

FIGURA 1.2.11 Función impar; la gráfica tiene simetría con respecto al origen

EJEMPLO 9 Funciones pares e impares

a) $f(x) = x^3$ es una función impar, ya que por (12),

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3\, x^3 = -x^3 = -f(x).$$

Una inspección de la figura 1.1.2*c*) muestra que la gráfica de f es simétrica con respecto al origen. Por ejemplo, puesto que $f(1) = 1$, $(1, 1)$ es un punto sobre la gráfica de $y = x^3$. Debido a que f es una función impar, $f(-1) = -f(1)$ implica que $(-1, -1)$ está sobre la misma gráfica.

b) $f(x) = x^{2/3}$ es una función par, ya que por (11) y las leyes de los exponentes,

la raíz cúbica de -1 es -1

$$f(-x) = (-x)^{2/3} = (-1)^{2/3}x^{2/3} = (\sqrt[3]{-1})^2 x^{2/3} = (-1)^2 x^{2/3} = x^{2/3} = f(x).$$

En la figura 1.2.1*i*) observamos que la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y. Por ejemplo, (8, 4) y (−8, 4) son puntos sobre la gráfica de $y = x^{2/3}$.

c) $f(x) = x^3 + 1$ no es par ni impar. Con base en

$$f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$$

se observa que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$. ■

Las gráficas en la figura 1.2.1, con el inciso *g*) como única excepción, presenta simetría con respecto al eje y o al origen. Las funciones en las figuras 1.2.1*b*), *d*), *f*) e *i*) son pares, mientras que las funciones en las figuras 1.2.1*a*), *c*), *e*) y *h*) son impares.

Ejercicios 1.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-2.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre $f + g$, $f - g$, fg y f/g.

1. $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -4x + 8$

2. $f(x) = 5x^2$, $g(x) = 7x - 9$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

4. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$, $g(x) = \dfrac{x-3}{4x+2}$

5. $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x^2 + 3x - 4$

6. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

En los problemas 7-10, sean $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{2-x}$. Encuentre el dominio de la función dada.

7. $f + g$ **8.** fg **9.** f/g **10.** g/f

En los problemas 11-16, encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$.

11. $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = x + 6$

12. $f(x) = 4x + 1$, $g(x) = x^2$

13. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 + x^2$

14. $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = \dfrac{1}{2x+4}$

15. $f(x) = \dfrac{3}{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$

16. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$

En los problemas 17 y 18, sean $f(x) = \sqrt{x-3}$ y $g(x) = x^2 + 2$. Encuentre el dominio de la función dada.

17. $f \circ g$ **18.** $g \circ f$

En los problemas 19 y 20, sean $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = 2 - \sqrt{x}$. Encuentre el dominio de la función dada.

19. $g \circ f$ **20.** $f \circ g$

En los problemas 21 y 22, encuentre $f \circ (2f)$ y $f \circ (1/f)$.

21. $f(x) = 2x^3$ **22.** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

La composición de tres funciones f, g y h es la función

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))).$$

En los problemas 23 y 24, encuentre $f \circ g \circ h$.

23. $f(x) = x^2 + 6$, $g(x) = 2x + 1$, $h(x) = 3x - 2$

24. $f(x) = \sqrt{x-5}$, $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = \sqrt{2x+1}$

En los problemas 25 y 26, encuentre una función de g.

25. $f(x) = 2x - 5$, $(f \circ g)(x) = -4x + 13$

26. $f(x) = \sqrt{2x+6}$, $(f \circ g)(x) = 4x^2$

En los problemas 27 y 28, exprese la función F como una composición $f \circ g$ de dos funciones f y g.

27. $F(x) = 2x^4 - x^2$ **28.** $F(x) = \dfrac{1}{x^2+9}$

En los problemas 29-36, los puntos (−2, 1) y (3, −4) están sobre la gráfica de la función $y = f(x)$. Encuentre los puntos correspondientes sobre la gráfica, obtenidos por las transformaciones dadas.

29. La gráfica de f desplazada 2 unidades hacia arriba.

30. La gráfica de f desplazada 5 unidades hacia abajo.

31. La gráfica de f desplazada 6 unidades hacia la izquierda.

32. La gráfica de f desplazada 1 unidad hacia la derecha.

33. La gráfica de f desplazada 1 unidad hacia arriba y 4 unidades hacia la izquierda.

34. La gráfica de f desplazada 3 unidades hacia abajo y 5 unidades hacia la derecha.

35. La gráfica de f reflejada en el eje y.

36. La gráfica de f reflejada en el eje x.

En los problemas 37-40, use la gráfica de la función $y = f(x)$ dada en la figura para graficar las siguientes funciones:

a) $y = f(x) + 2$ ***b***) $y = f(x) - 2$
c) $y = f(x + 2)$ ***d***) $y = f(x - 5)$
e) $y = -f(x)$ ***f***) $y = f(-x)$

37.

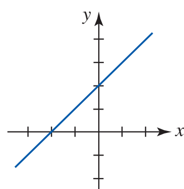


FIGURA 1.2.12 Gráfica para el problema 37

38.

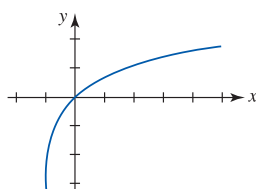


FIGURA 1.2.13 Gráfica para el problema 38

39.

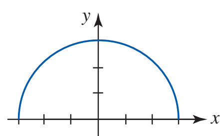


FIGURA 1.2.14 Gráfica para el problema 39

40.

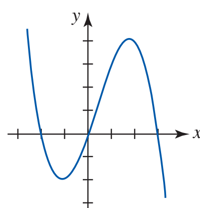


FIGURA 1.2.15 Gráfica para el problema 40

En los problemas 41 y 42, use la gráfica de la función $y = f(x)$ dada en la figura para graficar las siguientes funciones:

a) $y = f(x) + 1$ ***b***) $y = f(x) - 1$
c) $y = f(x + \pi)$ ***d***) $y = f(x - \pi/2)$
e) $y = -f(x)$ ***f***) $y = f(-x)$
g) $y = 3f(x)$ ***h***) $y = -\frac{1}{2}f(x)$

41.

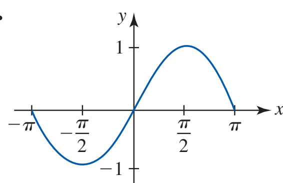


FIGURA 1.2.16 Gráfica para el problema 41

42.

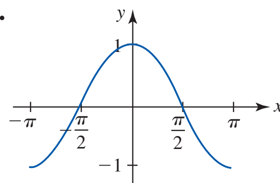


FIGURA 1.2.17 Gráfica para el problema 42

En los problemas 43-46, encuentre la ecuación de la gráfica final después que las transformaciones dadas se aplican a la gráfica de $y = f(x)$.

43. La gráfica de $f(x) = x^3$ desplazada 5 unidades hacia arriba y 1 unidad a la derecha.

44. La gráfica de $f(x) = x^{2/3}$ estirada verticalmente por un factor de 3 unidades y luego desplazada 2 unidades a la derecha.

45. La gráfica de $f(x) = x^4$ reflejada en el eje x y luego desplazada 7 unidades hacia la izquierda.

46. La gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ reflejada en el eje y, luego desplazada 5 unidades hacia la izquierda y 10 unidades hacia abajo.

En los problemas 47 y 48, complete la gráfica de la función dada $y = f(x)$ si

a) f es una función par y ***b***) f es una función impar.

47.

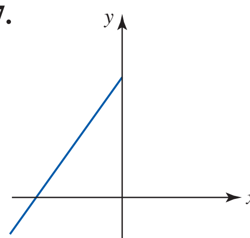


FIGURA 1.2.18 Gráfica para el problema 47

48.

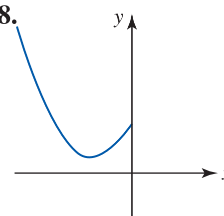


FIGURA 1.2.19 Gráfica para el problema 48

49. Complete la tabla, donde f es una función par.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	2	10	8	0
$g(x)$	2	-3	0	1	-4
$(f \circ g)(x)$					

50. Complete la tabla, donde g es una función impar.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	-3	0	-1	-4
$g(x)$	9	7	-6	-5	13
$(g \circ f)(x)$					

Un clásico matemático En el análisis matemático de circuitos o señales, resulta conveniente definir una función especial que es 0 (apagado) hasta cierto número y luego es 1 (encendido) después de lo anterior. La **función de Heaviside**

$$U(x - a) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a, \end{cases}$$

recibe su nombre en honor al brillante y controvertido ingeniero eléctrico y matemático inglés **Oliver Heaviside** (1850-1925). La función U también se denomina **función escalón unitario**.

En los problemas 51 y 52, trace la función dada. La función en el problema 52 algunas veces se denomina **función vagón o ventana**.

51. $y = 2U(x - 1) + U(x - 2)$

52. $y = U\left(x + \frac{1}{2}\right) - U\left(x - \frac{1}{2}\right)$

53. Encuentre la ecuación para la función f ilustrada en la FIGURA 1.2.20 en términos de $U(x - a)$.

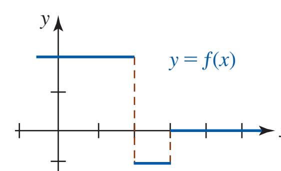


FIGURA 1.2.20 Gráfica para el problema 53

54. La función de Heaviside $U(x - a)$ suele combinarse con otras funciones por adición y multiplicación. Dado que $f(x) = x^2$, compare las gráficas de $y = f(x - 3)$ y $y = f(x - 3)U(x - 3)$.

En los problemas 55 y 56, trace la función dada.

55. $y = (2x - 5)U(x - 1)$ **56.** $y = x - xU(x - 3)$

≡ Piense en ello

57. Determine si $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ es falsa o verdadera.

58. Suponga que $[-1, 1]$ es el dominio de $f(x) = x^2$. ¿Cuál es el dominio de $y = f(x - 2)$?

59. Explique por qué la gráfica de una función no puede ser simétrica con respecto al eje x.

60. ¿Cuáles puntos, en caso de haber, sobre la gráfica de $y = f(x)$ permanecen fijos; es decir, los mismos sobre la gráfica resultante después de un estiramiento o compresión vertical? ¿Después de una reflexión en el eje x? ¿Después de una reflexión en el eje y?

61. Suponga que el dominio de f es $(-\infty, \infty)$. ¿Cuál es la relación entre la gráfica de $y = f(x)$ y $y = f(|x|)$?

62. Revise las gráficas de $y = x$ y $y = 1/x$ en la figura 1.2.1. Luego analice cómo obtener la gráfica de $y = 1/f(x)$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$. Trace la gráfica de $y = 1/f(x)$ para la función f cuya gráfica se proporciona en la figura 1.2.15.

63. Suponga que $f(x) = x$ y $g(x) = \lfloor x \rfloor$ es la función redondeo hacia el entero inferior anterior. La diferencia de f y g es la función $\text{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$ denominada **parte fraccionaria de *x***. Explique el nombre y luego grafique $\text{frac}(x)$.

64. Use la notación de la reflexión de una gráfica en un eje para expresar la función redondeo hacia el entero superior siguiente $g(x) = \lceil x \rceil$ en términos de la función redondeo hacia el entero inferior anterior $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (consulte las páginas 7 y 15).

1.3 Funciones polinomiales y racionales

Introducción En esta sección continúa el repaso de las funciones polinomiales y de las funciones racionales. Funciones como $y = 2x - 1$, $y = 5x^2 - 2x + 4$ y $y = x^3$, donde la variable x se eleva a una *potencia entera no negativa*, son ejemplos de funciones polinomiales. En la sección precedente se vio que una **función polinomial** general $y = f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

donde n es un entero no negativo. Una **función racional** es el cociente

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \tag{2}$$

donde p y q son funciones polinomiales.

Funciones polinomiales Las constantes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ en (1) se denominan **coeficientes**; el número a_n se llama **coeficiente principal** y a_0 se denomina **término constante** del polinomio. Se dice que la mayor potencia de x en un polinomio es el **grado** de éste. De modo que si $a_n \neq 0$, entonces se dice que $f(x)$ en (1) es de **grado *n***. Por ejemplo,

grado 5 ↓

$$f(x) = 3x^5 - 4x^3 - 3x + 8$$

↑ coeficiente principal ↑ término constante

es una función polinomial de grado 5.

Los polinomios de grados $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ son, respectivamente,

$f(x) = a$, **función constante**,

$f(x) = ax + b$, **función lineal**,

$f(x) = ax^2 + bx + c$, **función cuadrática**,

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, **función cúbica**.

La función constante $f(x) = 0$ se denomina **polinomio cero**.

Rectas Sin duda, usted está familiarizado con el hecho de que las gráficas de una función constante y una función lineal son **rectas**. Puesto que el concepto de recta juega un papel importante en el estudio del cálculo diferencial, resulta conveniente revisar las ecuaciones de las rectas. En el plano xy hay tres tipos de rectas; rectas horizontales, rectas verticales y rectas inclinadas u oblicuas.

Pendiente Se empezará con la recolección de geometría plana de que por dos puntos distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano pasa una sola recta L. Si $x_1 \neq x_2$, entonces el número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{3}$$

se denomina **pendiente** de la recta determinada por estos dos puntos. Suele acostumbrarse denotar el **cambio en *y*** o **ascenso vertical** de la recta por $\Delta y = y_2 - y_1$ y el **cambio en *x*** o **recorrido horizontal** de la recta por $\Delta x = x_2 - x_1$, de modo que (3) se escribe $m = \Delta y/\Delta x$. Vea la FIGURA 1.3.1. Como se indica en la FIGURA 1.3.2, cualquier par de puntos distintos sobre una recta con pendiente, por ejemplo, por (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), (x_4, y_4), determina la misma pendiente. En otras palabras, la pendiente de una recta es independiente de la elección de los puntos sobre la recta.

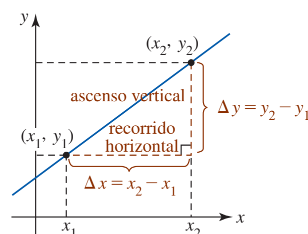


FIGURA 1.3.1 Pendiente de una recta

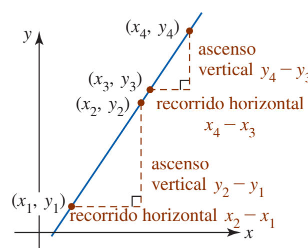


FIGURA 1.3.2 Triángulos semejantes

En la FIGURA 1.3.3 se comparan las gráficas de rectas con pendientes positiva, negativa, cero e indefinida. En la figura 1.3.3*a*) vemos, al leer la gráfica de izquierda a derecha, que una recta con pendiente positiva ($m > 0$) asciende cuando x crece. La figura 1.3.3*b*) muestra que una recta con pendiente negativa ($m < 0$) cae cuando x crece. Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos sobre una recta horizontal, entonces $y_1 = y_2$ y así su ascenso vertical es $\Delta y = y_2 - y_1 = 0$. Por tanto, con base en (3) la pendiente es cero ($m = 0$). Vea la figura 1.3.3*c*). Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos sobre una recta vertical, entonces $x_1 = x_2$ y así su recorrido horizontal es $\Delta x = x_2 - x_1 = 0$. En este caso se dice que la pendiente de la recta está **indefinida** o que la recta no tiene pendiente. Vea la figura 1.3.3*d*). Sólo rectas con pendiente son gráficas de funciones.

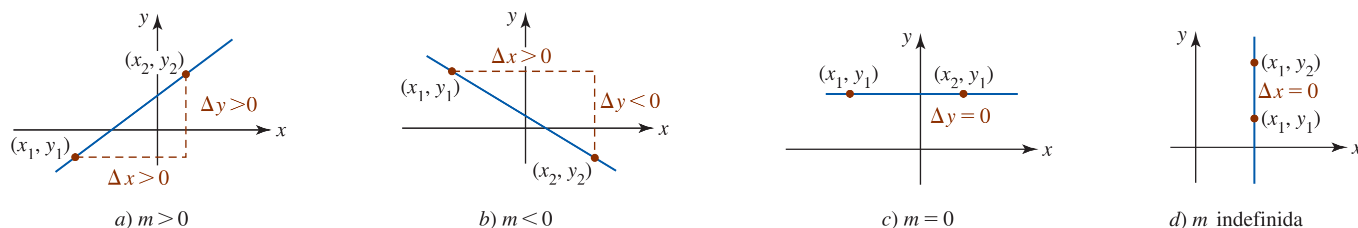


FIGURA 1.3.3 Rectas con pendiente *a*)-*c*); recta sin pendiente *d*)

Ecuaciones de rectas Para encontrar la ecuación de una recta L con pendiente m, se supone que (x_1, y_1) está sobre la recta. Si (x, y) representa cualquier otro punto sobre L, entonces (3) proporciona

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Al multiplicar ambos miembros de la última igualdad por $x - x_1$ se obtiene una ecuación importante. La **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{4}$$

Cualquier recta que no sea vertical debe cruzar el eje y. Si la intersección y es $(0, b)$, entonces con $x_1 = 0$, $y_1 = b$, (4) proporciona $y - b = m(x - 0)$. La última ecuación se reduce a la **ecuación pendiente-intercepto** de la recta

$$y = mx + b. \tag{5}$$

EJEMPLO 1 Ecuación de una recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen

Encuentre una ecuación de la recta que pasa por los puntos (4, 3) y (−2, 5).

Solución Primero se calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos. Con base en (3),

$$m = \frac{5 - 3}{-2 - 4} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

Luego, la ecuación (4) de una recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen proporciona $y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 4)$ o $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$. ■

Una ecuación de *cualquier* recta en el plano es un caso especial de la **ecuación lineal** general

$$Ax + By + C = 0, \tag{6}$$

donde A, B y C son constantes reales. La característica que proporciona a (6) su nombre *lineal* es que las variables x y y sólo aparecen a la primera potencia. Los casos de interés especial son

$$A = 0, B \neq 0, \text{ da } y = -\frac{C}{B}, \tag{7}$$

$$A \neq 0, B = 0, \text{ da } x = -\frac{C}{A}, \tag{8}$$

$$A \neq 0, B \neq 0, \text{ da } y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \tag{9}$$

De estas ecuaciones, la primera y la tercera definen funciones. Al volver a identificar a $-C/B$ en (7) como a se obtiene una función constante $y = a$. Al reidentificar a $-A/B$ y $-C/B$ en (9) como a y b, respectivamente, se obtiene la forma de una función lineal $f(x) = ax + b$ que, excepto por algunos símbolos, es la misma que (5). Al volver a identificar $-C/A$ en (8) como a se obtiene la ecuación de una recta vertical $x = a$, que no es una función.

Funciones crecientes-decrecientes Recién acabamos de ver en las figuras 1.3.3*a*) y 1.3.3*b*) que si $a > 0$ (lo cual, desempeña la parte de m), los valores de una función lineal $f(x) = ax + b$ crecen cuando x crece, mientras que para $a < 0$, los valores de $f(x)$ disminuyen cuando x crece. Los conceptos creciente y decreciente pueden extenderse a *cualquier* función. Se dice que una función f es

- **creciente** sobre un intervalo si $f(x_1) < f(x_2)$, y (10)
- **decreciente** sobre un intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$. (11)

En la FIGURA 1.3.4*a*) la función f es creciente sobre el intervalo $[a, b]$, mientras f es decreciente sobre el intervalo $[a, b]$ en la figura 1.3.4*b*). Una función lineal $f(x) = ax + b$ crece sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $a > 0$ y decrece sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $a < 0$.

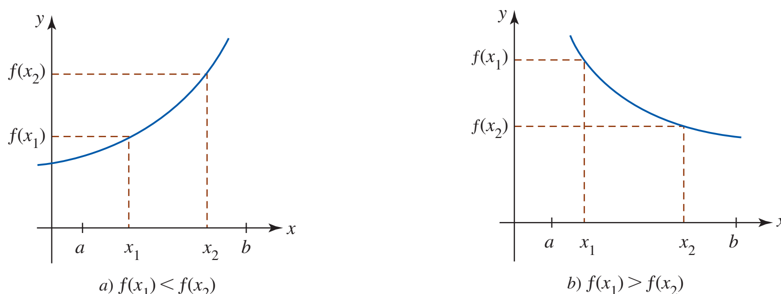


FIGURA 1.3.4 Función creciente en *a*); función decreciente en *b*)

Esta suposición significa que L_1 y L_2 son rectas no verticales.

Rectas paralelas y perpendiculares Si L_1 y L_2 son dos rectas distintas *con pendiente*, entonces necesariamente L_1 y L_2 son paralelas o se cortan. Si las rectas se cortan formando un ángulo recto, se dice que son perpendiculares. Es posible determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares al examinar sus pendientes.

Rectas paralelas y perpendiculares

Suponga que L_1 y L_2 son rectas con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Entonces

- L_1 es **paralela** a L_2 si y sólo si $m_1 = m_2$, y
- L_1 es **perpendicular** a L_2 si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.

EJEMPLO 2 Rectas paralelas

Las ecuaciones lineales $3x + y = 2$ y $6x + 2y = 15$ pueden volver a escribirse en las formas de la ecuación de la recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen $y = -3x + 2$ y $y = -3x + \frac{15}{2}$, respectivamente. Como se anotó en azul y rojo, la pendiente de cada recta es -3. En consecuencia, las rectas son paralelas. Las gráficas de estas ecuaciones se muestran en la FIGURA 1.3.5. ■

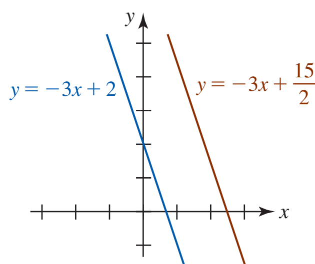


FIGURA 1.3.5 Rectas paralelas en el ejemplo 2

EJEMPLO 3 Rectas perpendiculares

Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $(0, -3)$ y es perpendicular a la gráfica de $4x - 3y + 6 = 0$.

Solución Al despejar y, la ecuación lineal dada produce la forma de la ecuación de la recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen $y = \frac{4}{3}x + 2$. Esta recta, cuya gráfica se proporciona en azul en la FIGURA 1.3.6, tiene pendiente $\frac{4}{3}$. La pendiente de cualquier recta perpendicular a ésta es el recíproco negativo de $\frac{4}{3}$, a saber: $-\frac{3}{4}$. Puesto que $(0, -3)$ es la intersección y de la recta requerida, por (5) se concluye que su ecuación es $y = -\frac{3}{4}x - 3$. La gráfica de la última ecuación es la recta roja en la figura 1.3.6. ■

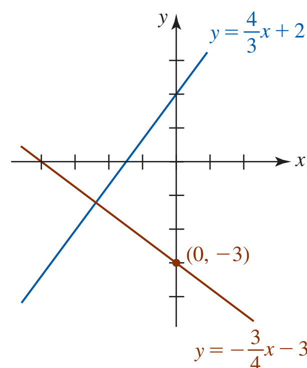


FIGURA 1.3.6 Rectas perpendiculares en el ejemplo 3

Funciones cuadráticas La función elevar al cuadrado $y = x^2$ que se abordó en las secciones 1.1 y 1.2 es un elemento de una familia de funciones denominadas **funciones cuadráticas**; es decir, funciones polinomiales de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, b y c son constantes. Las gráficas de funciones cuadráticas, denominadas **parábolas**, simplemente son transformaciones rígidas y no rígidas de la gráfica de $y = x^2$ mostrada en la FIGURA 1.3.7.

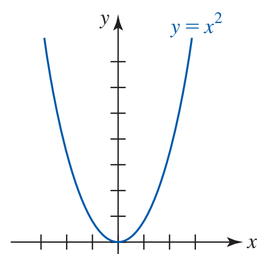


FIGURA 1.3.7 Gráfica de la parábola más simple

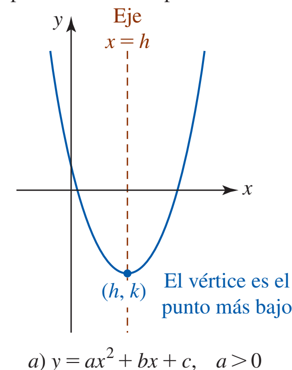
Vértice y eje Si la gráfica de una función cuadrática se abre hacia arriba $a > 0$ (o hacia abajo $a < 0$), el punto más bajo (más alto) (h, k) sobre la parábola se denomina **vértice**. Todas las parábolas son simétricas con respecto a una recta vertical que pasa por el vértice (h, k). La recta $x = h$ se denomina **eje** de la parábola. Vea la FIGURA 1.3.8.

Forma normal El vértice (h, k) de una parábola puede determinarse al volver a plantear la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ en **forma normal**

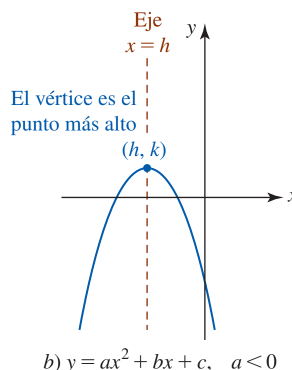
$$f(x) = a(x - h)^2 + k. \tag{12}$$

La forma (12) se obtiene a partir de $f(x) = ax^2 + bx + c$ al completar el cuadrado en x. Con la ayuda del cálculo diferencial es posible encontrar el vértice de la parábola sin completar el cuadrado.

Como se muestra con el siguiente ejemplo, al trazar las intersecciones y el vértice puede obtenerse un bosquejo razonable de la parábola. La forma en (12) indica que su gráfica es la gráfica de $y = ax^2$ desplazada horizontalmente $|h|$ unidades y desplazada verticalmente $|k|$ unidades.



a) $y = ax^2 + bx + c, \quad a > 0$



b) $y = ax^2 + bx + c, \quad a < 0$

FIGURA 1.3.8 Vértice y eje de una parábola

EJEMPLO 4 Gráfica usando las intersecciones y el vértice

Grafique $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Solución Puesto que $a = 1 > 0$, se sabe que la parábola se abre hacia arriba. A partir de $f(0) = -3$ obtenemos la intersección $(0, -3)$. Para averiguar si hay alguna intersección x, resolvemos la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ por factorización o aplicando la fórmula cuadrática. Con base en $(x + 1)(x - 3) = 0$ encontramos las soluciones $x = -1$ y $x = 3$. Las intersecciones x son $(-1, 0)$ y $(3, 0)$. Para localizar el vértice, se completa el cuadrado:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 4.$$

Así, la forma estándar es $f(x) = (x - 1)^2 - 4$. Al comparar la última ecuación con (12) se identifica $h = 1$ y $k = -4$. Podemos concluir que el vértice se encuentra en el punto $(1, -4)$. Al usar esta información se traza una parábola que pasa por estos cuatro puntos como se muestra en la FIGURA 1.3.9.

Al encontrar el vértice de una parábola, de manera automática se determina el rango de la función cuadrática. Como se muestra claramente en la figura 1.3.9, el rango de f es el intervalo $[-4, \infty)$ sobre el eje y. En la figura 1.3.9 también se muestra que f es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 1]$, pero creciente sobre $[1, \infty)$. ■

Funciones polinomiales de orden superior La gráfica de *toda* función lineal $f(x) = ax + b$ es una recta y la gráfica de *toda* función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola. Estas declaraciones descriptivas definitivas no pueden hacerse con respecto a la gráfica de una función polinomial de orden superior. ¿Cuál es la forma de la gráfica de una función polinomial de quinto grado? Resulta que la gráfica de una función polinomial de grado $n \geq 3$ puede tener varias formas posibles. En general, graficar una función polinomial f de grado $n \geq 3$ demanda el uso

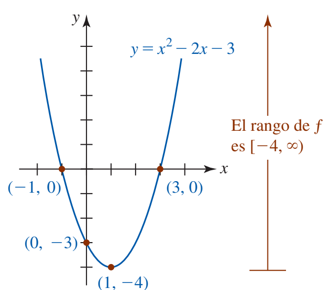


FIGURA 1.3.9 Parábola en el ejemplo 4

de un instrumento de cálculo o graficado. No obstante, al tener en cuenta el desplazamiento, el comportamiento extremo, las intersecciones y la simetría, es posible en muchos casos trazar rápidamente una gráfica razonable de una función polinomial de orden superior a la vez que el trazado de puntos se mantiene en un mínimo.

Comportamiento final En términos aproximados, el **comportamiento final** de *cualquier* función f es simplemente la forma en que f se comporta para valores muy grandes de $|x|$. En el caso de una función polinomial f de grado n, su gráfica semeja la gráfica de $y = a_n x^n$ para valores grandes de $|x|$. Para ver por qué la gráfica de una función polinomial como $f(x) = -2x^3 + 4x^2 + 5$ se parece a la gráfica de la función polinomial con un solo término $y = -2x^3$ cuando $|x|$ es grande, se factorizará la potencia más alta de x; es decir, x^3:

estos dos términos se vuelven despreciables cuando $|x|$ es grande

$$f(x) = x^3\left(-2 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3}\right). \tag{13}$$

Al dejar que $|x|$ crezca sin límite, tanto $4/x$ como $5/x^3$ pueden aproximarse a cero tanto como se quiera. Así, cuando $|x|$ es grande, los valores de la función f en (13) son muy bien aproximados por los valores de $y = -2x^3$. En general, sólo puede haber cuatro tipos de comportamiento extremo para funciones polinomiales. Para interpretar las flechas en la FIGURA 1.3.10 se analizarán las flechas en, por ejemplo, la figura 1.3.10*c*), donde se supone que n es impar y que $a_n > 0$. La posición y la dirección de la flecha izquierda (la flecha izquierda apunta hacia abajo) indica que cuando x se vuelve no acotada en la dirección negativa, los valores de $f(x)$ son decrecientes. Planteado en otros términos, la gráfica está apuntando hacia abajo. En forma semejante, la posición y la dirección de la flecha derecha (la flecha derecha apunta hacia arriba) indica que cuando x se vuelve no acotada en la dirección positiva, los valores de $f(x)$ son crecientes (la gráfica apunta hacia arriba). El comportamiento extremo ilustrado en las figuras 1.3.10*a*) y 1.3.10*c*) puede verse en las gráficas que se muestran en la FIGURA 1.3.11 y FIGURA 1.3.12, respectivamente. Las gráficas de las funciones $y = -x$, $y = -x^2$, $y = -x^3$, . . . , $y = -x^8$ son las gráficas en las figuras 1.3.11 y 1.3.12 reflejadas en el eje x, de modo que su comportamiento extremo es como se muestra en las figuras 1.3.10*b*) y 1.3.10*d*).

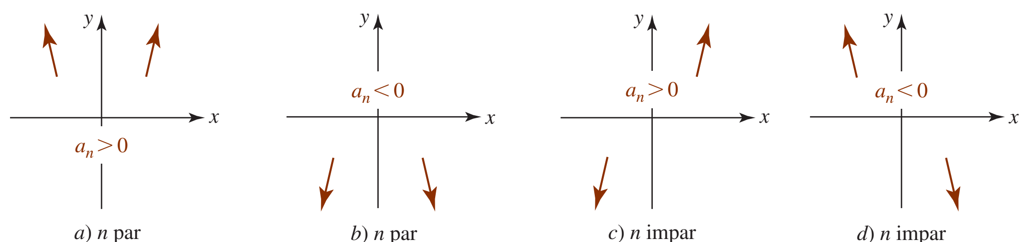


FIGURA 1.3.10 El comportamiento extremo de una función polinomial f depende de su grado n y el signo de su coeficiente principal

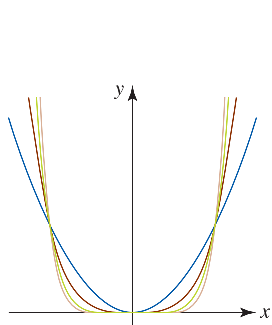


FIGURA 1.3.11 Gráficas de $y = x^2$ (azul), $y = x^4$ (rojo) y $y = x^6$ (verde), $y = x^8$ (dorado)

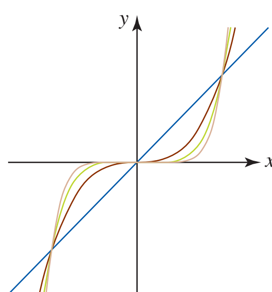


FIGURA 1.3.12 Gráficas de $y = x$ (azul), $y = x^3$ (rojo) y $y = x^5$ (verde), $y = x^7$ (dorado)

Simetría de las funciones polinomiales Resulta fácil identificar por inspección las funciones polinomiales cuyas gráficas poseen **simetría** con respecto al eje y o al origen. La palabras *par* e *impar* tienen un significado especial para las funciones polinomiales. Las condiciones $f(-x) = f(x)$ y $f(-x) = -f(x)$ se cumplen para funciones polinomiales donde todas las potencias de x son enteros pares y enteros impares, respectivamente. Por ejemplo,

potencias pares: $f(x) = 5x^4 - 7x^2$ — función par

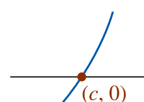
potencias impares: $f(x) = 10x^5 + 7x^3 + 4x$ — función impar

potencias mixtas: $f(x) = -3x^7 + 2x^4 + x^3 + 2$ — ni par ni impar

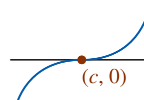
Una función como $f(x) = 3x^6 - x^4 + 6$ es una función par porque todas las potencias son enteros pares; el término constante 6 es en realidad $6x^0$, y 0 es un entero no negativo par.

Intersecciones de las funciones polinomiales La gráfica de toda función polinomial f pasa por el eje y puesto que $x = 0$ está en el dominio de la función. La intersección y es el punto

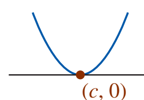
$(0, f(0))$. Los **ceros** reales de una función polinomial son las coordenadas x de las **intersecciones x** de su gráfica. Un número c es un cero de una función polinomial f de grado n si y sólo si $x - c$ es un factor de f; es decir, $f(x) = (x - c)q(x)$, donde $q(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Si $(x - c)^m$ es un factor de f, donde $m > 1$ es un entero positivo, y $(x - c)^{m+1}$ *no es* un factor de f, entonces se dice que c es un **cero repetido** o **cero de multiplicidad m**. Cuando $m = 1$, c se denomina **cero simple**. Por ejemplo, $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ son ceros simples de $f(x) = 6x^2 - x - 1$ puesto que f puede escribirse como $f(x) = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, mientras que 5 es un cero repetido o un cero de multiplicidad 2 para $f(x) = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$. El comportamiento de la gráfica de f en una intersección x $(c, 0)$ depende de si c es un cero simple o un cero de multiplicidad $m > 1$, donde m es un entero impar o par. Vea la FIGURA 1.3.13.



a) Cero simple



b) Cero de multiplicidad impar $m = 3, 5, \ldots$



c) Cero de multiplicidad par $m = 2, 4, \ldots$

FIGURA 1.3.13 Intersecciones x de una función polinomial f

Intersecciones x de polinomios

- Si c es un cero simple, entonces la gráfica de f pasa directamente por el eje x en $(c, 0)$. Vea la figura 1.3.13*a*).
- Si c es un cero de multiplicidad impar $m = 3, 5, \ldots$, entonces la gráfica de f pasa directamente por el eje x pero se achata en $(c, 0)$. Vea la figura 1.3.13*b*).
- Si c es un cero de multiplicidad par $m = 2, 4, \ldots$, entonces la gráfica de f no pasa por el eje x, sino que es tangente a éste, o lo toca, el eje x en $(c, 0)$. Vea la figura 1.3.13*c*).

En el caso en que c es un cero simple o un cero de multiplicidad impar, $f(x)$ cambia de signo en $(c, 0)$, mientras que si c es un cero de multiplicidad par, $f(x)$ no cambia de signo en $(c, 0)$. Observamos que dependiendo del signo del coeficiente principal del polinomio, las gráficas en la figura 1.3.13 pueden estar reflejadas en el eje x.

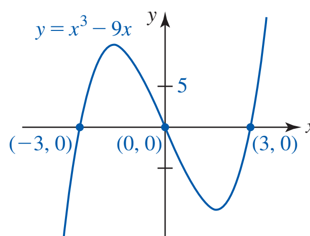


FIGURA 1.3.14 Gráfica de la función en el ejemplo 5*a*)

EJEMPLO 5 Gráficas de funciones polinomiales

Grafique

a) $f(x) = x^3 - 9x$ ***b***) $g(x) = (1 - x)(x + 1)^2$ ***c***) $h(x) = -(x + 4)(x - 2)^3$.

Solución

a) Al ignorar todos los términos menos el primero observamos que la gráfica de f semeja la gráfica de $y = x^3$ para $|x|$ grande. Este comportamiento final de f se muestra en la figura 1.3.10*c*). Puesto que todas las potencias son enteros impares, f es una función impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen. Al hacer $f(x) = 0$, a partir de

diferencia de dos cuadrados ↓

$$x(x^2 - 9) = 0 \qquad \text{o bien} \qquad x(x - 3)(x + 3) = 0$$

notamos que los ceros de f son $x = 0$ y $x = \pm 3$. Puesto que estos números son ceros simples, la gráfica pasa directamente por las intersecciones x en $(0, 0)$, $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ como se muestra en la FIGURA 1.3.14.

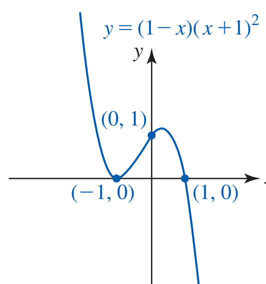


FIGURA 1.3.15 Gráfica de la función en el ejemplo 5*b*)

b) Al distribuir la multiplicación de los factores, g es la misma que $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$ de modo que se observa que la gráfica de g semeja la gráfica de $y = -x^3$ para $|x|$ grande, justo lo opuesto del comportamiento final de la función en el inciso *a*). Debido a que hay potencias pares e impares de x, g no es par ni impar; su gráfica no posee simetría con respecto al eje y o al origen. En virtud de que -1 es un cero de multiplicidad 2, la gráfica es tangente al eje x en $(-1, 0)$. Puesto que 1 es un cero simple, la gráfica pasa directamente por el eje x en $(1, 0)$. Vea la FIGURA 1.3.15.

c) Al inspeccionar h se observa que su gráfica semeja la gráfica de $y = -x^4$ para $|x|$ grande. Este comportamiento final de h se muestra en la figura 1.3.10*b*). La función h no es par ni impar. A partir de la forma factorizada de $h(x)$, se ve que -4 es un cero simple y así la gráfica de h pasa directamente por el eje x en $(-4, 0)$. Puesto que 2 es un cero de multiplicidad 3, su gráfica se achata cuando pasa por la intersección x $(2, 0)$. Vea la FIGURA 1.3.16. ■

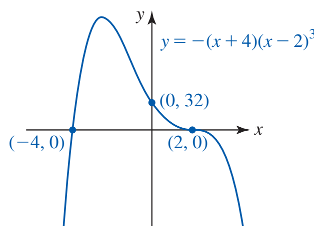


FIGURA 1.3.16 Gráfica de la función en el ejemplo 5*c*)

Funciones racionales Graficar una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ es un poco más complicado que graficar una función polinomial porque además de estar atento a las intersecciones, simetría y desplazamiento/reflexión/estiramiento de gráficas conocidas, también es necesario prestar atención al dominio de f y los grados de $p(x)$ y $q(x)$. Estas dos últimas cuestiones son importantes para determinar si la gráfica de una función racional posee *asíntotas*.

Intersecciones de funciones racionales La **intersección *y*** de la gráfica de $f(x) = p(x)/q(x)$ es el punto $(0, f(0))$ en el supuesto de que 0 está en el dominio de f. Por ejemplo, la gráfica de la función racional $f(x) = (1 - x)/x$ no cruza el eje y puesto que $f(0)$ no está definido. Si los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes, entonces las **intersecciones *x*** de la gráfica de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ son los puntos cuyas coordenadas x son los ceros reales del numerador $p(x)$. En otras palabras, la única forma en que es posible que $f(x) = p(x)/q(x) = 0$ es cuando $p(x) = 0$. Así, para $f(x) = (1 - x)/x$, $1 - x = 0$ se obtiene $x = 1$ y entonces $(1, 0)$ es una intersección x de la gráfica de f.

Asíntotas La gráfica de una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ puede tener asíntotas. Para los objetivos de este libro, las asíntotas pueden ser una recta horizontal, una recta vertical o una recta inclinada. En un nivel práctico, las asíntotas vertical y horizontal de la gráfica de una función racional f pueden determinarse por inspección. Así, por el bien del análisis se supondrá que

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0},\ a_n \neq 0,\ b_m \neq 0, \qquad (14)$$

representa una función racional general. El grado de $p(x)$ es n y el grado de $q(x)$ es m.

Asíntotas de gráficas de funciones racionales

Suponga que las funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ en (14) *no tienen factores comunes*.

- Si a es un cero real de $q(x)$, entonces $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de f.
- Si $n = m$, entonces $y = a_n/b_m$ (el cociente de los coeficientes principales) es una **asíntota horizontal** para la gráfica de f.
- Si $n < m$, entonces $y = 0$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de f.
- Si $n > m$, entonces la gráfica de f *no* tiene **asíntota horizontal**.
- Si $n = m + 1$, entonces el cociente $y = mx + b$ de $p(x)$ y $q(x)$ es una **asíntota inclinada** para la gráfica de f.

Con base en la lista anterior observamos que las asíntotas horizontal e inclinada son mutuamente excluyentes. En otras palabras, la gráfica de una función racional f no puede tener una asíntota inclinada *y* una asíntota horizontal.

EJEMPLO 6 Gráficas de funciones racionales

Grafique

a) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$ ***b***) $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 5}$.

Solución

a) Se empieza con la observación de que el numerador $p(x) = x$ y el denominador $q(x) = 1 - x^2$ no tienen factores comunes. También, puesto que $f(-x) = -f(x)$, la función f es impar. En consecuencia, su gráfica es simétrica con respecto al origen. Debido a que $f(0) = 0$, la intersección y es $(0, 0)$. Además, $p(x) = x = 0$ implica $x = 0$, de modo que la única intersección es $(0, 0)$. Los ceros del denominador $q(x) = 1 - x^2$ son ±1. Así, las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. Puesto que el grado del numerador x es 1 y el grado del denominador $1 - x^2$ es 2 (y $1 < 2$), se concluye que $y = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de f. La gráfica consta de tres *ramas* distintas: una a la izquierda de la recta $x = -1$, una entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$ y una a la derecha de la recta $x = 1$. Vea la FIGURA 1.3.17.

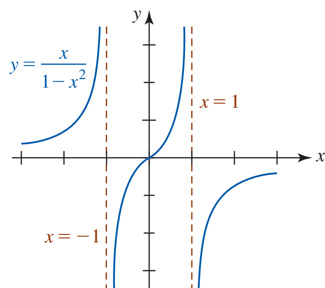


FIGURA 1.3.17 Gráfica de la función en el ejemplo 6*a*)

b) De nuevo, observe que el numerador $p(x) = x^2 - x - 6$ y el denominador $q(x) = x - 5$ de g no tienen factores comunes. Asimismo, f no es impar ni par. A partir de $f(0) = \frac{6}{5}$ se obtiene la intersección y $\left(0, \frac{6}{5}\right)$. Con base en $p(x) = x^2 - x - 6 = 0$ o $(x + 2)(x - 3) = 0$ observamos que -2 y 3 son ceros de $p(x)$. Las intersecciones x son $(-2, 0)$ y $(3, 0)$. Resulta evidente que el cero de $q(x) = x - 5$ es 5, de modo que la recta $x = 5$ es una asíntota vertical. Por último, a partir del hecho de que el grado de $p(x) = x^2 - x - 6$ (que es 2) *es exactamente mayor por uno* que el grado de $q(x) = x - 5$ (que es 1), la gráfica de $f(x)$ tiene una asíntota inclinada. Para encontrarla, $p(x)$ se divide entre $q(x)$. Ya sea por división larga o división sintética, el resultado

$y = x + 4$ es la asíntota inclinada
↓
$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 5} = x + 4 + \frac{14}{x - 5}$$

muestra que la asíntota inclinada es $y = x + 4$. La gráfica consta de dos ramas: una a la izquierda de la recta $x = 5$ y otra a la derecha de la recta $x = 5$. Vea la FIGURA 1.3.18. ■

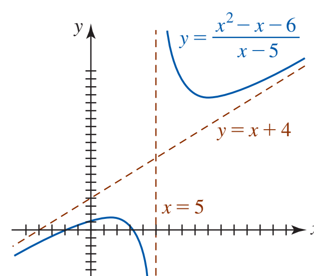


FIGURA 1.3.18 Gráfica de la función en el ejemplo 6*b*)

Posdata: Gráfica con un hueco En todo el análisis de las asíntotas se supuso que las funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ en (14) no tenían factores comunes. Se sabe que si $q(a) = 0$ y $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes, entonces la recta $x = a$ necesariamente es una asíntota vertical para la gráfica de f. Sin embargo, cuando $p(a) = 0$ y $q(a) = 0$, entonces $x = a$ *puede no ser* una asíntota; en la gráfica puede haber simplemente un **hueco**.

Si $p(a) = 0$ y $q(a) = 0$, entonces por el teorema de factorización del álgebra, $x - a$ es un factor tanto de p como de q.

EJEMPLO 7 Gráfica con un hueco

Grafique la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$.

Solución Aunque los ceros de $x^2 - 1 = 0$ son ± 1, sólo $x = 1$ es una asíntota vertical. Observe que el numerador $p(x)$ y el denominador $q(x)$ tienen el factor común $x + 1$, que puede cancelarse en el supuesto de que $x \neq -1$:

la igualdad se cumple para $x \neq -1$
↓
$$f(x) = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x - 3}{x - 1}. \tag{15}$$

Graficamos $y = \dfrac{x - 3}{x - 1}$, $x \neq -1$, al observar que la intersección y es $(0, 3)$, una intersección x es $(3, 0)$, una asíntota vertical es $x = 1$ y una asíntota horizontal es $y = 1$. Aunque $x = -1$ no es una asíntota vertical, el hecho de que f no está definida en ese número se representa al dibujar un círculo o hueco abierto en la gráfica en el punto correspondiente a $(-1, 2)$. Vea la FIGURA 1.3.19. ■

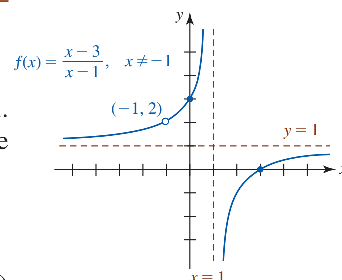


FIGURA 1.3.19 Gráfica de la función en el ejemplo 7

La coordenada y del hueco es el valor de la fracción reducida (15) en $x = -1$.

$f(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

En las dos últimas secciones hemos trabajado principalmente con funciones polinomiales. Las funciones polinomiales constituyen los objetos fundamentales de una clase conocida como **funciones algebraicas**. En esta sección vimos que una función racional es el cociente de dos funciones polinomiales. En general, una función algebraica implica un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces cuadradas de funciones polinomiales. Así,

$$y = 2x^2 - 5x, \quad y = \sqrt[3]{x^2}, \quad y = x^4 + \sqrt{x^2 + 5} \quad \text{y} \quad y = \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 2x^2 + 7}$$

son funciones algebraicas. Empezando con la siguiente sección consideraremos funciones que pertenecen a una clase diferente conocida como **funciones trascendentes**. Una función trascendente f se define como una función que *no* es algebraica. Las seis funciones trigonométricas y las funciones exponencial y logarítmica son ejemplos de funciones trascendentes.

Ejercicios 1.3
Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-3.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre una ecuación de la recta que pasa por (1, 2) con la pendiente indicada.

1. $\frac{2}{3}$ **2.** $\frac{1}{10}$

3. 0 **4.** -2

5. -1 **6.** indefinida

En los problemas 7-10, encuentre la pendiente y las intersecciones x y y de la recta dada. Grafique la recta.

7. $3x - 4y + 12 = 0$ **8.** $\frac{1}{2}x - 3y = 3$

9. $2x - 3y = 9$ **10.** $-4x - 2y + 6 = 0$

En los problemas 11-16, encuentre una ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas.

11. Pasa por (2, 3) y (6, -5)

12. Pasa por (5, -6) y (4, 0)

13. Pasa por (-2, 4) y es paralela a $3x + y - 5 = 0$

14. Pasa por (5, -7) y es paralela al eje y.

15. Pasa por (2, 3) y es perpendicular a $x - 4y + 1 = 0$

16. Pasa por (-5, -4) y es perpendicular a la recta que pasa por (1, 1) y (3, 11).

En los problemas 17 y 18, encuentre una función lineal $f(x) = ax + b$ que cumpla las dos condiciones dadas.

17. $f(-1) = 5, f(1) = 6$

18. $f(-1) = 1 + f(2), f(3) = 4f(1)$

En los problemas 19 y 20, encuentre una ecuación de la recta roja L que se muestra en la figura dada.

19.

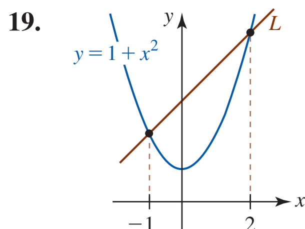


FIGURA 1.3.20 Gráfica para el problema 19

20.

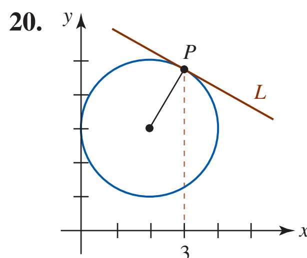


FIGURA 1.3.21 Gráfica para el problema 20

En los problemas 21-26, considere la función cuadrática f.

a) Encuentre todas las intersecciones de la gráfica de f.
b) Exprese la función f en forma normal.
c) Encuentre el vértice y el eje de simetría.
d) Trace la gráfica de f.
e) ¿Cuál es el rango de f?
f) ¿En qué intervalo es creciente f? ¿Y decreciente?

21. $f(x) = x(x + 5)$ **22.** $f(x) = -x^2 + 4x$

23. $f(x) = (3 - x)(x + 1)$ **24.** $f(x) = (x - 2)(x - 6)$

25. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ **26.** $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

En los problemas 27-32, describa con palabras la forma en que es posible obtener la gráfica de la función dada a partir de $y = x^2$ por medio de transformaciones rígidas o no rígidas.

27. $f(x) = (x - 10)^2$ **28.** $f(x) = (x + 6)^2$

29. $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 4)^2 + 9$ **30.** $f(x) = 10(x - 2)^2 - 1$

31. $f(x) = (-x - 6)^2 - 4$ **32.** $f(x) = -(1 - x)^2 + 1$

En los problemas 33-42, proceda como en el ejemplo 5 y trace la gráfica de la función polinomial dada f.

33. $f(x) = x^3 - 4x$ **34.** $f(x) = 9x - x^3$

35. $f(x) = -x^3 + x^2 + 6x$ **36.** $f(x) = x^3 + 7x^2 + 12x$

37. $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$

38. $f(x) = (2 - x)(x + 2)(x + 1)$

39. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$ **40.** $f(x) = x^2(x - 2)^2$

41. $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$ **42.** $f(x) = x^5 - 4x^3$

En los problemas 43-48, relacione la gráfica dada con una de las funciones polinomiales en *a*)-*f*).

a) $f(x) = x^2(x - 1)^2$ ***b***) $f(x) = -x^3(x - 1)$
c) $f(x) = x^3(x - 1)^3$ ***d***) $f(x) = -x(x - 1)^3$
e) $f(x) = -x^2(x - 1)$ ***f***) $f(x) = x^3(x - 1)^2$

43.

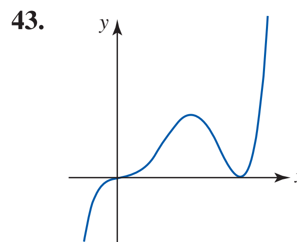


FIGURA 1.3.22 Gráfica para el problema 43

44.

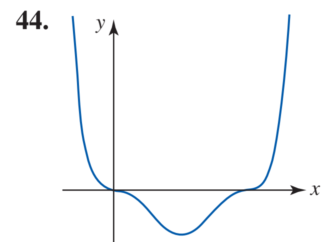


FIGURA 1.3.23 Gráfica para el problema 44

45.

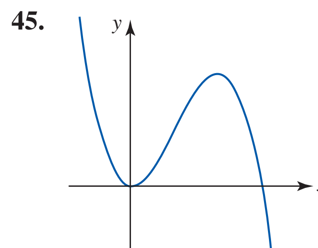


FIGURA 1.3.24 Gráfica para el problema 45

46.

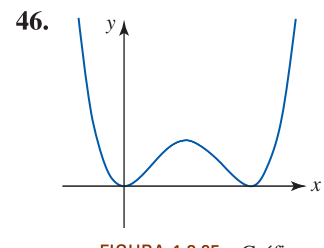


FIGURA 1.3.25 Gráfica para el problema 46

47.

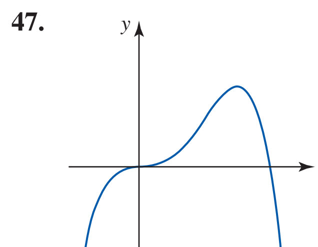


FIGURA 1.3.26 Gráfica para el problema 47

48.

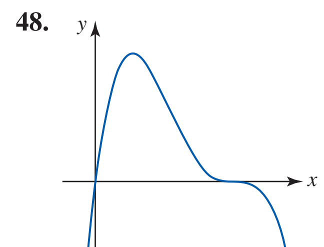


FIGURA 1.3.27 Gráfica para el problema 48

En los problemas 49-62, encuentre todas las asíntotas para la gráfica de la función racional dada. Encuentre las intersecciones x y y de la gráfica. Trace la gráfica de f.

49. $f(x) = \dfrac{4x - 9}{2x + 3}$

50. $f(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 2}$

51. $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$

52. $f(x) = \dfrac{4}{(x + 2)^3}$

53. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

54. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

55. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$

56. $f(x) = \dfrac{x(x - 5)}{x^2 - 9}$

57. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x}$

58. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x}$

59. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

60. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 2}$

61. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$

62. $f(x) = \dfrac{-(x - 1)^2}{x + 2}$

63. Determine si los números -1 y 2 están en el rango de la función racional $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 4}$.

64. Determine los puntos donde la gráfica de $f(x) = \dfrac{(x - 3)^2}{x^2 - 5x}$ corta su asíntota horizontal.

Modelos matemáticos

65. Temperaturas relacionadas La relación funcional entre grados Celsius T_C y grados Fahrenheit T_F es lineal. Exprese T_F como una función de T_C si (0 °C, 32 °F) y (60 °C, 140 °F) están en la gráfica de T_F. Muestre que 100 °C es equivalente al punto de ebullición Fahrenheit 212 °F. Vea la FIGURA 1.3.28.

66. Temperaturas relacionadas La relación funcional entre grados Celsius T_C y unidades kelvin T_K es lineal. Exprese T_K como una función de T_C dado que (0 °C, 273 K) y (27 °C, 300 K) están en la gráfica de T_K. Exprese el punto de ebullición 100 °C en unidades kelvin. El cero absoluto se define como 0 K. ¿A qué es igual esto en grados Celsius? Exprese T_K como una función lineal de T_F. ¿A qué es igual 0 K en grados Fahrenheit? Vea la figura 1.3.28.

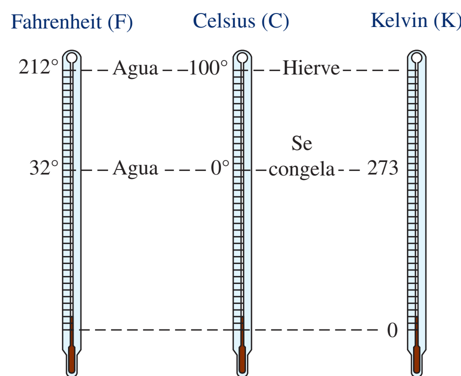


FIGURA 1.3.28 Termómetros para los problemas 65 y 66

67. Interés simple En interés simple la cantidad A devengada con el paso del tiempo es la función lineal $A = P + Prt$, donde P es el capital, t se mide en años y r es la tasa de interés anual (expresada como un decimal). Calcule A al cabo de 20 años si el capital es $P = 1\,000$ y la tasa de interés anual es 3.4%. ¿En qué instante se cumple que $A = 2\,200$?

68. Depreciación lineal La depreciación de línea recta, o depreciación lineal, consta de un artículo que pierde toda su utilidad inicial de A dólares a lo largo de un periodo de n años por una cantidad A/n anual. Si un artículo que cuesta \$20 000 cuando está nuevo se deprecia linealmente a lo largo de 25 años, determine la función lineal que proporciona el valor V después de x años, donde $0 \le x \le 25$. ¿Cuál es el valor del artículo al cabo de 10 años?

69. Una pelota se lanza hacia arriba desde el nivel del piso con una velocidad inicial de 96 pies/s. La altura que alcanza la pelota con respecto al suelo está dada por la función cuadrática $s(t) = -16t^2 + 96t$. ¿En qué instante la pelota está en el suelo? Grafique s sobre el intervalo de tiempo para el cual $s(t) \ge 0$.

70. En el problema 69, ¿en qué instante la pelota está a 80 pies por arriba del piso? ¿Cuán alto asciende la pelota?

Piense en ello

71. Considere la función lineal $f(x) = \frac{5}{2}x - 4$. Si x se cambia por 1 unidad, ¿cuántas unidades cambia y? ¿Si x se cambia por 2 unidades? ¿Si x se cambia por n unidades (n un entero positivo)?

72. Considere el intervalo $[x_1, x_2]$ y la función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Demuestre que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

e interprete este resultado geométricamente para $a > 0$.

73. ¿Cómo encontraría una ecuación de la recta que es perpendicular a la bisectriz del segmento de recta que pasa por $\left(\frac{1}{2}, 10\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$?

74. Usando sólo los conceptos presentados en esta sección, ¿cómo demostraría o refutaría que el triángulo con vértices (2, 3), (−1, −3) y (4, 2) es rectángulo?

1.4 Funciones trascendentes

Introducción En las dos primeras secciones de este capítulo analizamos varias propiedades y gráficas de **funciones algebraicas**. En las tres secciones siguientes estudiaremos las **funciones trascendentes**. Básicamente, una función trascendente f es una función que no es algebraica. Una función trascendente puede ser tan simple como la función potencia $y = x^n$, donde la potencia es un número irracional, pero las conocidas funciones trascendentes de precálculo en matemáticas son las funciones trigonométricas, las funciones trigonométricas inversas y las funciones exponencial y logarítmica. En esta sección se analizan las seis funciones trigonométricas y sus gráficas. En la sección 1.5 se considerarán las funciones trigonométricas inversas y en la sección 1.6, las funciones exponencial y logarítmica.

Para un repaso de las bases de la circunferencia unitaria y trigonometría de triángulos rectángulos, vea las *Páginas de recursos* al final del texto.

Gráficas del seno y coseno Recuerde de precálculo en matemáticas que las funciones trigonométricas seno y coseno tienen **periodo** 2π:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x. \tag{1}$$

Se dice que la gráfica de *cualquier* función periódica sobre un intervalo de longitud igual a su periodo es un **ciclo** de su gráfica. La gráfica de una función periódica se obtiene fácilmente al trazar de manera repetida un ciclo de su gráfica. En la FIGURA 1.4.1 se muestra un ciclo de la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ (en rojo); la gráfica de f sobre, por ejemplo, el intervalo $[-2\pi, 0]$ y $[2\pi, 4\pi]$ (en azul) es exactamente la misma que la gráfica sobre $[0, 2\pi]$. Debido a que $f(-x) = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x = -f(x)$, la función seno es una función impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen.

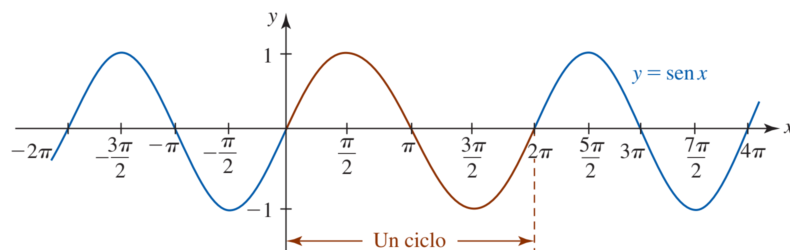


FIGURA 1.4.1 Gráfica de $y = \operatorname{sen} x$

La FIGURA 1.4.2 muestra un ciclo (en rojo) de $g(x) = \cos x$ sobre $[0, 2\pi]$ junto con la extensión de ese ciclo (en azul) hacia los intervalos adyacentes $[-2\pi, 0]$ y $[2\pi, 4\pi]$. En contraste con la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ donde $f(0) = f(2\pi) = 0$, para la función coseno se tiene $g(0) = g(2\pi) = 1$. La función coseno es una función par: $g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x)$, de modo que en la figura 1.4.2 puede verse que su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

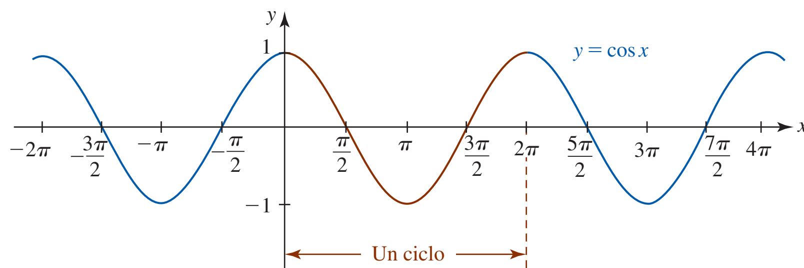


FIGURA 1.4.2 Gráfica de $y = \cos x$

Las funciones seno y coseno están definidas para todos los números reales x. También, resulta evidente en las figuras 1.4.1 y 1.4.2 que

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \qquad \text{y} \qquad -1 \leq \cos x \leq 1, \tag{2}$$

o bien, de manera equivalente, $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$. En otras palabras,

- el dominio de sen x y cos x es $(-\infty, \infty)$, y el rango de sen x y cos x es $[-1, 1]$.

Intersecciones En este curso y en cursos subsecuentes de matemáticas es importante conocer las coordenadas x de las intersecciones x de las gráficas seno y coseno; en otras palabras, los ceros de $f(x) = \text{sen}\, x$ y $g(x) = \cos x$. A partir de la gráfica seno de la figura 1.4.1 observamos que los ceros de la función seno, o los números para los cuales $\text{sen}\, x = 0$, son $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Estos números son múltiplos enteros de π. A partir de la gráfica coseno de la figura 1.4.2 notamos que $\cos x = 0$ cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$ Estos números son múltiplos enteros impares de $\pi/2$.

Si n representa un entero, entonces $2n + 1$ es un entero impar. En consecuencia, los **ceros** de $f(x) = \text{sen}\, x$ y $g(x) = \cos x$ pueden escribirse en forma breve como:

- $\text{sen}\, x = 0$ para $x = n\pi$, n un entero, (3)
- $\cos x = 0$ para $x = (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}$, n un entero. (4)

Valores numéricos adicionales importantes de las funciones seno y coseno sobre el intervalo $[0, \pi]$ se proporcionan en la tabla siguiente.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\text{sen}\, x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

(5)

Usted debe poder discernir los valores $\text{sen}\, x$ y $\cos x$ sobre $[\pi, 2\pi]$ a partir de esta tabla usando el concepto de circunferencia unitaria y un ángulo de referencia. Por supuesto, fuera del intervalo $[0, 2\pi]$ es posible determinar valores funcionales correspondientes usando periodicidad.

Otras funciones trigonométricas Cuatro funciones trigonométricas adicionales se definen en términos de cocientes o recíprocos de las funciones seno y coseno. La **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante** se definen, respectivamente, por

$$\tan x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}, \tag{6}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\text{sen}\, x}. \tag{7}$$

El dominio de cada función en (6) y (7) es el conjunto de números reales excepto aquellos números para los cuales el denominador es cero. A partir de (4) se observa que

- el dominio de $\tan x$ y de $\sec x$ es $\{x \mid x \neq (2n + 1)\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

De manera semejante, a partir de (3) se concluye que

- el dominio de $\cot x$ y de $\csc x$ es $\{x \mid x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Además, a partir de (2),

$$|\sec x| = \left|\frac{1}{\cos x}\right| = \frac{1}{|\cos x|} \geq 1 \tag{8}$$

y

$$|\csc x| = \left|\frac{1}{\text{sen}\, x}\right| = \frac{1}{|\text{sen}\, x|} \geq 1. \tag{9}$$

Recuerde que una desigualdad con valor absoluto como (8) significa $\sec x \geq 1$ o $\sec x \leq -1$. Por tanto, el rango de las funciones secante y cosecante es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Las funciones tangente y cotangente tienen el mismo rango: $(-\infty, \infty)$. Al usar (5) pueden determinarse algunos valores numéricos de $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$. Por ejemplo,

$$\tan\frac{2\pi}{3} = \frac{\text{sen}(2\pi/3)}{\cos(2\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}.$$

Gráficas Los números que hacen cero los denominadores de tan x, cot x, sec x y csc x corresponden a asíntotas verticales de sus gráficas. En virtud de (4), las asíntotas verticales de las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \sec x$ son $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$ Por otra parte, a partir de (3), las asíntotas verticales de las gráficas de $y = \cot x$ y $y = \csc x$ son $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Estas asíntotas son las rectas discontinuas rojas en las FIGURAS 1.4.3–1.4.6.

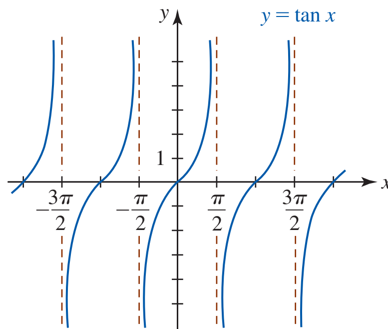


FIGURA 1.4.3 Gráfica de $y = \tan x$

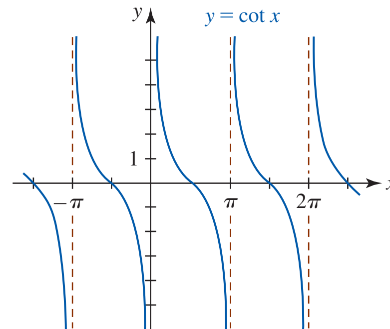


FIGURA 1.4.4 Gráfica de $y = \cot x$

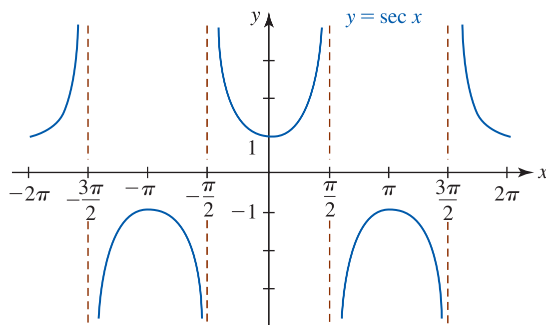


FIGURA 1.4.5 Gráfica de $y = \sec x$

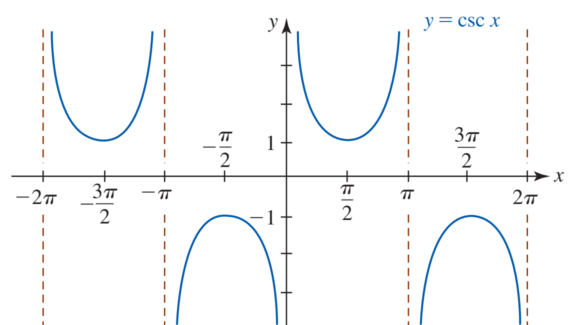


FIGURA 1.4.6 Gráfica de $y = \csc x$

Porque las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π, sec x y csc x también son periódicas con periodo 2π. Pero a partir de las figuras 1.4.3 y 1.4.4 debe resultar evidente que el periodo de las funciones tangente y cotangente es π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{y} \qquad \cot(x + \pi) = \cot x. \tag{10}$$

También, tan x, cot x y csc x son funciones impares; sec x es una función par.

Transformación y gráficas Es posible obtener variaciones de las gráficas de las funciones trigonométricas por medio de transformaciones rígidas y no rígidas. Gráficas de funciones de la forma

$$y = D + A\,\text{sen}(Bx + C) \qquad \text{o bien,} \qquad y = D + A\cos(Bx + C), \tag{11}$$

donde A, $B > 0$, C y D son constantes reales, representan desplazamientos, compresiones y estiramientos de las gráficas seno y coseno básicas. Por ejemplo,

desplazamiento vertical ↓ estiramiento/compresión/reflexión vertical ↓

$$y = D + A\,\text{sen}(Bx + C).$$

↑ estiramiento/compresión horizontal al cambiar el periodo ↑ desplazamiento horizontal

El número $|A|$ se denomina **amplitud** de las funciones o de sus gráficas. La amplitud de las funciones básicas $y = \text{sen}\, x$ y $y = \cos x$ es $|A| = 1$. El **periodo** de cada función en (11) es $2\pi/B$, $B > 0$, y la porción de la gráfica de cada función en (11) sobre el intervalo $[0, 2\pi/B]$ se denomina un **ciclo**.

EJEMPLO 1 Periodos

***a*)** El periodo de $y = \text{sen}\, 2x$ es $2\pi/2 = \pi$, y en consecuencia un ciclo de la gráfica se completa en el intervalo $[0, \pi]$.

***b*)** Antes de determinar el periodo de $\text{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right)$ primero es necesario que volvamos a escribir la función como $\text{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ (el seno es una función impar). Ahora, el periodo es $2\pi/\frac{1}{2} = 4\pi$, y por consiguiente un ciclo de la gráfica se completa en el intervalo $[0, 4\pi]$. ■

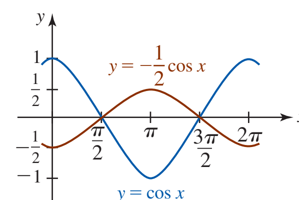


FIGURA 1.4.7 Gráfica de la función en el ejemplo 2*a*)

EJEMPLO 2 Gráficas de transformaciones verticales

Grafique

***a*)** $y = -\dfrac{1}{2}\cos x$ ***b*)** $y = 1 + 2\,\text{sen}\, x.$

Solución

***a*)** La gráfica de $y = -\frac{1}{2}\cos x$ es la gráfica de $y = \cos x$ comprimida verticalmente por un factor de 2, y el signo menos indica que luego la gráfica es reflejada en el eje x. Con la identificación $A = -\frac{1}{2}$ se observa que la amplitud de la función es $|A| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. La gráfica de $y = -\frac{1}{2}\cos x$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ se muestra en rojo en la FIGURA 1.4.7.

***b*)** La gráfica de $y = 2\,\text{sen}\, x$ es la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ estirada verticalmente por un factor de 2. La amplitud de la gráfica es $|A| = |2| = 2$. La gráfica de $y = 1 + 2\,\text{sen}\, x$ es la gráfica de $y = 2\,\text{sen}\, x$ desplazada una unidad hacia arriba. Vea la FIGURA 1.4.8. ■

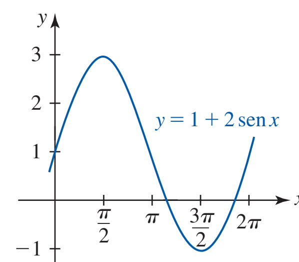


FIGURA 1.4.8 Gráfica de la función en el ejemplo 2*b*)

EJEMPLO 3 Gráfica coseno comprimida horizontalmente

Encuentre el periodo de $y = \cos 4x$ y grafique la función.

Solución Con la identificación de que $B = 4$, se ve que el periodo de $y = \cos 4x$ es $2\pi/4 = \pi/2$. Se concluye que la gráfica de $y = \cos 4x$ es la gráfica de $y = \cos x$ comprimida horizontalmente. Para graficar la función, se traza un ciclo de la gráfica coseno con amplitud 1 sobre el intervalo $[0, \pi/2]$ y luego se usa la periodicidad para extender la gráfica. La FIGURA 1.4.9 muestra cuatro ciclos completos de $y = \cos 4x$ (el ciclo básico en rojo y la gráfica extendida en azul) y un ciclo de $y = \cos x$ (mostrado en verde) sobre $[0, 2\pi]$. Observe que $y = \cos 4x$ alcanza su mínimo en $x = \pi/4$ puesto que $\cos 4(\pi/4) = \cos \pi = -1$ y su máximo en $x = \pi/2$ puesto que $\cos 4(\pi/2) = \cos 2\pi = 1$. ■

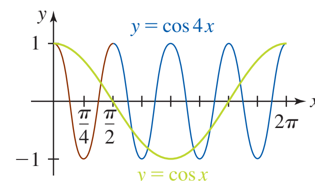


FIGURA 1.4.9 Gráfica de la función en el ejemplo 3

Por la sección 1.2 se sabe que la gráfica de $y = \cos(x - \pi/2)$ es la gráfica coseno básica desplazada hacia la derecha. En la FIGURA 1.4.10 la gráfica de $y = \cos(x - \pi/2)$ (en rojo) sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ es un ciclo de $y = \cos x$ sobre el intervalo $[-\pi/2, 3\pi/2]$ (en azul) desplazada horizontalmente $\pi/2$ unidades a la derecha. En forma semejante, las gráficas de $y = \text{sen}(x + \pi/2)$ y $y = \text{sen}(x - \pi/2)$ son las gráficas seno básicas desplazadas horizontalmente $\pi/2$ unidades a la izquierda y a la derecha, respectivamente. Vea la FIGURA 1.4.11 y la FIGURA 1.4.12.

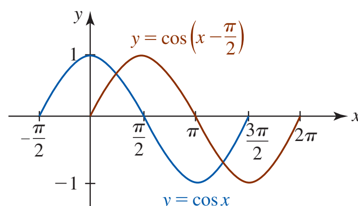


FIGURA 1.4.10 Gráfica coseno desplazada horizontalmente

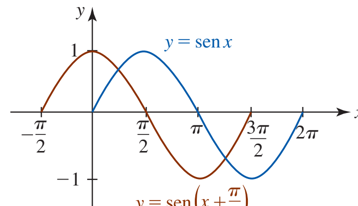


FIGURA 1.4.11 Gráfica seno desplazada horizontalmente

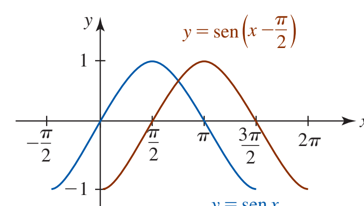


FIGURA 1.4.12 Gráfica seno desplazada horizontalmente

Al comparar las gráficas rojas en las figuras 1.4.10-1.4.12 con las gráficas en las figuras 1.4.1 y 1.4.2 se observa que

- la gráfica coseno desplazada $\pi/2$ unidades a la derecha es la gráfica seno,
- la gráfica seno desplazada $\pi/2$ unidades a la izquierda es la gráfica coseno, y
- la gráfica seno desplazada $\pi/2$ unidades a la derecha es la gráfica coseno reflejada en el eje x.

En otras palabras, se han comprobado gráficamente las siguientes identidades

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x, \qquad \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x. \quad (12)$$

Suponga que $f(x) = A$ sen Bx. Entonces

$$f\left(x + \frac{C}{B}\right) = A \operatorname{sen} B\left(x + \frac{C}{B}\right) = A \operatorname{sen}(Bx + C). \quad (13)$$

El resultado en (13) muestra que la gráfica de $y = A$ sen$(Bx + C)$ puede obtenerse al desplazar la gráfica de $f(x) = A$ sen Bx horizontalmente una distancia $|C|/B$. Si $C < 0$, el desplazamiento es hacia la derecha, mientras que si $C > 0$, el desplazamiento es hacia la izquierda. El número $|C|/B$ se denomina **desplazamiento de fase** de las gráficas de las funciones en (3).

EJEMPLO 4 Gráfica coseno desplazada horizontalmente

La gráfica de $y = 10 \cos 4x$ está desplazada $\pi/12$ unidades a la derecha. Encuentre su ecuación.

Solución Al escribir $f(x) = 10 \cos 4x$ y usar (13) encontramos

$$f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 10 \cos 4\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \qquad \text{o bien,} \qquad y = 10 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right).$$

En la última ecuación se identifica $C = -\pi/3$. El desplazamiento de fase es $\pi/12$. ■

Nota: Como cuestión práctica, el desplazamiento de fase para $y = A$ sen$(Bx + C)$ o $y = A$ cos$(Bx + C)$ puede obtenerse al factorizar el número B a partir de $Bx + C$. Por ejemplo,

$$y = A \operatorname{sen}(Bx + C) = A \operatorname{sen} B\left(x + \frac{C}{B}\right).$$

EJEMPLO 5 Gráficas desplazadas horizontalmente

Grafique

a) $y = 3$ sen$(2x - \pi/3)$ ***b***) $y = 2\cos(\pi x + \pi)$.

Solución

a) Para efectos de comparación, primero graficaremos $y = 3$ sen $2x$. La amplitud de $y = 3$ sen $2x$ es $|A| = 3$ y su periodo es $2\pi/2 = \pi$. Así, un ciclo de $y = 3$ sen $2x$ se completa sobre el intervalo $[0, \pi]$. Luego, extendemos esta gráfica hacia al intervalo adyacente $[\pi, 2\pi]$ como se muestra en azul en la FIGURA 1.4.13. A continuación, volvemos a escribir $y = 3$ sen$(2x - \pi/3)$ al factorizar 2 de $2x - \pi/3$:

$$y = 3 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

A partir de la forma de la última expresión vemos que el desplazamiento de fase es $\pi/6$. La gráfica de la función dada, mostrada en rojo en la figura 1.4.13, se obtiene al desplazar la gráfica de $y = 3$ sen $2x$ (en azul) $\pi/6$ unidades a la derecha.

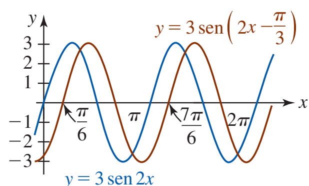


FIGURA 1.4.13 Gráfica de la función en el ejemplo 5*a*)

b) La amplitud de $y = 2\cos \pi x$ es $|A| = 2$ y el periodo es $2\pi/\pi = 2$. Así, un ciclo de $y = 2\cos \pi x$ se completa sobre el intervalo [0, 2]. En la FIGURA 1.4.14 se muestran (en azul) dos ciclos de la gráfica de $y = 2\cos \pi x$. Las intersecciones x de esta gráfica corresponden a los valores de x para los que $\cos \pi x = 0$. Por (4), esto implica $\pi x = (2n + 1)\pi/2$ o $x = (2n + 1)/2$, con n un entero. En otras palabras, para $n = 0, -1, 1, -2, 2, -3, \ldots$ obtenemos $x = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}$, y así sucesivamente. Luego, al volver a escribir la función dada como

$$y = 2\cos \pi(x + 1)$$

observamos que el desplazamiento de fase es 1. La gráfica de $y = 2\cos(\pi x + \pi)$ mostrada en rojo en la figura 1.4.14 se obtiene al desplazar 1 unidad a la izquierda la gráfica de $y = 2\cos \pi x$ (en azul). Esto significa que las intersecciones x son las mismas para ambas gráficas. ■

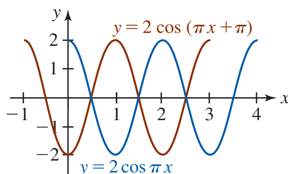


FIGURA 1.4.14 Gráfica de la función en el ejemplo 5*b*)

En matemáticas aplicadas, las funciones trigonométricas sirven como modelos matemáticos para muchos fenómenos periódicos.

EJEMPLO 6 Corriente alterna

Un modelo matemático para la corriente I (en amperes) en un alambre de un circuito de corriente alterna está dado por $I(t) = 30 \text{ sen } 120\pi t$, donde t es el tiempo medido en segundos. Trace un ciclo de la gráfica. ¿Cuál es el valor máximo de la corriente?

Solución La gráfica tiene una amplitud 30 y periodo $2\pi/120\pi = \frac{1}{60}$. En consecuencia, trazamos un ciclo de la curva seno básica sobre el intervalo $[0, \frac{1}{60}]$, como se muestra en la FIGURA 1.4.15. A partir de la figura, resulta evidente que el valor máximo de la corriente es $I = 30$ amperes y ocurre en el intervalo $[0, \frac{1}{60}]$ en $t = \frac{1}{240}$ puesto que

$$I\left(\frac{1}{240}\right) = 30\,\text{sen}\left(120\pi \cdot \frac{1}{240}\right) = 30\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 30.$$ ■

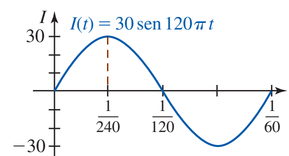


FIGURA 1.4.15 La gráfica de la corriente en el ejemplo 6, muestra que hay 60 ciclos en un segundo

Para referencia futura Las identidades trigonométricas se usan en todo el cálculo, especialmente en el estudio del cálculo integral. Para facilitar las referencias, a continuación se enumeran algunas identidades que revisten particular importancia.

Identidades pitagóricas

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{14}$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \tag{15}$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x \tag{16}$$

Fórmulas de suma y diferencia

$$\text{sen}(x_1 \pm x_2) = \text{sen}\,x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1\,\text{sen}\,x_2 \tag{17}$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \text{sen}\,x_1\,\text{sen}\,x_2 \tag{18}$$

Fórmulas para el doble de un ángulo

$$\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x \cos x \tag{19}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \tag{20}$$

Fórmulas para la mitad de un ángulo

$$\text{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x) \tag{21}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x) \tag{22}$$

Identidades adicionales pueden encontrarse en las *Páginas de recursos* al final de este texto.

Ejercicios 1.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-5.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, use técnicas de desplazamiento, estiramiento, compresión y reflexión para dibujar por lo menos un ciclo de la gráfica de la función dada.

1. $y = \frac{1}{2} + \cos x$

2. $y = -1 + \cos x$

3. $y = 2 - \text{sen}\,x$

4. $y = 3 + 3\,\text{sen}\,x$

5. $y = -2 + 4\cos x$

6. $y = 1 - 2\,\text{sen}\,x$

En los problemas 7-14, encuentre la amplitud y el periodo de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

7. $y = 4\,\text{sen}\,\pi x$

8. $y = -5\,\text{sen}\,\frac{x}{2}$

9. $y = -3\cos 2\pi x$

10. $y = \frac{5}{2}\cos 4x$

11. $y = 2 - 4\,\text{sen}\,x$

12. $y = 2 - 2\,\text{sen}\,\pi x$

13. $y = 1 + \cos\frac{2x}{3}$

14. $y = -1 + \text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$

En los problemas 15-18, la figura dada muestra un ciclo de una gráfica seno o coseno. A partir de la figura, determine A y D y escriba una ecuación de la forma $y = D + A$ sen x o $y = D + A \cos x$ para la gráfica.

15.

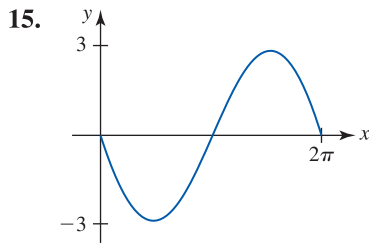


FIGURA 1.4.16 Gráfica para el problema 15

16.

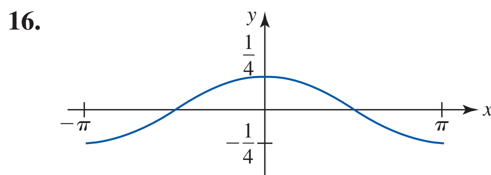


FIGURA 1.4.17 Gráfica para el problema 16

17.

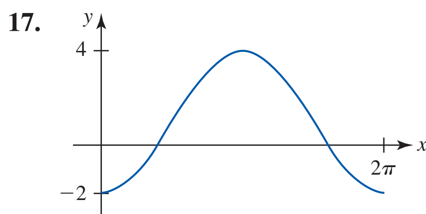


FIGURA 1.4.18 Gráfica para el problema 17

18.

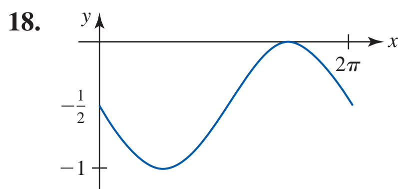


FIGURA 1.4.19 Gráfica para el problema 18

En los problemas 19-24, la figura dada muestra un ciclo de una gráfica seno o coseno. A partir de la figura, determine A y B y escriba una ecuación de la forma $y = A$ sen Bx o $y = A \cos Bx$ para la gráfica.

19.

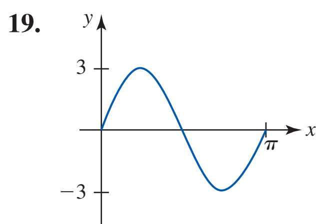


FIGURA 1.4.20 Gráfica para el problema 19

20.

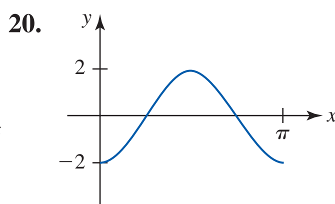


FIGURA 1.4.21 Gráfica para el problema 20

21.

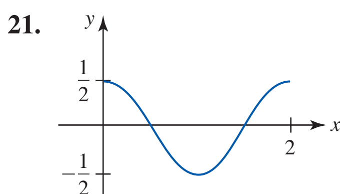


FIGURA 1.4.22 Gráfica para el problema 21

22.

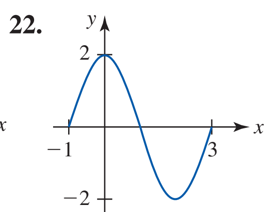


FIGURA 1.4.23 Gráfica para el problema 22

23.

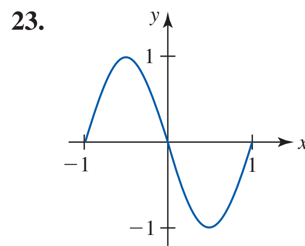


FIGURA 1.4.24 Gráfica para el problema 23

24.

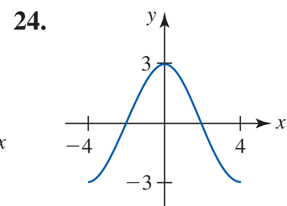


FIGURA 1.4.25 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25-34, encuentre la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

25. $y = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

26. $y = \operatorname{sen}\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

27. $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

28. $y = -2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

29. $y = 4\cos\left(2x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$

30. $y = 3\operatorname{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

31. $y = 3\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$

32. $y = -\cos\left(\dfrac{x}{2} - \pi\right)$

33. $y = -4\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

34. $y = 2\cos\left(-2\pi x - \dfrac{4\pi}{3}\right)$

En los problemas 35 y 36, escriba una ecuación de la función cuya gráfica se describe con palabras.

35. La gráfica de $y = \operatorname{sen} \pi x$ está estirada verticalmente hacia arriba por un factor de 5 y está desplazada $\frac{1}{2}$ unidad hacia la derecha.

36. La gráfica de $y = 4\cos\dfrac{x}{2}$ está desplazada 8 unidades hacia abajo y está desplazada $2\pi/3$ unidades hacia la izquierda.

En los problemas 37 y 38, encuentre las intersecciones x de la gráfica de la función dada sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. Luego, use periodicidad para encontrar todas las intersecciones.

37. $y = -1 + \operatorname{sen} x$

38. $y = 1 - 2\cos x$

En los problemas 39-44, encuentre las intersecciones x de la gráfica de la función dada. No grafique.

39. $y = \operatorname{sen} \pi x$

40. $y = -\cos 2x$

41. $y = 10\cos\dfrac{x}{2}$

42. $y = 3\operatorname{sen}(-5x)$

43. $y = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

44. $y = \cos(2x - \pi)$

En los problemas 45-52, encuentre el periodo, las intersecciones x y las asíntotas verticales de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

45. $y = \tan \pi x$

46. $y = \tan\dfrac{x}{2}$

47. $y = \cot 2x$

48. $y = -\cot\dfrac{\pi x}{3}$

49. $y = \tan\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

50. $y = \dfrac{1}{4}\cot\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

51. $y = -1 + \cot \pi x$

52. $y = \tan\left(x + \dfrac{5\pi}{6}\right)$

En los problemas 53-56, encuentre el periodo y las asíntotas verticales de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

53. $y = 3\csc \pi x$

54. $y = -2\csc\dfrac{x}{3}$

55. $y = \sec\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

56. $y = \csc(4x + \pi)$

Modelos matemáticos

57. Profundidad del agua La profundidad del agua d a la entrada de un puerto pequeño en el instante t es modelada por una función de la forma

$$d(t) = D + A\,\text{sen}\,B\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

donde A es la mitad de la diferencia entre las profundidades de la marea alta y la marea baja, $2\pi/B$, $B > 0$ es el periodo de mareas y D es la profundidad media. Suponga que el periodo de mareas es 12 horas, la profundidad media en la marea alta es 18 pies y que la profundidad en la marea baja es 6 pies. Dibuje dos ciclos de la gráfica de d.

58. Temperatura Fahrenheit Suponga que

$$T(t) = 50 + 10\,\text{sen}\frac{\pi}{12}(t - 8), \quad 0 \le t \le 24$$

es un modelo matemático de la temperatura Fahrenheit a las t horas después de medianoche durante un cierto día de la semana.

a) ¿Cuál es la temperatura a las 8 a.m.?

b) ¿A qué hora(s) se cumple $T(t) = 60$?

c) Trace la gráfica de T.

d) Encuentre las temperaturas máxima y mínima, así como las horas a que ocurren.

Problemas con calculadora/SAC

59. Aceleración debida a la gravedad Debido al movimiento de rotación de la Tierra, la forma de ésta no es esférica, sino que se elonga en el ecuador y se achata en los polos. Como resultado, la aceleración debida a la gravedad no es la constante 980 cm/s^2, sino que varía con la latitud θ. Estudios satelitales han sugerido que la aceleración debida a la gravedad g es aproximada por el modelo matemático

$$g = 978.0309 + 5.18552\,\text{sen}^2\theta - 0.00570\,\text{sen}^2 2\theta.$$

Encuentre g

a) en el ecuador ($\theta = 0°$),

b) en el polo norte y

c) a 45° latitud norte.

60. Lanzamiento de bala El alcance de una bala soltada desde una altura h por arriba del nivel del piso con una velocidad inicial v_0 a un ángulo ϕ con respecto a la horizontal puede aproximarse por el modelo matemático

$$R = \frac{v_0\cos\phi}{g}\left[v_0\,\text{sen}\,\phi + \sqrt{v_0^2\,\text{sen}^2\phi + 2gh}\right],$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Vea la FIGURA 1.4.26.

a) Si $v_0 = 13.7$ m/s, $\phi = 40°$ y $g = 9.8$ m/s^2, compare los alcances que se obtienen para las alturas $h = 2.0$ m y $h = 2.4$ m.

b) Explique por qué un incremento en h produce un incremento en el alcance R si los otros parámetros se mantienen fijos.

c) ¿Qué implica lo anterior respecto a la ventaja que la altura otorga a un lanzador de bala?

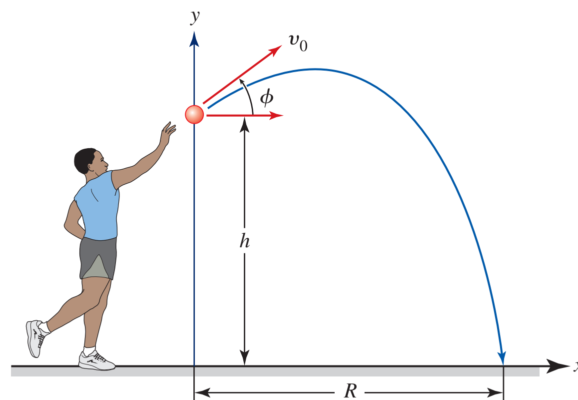


FIGURA 1.4.26 Proyectil en el problema 60

Piense en ello

61. La función $f(x) = \text{sen}\,\frac{1}{2}x + \text{sen}\,2x$ es periódica. ¿Cuál es el periodo de f?

62. Analice y luego dibuje las gráficas de $y = |\text{sen}\,x|$ y $y = |\cos x|$.

63. Analice y luego dibuje las gráficas de $y = |\sec x|$ y $y = |\csc x|$.

64. ¿Es posible que la solución de la ecuación dada sea un número real?

a) $9\csc x = 1$

b) $7 + 10\sec x = 0$

c) $\sec x = -10.5$

En los problemas 65 y 66, use las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \sec x$ para encontrar números A y C para los que se cumpla la igualdad dada.

65. $\cot x = A\tan(x + C)$

66. $\csc x = A\sec(x + C)$

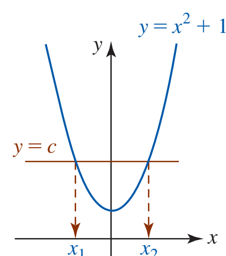
1.5 Funciones inversas

Introducción En la sección 1.1 vimos que una función f es una regla de correspondencia que a cada valor x en su dominio X asigna un solo valor o un valor único y en su rango. Esta regla no excluye el hecho de que el mismo número y se asocie con varios valores *diferentes* de x. Por ejemplo, para $f(x) = -x^2 + 2x + 4$, el valor $y = 4$ en el rango de f ocurre en $x = 0$ o en $x = 2$ en el

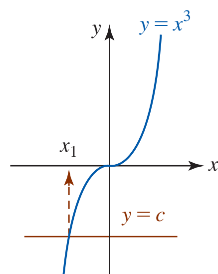
dominio de f. Por otra parte, para la función $f(x) = 2x + 3$, el valor $y = 4$ sólo ocurre en $x = \frac{1}{2}$. En efecto, para cada valor y en el rango de $f(x) = 2x + 3$, corresponde sólo un valor de x en el dominio. A las funciones de este último tipo se ha asignado el nombre especial de **uno a uno**.

Definición 1.5.1 Función uno a uno

Se dice que una función es **uno a uno** si cada número en el rango de f se asocia con exactamente un número en su dominio X.



a) No es uno a uno



b) Uno a uno

FIGURA 1.5.1 Dos tipos de funciones en el ejemplo 1

Prueba de la recta horizontal Cuando la definición 1.5.1 se interpreta geométricamente, significa que una recta horizontal (y = constante) puede cortar la gráfica de una función uno a uno en cuanto mucho un punto. Además, si *toda* recta horizontal que corta la gráfica de una función lo hace en cuanto mucho un punto, entonces la función necesariamente es uno a uno. Una función *no es* uno a uno si *alguna* recta horizontal corta su gráfica más de una vez.

EJEMPLO 1 Prueba de la recta horizontal

a) En la FIGURA 1.5.1*a*) se muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$ y una recta horizontal $y = c$ que corta la gráfica. La figura indica claramente que hay dos números x_1 y x_2 en el dominio de f para los cuales $f(x_1) = f(x_2) = c$. Por tanto, la función f no es uno a uno.

b) Al analizar la figura 1.5.1*b*) se encuentra que para toda recta horizontal $y = c$ que corta la gráfica de $f(x) = x^3$, sólo hay un número x_1 en el dominio de f tal que $f(x_1) = c$. La función f es uno a uno. ■

Inversa de una función uno a uno Suponga que f es una función uno a uno con dominio X y rango Y. Puesto que todo número y en Y corresponde a precisamente un número x en X, la función f debe realmente determinar una función "reversa" g cuyo dominio es Y y cuyo rango es X. Como se muestra en la FIGURA 1.5.2, f y g deben satisfacer

$$f(x) = y \qquad \text{y} \qquad g(y) = x. \tag{1}$$

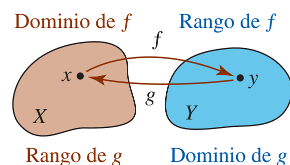


FIGURA 1.5.2 Una función f y su función inversa g

Las ecuaciones en (1) son en realidad composiciones de las funciones f y g:

$$f(g(y)) = y \qquad \text{y} \qquad g(f(x)) = x. \tag{2}$$

La función g se denomina **inversa** de f o **función inversa** de f. Al seguir la convención de que cada elemento del dominio se denota por el símbolo x, la primera ecuación en (2) vuelve a escribirse como $f(g(x)) = x$. A continuación se resumen los resultados proporcionados en (2).

Definición 1.5.2 Función inversa

Sea f una función uno a uno con dominio X y rango Y. La **inversa** de f es la función g con dominio Y y rango X para la cual

$$f(g(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } Y, \tag{3}$$

y

$$g(f(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } X. \tag{4}$$

Por supuesto, si una función no es uno a uno, entonces no tiene función inversa.

Notación La inversa de una función f suele escribirse como f^{-1} y se lee "f inversa". Esta última notación, aunque es estándar, es algo desafortunada. De inmediato se señala que en el símbolo $f^{-1}(x)$ el "-1" *no es* un exponente. En términos de la nueva notación, (3) y (4) se vuelven, respectivamente,

En (3) y (4), el símbolo g desempeña la parte del símbolo f^{-1}.

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(f(x)) = x. \tag{5}$$

Propiedades Antes de analizar un método para encontrar la inversa de una función uno a uno f, se enumeran algunas propiedades importantes sobre f y su inversa f^{-1}.

Teorema 1.5.1 Propiedades de la función inversa

i) Dominio de f^{-1} = rango de f.
ii) Rango de f^{-1} = dominio de f.
iii) Una función inversa f^{-1} es uno a uno.
iv) La inversa de f^{-1} es f.
v) La inversa de f es única.

Método para encontrar f^{-1} Si f^{-1} es la inversa de una función uno a uno $y = f(x)$, entonces por (1), $x = f^{-1}(y)$. Por tanto, basta hacer las dos cosas siguientes para encontrar f^{-1}.

Directrices para encontrar la función inversa

Suponga que $y = f(x)$ es una función uno a uno. Entonces para encontrar f^{-1}:

- Se resuelve $y = f(x)$ para el símbolo x en términos de y (en caso de ser posible). Así se obtiene $x = f^{-1}(y)$.
- La variable x vuelve a etiquetarse como y y la variable y como x. Así se obtiene $y = f^{-1}(x)$.

Nota: Algunas veces resulta conveniente intercambiar los pasos en las directrices anteriores:

- Volver a etiquetar x y y en la ecuación $y = f(x)$ y despejar (de ser posible) $x = f(y)$ para y. Así se obtiene $y = f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 2 Inversa de una función

Encuentre la inversa de $f(x) = x^3$.

Solución En el ejemplo 1 se vio que esta función es uno a uno. Para empezar, la función se vuelve a escribir como $y = x^3$. Al despejar x se obtiene $x = y^{1/3}$. Luego las variables vuelven a etiquetarse para obtener $y = x^{1/3}$. Así $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ o, de manera equivalente, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. ■

Encontrar la inversa de una función uno a uno $y = f(x)$ algunas veces es difícil y otras imposible. Por ejemplo, la FIGURA 1.5.3 sugiere (y es posible demostrar) que la función $f(x) = x^3 + x + 3$ es uno a uno, por lo que tiene una inversa f^{-1}. Pero al despejar x en la ecuación $y = x^3 + x + 3$ es difícil para todo mundo (incluyendo su profesor). Puesto que f es una función polinomial, su dominio es $(-\infty, \infty)$ y, debido a que su comportamiento extremo es el de $y = x^3$, el rango de f es $(-\infty, \infty)$. En consecuencia, el dominio y el rango de f^{-1} son $(-\infty, \infty)$. Aun cuando f^{-1} no se conoce explícitamente, tiene perfecto sentido hablar sobre los valores como $f^{-1}(3)$ y $f^{-1}(5)$. En el caso de $f^{-1}(3)$, observe que $f(0) = 3$. Esto significa que $f^{-1}(3) = 0$. ¿Puede imaginar el valor de $f^{-1}(5)$?

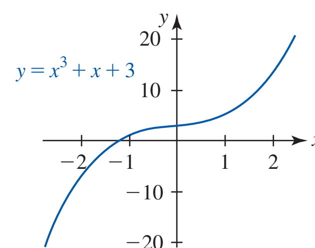


FIGURA 1.5.3 La gráfica sugiere que f es uno a uno

Gráficas de f y f^{-1} Suponga que (a, b) representa cualquier punto sobre la gráfica de una función uno a uno f. Entonces $f(a) = b$ y

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

implica que (b, a) es un punto sobre la gráfica de f^{-1}. Como se muestra en la FIGURA 1.5.4*a*), los puntos (a, b) y (b, a) son reflexiones uno del otro en la recta $y = x$. Esto significa que la recta $y = x$ es la bisectriz perpendicular del segmento de recta que va de (a, b) a (b, a). Debido a que cada punto sobre una gráfica es la reflexión de un punto correspondiente sobre la otra gráfica, en la figura 1.5.4*b*) se observa que las gráficas de f^{-1} y f son **reflexiones** entre sí con respecto a la recta $y = x$. Además se dice que las gráficas de f^{-1} y f son **simétricas** con respecto a la recta $y = x$.

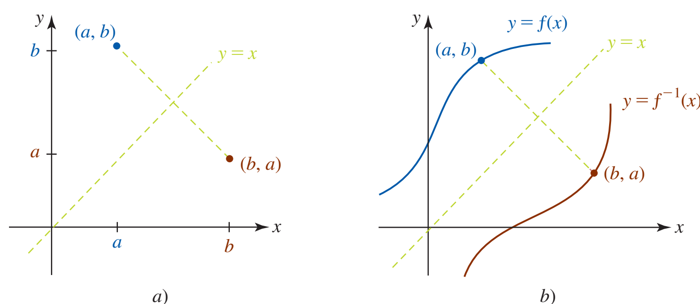


FIGURA 1.5.4 Las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones en la recta $y = x$

EJEMPLO 3 Gráficas de f y f^{-1}

En el ejemplo 2 vimos que la inversa de $y = x^3$ es $y = x^{1/3}$. En las FIGURAS 1.5.5*a*) y 1.5.5*b*) se muestran las gráficas de estas funciones; en la figura 1.5.5*c*), las gráficas están superpuestas en el mismo sistema de coordenadas para ilustrar que las gráficas son reflexiones entre sí en la recta $y = x$.

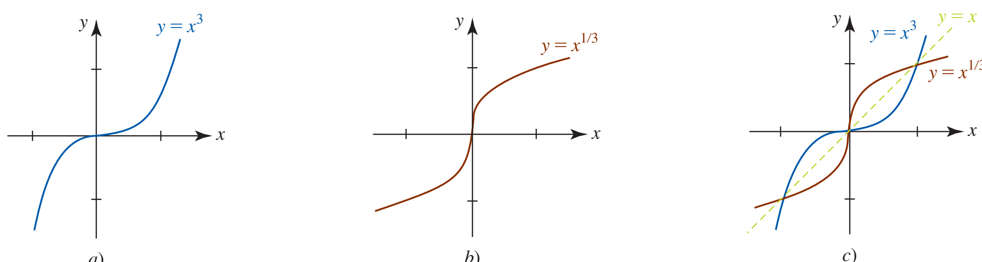


FIGURA 1.5.5 Gráficas de f y f^{-1} en el ejemplo 3 ■

Toda función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, es uno a uno.

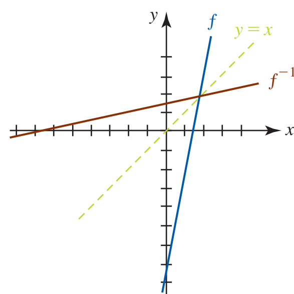


FIGURA 1.5.6 Gráficas de f y f^{-1} en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Inversa de una función

Encuentre la inversa de la función lineal $f(x) = 5x - 7$.

Solución Puesto que la gráfica de $y = 5x - 7$ es una recta no horizontal, por la prueba de la recta horizontal se concluye que f es una función uno a uno. Para encontrar f^{-1}, x se despeja en $y = 5x - 7$:

$$5x = y + 7 \qquad \text{implica} \qquad x = \frac{1}{5}y + \frac{7}{5}.$$

Al reetiquetar las variables en la última ecuación se obtiene $y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$. En consecuencia, $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$. Las gráficas de f y f^{-1} se comparan en la FIGURA 1.5.6. ■

Ninguna función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, *no* es uno a uno.

Dominios restringidos Para una función f que no es uno a uno, puede ser posible restringir su dominio de modo que la nueva función que consta de f definida sobre este dominio restringido sea uno a uno y así tenga una inversa. En la mayor parte de los casos es aconsejable restringir el dominio de modo que la nueva función retenga su rango original. El siguiente ejemplo ilustra este concepto.

EJEMPLO 5 Dominio restringido

En el ejemplo 1 se demostró gráficamente que la función cuadrática $f(x) = x^2 + 1$ no es uno a uno. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$, y como se observa en la FIGURA 1.5.7*a*), el rango de f es $[1, \infty)$. Luego, al definir $f(x) = x^2 + 1$ sólo en el intervalo $[0, \infty)$, vemos dos cosas en la figura 1.5.7*b*): el rango de f se preserva y $f(x) = x^2 + 1$ confinada al dominio $[0, \infty)$ pasa la prueba de la recta horizontal; en otras palabras, es uno a uno. La inversa de esta nueva función uno a uno se obtiene como de costumbre. Al despejar x de $y = x^2 + 1$ y volviendo a etiquetar las variables se obtiene

$$x = \pm\sqrt{y - 1} \qquad \text{y así} \qquad y = \pm\sqrt{x - 1}.$$

El signo algebraico idóneo en la última ecuación se determina a partir del hecho de que el dominio y rango de f^{-1} son $[1, \infty)$ y $[0, \infty)$, respectivamente. Esto obliga a escoger $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ como la inversa de f. Vea la figura 1.5.7*c*).

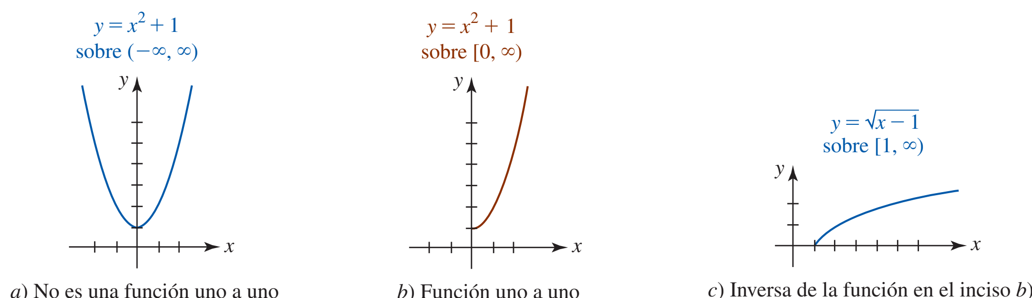


FIGURA 1.5.7 Función inversa en el ejemplo 5

Funciones trigonométricas inversas Aunque ninguna de las funciones trigonométricas es uno a uno, al restringir convenientemente cada uno de sus dominios es posible definir seis funciones trigonométricas inversas.

Función seno inverso A partir de la FIGURA 1.5.8*a*) se observa que la función $y = \text{sen}\, x$ sobre el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$ asume todos los valores en su rango $[-1, 1]$. Observe que cualquier recta horizontal trazada para cortar la porción roja de la gráfica puede hacerlo cuanto mucho una vez. Por tanto, la función seno sobre este dominio restringido es uno a uno y tiene una inversa. Entre los matemáticos hay dos notaciones de uso común para denotar la inversa de la función que se muestra en la figura 1.5.8*b*):

$$\text{sen}^{-1}\, x \qquad \text{o} \qquad \text{arcsen}\, x,$$

que se leen **seno inverso de *x*** y **arcseno de *x***, respectivamente.

El sistema algebraico computacional *Mathematica* usa la notación arcseno.

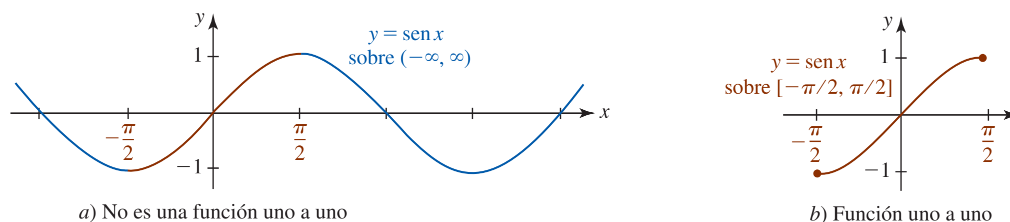


FIGURA 1.5.8 Restricción del dominio de $y = \text{sen}\, x$ para obtener una función uno a uno

En la FIGURA 1.5.9*a*) se ha reflejado la porción de la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ sobre el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (la gráfica roja en la figura 1.5.8*b*) en la recta $y = x$ para obtener la gráfica de $y = \text{sen}^{-1}\, x$ (en azul). Por razones de claridad, esta gráfica azul se ha reproducido en la figura 1.5.9*b*). Como se muestra en esta gráfica, el dominio de la función seno inverso es $[-1, 1]$ y el rango es $[-\pi/2, \pi/2]$.

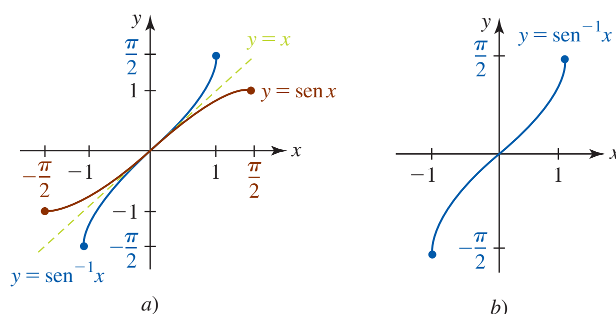


FIGURA 1.5.9 La gráfica de la función seno inverso es la curva azul

Definición 1.5.3 Función seno inverso

La **función seno inverso**, o **función arcseno**, se define por

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = \operatorname{sen} y, \tag{6}$$

donde $-1 \leq x \leq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.

En palabras:

- El seno inverso del número x es el número y (o ángulo medido en radianes) entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x.

Los símbolos $y = \operatorname{arcsen} x$ y $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ son sinónimos en matemáticas y sus aplicaciones, de modo que se alternará su uso para que usted se sienta cómodo con ambas notaciones.

EJEMPLO 6 Evaluación de la función seno inverso

Encuentre

a) $\operatorname{arcsen} \dfrac{1}{2}$ ***b***) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ y ***c***) $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$.

Solución

a) Si se hace $y = \operatorname{arcsen} \frac{1}{2}$, entonces por (6) es necesario encontrar el número y (o ángulo medido en radianes) que satisface $\operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Puesto que $\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ y $\pi/6$ satisface la desigualdad $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, se concluye que

$$y = \frac{\pi}{6}.$$

b) Si se hace $y = \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$, entonces $\operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}$. Puesto que es necesario escoger y tal que $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, encontramos que $y = -\pi/6$.

c) Al hacer $y = \operatorname{sen}^{-1}(-1)$, tenemos que $\operatorname{sen} y = -1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Por tanto, $y = -\pi/2$. ■

Lea este párrafo varias veces.

En los incisos *b*) y *c*) del ejemplo 6 se tuvo cuidado para escoger y de modo que $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Por ejemplo, un error común suele ser pensar que como $\operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$, entonces necesariamente $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$ puede tomarse como $3\pi/2$. Recuerde: si $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, entonces y está sujeto a la restricción $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, y $3\pi/2$ no satisface esta desigualdad.

EJEMPLO 7 Evaluación de una composición

Sin usar calculadora, encuentre $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{4}\right)$.

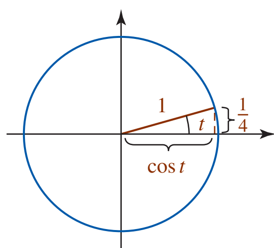


FIGURA 1.5.10 El ángulo $t = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{4}$ en el ejemplo 7

Solución Es necesario encontrar la tangente del ángulo de t radianes con seno igual a $\frac{1}{4}$, es decir, $\tan t$ donde $t = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}$. El ángulo t se muestra en la FIGURA 1.5.10. Puesto que

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{1/4}{\cos t},$$

queremos determinar el valor de $\cos t$. A partir de la figura 1.5.10 y la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, vemos que

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 t = 1 \qquad \text{o bien,} \qquad \cos t = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Por tanto,

$$\tan t = \frac{1/4}{\sqrt{15}/4} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15},$$

y así

$$\tan\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{4}\right) = \tan t = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$ ■

El procedimiento que se ilustra en el ejemplo 10 constituye un método alterno para resolver el ejemplo 7.

Función coseno inverso Si el dominio de la función coseno se restringe al intervalo cerrado $[0, \pi]$, la función resultante es uno a uno y entonces tiene una inversa. Esta inversa se denota por

$$\cos^{-1} x \qquad \text{o bien,} \qquad \arccos x,$$

lo cual proporciona la siguiente definición.

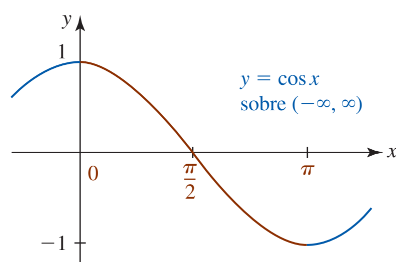
Definición 1.5.4 Función coseno inverso

La **función coseno inverso**, o **función arccoseno**, se define por

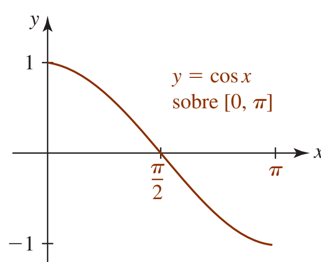
$$y = \cos^{-1} x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = \cos y, \tag{7}$$

donde $-1 \le x \le 1$ y $0 \le y \le \pi$.

La gráfica mostrada en la FIGURA 1.5.11 ilustra la forma en que la función $y = \cos x$ restringida al intervalo $[0, \pi]$ se vuelve una función uno a uno.



a) No es una función uno a uno



b) Función uno a uno

FIGURA 1.5.11 Restricción del dominio de $y = \cos x$ para obtener una función uno a uno

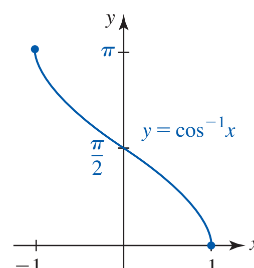


FIGURA 1.5.12 Gráfica de la función coseno inverso

Al reflejar la gráfica de la función uno a uno en la figura 1.5.11*b*) en la recta $y = x$ se obtiene la gráfica de $y = \cos^{-1} x$ mostrada en la FIGURA 1.5.12. La figura muestra con toda claridad que el dominio y el rango de $y = \cos^{-1} x$ son $[-1, 1]$ y $[0, \pi]$, respectivamente.

EJEMPLO 8 Evaluación de la función coseno inverso

Evalúe $\arccos(-\sqrt{3}/2)$.

Solución Si $y = \arccos(-\sqrt{3}/2)$, entonces $\cos y = -\sqrt{3}/2$. El único número en $[0, \pi]$ para el cual se cumple esto es $y = 5\pi/6$. Es decir,

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

■

EJEMPLO 9 Evaluación de composición de funciones

Escriba $\operatorname{sen}(\cos^{-1} x)$ como una expresión algebraica en x.

Solución En la FIGURA 1.5.13 se ha construido un ángulo de t radianes cuyo coseno es igual a x. Así, $t = \cos^{-1}x$, o $x = \cos t$, donde $0 \le t \le \pi$. Luego, para encontrar $\operatorname{sen}(\cos^{-1} x) = \operatorname{sen} t$, usamos la identidad $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. Así

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 t + x^2 &= 1 \\ \operatorname{sen}^2 t &= 1 - x^2 \\ \operatorname{sen} t &= \sqrt{1 - x^2} \\ \operatorname{sen}(\cos^{-1}x) &= \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Se usa la raíz cuadrada positiva de $1 - x^2$, puesto que el rango de $\cos^{-1} x$ es $[0, \pi]$, y el seno del ángulo t en los cuadrantes primero o segundo es positivo. ■

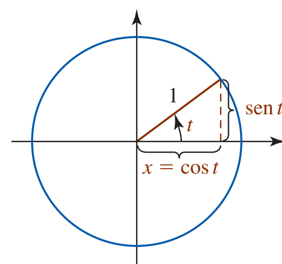


FIGURA 1.5.13 El ángulo $t = \cos^{-1} x$ en el ejemplo 9

Función tangente inversa Si el dominio de tan x se restringe al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, entonces la función resultante es uno a uno y, por tanto, tiene una inversa. Ésta se denota por

$$\tan^{-1}x \qquad \text{o bien,} \qquad \arctan x.$$

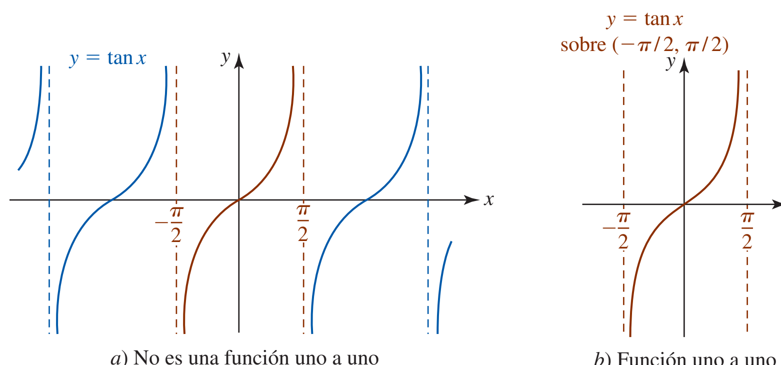
Definición 1.5.5 Función arctangente

La **función tangente inversa**, o **función arctangente**, se define por

$$y = \tan^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \tan y, \tag{8}$$

donde $-\infty < x < \infty$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Las gráficas mostradas en la FIGURA 1.5.14 ilustran cómo la función $y = \tan x$ restringida al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$ se vuelve una función uno a uno. Al reflejar la gráfica de la función uno a uno en la figura 1.5.14*b*) en la recta $y = x$ se obtiene la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ mostrada en la FIGURA 1.5.15. En la figura se observa que el dominio y el rango de $y = \tan^{-1} x$ son, respectivamente, los intervalos $(-\infty, \infty)$ y $(-\pi/2, \pi/2)$. Por ejemplo, $y = \tan^{-1}(-1) = -\pi/4$ puesto que $-\pi/4$ es el único número en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ para el cual $\tan(-\pi/4) = -1$.



a) No es una función uno a uno

b) Función uno a uno

FIGURA 1.5.14 Restricción del dominio de $y = \tan x$ para obtener una función uno a uno

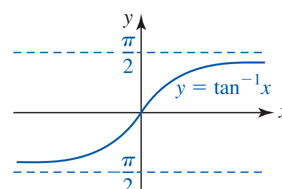


FIGURA 1.5.15 Gráfica de la función tangente inversa

EJEMPLO 10 Evaluación de composiciones de funciones

Sin usar calculadora, encuentre $\cos\left(\arctan\frac{2}{3}\right)$.

Solución Si se hace $y = \arctan\frac{2}{3}$, entonces $\tan y = \frac{2}{3}$. Al usar el triángulo rectángulo en la FIGURA 1.5.16 como ayuda, se ve que

$$\cos\left(\arctan\frac{2}{3}\right) = \cos y = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$ ■

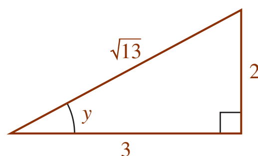


FIGURA 1.5.16 Triángulo en el ejemplo 10

Propiedades de las inversas Recuerde por (5) que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ se cumplen para cualquier función f y su inversa si hay restricciones idóneas sobre x. Por tanto, para las funciones trigonométricas inversas tenemos las siguientes propiedades.

Teorema 1.5.2 Propiedades de las funciones trigonométricas inversas

i) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}x) = x$ si $-\pi/2 \le x \le \pi/2$
ii) $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}x) = x$ si $-1 \le x \le 1$
iii) $\cos^{-1}(\cos x) = \arccos(\cos x) = x$ si $0 \le x \le \pi$
iv) $\cos(\cos^{-1}x) = \cos(\arccos x) = x$ si $-1 \le x \le 1$
v) $\tan^{-1}(\tan x) = \arctan(\tan x) = x$ si $-\pi/2 < x < \pi/2$
vi) $\tan(\tan^{-1}x) = \tan(\arctan x) = x$ si $-\infty < x < \infty$

EJEMPLO 11 Aplicación de las propiedades inversas

Sin usar calculadora, evalúe

a) $\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$ ***b***) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$.

Solución

a) Por el teorema 1.5.2*iv*), $\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

b) En este caso *no es posible* aplicar la propiedad *v*), puesto que $3\pi/4$ no está en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Si primero se evalúa $\tan(3\pi/4) = -1$, entonces se tiene

$$\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

■

Inversas de otras funciones trigonométricas Con los dominios restringidos de manera conveniente, las funciones trigonométricas restantes $y = \cot x$, $y = \sec x$ y $y = \csc x$ también tienen inversas.

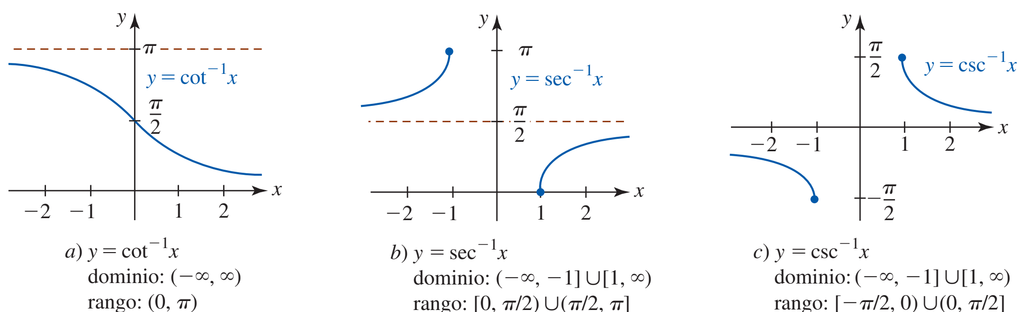
Definición 1.5.6 Otras funciones trigonométricas inversas

i) $y = \cot^{-1} x$ si y sólo si $x = \cot y$, $-\infty < x < \infty$ y $0 < y < \pi$

ii) $y = \sec^{-1} x$ si y sólo si $x = \sec y$, $|x| \geq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$, $y \neq \pi/2$

iii) $y = \csc^{-1} x$ si y sólo si $x = \csc y$, $|x| \geq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, $y \neq 0$

Las gráficas de $y = \cot^{-1} x$, $y = \sec^{-1} x$ y $y = \csc^{-1} x$, así como sus dominios y rangos, se resumen en la FIGURA 1.5.17.



a) $y = \cot^{-1}x$
dominio: $(-\infty, \infty)$
rango: $(0, \pi)$

b) $y = \sec^{-1}x$
dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
rango: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$

c) $y = \csc^{-1}x$
dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
rango: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$

FIGURA 1.5.17 Gráficas de las funciones cotangente inversa, secante inversa y cosecante inversa

***f*(*x*)** **NOTAS DESDE EL AULA**

Los rangos especificados en las definiciones 1.5.3, 1.5.4, 1.5.5 y 1.5.6*i*) son reconocidos internacionalmente y surgieron de la limitación más lógica y conveniente de la función original. Así, cuando vemos arccos x o $\tan^{-1} x$ en cualquier contexto, sabemos que $0 \leq \arccos x \leq \pi$ y $-\pi/2 < \tan^{-1}x < \pi/2$. Estas convenciones son las mismas que las usadas en calculadoras cuando se usan las teclas $\boxed{\text{sen}^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ y $\boxed{\tan^{-1}}$. Sin embargo, no existe ningún acuerdo universal sobre los rangos de $y = \sec^{-1} x$ o $y = \csc^{-1} x$. Los rangos especificados en *ii*) y *iii*) en la definición 1.5.6 son cada vez más populares porque se trata de los rangos empleados en sistemas algebraicos computacionales como *Mathematica* y *Maple*. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que hay textos conocidos de cálculo que definen el dominio y el rango de $y = \sec^{-1} x$ como

$$\text{dominio: } (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \qquad \text{rango: } [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2),$$

y el dominio y el rango de $y = \csc^{-1} x$ como

$$\text{dominio: } (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \qquad \text{rango: } (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2].$$

Ejercicios 1.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-6.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, vuelva a leer la introducción de esta sección. Luego explique por qué la función f dada no es uno a uno.

1. $f(x) = 1 + x(x - 5)$ **2.** $f(x) = x^4 + 2x^2$

En los problemas 3-8, determine si la función dada es uno a uno al analizar su gráfica.

3. $f(x) = 5$ **4.** $f(x) = 6x - 9$

5. $f(x) = \frac{1}{3}x + 3$ **6.** $f(x) = |x + 1|$

7. $f(x) = x^3 - 8$ **8.** $f(x) = x^3 - 3x$

En los problemas 9-12, la función f dada es uno a uno. Encuentre f^{-1}.

9. $f(x) = 3x^3 + 7$

10. $f(x) = \sqrt[3]{2x - 4}$

11. $f(x) = \dfrac{2 - x}{1 - x}$

12. $f(x) = 5 - \dfrac{2}{x}$

En los problemas 13 y 14, compruebe que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

13. $f(x) = 5x - 10, f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + 2$

14. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}, f^{-1}(x) = \dfrac{1 - x}{x}$

En los problemas 15-18, la función f dada es uno a uno. Sin determinar la inversa, encuentre el dominio y el rango de f^{-1}.

15. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

16. $f(x) = 3 + \sqrt{2x - 1}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

18. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 4}$

En los problemas 19 y 20, la función f dada es uno a uno. Sin determinar la inversa, encuentre el punto sobre la gráfica de f^{-1} correspondiente al valor indicado de x en el dominio de f.

19. $f(x) = 2x^3 + 2x; \quad x = 2$

20. $f(x) = 8x - 3; \quad x = 5$

En los problemas 21 y 22, la función f dada es uno a uno. Sin determinar la inversa, encuentre x en el dominio de f^{-1} que satisface la ecuación indicada.

21. $f(x) = x + \sqrt{x}; \quad f^{-1}(x) = 9$

22. $f(x) = \dfrac{4x}{x + 1}; \quad f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}$

En los problemas 23 y 24, trace la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f.

23.

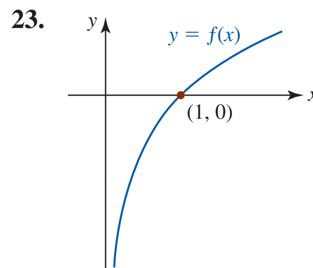


FIGURA 1.5.18 Gráfica para el problema 23

24.

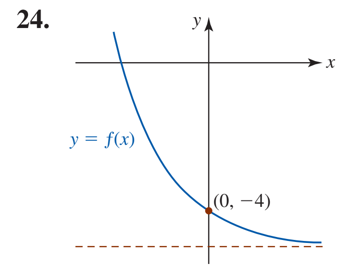


FIGURA 1.5.19 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25 y 26, trace la gráfica de f a partir de la gráfica de f^{-1}.

25.

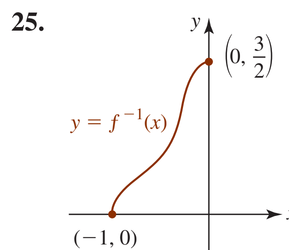


FIGURA 1.5.20 Gráfica para el problema 25

26.

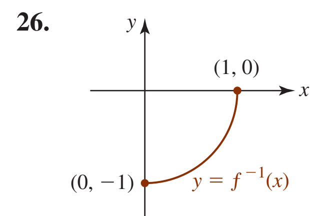


FIGURA 1.5.21 Gráfica para el problema 26

En los problemas 27-30, encuentre una función inversa f^{-1} cuyo rango sea el mismo que el de la función dada al restringir de manera conveniente el dominio de f.

27. $f(x) = (5 - 2x)^2$ **28.** $f(x) = 3x^2 + 9$

29. $f(x) = x^2 + 2x + 4$ **30.** $f(x) = -x^2 + 8x$

31. Si las funciones f y g tienen inversas, puede demostrarse que

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Compruebe esto para $f(x) = x^3$ y $g(x) = 4x + 5$.

32. La ecuación $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$ define una función uno a uno $y = f(x)$. Encuentre $f^{-1}(x)$.

En los problemas 33-34, obtenga el valor exacto de la expresión dada. No use calculadora.

33. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **34.** $\cos^{-1}\dfrac{1}{2}$

35. $\arctan(1)$ **36.** $\tan^{-1}\sqrt{3}$

37. $\cot^{-1}(-1)$ **38.** $\sec^{-1}(-1)$

39. $\text{arcsen}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **40.** $\text{arccot}(-\sqrt{3})$

41. $\text{sen}\left(\arctan\dfrac{4}{3}\right)$ **42.** $\cos\left(\text{sen}^{-1}\dfrac{2}{5}\right)$

43. $\tan\left(\cot^{-1}\dfrac{1}{2}\right)$ **44.** $\csc\left(\tan^{-1}\dfrac{2}{3}\right)$

En los problemas 45-48, evalúe la expresión dada por medio de una identidad trigonométrica idónea.

45. $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3}\right)$

46. $\cos\left(2\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$

47. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3} + \operatorname{arccos}\frac{2}{3}\right)$

48. $\cos(\tan^{-1}4 - \tan^{-1}3)$

En los problemas 49-52, escriba la expresión dada como una cantidad algebraica en x.

49. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}x)$

50. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}x)$

51. $\sec(\tan^{-1}x)$

52. $\operatorname{sen}(\sec^{-1}x),\ x \geq 1$

En los problemas 53 y 54, compruebe gráficamente las identidades por una reflexión y un desplazamiento vertical.

53. $\operatorname{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

54. $\operatorname{arccot} x + \arctan x = \frac{\pi}{2}$

55. Demuestre que $\sec^{-1}x = \cos^{-1}(1/x)$ para $|x| \geq 1$.

56. Demuestre que $\csc^{-1}x = \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$ para $|x| \geq 1$.

57. Si $t = \operatorname{sen}^{-1}(-2/\sqrt{5})$, encuentre los valores exactos de $\cos t$, $\tan t$, $\cot t$, $\sec t$ y $\csc t$.

58. Si $\theta = \arctan\frac{1}{2}$, encuentre los valores exactos de $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ y $\csc\theta$.

Problemas con calculadora/SAC

La mayoría de las calculadoras carece de teclas para $\csc^{-1}x$ y $\sec^{-1}x$. En los problemas 59 y 60, use una calculadora y las identidades en los problemas 55 y 56 para calcular la cantidad dada.

59. ***a)*** $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ ***b)*** $\csc^{-1}2$

60. ***a)*** $\sec^{-1}(3.5)$ ***b)*** $\csc^{-1}(-1.25)$

61. Use una calculadora para comprobar:

a) $\tan(\tan^{-1}1.3) = 1.3$ y $\tan^{-1}(\tan 1.3) = 1.3$
b) $\tan(\tan^{-1}5) = 5$ y $\tan^{-1}(\tan 5) = -1.2832$

Explique por qué $\tan^{-1}(\tan 5) \neq 5$.

62. Sea $x = 1.7$ radianes. Compare, de ser posible, los valores de $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}x)$ y $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x)$. Explique las diferencias.

Aplicaciones

63. Considere una escalera de longitud L apoyada en un muro con una carga en el punto P como se muestra en la FIGURA 1.5.22. El ángulo β, al que la escalera está al borde de deslizarse, está definido por

$$\frac{x}{L} = \frac{c}{1 + c^2}(c + \tan\beta),$$

donde c es el coeficiente de fricción entre la escalera y el piso.

a) Encuentre β cuando $c = 1$ y la carga está en la parte superior de la escalera.

b) Encuentre β cuando $c = 0.5$ y la carga está a $\frac{3}{4}$ de la longitud de la escalera empezando desde el piso.

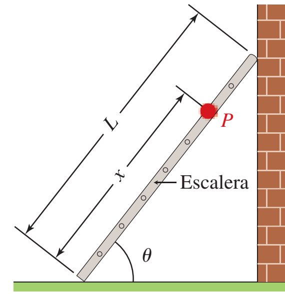


FIGURA 1.5.22 Escalera en el problema 63

64. Un avión se desplaza hacia el oeste a velocidad constante v_1 cuando sopla viento desde el norte a velocidad constante v_2. El rumbo del avión al sur del oeste está dado por $\theta = \tan^{-1}(v_2/v_1)$. Vea la FIGURA 1.5.23. Encuentre el rumbo de un avión que se desplaza hacia el oeste a 300 km/h si sopla viento desde el norte a 60 km/h.

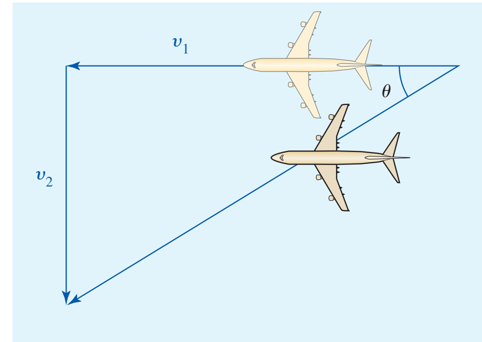


FIGURA 1.5.23 Avión en el problema 64

Piense en ello

En los problemas 65 y 66, use calculadora o un sistema algebraico computacional para obtener la gráfica de la función dada donde x es cualquier número real. Explique por qué las gráficas no violan los teoremas 1.5.2*i*) y 1.5.2*iii*).

65. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}x)$

66. $f(x) = \cos^{-1}(\cos x)$

67. Analice: ¿es posible que una función uno a uno sea periódica?

68. ¿Cómo están relacionadas las funciones uno a uno $y = f(x)$ en las FIGURAS 1.5.24*a*) y 1.5.24*b*) con las funciones inversas $y = f^{-1}(x)$? Encuentre por lo menos tres funciones explícitas con esta propiedad.

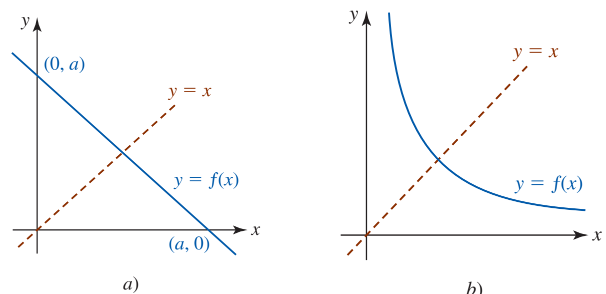


FIGURA 1.5.24 Gráfica para el problema 68

1.6 Funciones exponencial y logarítmica

Introducción En las secciones precedentes se consideraron funciones como $f(x) = x^2$; es decir, una función con una base variable x y una potencia o exponente constante 2. A continuación abordaremos funciones como $f(x) = 2^x$ con una base constante 2 y exponente variable x.

Definición 1.6.1 Función exponencial

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces una **función exponencial** $y = f(x)$ es una función de la forma

$$f(x) = b^x. \quad (1)$$

El número b se denomina **base** y x se denomina **exponente**.

En (1), la base b se restringe a números positivos para garantizar que b^x sea un número real. También, $b = 1$ carece de interés puesto que $f(x) = 1^x = 1$.

El **dominio** de una función exponencial f definida en (1) es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$.

Exponentes Debido a que el dominio de una función exponencial (1) es el conjunto de números reales, el exponente x puede ser un número racional o irracional. Por ejemplo, si la base $b = 3$ y el exponente x es un *número racional*, $x = \frac{1}{5}$ y $x = 1.4$, entonces

$$3^{1/5} = \sqrt[5]{3} \qquad \text{y} \qquad 3^{1.4} = 3^{14/10} = 3^{7/5} = \sqrt[5]{3^7}.$$

La función (1) también está definida para todo *número irracional* x. El siguiente procedimiento ilustra una forma para definir un número como $3^{\sqrt{2}}$. A partir de la representación decimal $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$ se observa que los números racionales

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \ldots$$

son sucesivamente mejores aproximaciones a $\sqrt{2}$. Al usar estos números racionales como exponentes, es de esperar que los números

$$3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, 3^{1.41421}, \ldots$$

sean sucesivamente mejores aproximaciones a $3^{\sqrt{2}}$. De hecho, puede demostrarse que esto es cierto con una definición precisa de b^x para un valor irracional de x. Pero a nivel práctico es posible usar la tecla $\boxed{y^x}$ de una calculadora para obtener la aproximación 4.728804388 para $3^{\sqrt{2}}$.

Una definición de b^x, para x irracional, está dada por

$$b^x = \lim_{t \to x} b^t,$$

donde t es racional. Esto se lee "b^x es el **límite** de b^t cuando t tiende a x". Los límites se estudiarán en detalle en el capítulo 2.

Leyes de los exponentes Puesto que b^x está definido para todos los números reales x cuando $b > 0$, puede demostrarse que las leyes de los exponentes se cumplen para todos los exponentes que sean números reales. Si $a > 0$, $b > 0$ y x, x_1 y x_2 denotan números reales, entonces

i) $b^{x_1} \cdot b^{x_2} = b^{x_1 + x_2}$ *ii)* $\dfrac{b^{x_1}}{b^{x_2}} = b^{x_1 - x_2}$ *iii)* $(b^{x_1})^{x_2} = b^{x_1 x_2}$

iv) $\dfrac{1}{b^{x_2}} = b^{-x_2}$ *v)* $(ab)^x = a^x b^x$ *vi)* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

Gráficas Para (1) se distinguen dos tipos de gráficas, dependiendo de si la base b satisface $b > 1$ o $0 < b < 1$. El siguiente ejemplo ilustra las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Antes de graficar es posible hacer algunas observaciones intuitivas sobre ambas funciones. Puesto que las bases $b = 3$ y $b = \frac{1}{3}$ son positivas, los valores de 3^x y $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ son positivos para todo número real x. Además, ni 3^x ni $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ pueden ser 0 para ninguna x, de modo que las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ no tienen intersecciones x. También, $3^0 = 1$ y $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ significan que las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ tienen la misma intersección y (0, 1).

EJEMPLO 1 Gráficas de funciones exponenciales

Grafique las funciones

a) $f(x) = 3^x$, ***b)*** $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

Solución

a) Primero se elabora una tabla de algunos valores funcionales correspondientes a valores de x seleccionados de antemano. Como se muestra en la FIGURA 1.6.1*a*), se trazan los puntos correspondientes obtenidos a partir de la tabla

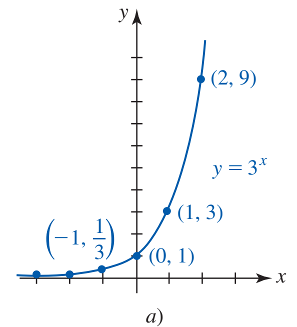
x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

y se unen con una curva continua. La gráfica muestra que f es una función creciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

b) Procediendo como en el inciso *a*), se elabora una tabla de algunos valores

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

de la función correspondientes a valores de x seleccionados de antemano. Observe, por ejemplo, por las leyes de los exponentes $f(-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^2 = 9$. Como se muestra en la figura 1.6.1*b*), se trazan los puntos correspondientes obtenidos a partir de la tabla y se unen con una curva continua. En este caso, la gráfica muestra que f es una función decreciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. ■



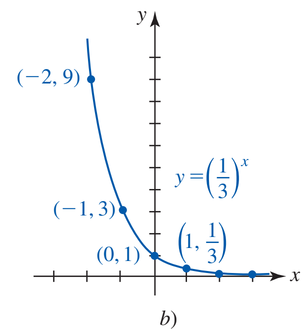


FIGURA 1.6.1 Gráfica de las funciones en el ejemplo 1

Nota: Las funciones exponenciales con bases que satisfacen $0 < b < 1$, como $b = \frac{1}{3}$, a menudo se escriben en forma alterna. Al escribir $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ como $y = (3^{-1})^x$ y usando *iii*) de las leyes de los exponentes se observa que $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ es lo mismo que $y = 3^{-x}$.

Asíntota horizontal La FIGURA 1.6.2 ilustra las dos formas generales que puede tener la gráfica de una función exponencial $f(x) = b^x$. Pero hay un aspecto más importante de todas estas gráficas. Observe en la figura 1.6.2 que para $0 < b < 1$, los valores de la función $f(x)$ tienden a 0 cuando x crece sin cota en la dirección positiva (la gráfica roja), y para $b > 1$ los valores funcionales $f(x)$ tienden a 0 cuando x se crece sin cota en la dirección negativa (la gráfica azul). En otras palabras, la recta $y = 0$ (el eje x) es una **asíntota horizontal** para ambos tipos de gráficas exponenciales.

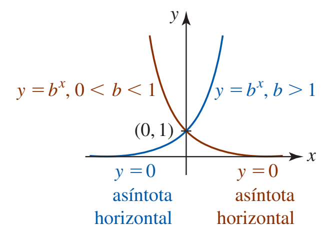


FIGURA 1.6.2 f creciente para $b > 1$; f decreciente para $0 < b < 1$

Propiedades de una función exponencial La lista siguiente resume algunas de las propiedades importantes de la función exponencial f con base b. Vuelva a analizar las gráficas en la figura 1.6.2 mientras lee la lista.

- El dominio de f es el conjunto de números reales; es decir, $(-\infty, \infty)$.
- El rango de f es el conjunto de números reales positivos; es decir, $(0, \infty)$.
- La intersección y de f es $(0, 1)$. La gráfica no tiene intersección x.
- La función f es creciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $b > 1$ y decreciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $0 < b < 1$.
- El eje x, es decir $y = 0$, es una asíntota horizontal para la gráfica de f.
- La función f es uno a uno.

Aunque todas las gráficas de $y = b^x$ cuando $b > 1$ comparten la misma forma básica y todas pasan por el mismo punto (0, 1), hay algunas diferencias sutiles. Mientras más grande es la base b, el ascenso de la gráfica es más pronunciado cuando x crece. En la FIGURA 1.6.3 se comparan las gráficas de $y = 5^x$, $y = 3^x$, $y = 2^x$ y $y = (1.2)^x$ en verde, azul, dorado y rojo, respectivamente, sobre los mismos ejes de coordenadas. A partir de esta gráfica observamos que los valores de $y = (1.2)^x$ crecen lentamente cuando x crece.

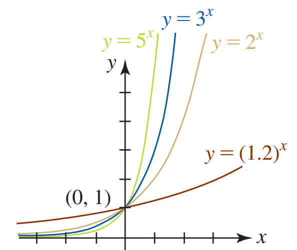


FIGURA 1.6.3 Gráficas de $y = b^x$ para $b = 1.2, 2, 3, 5$

El hecho de que (1) es una función uno a uno se concluye a partir de la prueba de la recta horizontal que se analizó en la sección 1.5.

El número *e* La mayoría de los estudiantes de matemáticas ha escuchado acerca del famoso número irracional $\pi = 3.141592654...$, y quizás haya trabajado con él. En cálculo y matemáticas aplicadas, podría decirse que el número irracional

$$e = 2.718281828459... \tag{2}$$

desempeña un papel más importante que el número π. La definición usual del número e es que se trata del número al que se acerca la función $f(x) = (1 + 1/x)^x$ cuando se deja que x crezca sin cota en la dirección positiva. Si el símbolo de flecha $\rightarrow$ representa la expresión *se acerca*, entonces el hecho de que $f(x) \rightarrow e$ cuando $x \rightarrow \infty$ es evidente en la tabla de valores numéricos de f

x	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$(1 + 1/x)^x$	2.704814	2.716924	2.718146	2.718268	2.718280

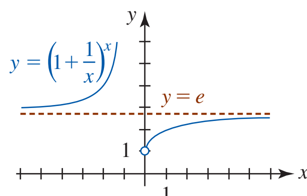


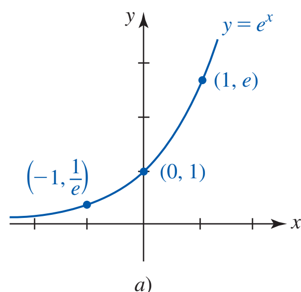
FIGURA 1.6.4 $y = e$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f

y a partir de la gráfica en la FIGURA 1.6.4. En la figura, la recta horizontal discontinua roja $y = e$ es un asíntota horizontal de la gráfica de f. También se dice que e es el *límite* de $f(x) = (1 + 1/x)^x$ cuando $x \rightarrow \infty$ y se escribe

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \tag{3}$$

A menudo observará una definición alterna del número e. Si en (3) se hace $h = 1/x$, entonces cuando $x \rightarrow \infty$ tendremos simultáneamente $h \rightarrow 0$. Por tanto, una forma equivalente de (3) es

$$e = \lim_{h\to 0}(1 + h)^{1/h}. \tag{4}$$



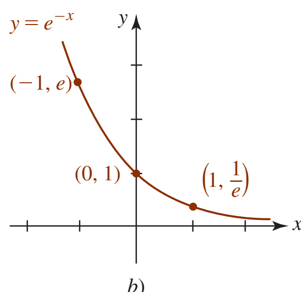


FIGURA 1.6.5 Función exponencial natural en *a*)

La función exponencial natural Cuando la base en (1) se escoge como $b = e$, la función $f(x) = e^x$ se denomina **función exponencial natural**. Puesto que $b = e > 1$ y $b = 1/e < 1$, las gráficas de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ se proporcionan en la FIGURA 1.6.5. A la vista de ello, $f(x) = e^x$ no cuenta con ninguna característica observable que la distinga, por ejemplo, de la función $f(x) = 3^x$, y no tiene ninguna propiedad especial diferente a las que se proporcionaron en la lista de la página 49. Preguntas de por qué $f(x) = e^x$ es una función "natural" y francamente la función exponencial más importante, se responderán en los siguientes capítulos y en sus cursos más allá de cálculo.

Inversa de la función exponencial Puesto que una función exponencial $y = b^x$ es uno a uno, se sabe que tiene una función inversa. Para encontrar su inversa, se intercambian las variables x y y para obtener $x = b^y$. Esta última fórmula define a y como una función de x:

- y es el exponente de la base b que produce x.

Al sustituir la palabra *exponente* por la palabra *logaritmo*, la línea precedente puede volver a escribirse como:

- y es el logaritmo de la base b que produce x.

La última línea se abrevia usando la notación $y = \log_b x$ y se denomina **función logarítmica**.

Definición 1.6.2 Función logarítmica

La **función logarítmica** con base $b > 0, b \neq 1$, se define por

$$y = \log_b x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = b^y. \tag{5}$$

Para $b > 0$ no hay ningún número real y para el cual b^y sea 0 o negativo. Así, a partir de $x = b^y$ se concluye que $x > 0$. En otras palabras, el **dominio** de una función logarítmica $y = \log_b x$ es el conjunto de números reales positivos $(0, \infty)$.

Para enfatizar, todo lo que se ha dicho en las frases precedentes es:

- La expresión logarítmica $y = \log_b x$ y la expresión exponencial $x = b^y$ son equivalentes.

es decir, significan lo mismo. Como una consecuencia, dentro de un contexto específico como al resolver un problema, es posible usar cualquier forma que sea la más conveniente. La lista siguiente ilustra varios ejemplos de declaraciones logarítmicas y exponenciales equivalentes:

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_3 9 = 2$	$9 = 3^2$
$\log_8 2 = \frac{1}{3}$	$2 = 8^{1/3}$
$\log_{10} 0.001 = -3$	$0.001 = 10^{-3}$
$\log_b 5 = -1$	$5 = b^{-1}$

Gráficas Debido a que una función logarítmica es la inversa de una función exponencial, es posible obtener la gráfica de la primera al reflejar la gráfica de la segunda en la recta $y = x$. A medida que inspeccione las dos gráficas en la FIGURA 1.6.6, recuerde que el dominio $(-\infty, \infty)$ y el rango $(0, \infty)$ de $y = b^x$ se vuelven, a su vez, el rango $(-\infty, \infty)$ y el dominio $(0, \infty)$ de $y = \log_b x$. Observe que la intersección y (0, 1) de la función exponencial (gráfica azul) se vuelve la intersección x (1, 0) de la función logarítmica (gráfica roja). También, cuando la función exponencial se refleja en la recta $y = x$, la asíntota horizontal $y = 0$ para la gráfica de $y = b^x$ se vuelve una asíntota vertical para la gráfica de $y = \log_b x$. En la figura 1.6.6 se observa que para $b > 1$, $x = 0$, que es la ecuación del eje y, es una **asíntota vertical** para la gráfica de $y = \log_b x$.

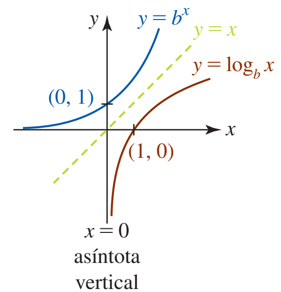


FIGURA 1.6.6 Gráfica de la función logarítmica con base $b > 1$

Propiedades de la función logarítmica En la lista siguiente se resumen algunas de las propiedades importantes de la función logarítmica $f(x) = \log_b x$:

- El dominio de f es el conjunto de números reales positivos; es decir, $(0, \infty)$.
- El rango de f es el conjunto de números reales; es decir, $(-\infty, \infty)$.
- La intersección x de f es (1, 0). La gráfica de f no tiene intersección y.
- La función f es creciente sobre el intervalo $(0, \infty)$ para $b > 1$ y decreciente sobre el intervalo $(0, \infty)$ para $0 < b < 1$.
- El eje y, es decir, $x = 0$, es una asíntota vertical para la gráfica de f.
- La función f es uno a uno.

Se pide su atención especial para el tercer elemento de la lista anterior

$$\log_b 1 = 0 \qquad \text{puesto que} \qquad b^0 = 1. \tag{6}$$

También,

$$\log_b b = 1 \qquad \text{puesto que} \qquad b^1 = b. \tag{7}$$

El resultado en (7) significa que además de (1, 0), la gráfica de cualquier función logarítmica (5) con base b también contiene al punto $(b, 1)$. La equivalencia de $y = \log_b x$ y $x = b^y$ también produce dos identidades útiles algunas veces. Al sustituir $y = \log_b x$ en $x = b^y$, y luego $x = b^y$ en $y = \log_b x$, se obtiene

$$x = b^{\log_b x} \qquad \text{y} \qquad y = \log_b b^y. \tag{8}$$

Por ejemplo, a partir de $2^{\log_2 10} = 10$ y $\log_3 3^7 = 7$.

Logaritmo natural Los logaritmos con base $b = 10$ se denominan **logaritmos comunes** y los logaritmos con base $b = e$ se llaman **logaritmos naturales**. Además, suele ser costumbre escribir el logaritmo natural $\log_e x$ como $\ln x$. Puesto que $b = e > 1$, la gráfica de $y = \ln x$ tiene la forma logarítmica característica que se muestra en rojo en la figura 1.6.6. Para la base $b = e$, (5) se vuelve

$$y = \ln x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = e^y. \tag{9}$$

Los análogos de (6) y (7) para el logaritmo natural son

$$\ln 1 = 0 \qquad \text{puesto que} \qquad e^0 = 1. \tag{10}$$

$$\ln e = 1 \qquad \text{puesto que} \qquad e^1 = e. \tag{11}$$

Las identidades en (8) se vuelven

$$x = e^{\ln x} \qquad \text{y} \qquad y = \ln e^y. \tag{12}$$

Por ejemplo, a partir de (12), $e^{\ln 25} = 25$.

Leyes de los logaritmos Las leyes de los exponentes pueden volver a plantearse de manera equivalente como las leyes de los logaritmos. Por ejemplo, si $M = b^{x_1}$ y $N = b^{x_2}$, entonces por (5), $x_1 = \log_b M$ y $x_2 = \log_b N$. Por *i*) de las leyes de los exponentes, $MN = b^{x_1+x_2}$. Esto, expresado como un logaritmo, es $x_1 + x_2 = \log_b MN$. Al sustituir x_1 y x_2 se obtiene $\log_b M + \log_b N = \log_b MN$. Las partes restantes del siguiente teorema pueden demostrarse de la misma manera.

Teorema 1.6.1 Leyes de los logaritmos

Para cualquier base $b > 0, b \neq 1$, y números enteros positivos M y N:

i) $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

ii) $\log_b\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$

iii) $\log_b M^c = c\log_b M$, para cualquier número real c.

EJEMPLO 2 Leyes de los logaritmos

Simplifique y escriba $\frac{1}{2}\ln 36 + 2\ln 4$ como un logaritmo único.

Solución Por *iii*) de las leyes de los logaritmos, puede escribirse

$$\frac{1}{2}\ln 36 + 2\ln 4 = \ln(36)^{1/2} + \ln 4^2 = \ln 6 + \ln 16.$$

Entonces, por *i*) de las leyes de los logaritmos,

$$\frac{1}{2}\ln 36 + 2\ln 4 = \ln 6 + \ln 16 = \ln(6 \cdot 16) = \ln 96.$$ ■

EJEMPLO 3 Reescribir expresiones logarítmicas

Use las leyes de los logaritmos para volver a escribir cada expresión y evalúe.

a) $\ln\sqrt{e}$ ***b***) $\ln 5e$ ***c***) $\ln\dfrac{1}{e}$

Solución

a) Puesto que $\sqrt{e} = e^{1/2}$ por *iii*) de las leyes de los logaritmos se tiene:

$$\ln\sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}.$$ ← a partir de (11), $\ln e = 1$

b) Por *i*) de las leyes de los logaritmos y con una calculadora:

$$\ln 5e = \ln 5 + \ln e = \ln 5 + 1 \approx 2.6094.$$ ← a partir de (11), $\ln e = 1$

c) Por *ii*) de las leyes de los logaritmos:

$$\ln\frac{1}{e} = \ln 1 - \ln e = 0 - 1 = -1.$$ ← a partir de (10) y (11)

Observe que *iii*) de las leyes de los logaritmos también puede usarse aquí:

$$\ln\frac{1}{e} = \ln e^{-1} = (-1)\ln e = -1.$$ ■

EJEMPLO 4 Solución de ecuaciones

a) Resuelva la ecuación logarítmica $\ln 2 + \ln(4x - 1) = \ln(2x + 5)$ para x.

b) Resuelva la ecuación exponencial $e^{10k} = 7$ para k.

Solución

a) Por *i*) de las leyes de los logaritmos, el miembro izquierdo de la ecuación puede escribirse

$$\ln 2 + \ln(4x - 1) = \ln 2(4x - 1) = \ln(8x - 2).$$

Entonces, la ecuación original es

$$\ln(8x - 2) - \ln(2x + 5) = 0 \qquad \text{o bien} \qquad \ln\frac{8x - 2}{2x + 5} = 0.$$

Por (9) se concluye que

$$\frac{8x - 2}{2x + 5} = e^0 = 1 \qquad \text{o bien} \qquad 8x - 2 = 2x + 5.$$

A partir de la última ecuación encontramos que $x = \frac{7}{6}$.

b) Se usa (9) para volver a escribir la expresión exponencial $e^{10k} = 7$ como la expresión logarítmica $10k = \ln 7$. En consecuencia, con ayuda de una calculadora

$$k = \frac{1}{10}\ln 7 \approx 0.1946. \qquad ■$$

Cambio de base La gráfica de $y = 2^x - 5$ es la gráfica de $y = 2^x$ desplazada 5 unidades hacia abajo. Como se observa en la FIGURA 1.6.7, la gráfica tiene una intersección *x*. Al hacer $y = 0$ vemos que *x* es la solución de la ecuación $2^x - 5 = 0$ o $2^x = 5$. Así, una solución perfectamente válida es $x = \log_2 5$. Pero desde un punto de vista computacional (es decir, el hecho de expresar *x* como un número), la última respuesta no es aconsejable porque ninguna calculadora tiene una función logarítmica con base 2. Podemos calcular la respuesta al cambiar $\log_2 5$ al logaritmo natural al tomar simplemente el log natural de ambos miembros de la ecuación exponencial $2^x = 5$:

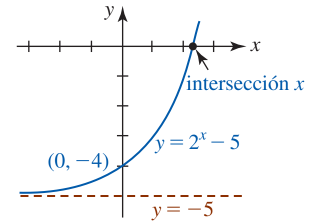


FIGURA 1.6.7 Intersección *x* de $y = 2^x - 5$

$$\ln 2^x = \ln 5$$
$$x \ln 2 = \ln 5$$

Nota: En realidad dividimos los logaritmos aquí →

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.3219.$$

Por cierto, puesto que se empezó con $x = \log_2 5$, el último resultado también demuestra la igualdad $\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2}$. Entonces, la intersección *x* de la gráfica es $(\log_2 5, 0) = (\ln 5/\ln 2, 0) \approx (2.32, 0)$.

En general, para convertir un logaritmo con cualquier base $b > 0$ en logaritmo natural, primero reescribimos la expresión logarítmica $x = \log_b N$ como una expresión exponencial equivalente $b^x = N$. Luego se toma el logaritmo natural a ambos miembros de la última igualdad $x \ln b = \ln N$ y se despeja *x*. Esto produce la **fórmula general de cambio de base**:

$$\log_b N = \frac{\ln N}{\ln b}. \tag{13}$$

Ejercicios 1.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-6.

Fundamentos

En los problemas 1-6, trace la gráfica de la función dada. Encuentre la intersección *y* y la asíntota horizontal de la gráfica.

1. $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ **2.** $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

3. $f(x) = -2^x$ **4.** $f(x) = -2^{-x}$

5. $f(x) = -5 + e^x$ **6.** $f(x) = 2 + e^{-x}$

En los problemas 7-10, encuentre una función exponencial $f(x) = b^x$ tal que la gráfica de *f* pase por el punto dado.

7. $(3, 216)$ **8.** $(-1, 5)$

9. $(-1, e^2)$ **10.** $(2, e)$

En los problemas 11-14, use una gráfica para resolver la desigualdad dada para *x*.

11. $2^x > 16$ **12.** $e^x \leq 1$

13. $e^{x-2} < 1$

14. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8$

En los problemas 15 y 16, use $f(-x) = f(x)$ para demostrar que la función dada es par. Trace la gráfica de f.

15. $f(x) = e^{x^2}$

16. $f(x) = e^{-|x|}$

En los problemas 17 y 18, use la gráfica obtenida en los problemas 15 y 16 como ayuda para trazar la gráfica de la función f dada.

17. $f(x) = 1 - e^{x^2}$

18. $f(x) = 2 + 3e^{-|x|}$

19. Demuestre que $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es una función par. Trace la gráfica de f.

20. Demuestre que $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ es una función impar. Trace la gráfica de f.

En los problemas 21 y 22, trace la gráfica de la función f dada definida por partes.

21. $f(x)\begin{cases} -e^x, & x < 0 \\ -e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$

22. $f(x)\begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ -e^x, & x > 0 \end{cases}$

En los problemas 23-26, vuelva a escribir la expresión exponencial dada como una expresión logarítmica equivalente.

23. $4^{-1/2} = \frac{1}{2}$

24. $9^0 = 1$

25. $10^4 = 10\,000$

26. $10^{0.3010} = 2$

En los problemas 27-30, vuelva a escribir la expresión logarítmica dada como una expresión exponencial equivalente.

27. $\log_2 128 = 7$

28. $\log_5 \frac{1}{25} = -2$

29. $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$

30. $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$

En los problemas 31 y 32, encuentre una función logarítmica $f(x) = \log_b x$ tal que la gráfica de f pase por el punto dado.

31. $(49, 2)$

32. $\left(4, \frac{1}{3}\right)$

En los problemas 33-38, encuentre el valor exacto de la expresión dada.

33. $\ln e^e$

34. $\ln(e^4 e^9)$

35. $10^{\log_{10} 6^2}$

36. $25^{\log_5 8}$

37. $e^{-\ln 7}$

38. $e^{\frac{1}{2}\ln \pi}$

En los problemas 39-42, encuentre el dominio de la función f dada. Encuentre la intersección x y la asíntota vertical de la gráfica. Trace la gráfica de f.

39. $f(x) = -\ln x$

40. $f(x) = -1 + \ln x$

41. $f(x) = -\ln(x + 1)$

42. $f(x) = 1 + \ln(x - 2)$

En los problemas 43 y 44, encuentre el dominio de la función f dada.

43. $f(x) = \ln(9 - x^2)$

44. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

45. Demuestre que $f(x) = \ln|x|$ es una función par. Trace la gráfica de f. Encuentre las intersecciones x y la asíntota vertical de la gráfica.

46. Use la gráfica obtenida en el problema 45 para trazar la gráfica de $y = \ln|x - 2|$. Encuentre las intersecciones x y la asíntota vertical de la gráfica.

En los problemas 47-50, use las leyes de los logaritmos para volver a escribir la expresión dada como un logaritmo.

47. $\ln(x^4 - 4) - \ln(x^2 + 2)$

48. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2\ln x^3 - 4\ln y$

49. $\ln 5 + \ln 5^2 + \ln 5^3 - \ln 5^6$

50. $5\ln 2 + 2\ln 3 - 3\ln 4$

En los problemas 51-54, use las leyes de los logaritmos de modo que $\ln y$ no contenga productos, cocientes ni potencias.

51. $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^3 + 2}}$

52. $y = \sqrt{\dfrac{(2x + 1)(3x + 2)}{4x + 3}}$

53. $y = \dfrac{(x^3 - 3)^5(x^4 + 3x^2 + 1)^8}{\sqrt{x}(7x + 5)^9}$

54. $y = 64x^6\sqrt{x + 1}\sqrt[3]{x^2 + 2}$

En los problemas 55 y 56, use el logaritmo natural para encontrar x en el dominio de la función dada para el que f asume el valor indicado.

55. $f(x) = 6^x$; $f(x) = 51$

56. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $f(x) = 7$

En los problemas 57-60, use el logaritmo natural para despejar x.

57. $2^{x+5} = 9$

58. $4 \cdot 7^{2x} = 9$

59. $5^x = 2e^{x+1}$

60. $3^{2(x-1)} = 2^{x-3}$

En los problemas 61 y 62, despeje x.

61. $\ln x + \ln(x - 2) = \ln 3$

62. $\ln 3 + \ln(2x - 1) = \ln 4 + \ln(x + 1)$

≡ Modelos matemáticos

63. Crecimiento exponencial Un modelo exponencial para el número de bacterias en un cultivo en el instante t está dado por $P(t) = P_0 e^{kt}$, donde P_0 es la población inicial y $k > 0$ es la constante de crecimiento.

***a*)** Después de 2 horas, se observa que el número inicial de bacterias en un cultivo se ha duplicado. Encuentre un modelo de crecimiento exponencial $P(t)$.

***b*)** Según el modelo del inciso *a*), ¿cuál es el número de bacterias presentes en el cultivo al cabo de 5 horas?

***c*)** Encuentre el tiempo necesario para que el cultivo crezca hasta 20 veces su tamaño inicial.

64. Desintegración exponencial Un modelo exponencial para la cantidad de sustancia radiactiva remanente en el instante t está dado por $A(t) = A_0 e^{kt}$, donde A_0 es la cantidad inicial y $k < 0$ es la constante de desintegración.

***a*)** Al inicio estaban presentes 200 mg de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas, la masa había decrecido 3%. Elabore un modelo exponencial para la cantidad de la sustancia en desintegración remanente después de t horas.

b) Encuentre la cantidad remanente después de 24 horas.
c) Encuentre el instante en que $A(t) = \frac{1}{2}A_0$ se denomina **vida media** de la sustancia. ¿Cuál es la vida media de la sustancia en el inciso *a*)?

65. Crecimiento logístico Un estudiante contagiado con el virus de influenza vuelve a un campus aislado de una universidad donde hay 2 000 estudiantes. El número de estudiantes infectados después de t días del regreso del estudiante se pronostica por medio de la función logística

$$P(t) = \frac{2\,000}{1 + 1\,999e^{-0.8905t}}.$$

a) Según este modelo matemático, ¿cuántos estudiantes estarán contagiados por la influenza después de 5 días?
b) ¿En cuánto tiempo estará infectada la mitad de la población de estudiantes?
c) ¿Cuántos estudiantes pronostica el modelo que estarán infectados al cabo de un muy largo periodo?
d) Trace la gráfica de $P(t)$.

66. Ley de enfriamiento de Newton Si un objeto o cuerpo se coloca en un medio (como aire, agua, etc.) que se mantiene a temperatura constante T_m, y si la temperatura inicial del objeto es T_0, entonces la ley de enfriamiento de Newton pronostica que la temperatura del objeto en el instante t está dada por

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt},\ k < 0.$$

a) Un pastel se retira de un horno donde la temperatura era 350 °F y se coloca en una cocina donde la temperatura es constante a 75 °F. Un minuto después se mide que la temperatura del pastel es 300 °F. ¿Cuál es la temperatura del pastel después de 6 minutos?
b) ¿En qué instante la temperatura del pastel es 80 °F?

≡ Piense en ello

67. Analice: ¿cómo es posible obtener las gráficas de las funciones dadas a partir de la gráfica de $f(x) = \ln x$ por medio de una transformación rígida (desplazamiento o reflexión)?

a) $y = \ln 5x$ *b*) $y = \ln \dfrac{x}{4}$
c) $y = \ln x^{-1}$ *d*) $y = \ln(-x)$

68. *a*) Use un instrumento de graficado para obtener la gráfica de la función $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
b) Demuestre que f es una función impar; es decir, $f(-x) = -f(x)$.

1.7 De las palabras a las funciones

Introducción En los capítulos 4 y 6 hay varias instancias en las que se espera que usted traduzca las palabras que describen una *función* o una *ecuación* en símbolos matemáticos.

En esta sección el centro de atención lo constituyen problemas que implican funciones. Se empieza con una descripción verbal sobre el producto de dos números.

EJEMPLO 1 Producto de dos números

La suma de dos números no negativos es 5. Exprese el producto de uno y el cuadrado del otro como una función de uno de los números.

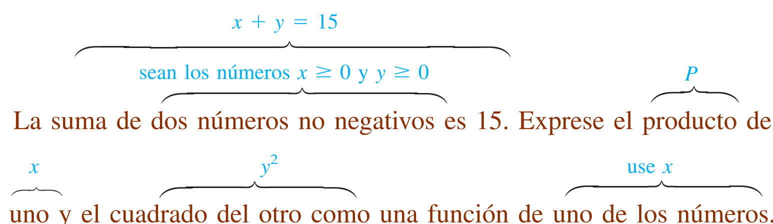
Solución Primero, los números se representan por los símbolos x y y y se recuerda que *no negativos* significa que $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Al usar estos símbolos, las palabras "la suma. . . es 5" se traduce en la ecuación $x + y = 5$; ésta *no* es la función que se busca. La palabra *producto* en la segunda oración sugiere el uso del símbolo P para denotar la función que se quiere. Así, P es el producto de uno de los números; por ejemplo, x y el cuadrado del otro, por ejemplo, y^2:

$$P = xy^2. \tag{1}$$

No, aún no hemos terminado porque se supone que P "es una función de *uno* de los números". Ahora usamos el hecho de que los números x y y están relacionados por $x + y = 5$. A partir de esta última ecuación, sustituimos $y = 5 - x$ en (1) para obtener el resultado deseado:

$$P(x) = x(5 - x)^2. \tag{2}$$ ■

A continuación se muestra un diagrama simbólico del análisis del problema dado en el ejemplo 1:



Observe que la segunda oración es vaga respecto a cuál número se eleva al cuadrado. Esto implica que en realidad no importa: (1) también podría escribirse como $P = yx^2$. También hubiéramos podido usar $x = 5 - y$ en (1) para llegar a $P(y) = (5 - y)y^2$. En un entorno de cálculo no importaría si trabajamos con $P(x)$ o $P(y)$ porque al encontrar *uno* de los números automáticamente hallamos el otro a partir de la ecuación $x + y = 5$. Esta última ecuación se denomina **restricción**. Una restricción no sólo define una relación entre las variables x y y, sino que a menudo impone una limitación sobre la forma en que pueden variar x y y. Como veremos en el siguiente ejemplo, las restricciones ayudan a determinar el dominio de la función.

EJEMPLO 2 Continuación del ejemplo 1

¿Cuál es el dominio de la función $P(x)$ en (2)?

Solución Tomado fuera del contexto del planteamiento del problema en el ejemplo 1, podría concluirse que puesto que

$$P(x) = x(5 - x)^2 = 25x - 10x^2 + x^3$$

es una función polinomial, su dominio es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$. *Pero* en el contexto del problema original, los números eran no negativos. A partir del requerimiento de que $x \geq 0$ y $y = 5 - x \geq 0$ se obtiene $x \geq 0$ y $x \leq 5$, lo cual significa que x debe satisfacer la desigualdad simultánea $0 \leq x \leq 5$. Al usar notación de intervalos, el dominio de la función producto P en (2) es el intervalo cerrado [0, 5]. ■

Si se permite $x > 5$, entonces $y = 5 - x < 0$, lo cual contradice la hipótesis de que $y > 0$.

A menudo en problemas que requieren la traducción de palabras en una función, una buena idea es trazar una curva o imagen e identificar cantidades dadas en el dibujo. Éste debe ser sencillo.

EJEMPLO 3 Cantidad de valla

Un ranchero desea cercar un terreno rectangular cuya área es de 1 000 m^2. El terreno será cercado y dividido en porciones iguales mediante una cerca paralela a dos lados del terreno. Exprese la cantidad de valla usada como una función de la longitud de uno de los lados del terreno.

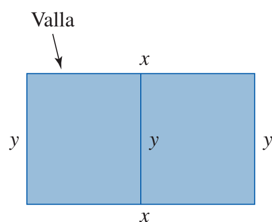


FIGURA 1.7.1 Terreno rectangular en el ejemplo 3

Solución El dibujo debe ser un rectángulo con una recta trazada en su parte media, semejante a la FIGURA 1.7.1. Como se muestra en la figura, sea $x > 0$ la longitud del terreno rectangular y sea $y > 0$ su ancho. La función que se busca es la "cantidad de valla". Si el símbolo F representa esta cantidad, entonces la suma de las longitudes de las *cinco* porciones —dos horizontales y tres verticales— de la valla es

$$F = 2x + 3y. \tag{4}$$

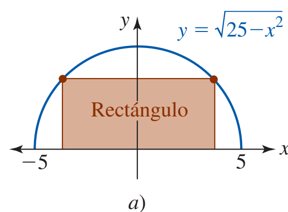
Pero el área del terreno cercado debe ser de 1 000 m^2, de modo que x y y deben estar relacionados por la restricción $xy = 1\,000$. A partir de la última ecuación se obtiene $y = 1\,000/x$, que puede usarse para eliminar y en (4). Así, la cantidad de valla F como una función de la longitud x es $F(x) = 2x + 3(1\,000/x)$, o bien,

$$F(x) = 2x + \frac{3\,000}{x}. \tag{5}$$

Puesto que x representa una dimensión física que satisface $xy = 1\,000$, se concluye que es positiva. Pero además de esta restricción, sobre x no hay ninguna otra. Entonces, a diferencia del ejemplo previo, la función (5) no está definida sobre un intervalo cerrado. El dominio de $F(x)$ es el intervalo $(0, \infty)$. ■

EJEMPLO 4 Área de un rectángulo

Un rectángulo tiene dos vértices sobre el eje x y dos vértices sobre el semicírculo cuya ecuación es $y = \sqrt{25 - x^2}$. Vea la FIGURA 1.7.2*a*). Exprese el área del rectángulo como una función de x.



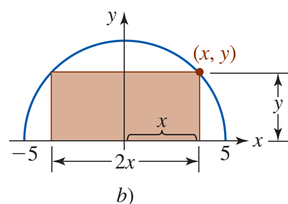


FIGURA 1.7.2 Rectángulo en el ejemplo 4

Solución Si $(x, y), x > 0, y > 0$, denota el vértice de un rectángulo sobre el círculo en el primer cuadrante, entonces como se muestra en la figura 1.7.2*b*), el área A es longitud × ancho, o bien,

$$A = (2x) \times y = 2xy. \tag{6}$$

La ecuación del semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$ es la restricción en este problema. Esta ecuación se usa para eliminar y en (6) y obtener el área del rectángulo como una función de x,

$$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}. \tag{7}$$

El dominio implícito de (7) es el intervalo cerrado $[-5, 5]$, pero debido a que asumimos que (x, y) era un punto sobre el semicírculo en el primer cuadrante, debemos tener $x > 0$. Así, el dominio de (7) es el intervalo $(0, 5)$. ■

EJEMPLO 5 Distancia

Exprese la distancia de un punto (x, y) en el primer cuadrante sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ hasta el punto $(2, 4)$ como una función de x.

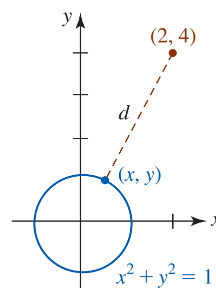


FIGURA 1.7.3 Distancia d en el ejemplo 5

Solución Sea (x, y) un punto en el primer cuadrante sobre el círculo y sea d la distancia de (x, y) a $(2, 4)$. Vea la FIGURA 1.7.3. Entonces, a partir de la fórmula de la distancia,

$$d = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20}. \tag{8}$$

La restricción en este problema es la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = 1$. A partir de esta ecuación es posible sustituir de inmediato $x^2 + y^2$ en (8) por el número 1. Además, al usar la restricción para escribir $y = \sqrt{1 - x^2}$ es posible eliminar el símbolo y en (8). Así, la distancia d como una función de x es:

$$d(x) = \sqrt{21 - 4x - 8\sqrt{1 - x^2}}. \tag{9}$$

Puesto que (x, y) es un punto sobre el círculo en el primer cuadrante, la variable x puede variar entre 0 y 1; es decir, el dominio de la función en (9) es el intervalo abierto $(0, 1)$. ■

◀ Se considera que un punto en el eje x o en el eje y no está en ningún cuadrante.

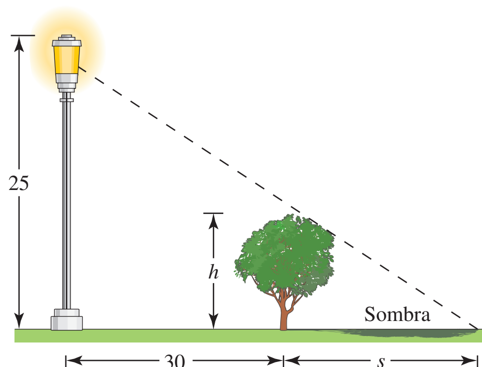
Si un problema en lenguaje coloquial implica triángulos, es necesario estudiar el problema con cuidado y determinar qué es aplicable: el teorema de Pitágoras, triángulos semejantes o trigonometría con triángulos rectángulos.

EJEMPLO 6 Longitud de una sombra

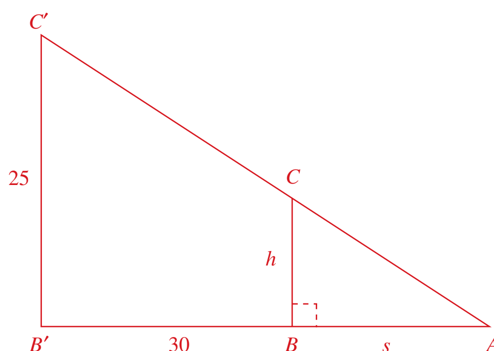
Un árbol se planta a 30 pies de la base de un poste que mide 25 pies de altura. Exprese la longitud de la sombra del árbol como una función de su altura.

Solución Como se muestra en la FIGURA 1.7.4*a*), h y s denotan la altura del árbol y la longitud de su sombra, respectivamente. Debido a que los triángulos mostrados en la figura 1.7.4*b*) son rectángulos, podría pensarse en utilizar el teorema de Pitágoras. Para este problema, no obstante, el teorema de Pitágoras llevaría por mal camino. La cuestión importante que debe observarse aquí es que los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes. Luego aplicamos el hecho de que las razones de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales para escribir

$$\frac{h}{s} = \frac{25}{s + 30} \quad \text{o bien} \quad (s + 30)h = 25s.$$



a)



b)

FIGURA 1.7.4 Poste y árbol en el ejemplo 6

Al despejar s en la última ecuación en términos de h se obtiene la función racional

$$s(h) = \frac{30h}{25 - h}. \tag{10}$$

Tiene sentido físico tomar el dominio de la función (10) definido por $0 \leq h < 25$. Si $h > 25$, entonces $s(h)$ es negativo, lo cual no tiene sentido en el contexto físico del problema. ■

EJEMPLO 7 Longitud de una escalera

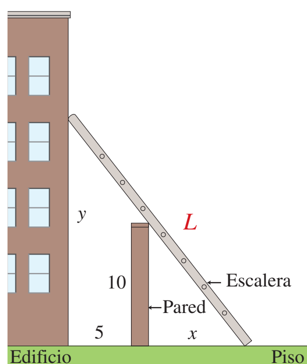


FIGURA 1.7.5 Escalera en el ejemplo 7

Una pared de 10 pies de altura está a 5 pies de un edificio. Una escalera, sostenida por la pared, se coloca en el piso como se muestra en la FIGURA 1.7.5. Exprese la longitud de la escalera en términos de la distancia x entre la base de la pared y la base de la escalera.

Solución Sea L la longitud de la escalera. Con las variables x y y definidas en la figura 1.7.5, de nuevo se observa que hay dos triángulos rectángulos; el mayor tiene tres lados con longitudes L, y y $x + 5$, y el menor tiene dos lados de longitudes x y 10. La escalera es la hipotenusa del triángulo rectángulo mayor, de modo que por el teorema de Pitágoras,

$$L^2 = (x + 5)^2 + y^2. \tag{11}$$

Los triángulos rectángulos en la figura 1.7.5 son semejantes porque ambos contienen un ángulo recto y comparten el ángulo agudo común que la escalera forma con el piso. De nuevo se usa el hecho de que las razones de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales. Esto permite escribir lo siguiente:

$$\frac{y}{x + 5} = \frac{10}{x} \quad \text{de modo que} \quad y = \frac{10(x + 5)}{x}.$$

Al usar el último resultado, (11) se vuelve

$$\begin{aligned} L^2 &= (x + 5)^2 + \left[\frac{10(x + 5)}{x}\right]^2 \\ &= (x + 5)^2\left[1 + \frac{100}{x^2}\right] \\ &= (x + 5)^2\left[\frac{x^2 + 100}{x^2}\right]. \end{aligned}$$

Al tomar la raíz cuadrada se obtiene L como una función de x,

$$L(x) = \frac{x + 5}{x}\sqrt{x^2 + 100}. \tag{12}$$ ■

EJEMPLO 8 Distancia

Un avión vuela a una altura constante de 3 000 pies sobre el nivel del suelo alejándose de un observador que está en tierra. Exprese la distancia horizontal entre el avión y el observador como una función del ángulo de elevación del plano medido por el observador.

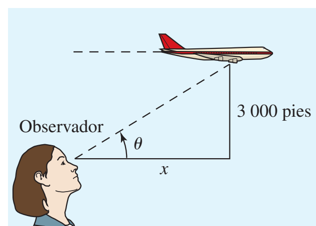


FIGURA 1.7.6 Avión en el ejemplo 8

Solución Como se muestra en la FIGURA 1.7.6, sea x la distancia horizontal entre el avión y el observador, y sea θ el ángulo de elevación. El triángulo en la figura es rectángulo. Así, por trigonometría de triángulos rectos, el cateto opuesto a θ está relacionado con el cateto adyacente a θ por $\tan \theta = \text{op}/\text{ady}$. En consecuencia,

$$\tan \theta = \frac{3\,000}{x} \quad \text{o bien} \quad x(\theta) = 3\,000 \cot \theta, \tag{13}$$

donde $0 < \theta < \pi/2$. ■

Ejercicios 1.7 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-7.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-32, traduzca las palabras en una función idónea. Proporcione el dominio de la función.

1. El producto de dos números positivos es 50. Exprese su suma como una función de uno de los números.

2. Exprese la suma de dos números diferentes de cero y su recíproco como una función del número.

3. La suma de dos números no negativos es 1. Exprese la suma del cuadrado de uno y el doble del cuadrado del otro como una función de uno de los números.

4. Sean m y n enteros positivos. La suma de dos números no negativos es S. Exprese el producto de la m-ésima potencia de uno y la n-ésima potencia del otro como una función de uno de los números.

5. El perímetro de un rectángulo es 200 pulg. Exprese el área del rectángulo como una función de la longitud de uno de sus lados.

6. El área de un rectángulo es 400 pulg^2. Exprese el perímetro del rectángulo como una función de la longitud de uno de sus lados.

7. Exprese el área del rectángulo sombreado en la FIGURA 1.7.7 como una función de x.

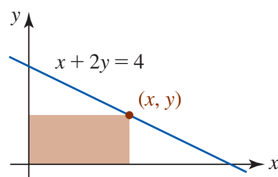


FIGURA 1.7.7 Rectángulo en el problema 7

8. Exprese la longitud del segmento de recta que contiene al punto (2, 4) mostrado en la FIGURA 1.7.8 como una función de x.

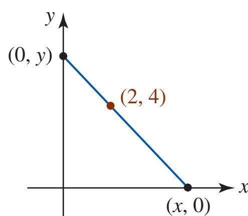


FIGURA 1.7.8 Segmento de recta en el problema 8

9. Exprese como una función de x la distancia de un punto (x, y) sobre la gráfica de $x + y = 1$ al punto (2, 3).

10. Exprese como una función de x la distancia de un punto (x, y) sobre la gráfica de $y = 4 - x^2$ al punto (0, 1).

11. Exprese el perímetro de un cuadrado como una función de su área A.

12. Exprese el área de un círculo como una función de su diámetro d.

13. Exprese el diámetro de un círculo como una función de su circunferencia C.

14. Exprese el volumen de un cubo como una función del área A de su base.

15. Exprese el área de un triángulo equilátero como una función de su altura h.

16. Exprese el área de un triángulo equilátero como una función de la longitud s de uno de sus lados.

17. Un alambre de longitud x se dobla en forma de círculo. Exprese el área del círculo como una función de x.

18. A un alambre de longitud L se cortan x unidades desde un extremo. Una parte del alambre se dobla en forma de cuadrado y la otra parte se dobla en forma de círculo. Exprese la suma de las áreas como una función de x.

19. Un ranchero desea cercar un corral rectangular cuya área es de 1 000 pies^2 usando dos tipos de valla distintos. A lo largo de dos lados paralelos, la valla cuesta \$4 por pie. Para los otros dos lados paralelos, la valla cuesta \$1.60 por pie. Exprese el costo total para cercar el corral como una función de la longitud de uno de los lados con valla que cuesta \$4 por pie.

20. El marco de un cometa consta de seis partes de plástico ligero. El marco externo del cometa consta de cuatro partes cortadas de antemano; dos partes de longitud 2 pies y dos partes de longitud 3 pies. Exprese el área del cometa como una función de x, donde $2x$ es la longitud de la barra transversal horizontal mostrada en la FIGURA 1.7.9.

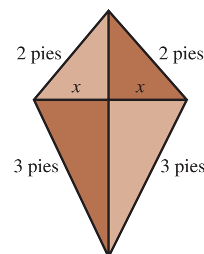


FIGURA 1.7.9 Cometa en el problema 20

21. Una empresa desea construir una caja rectangular abierta con un volumen de 450 pulg^3, de modo que la longitud de su base sea tres veces su ancho. Exprese el área superficial de la caja como una función de su ancho.

22. Un tanque cónico, con el vértice hacia abajo, tiene un radio de 5 pies y una altura de 15 pies. Vea la FIGURA 1.7.10. Hacia el tanque se bombea agua. Exprese el volumen del agua como una función de su profundidad. [*Sugerencia*: El volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.]

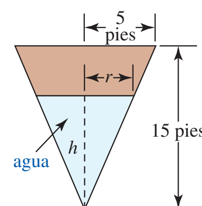


FIGURA 1.7.10 Tanque cónico en el problema 22

23. El automóvil A pasa por el punto O en dirección al este a velocidad constante de 40 mi/h; el automóvil B pasa por el mismo punto 1 hora después en dirección al norte a velocidad constante de 60 mi/h. Exprese la distancia entre los automóviles como una función del tiempo t, donde t se mide empezando cuando el automóvil B pasa por el punto O. Vea la FIGURA 1.7.11.

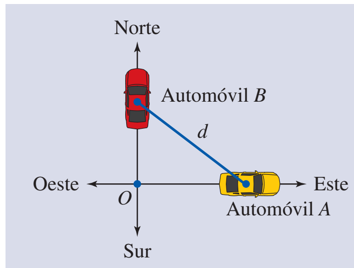
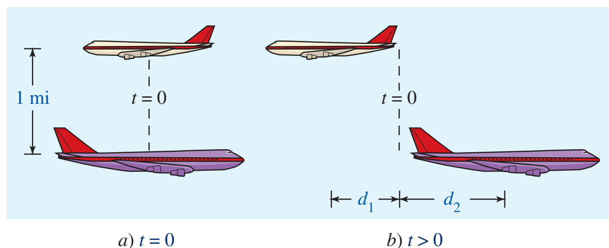


FIGURA 1.7.11 Automóviles en el problema 23

24. En el instante $t = 0$ (medido en horas), dos aviones con una separación vertical de 1 mi pasan uno encima del otro, volando en direcciones opuestas. Vea la FIGURA 1.7.12. Los aviones vuelan horizontalmente a velocidades de 500 mi/h y 550 mi/h.

a) Exprese la distancia horizontal entre los aviones como una función de t. [*Sugerencia*: Distancia = velocidad × tiempo.]

b) Exprese la distancia diagonal entre los aviones como una función de t.



a) $t = 0$ *b*) $t > 0$

FIGURA 1.7.12 Aviones en el problema 24

25. La piscina que se muestra en la FIGURA 1.7.13 mide 3 pies de profundidad en la parte poco profunda, 8 pies en la profunda, 40 pies de largo, 30 pies de ancho y el fondo es un plano inclinado. Hacia la piscina se bombea agua. Exprese el volumen del agua en la piscina como una función de la altura h del agua por arriba del extremo profundo. [*Sugerencia*: El volumen es una función definida por partes con dominio definido por $0 \leq h \leq 8$.]

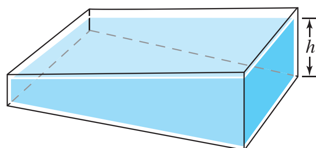


FIGURA 1.7.13 Piscina en el problema 25

26. Las regulaciones del Servicio Postal de Estados Unidos de América para el envío de paquetes postales estipulan que la longitud más la circunferencia (el perímetro de un extremo) de un paquete no debe exceder 108 pulg. Exprese el volumen del paquete como una función del ancho x mostrado en la FIGURA 1.7.14.

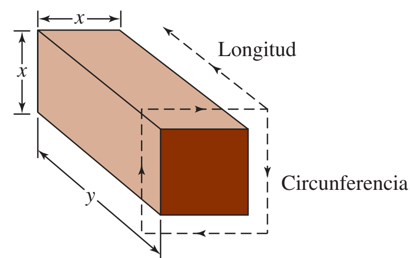


FIGURA 1.7.14 Paquete en el problema 26

27. Exprese la altura del globo mostrado en la FIGURA 1.7.15 como una función de su ángulo de elevación.

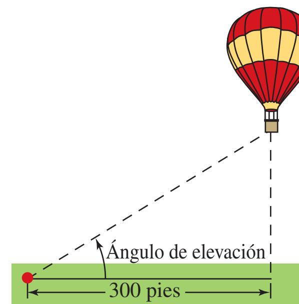


FIGURA 1.7.15 Globo en el problema 27

28. A una gran plancha metálica de 40 pulg de ancho se da forma de V al doblarla por la mitad a lo largo de su longitud. Exprese el área de la sección transversal triangular del canal como una función del ángulo θ en el vértice de la V. Vea la FIGURA 1.7.16.

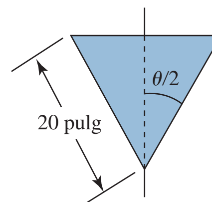


FIGURA 1.7.16 Sección transversal triangular en el problema 28

29. Como se muestra en la FIGURA 1.7.17, un tablón está apoyado en un burro, de modo que un extremo está apoyado en el suelo y el otro contra una construcción. Exprese la longitud L del tablón como una función del ángulo θ indicado. [*Sugerencia*: Use dos triángulos rectángulos.]

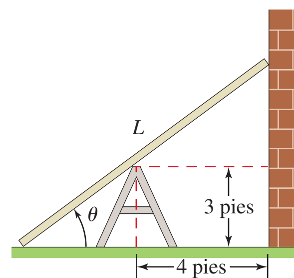


FIGURA 1.7.17 Tablón en el problema 29

30. Un ranchero desea cercar un terreno de pasto en forma de triángulo rectángulo usando 2 000 pies de valla a la mano. Vea la FIGURA 1.7.18. Exprese el área de ese terreno como una función del ángulo θ. [*Sugerencia*: Use los símbolos en la figura para formar cot θ y csc θ.]

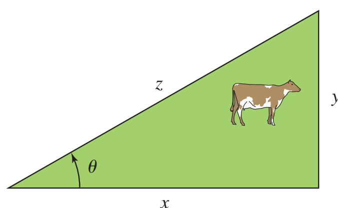


FIGURA 1.7.18 Terreno de pasto en el problema 30

31. Una estatua se coloca en un pedestal como se muestra en la FIGURA 1.7.19. Exprese el ángulo de visión θ como una función de la distancia x desde el pedestal.

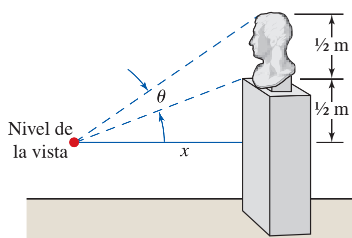


FIGURA 1.7.19 Estatua en el problema 31

32. Una mujer en una isla desea llegar a un punto R en una costa recta desde un punto P en la isla. El punto P está a 9 mi de la costa y a 15 mi del punto R. Vea la FIGURA 1.7.20. Si la mujer rema en un bote a una velocidad de 3 mi/h hacia un punto Q en tierra, y luego camina el resto del camino a una velocidad de 5 mi/h, exprese el tiempo total necesario para que la mujer llegue al punto R como una función del ángulo θ indicado. [*Sugerencia*: Distancia = velocidad × tiempo.]

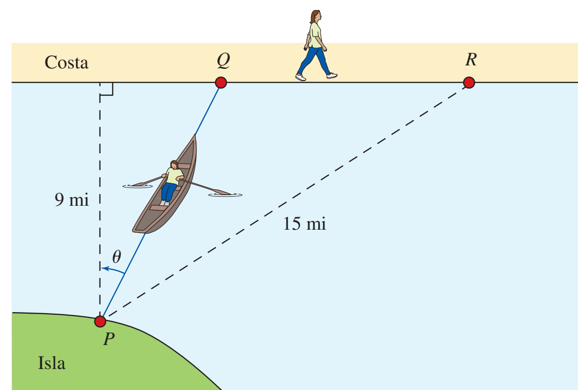


FIGURA 1.7.20 Mujer remando hacia la costa en el problema 32

≡ Piense en ello

33. Suponga que la altura en el ejemplo 7 es 60 pies. ¿Cuál es el dominio de la función $L(x)$ dada en (12)?

34. En un texto de ingeniería, el área del octágono mostrado en la FIGURA 1.7.21 está dada por $A = 3.31r^2$. Demuestre que esta fórmula es en realidad una aproximación al área; es decir, encuentre el área exacta A del octágono como una función de r.

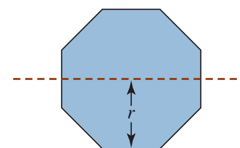


FIGURA 1.7.21 Octágono en el problema 34

Revisión del capítulo 1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-7.

A. Falso/Verdadero

En los problemas 1-20, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. Si f es una función y $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. _____

2. La función $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2$ es una función impar. _____

3. La gráfica de la función $f(x) = 5x^2 \cos x$ es simétrica con respecto al eje y. _____

4. La gráfica de la función $y = f(x + 3)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada 3 unidades a la derecha. _____

5. La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$ no tiene intersección x. _____

6. Una asíntota es una recta a la que tiende la gráfica de una función pero sin cruzarla jamás. _____

7. La gráfica de una función puede tener cuanto mucho dos asíntotas horizontales. _____

8. Si $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional y $q(a) = 0$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de f. _____

9. La función $y = -10 \sec x$ tiene amplitud 10. _____

10. El rango de la función $f(x) = 2 + \cos x$ es [1, 3]. _____

11. Si $f(x) = 1 + x + 2e^x$ es uno a uno, entonces $f^{-1}(3) = 0$. _____
12. Si $\tan(5\pi/4) = -1$, entonces $\tan^{-1}(-1) = 5\pi/4$. _____
13. Ninguna función par puede ser uno a uno. _____
14. Un punto de intersección de las gráficas de f y f^{-1} debe estar sobre la recta $y = x$. _____
15. La gráfica de $y = \sec x$ no corta el eje x. _____
16. La función $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$ no es periódica. _____
17. $y = 10^{-x}$ y $y = (0.1)^x$ son la misma función. _____
18. $\ln(e + e) = 1 + \ln 2$ _____
19. $\ln\dfrac{e^b}{e^a} = b - a$ _____
20. El punto $(b, 1)$ está sobre la gráfica de $f(x) = \log_b x$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-20, llene los espacios en blanco.

1. El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x+2}/x$ es ________.
2. Si $f(x) = 4x^2 + 7$ y $g(x) = 2x + 3$, entonces $(f \circ g)(1) =$ ________, $(g \circ f)(1) =$ ________ y $(f \circ f)(1) =$ ________.
3. El vértice de la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 + 16x + 70$ es ________.
4. Las intersecciones x de la gráfica de $f(x) = x^2 + 2x - 35$ son ________.
5. La gráfica de la función polinomial $f(x) = x^3(x-1)^2(x-5)$ es tangente al eje x en ________ y pasa por el eje x en ________.
6. El rango de la función $f(x) = 10/(x^2 + 1)$ es ________.
7. La intersección y de la gráfica de $f(x) = (2x - 4)/(5 - x)$ es ________.
8. Una función racional cuya gráfica tiene la asíntota horizontal $y = 1$ e intersección x $(3, 0)$ es $f(x) =$ ________.
9. El periodo de la función $y = 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}x$ es ________.
10. La gráfica de la función $y = \operatorname{sen}(3x - \pi/4)$ es la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} 3x$ desplazada ________ unidades a la ________.
11. $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}\pi) =$ ________.
12. Si f es una función uno a uno tal que $f^{-1}(3) = 1$, entonces un punto sobre la gráfica de f es ________.
13. Por transformaciones rígidas, el punto $(0, 1)$ sobre la gráfica de $y = e^x$ se mueve hacia el punto ________ sobre la gráfica de $y = 4 + e^{x-3}$.
14. $e^{3\ln 10} =$ ________.
15. Si $3^x = 5$, entonces $x =$ ________.
16. Si $3e^x = 4e^{-3x}$, entonces $x =$ ________.
17. Si $\log_3 x = -2$, entonces $x =$ ________.
18. Al escribir $\log_9 27 = 1.5$ como declaración exponencial, se encuentra que es equivalente a ________.
19. La inversa de $y = e^x$ es________.
20. Si $f(x) = e^x - 3$, entonces $f(-\ln 2) =$ ________.

C. Ejercicios

1. Estime el valor funcional haciendo uso de la gráfica de la función $y = f(x)$ en la FIGURA 1.R.1.

a) $f(-4)$ ***b)*** $f(-3)$
c) $f(-2)$ ***d)*** $f(-1)$
e) $f(0)$ ***f)*** $f(1)$
g) $f(1.5)$ ***h)*** $f(2)$
i) $f(3.5)$ ***j)*** $f(4)$

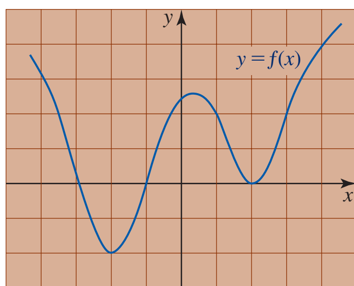


FIGURA 1.R.1 Gráfica para el problema 1

2. Dado que

$$g(t)\begin{cases} t^2, & -1 < t \leq 1 \\ 2t, & t \leq -1 \text{ o bien, } t > 1 \end{cases}$$

Encuentre para $0 < a < 1$:

a) $g(1 + a)$ ***b)*** $g(1 - a)$
c) $g(1.5 - a)$ ***d)*** $g(a)$
e) $g(-a)$ ***f)*** $g(2a)$

3. Determine si los números 1, 5 y 8 están en el rango de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & -2 \leq x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ x + 4, & x > 2. \end{cases}$$

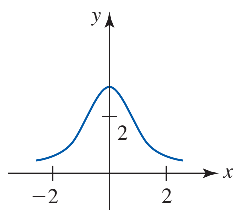
4. Suponga que $f(x) = \sqrt{x + 4}$, $g(x) = \sqrt{5 - x}$ y $h(x) = x^2$. Encuentre el dominio de cada una de las funciones dadas.

a) $f \circ h$ ***b)*** $g \circ h$
c) $f \circ f$ ***d)*** $g \circ g$
e) $f + g$ ***f)*** f/g

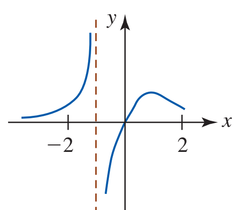
En los problemas 5 y 6, calcule $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$, y simplifique.

5. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 5$ **6.** $f(x) = 1 + 2x - \dfrac{3}{x}$

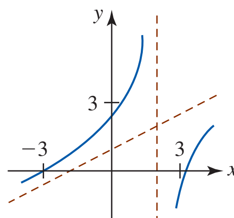
En los problemas 7-16, relacione la función racional dada con una de las gráficas *a*)-*j*).



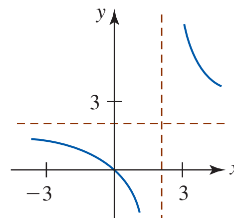
a)
FIGURA 1.R.2



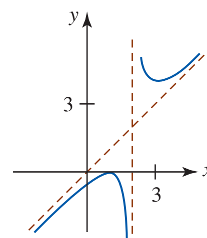
b)
FIGURA 1.R.3



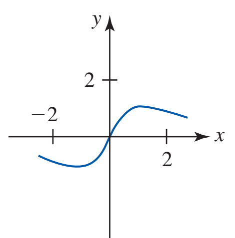
c)
FIGURA 1.R.4



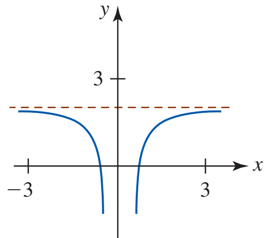
d)
FIGURA 1.R.5



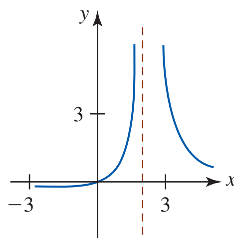
e)
FIGURA 1.R.6



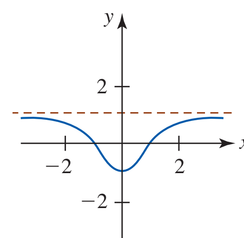
f)
FIGURA 1.R.7



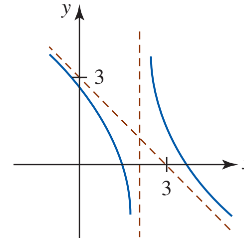
g)
FIGURA 1.R.8



h)
FIGURA 1.R.9



i)
FIGURA 1.R.10



j)
FIGURA 1.R.11

7. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

8. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

9. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 2}$

10. $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2}$

11. $f(x) = \dfrac{x}{(x - 2)^2}$

12. $f(x) = \dfrac{(x - 1)^2}{x - 2}$

13. $f(x) = \dfrac{x^2 - 10}{2x - 4}$

14. $f(x) = \dfrac{-x^2 + 5x - 5}{x - 2}$

15. $f(x) = \dfrac{2x}{x^3 + 1}$

16. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

En los problemas 17 y 18, encuentre la pendiente de la recta roja L en cada figura.

17.

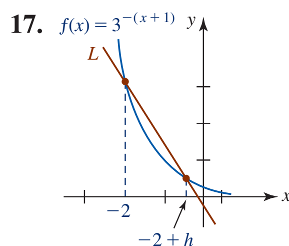


FIGURA 1.R.12 Gráfica para el problema 17

18.

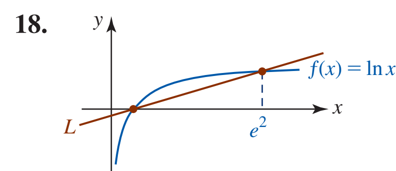


FIGURA 1.R.13 Gráfica para el problema 18

En los problemas 19 y 20, suponga que $2^t = a$ y $6^t = b$. Use las leyes de los exponentes dadas en la sección 1.6 para encontrar el valor de la cantidad dada.

19. ***a***) 12^t ***b***) 3^t ***c***) 6^{-t}

20. ***a***) 6^{3t} ***b***) $2^{-3t}2^{7t}$ ***c***) 18^t

21. Encuentre una función $f(x) = ae^{kx}$ si (0, 5) y (6, 1) son puntos sobre la gráfica de f.

22. Encuentre una función $f(x) = a10^{kx}$ si $f(3) = 8$ y $f(0) = \frac{1}{2}$.

23. Encuentre una función $f(x) = a + b^x$, $0 < b < 1$, si $f(1) = 5.5$ y la gráfica de f tiene una asíntota horizontal $y = 5$.

24. Encuentre una función $f(x) = a + \log_3(x - c)$ si $f(11) = 10$ y la gráfica de f tiene una asíntota vertical $x = 2$.

En los problemas 25-30, relacione las siguientes funciones con las gráficas dadas.

a) $y = \ln(x - 2)$ ***b***) $y = 2 - \ln x$

c) $y = 2 + \ln(x + 2)$ ***d***) $y = -2 - \ln(x + 2)$

e) $y = -\ln(2x)$ ***f***) $y = 2 + \ln(-x + 2)$

25.

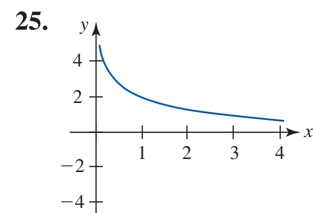


FIGURA 1.R.14 Gráfica para el problema 25

26.

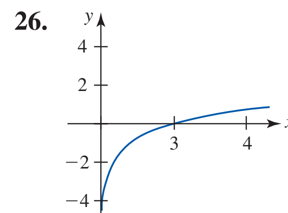


FIGURA 1.R.15 Gráfica para el problema 26

27.

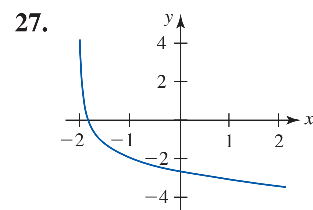


FIGURA 1.R.16 Gráfica para el problema 27

28.

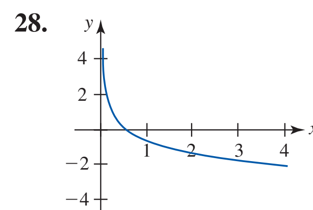


FIGURA 1.R.17 Gráfica para el problema 28

29.

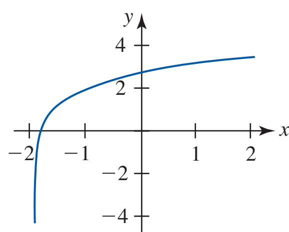


FIGURA 1.R.18 Gráfica para el problema 29

30.

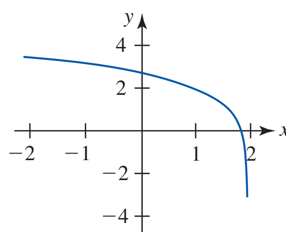


FIGURA 1.R.19 Gráfica para el problema 30

31. El ancho de una caja rectangular es tres veces su longitud, y su altura es dos veces su longitud.

a) Exprese el volumen V de la caja como una función de su longitud l.
b) Como una función de su ancho w.
c) Como una función de su altura h.

32. Se piensa construir una caja cerrada en forma de cubo usando dos materiales distintos. El material para los lados cuesta 1 centavo por centímetro cuadrado y el material para las caras superior e inferior cuesta 2.5 centavos por centímetro cuadrado. Exprese el costo total C de construcción como una función de la longitud x de un lado.

33. Exprese el volumen V de la caja que se muestra en la FIGURA 1.R.20 como una función del ángulo θ indicado.

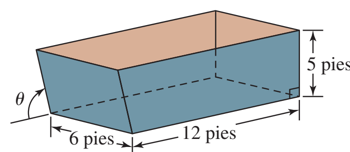


FIGURA 1.R.20 Caja en el problema 33

34. Considere el círculo de radio h con centro (h, h) mostrado en la FIGURA 1.R.21. Exprese el área de la región sombreada A como una función de h.

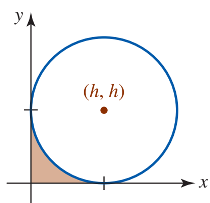


FIGURA 1.R.21 Círculo en el problema 34

35. Se construirá un canalón con una lámina metálica de 30 cm de ancho al doblar los bordes de ancho 10 cm a lo largo de cada lado, de modo que los lados formen ángulos ϕ con la vertical. Vea la FIGURA 1.R.22. Exprese el área de la sección transversal del canalón como una función del ángulo ϕ.

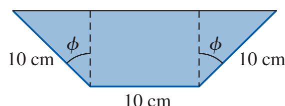


FIGURA 1.R.22 Canalón en el problema 35

36. Un tubo metálico se instalará horizontalmente alrededor de una esquina en forma de ángulo recto desde un vestíbulo de 8 pies de ancho hacia un vestíbulo de 6 pies de ancho. Vea la FIGURA 1.R.23. Exprese la longitud L del tubo como una función del ángulo θ que se muestra en la figura.

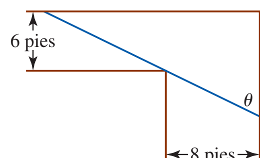


FIGURA 1.R.23 Tubo en el problema 36

37. En la FIGURA 1.R.24 se muestra un prisma cuyas caras paralelas son triángulos equiláteros. La base rectangular del prisma es perpendicular al eje x y está inscrita en el círculo $x^2 + y^2 = 1$. Exprese el volumen V del prisma como una función de x.

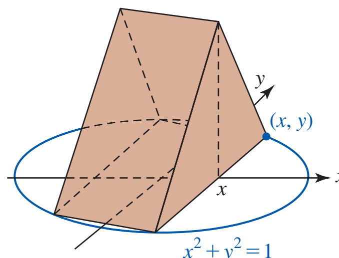


FIGURA 1.R.24 Prisma en el problema 37

38. El contenedor que se muestra en la FIGURA 1.R.25 consta de un cono invertido (abierto en su parte superior) sujeto a la parte inferior de un cilindro circular recto (abierto en sus partes superior e inferior) de radio fijo R. El volumen V del contenedor es fijo. Exprese el área superficial total S del contenedor como una función del ángulo θ indicado. [*Sugerencia*: El área superficial lateral de un cono está dada por $\pi R\sqrt{R^2 + h^2}$.]

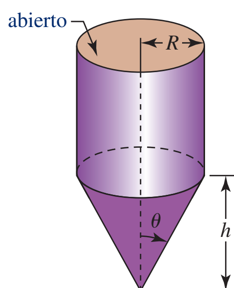
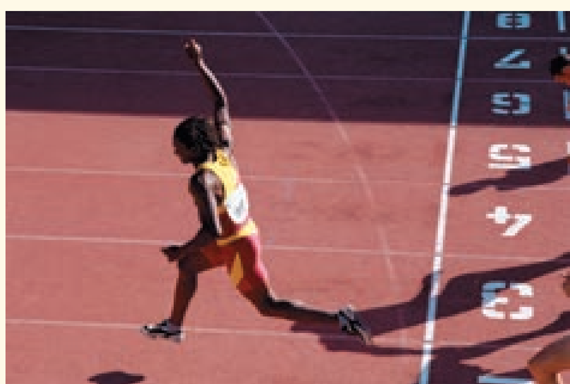


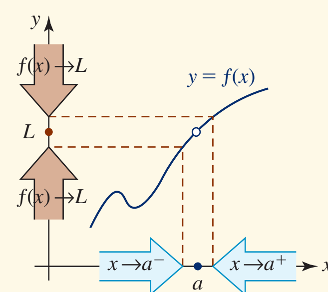
FIGURA 1.R.25 Contenedor en el problema 38

Capítulo 2

Límite de una función







En este capítulo En un curso típico de cálculo se incluyen muchos temas. Sin embargo, los tres temas más importantes en este estudio son los conceptos de *límite*, *derivada* e *integral*. Cada uno de estos conceptos está relacionado con las funciones, razón por la cual empezamos con una revisión de algunos hechos importantes sobre funciones y sus gráficas.

Históricamente, para introducir los enunciados fundamentales del cálculo se han usado dos problemas: el *problema de la recta tangente* y el *problema del área*. En este capítulo y en capítulos posteriores veremos que la solución de ambos problemas implica el concepto de límite.

2.1 Límites: un enfoque informal

Introducción Las dos grandes áreas del cálculo, denominadas *cálculo diferencial* y *cálculo integral*, se basan en el concepto fundamental de *límite*. En esta sección, el enfoque que haremos a este importante concepto será intuitivo, centrado en la comprensión de *qué* es un límite mediante el uso de ejemplos numéricos y gráficos. En la siguiente sección nuestro enfoque será analítico; es decir, usaremos métodos algebraicos para *calcular* el valor del límite de una función.

Límite de una función: enfoque informal Considere la función

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x} \tag{1}$$

cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales excepto -4. Aunque no es posible evaluar f *en* -4 porque al sustituir -4 por x se obtiene la cantidad indefinida $0/0$, $f(x)$ puede calcularse en cualquier número x que esté muy *próximo* a -4. Las dos tablas

x	-4.1	-4.01	-4.001
$f(x)$	8.1	8.01	8.001

x	-3.9	-3.99	-3.999
$f(x)$	7.9	7.99	7.999

(2)

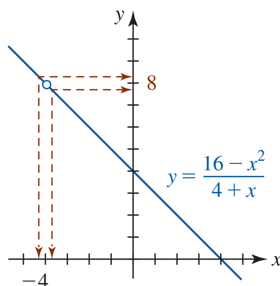


FIGURA 2.1.1 Cuando x está próxima a -4, $f(x)$ está cerca de 8

muestran que cuando x tiende a -4 por la izquierda o por la derecha, parece que los valores de la función $f(x)$ tienden a 8; en otras palabras, cuando x está próxima a -4, $f(x)$ está cerca de 8. Para interpretar de manera gráfica la información numérica en (1), observe que para todo número $x \neq -4$, la función f puede simplificarse por cancelación:

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x} = \frac{(4 + x)(4 - x)}{4 + x} = 4 - x.$$

Como se ve en la FIGURA 2.1.1, la gráfica de f es esencialmente la gráfica de $y = 4 - x$ con la excepción de que la gráfica de f tiene un *hueco* en el punto que corresponde a $x = -4$. Para x suficientemente cerca de -4, representado por las dos puntas de flecha sobre el eje x, las dos puntas de flecha sobre el eje y, que representan los valores de la función $f(x)$, simultáneamente se aproximan cada vez más al número 8. En efecto, en vista de los resultados numéricos en (2), las puntas de flecha pueden hacerse *tan próximas como se quiera* al número 8. Se dice que 8 es el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a -4.

Definición informal Suponga que L denota un número finito. El concepto de $f(x)$ que tiende a L a medida que x tiende a un número a puede definirse informalmente de la siguiente manera.

- Si $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próximo al número L al tomar x suficientemente cerca de, pero diferente de un número a, por la izquierda y por la derecha de a, entonces el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a a es L.

Notación El análisis del concepto de límite se facilita al usar una notación especial. Si el símbolo de flecha $\rightarrow$ representa la palabra *tiende*, entonces el simbolismo

$x \rightarrow a^-$ indica que x tiende al número a por la ***izquierda***,

es decir, a través de los números que son menores que a, y

$x \rightarrow a^+$ significa que x tiende a a por la ***derecha***,

es decir, a través de los números que son mayores que a. Finalmente, la notación

$x \rightarrow a$ significa que x tiende a a desde ***ambos lados***,

en otras palabras, por la izquierda y por la derecha de a sobre una recta numérica. En la tabla izquierda en (2) se hace $x \rightarrow -4^-$ (por ejemplo, -4.001 está a la izquierda de -4 sobre la recta numérica), mientras en la tabla derecha $x \rightarrow -4^+$.

Límites laterales En general, una función $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próxima a un número L_1 al tomar x suficientemente cerca, pero sin que sea igual, a un número a por la *izquierda*; entonces se escribe

$$f(x) \rightarrow L_1 \text{ cuando } x \rightarrow a^- \qquad \text{o bien,} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = L_1. \tag{3}$$

Se dice que el número L_1 es el **límite por la izquierda de $f(x)$ cuando x tiende a a**. De manera semejante, si $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próxima a un número L_2 al tomar x suficientemente cerca a, pero diferente de, un número a por la *derecha*, entonces L_2 es el **límite por la derecha de $f(x)$ cuando x tiende a a** y se escribe

$$f(x) \to L_2 \text{ cuando } x \to a^+ \qquad \text{o bien,} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = L_2. \tag{4}$$

Las cantidades en (3) y (4) también se denominan **límites laterales**.

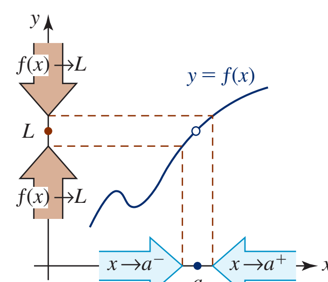


FIGURA 2.1.2 $f(x) \to L$ cuando $x \to a$ si y sólo si $f(x) \to L$ cuando $x \to a^-$ y $f(x) \to L$ cuando $x \to a^+$

Límites por dos lados Si tanto el límite por la izquierda $\lim_{x\to a^-} f(x)$ como el límite por la derecha $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existen y tienen un valor común L,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = L,$$

entonces se dice que L es el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a** y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = L. \tag{5}$$

Se dice que un límite como (5) es **por los dos lados**. Vea la FIGURA 2.1.2. Puesto que las tablas numéricas en (2) sugieren que

$$f(x) \to 8 \text{ cuando } x \to -4^- \qquad y \qquad f(x) \to 8 \text{ cuando } x \to -4^+, \tag{6}$$

es posible sustituir las dos declaraciones simbólicas en (6) por la declaración

$$f(x) \to 8 \text{ cuando } x \to -4 \qquad \text{o, en forma equivalente,} \qquad \lim_{x\to -4} \frac{16 - x^2}{4 + x} = 8. \tag{7}$$

Existencia o no existencia Por supuesto, un límite (por un lado o por dos lados) no tiene por qué existir. Pero es importante no olvidar lo siguiente:

- La existencia de un límite de una función f cuando x tiende a a (desde un lado o desde ambos lados) no depende de si f está definida en a, sino sólo de si está definida para x cerca del número a.

Por ejemplo, si la función en (1) se modifica de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{16 - x^2}{4 + x}, & x \neq -4 \\ 5, & x = -4, \end{cases}$$

entonces $f(-4)$ está definida y $f(-4) = 5$, pero $\lim_{x\to -4} \dfrac{16 - x^2}{4 + x} = 8$. Vea la FIGURA 2.1.3. En general, el límite por los dos lados $\lim_{x\to a} f(x)$ **no existe**

- si alguno de los dos límites laterales, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ o $\lim_{x\to a^+} f(x)$ no existe, o
- si $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$, pero $L_1 \neq L_2$.

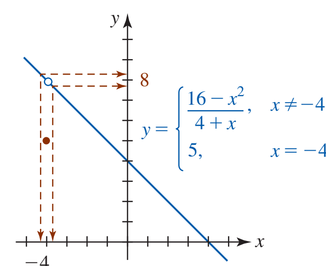


FIGURA 2.1.3 El hecho de que f esté definida o no en a es irrelevante con respecto a la existencia del límite de $f(x)$ cuando $x \to a$

EJEMPLO 1 Un límite que existe

La gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ se muestra en la FIGURA 2.1.4. Como se observa en la gráfica y en las tablas acompañantes, parece válido que

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = -6 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 4^+} f(x) = -6$$

y, en consecuencia, $\lim_{x\to 4} f(x) = -6$.

$x \to 4^-$	3.9	3.99	3.999
$f(x)$	−5.41000	−5.94010	−5.99400

$x \to 4^+$	4.1	4.01	4.001
$f(x)$	−6.61000	−6.06010	−6.00600

■

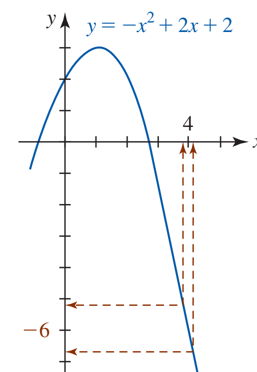


FIGURA 2.1.4 Gráfica de la función en el ejemplo 1

Observe que en el ejemplo 1 la función dada ciertamente está definida en 4, pero en ningún momento se sustituye $x = 4$ en la función para encontrar el valor de $\lim_{x\to 4} f(x)$.

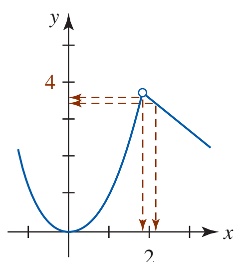


FIGURA 2.1.5 Gráfica de la función en el ejemplo 2

EJEMPLO 2 Un límite que existe

La gráfica de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ -x + 6, & x > 2 \end{cases}$$

se muestra en la FIGURA 2.1.5. Observe que $f(2)$ no está definido, aunque esto no tiene ninguna consecuencia cuando se considera $\lim_{x \to 2} f(x)$. A partir de la gráfica y de las tablas acompañantes,

$x \to 2^-$	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	3.61000	3.96010	3.99600

$x \to 2^+$	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	3.90000	3.99000	3.99900

observamos que cuando x se hace próxima a 2, $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próxima a 4, y así

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4.$$

Es decir, $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. ■

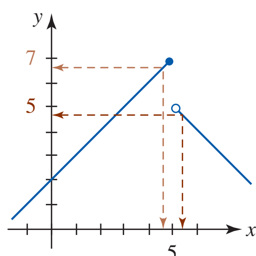


FIGURA 2.1.6 Gráfica de la función en el ejemplo 3

EJEMPLO 3 Un límite que no existe

La gráfica de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \le 5 \\ -x + 10, & x > 5 \end{cases}$$

se muestra en la FIGURA 2.1.6. A partir de la gráfica y de las tablas acompañantes, parece que cuando x se hace próxima a 5 a través de números menores que 5, $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 7$. Luego, cuando x tiende a 5 a través de números mayores que 5 parece que $\lim_{x \to 5^+} f(x) = 5$. Pero puesto que

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) \neq \lim_{x \to 5^+} f(x),$$

se concluye que $\lim_{x \to 5} f(x)$ no existe.

$x \to 5^-$	4.9	4.99	4.999
$f(x)$	6.90000	6.99000	6.99900

$x \to 5^+$	5.1	5.01	5.001
$f(x)$	4.90000	4.99000	4.99900

■

EJEMPLO 4 Un límite que no existe

La función entero mayor se analizó en la sección 1.1.

Recuerde que la **función entero mayor** o **parte entera** $f(x) = \lfloor x \rfloor$ se define como el mayor entero que es menor o igual que x. El dominio de f es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$. A partir de la gráfica en la FIGURA 2.1.7 vemos que $f(n)$ está definida para todo entero n; a pesar de ello, para cada entero n, $\lim_{x \to n} f(x)$ no existe. Por ejemplo, cuando x tiende, por ejemplo, al número 3, los dos límites laterales existen pero sus valores son diferentes:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2 \qquad \text{mientras que} \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 3. \tag{8}$$

En general, para un entero n,

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = n - 1 \qquad \text{mientras que} \qquad \lim_{x \to n^+} f(x) = n.$$ ■

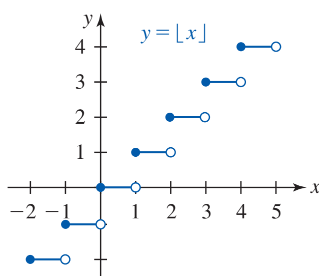


FIGURA 2.1.7 Gráfica de la función en el ejemplo 4

EJEMPLO 5 Un límite por la derecha

A partir de la FIGURA 2.1.8 debe resultar evidente que $f(x) = \sqrt{x} \to 0$ cuando $x \to 0^+$, es decir,

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Sería incorrecto escribir $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ puesto que esta notación implica la connotación de que los límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales a 0. En este caso $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}$ no existe puesto que $f(x) = \sqrt{x}$ no está definida para $x < 0$. ■

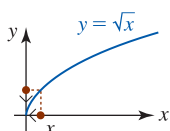


FIGURA 2.1.8 Gráfica de la función en el ejemplo 5

Si $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de $y = f(x)$, entonces $\lim_{x \to a} f(x)$ nunca existe porque los valores de la función $f(x)$ deben volverse sin límite desde por lo menos un lado de la recta $x = a$.

EJEMPLO 6 Un límite que no existe

Una asíntota vertical siempre corresponde a una ruptura infinita en la gráfica de la función f. En la FIGURA 2.1.9 observamos que el eje y o $x = 0$ es una asíntota vertical para la gráfica de $f(x) = 1/x$. Las tablas

$x \to 0^-$	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$	-10	-100	$-1\ 000$

$x \to 0^+$	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	10	100	1 000

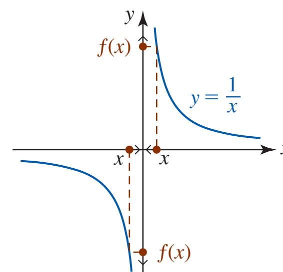


FIGURA 2.1.9 Gráfica de la función en el ejemplo 6

muestran claramente que los valores de la función $f(x)$ se vuelven sin límite en valor absoluto cuando se tiende a 0. En otras palabras, $f(x)$ no tiende a un número real cuando $x \to 0^-$ ni cuando $x \to 0^+$. En consecuencia, ni el límite por la izquierda ni el límite por la derecha existen cuando x tiende a 0. Por tanto, es posible concluir que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe. ■

EJEMPLO 7 Un límite trigonométrico importante

Para calcular las funciones trigonométricas sen x, cos x, tan x, etc., es importante darse cuenta de que la variable x es un número real o un ángulo medido en radianes. Con eso en mente, considere los valores numéricos de $f(x) = (\text{sen}\, x)/x$ cuando $x \to 0^+$ dados en la tabla siguiente.

$x \to 0^+$	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f(x)$	0.99833416	0.99998333	0.99999983	0.99999999

Resulta fácil ver que se cumplen los mismos resultados proporcionados en la tabla cuando $x \to 0^-$. Debido a que sen x es una función impar, para $x > 0$ y $-x < 0$, se tiene $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$ y en consecuencia,

$$f(-x) = \frac{\text{sen}\,(-x)}{-x} = \frac{\text{sen}\, x}{x} = f(x).$$

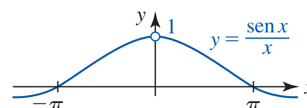


FIGURA 2.1.10 Gráfica de la función en el ejemplo 7

Como puede verse en la FIGURA 2.1.10, f es una función par. La tabla de valores numéricos, así como la gráfica de f sugieren fuertemente el siguiente resultado:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1. \tag{9}$$ ■

El límite en (9) es un resultado muy importante que se usará en la sección 3.4. Otro límite trigonométrico que se le pedirá comprobar como ejercicio está dado por

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0. \tag{10}$$

Vea el problema 43 en los ejercicios 2.1. Debido a su importancia, tanto (9) como (10) se demostrarán en la sección 2.4.

Una forma indeterminada Se dice que el límite de un cociente $f(x)/g(x)$, donde tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando $x \to a$, tiene una **forma indeterminada 0/0**. El límite (7) en el análisis inicial tenía esta forma indeterminada. Muchos límites importantes, como (9) y (10), y el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

que constituye la columna vertebral del cálculo diferencial, también tienen la forma indeterminada 0/0.

EJEMPLO 8 Una forma indeterminada

El límite $\lim_{x \to 0} |x|/x$ tiene la forma indeterminada $0/0$, pero, a diferencia de (7), (9) y (10), este límite no existe. Para ver por qué, analizaremos la gráfica de la función $f(x) = |x|/x$. Para $x \neq 0$, $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ y así reconocemos a f como la función definida por partes

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases} \qquad (11)$$

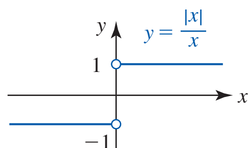


FIGURA 2.1.11 Gráfica de la función en el ejemplo 8

A partir de (11) y de la gráfica de f de la FIGURA 2.1.11 debe resultar evidente que los dos límites de f, izquierdo y derecho, existen y

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Debido a que estos límites laterales son diferentes, se concluye que $\lim_{x \to 0} |x|/x$ no existe. ■

NOTAS DESDE EL AULA

Aunque las gráficas y tablas de valores funcionales pueden ser convincentes para determinar si un límite existe o no, usted ciertamente está enterado de que todas las calculadoras y computadoras funcionan sólo con aproximaciones, y que las gráficas pueden trazarse de manera inexacta. Un uso ciego de las calculadoras también puede conducir a una conclusión falsa. Por ejemplo, se sabe que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(\pi/x)$ no existe, pero a partir de los valores tabulares

$x \to 0$	± 0.1	± 0.01	± 0.001
$f(x)$	0	0	0

podría concluirse en forma natural que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(\pi/x) = 0$. Por otra parte, puede demostrarse que el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} \qquad (12)$$

existe y es igual a $\frac{1}{4}$. Vea el ejemplo 11 en la sección 2.2. Con calculadora se obtiene

$x \to 0$	± 0.00001	± 0.000001	± 0.0000001
$f(x)$	0.200000	0.000000	0.000000

El problema al calcular (12) para toda x próxima a 0 es que en forma correspondiente, $\sqrt{x^2 + 4}$ está muy próximo a 2. Cuando se restan dos números casi iguales en una calculadora, es posible que ocurra una pérdida de cifras significativas debido al error por redondeo.

Ejercicios 2.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-8.

Fundamentos

En los problemas 1-14, trace la gráfica de la función para encontrar el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim_{x \to 2} (3x + 2)$

2. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 1)$

3. $\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

4. $\lim_{x \to 5} \sqrt{x - 1}$

5. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

6. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 3x}{x}$

7. $\lim_{x \to 3} \frac{|x - 3|}{x - 3}$

8. $\lim_{x \to 0} \frac{|x| - x}{x}$

9. $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x}$

10. $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

11. $\lim_{x \to 0} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 0 \\ -x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$

12. $\lim_{x \to 2} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ x + 1, & x \geq 2 \end{cases}$

13. $\lim_{x \to 2} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ x^2 - 6x + 8, & x > 2 \end{cases}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ \sqrt{x} - 1, & x > 0 \end{cases}$

En los problemas 15-18, use la gráfica dada para encontrar el valor de cada cantidad, o concluya que no existe.

a) $f(1)$ ***b***) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ***c***) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ***d***) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

15.

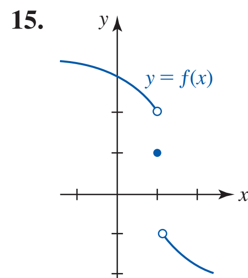


FIGURA 2.1.12 Gráfica para el problema 15

16.

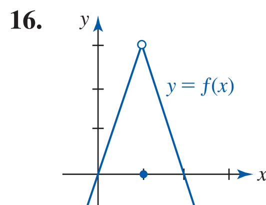


FIGURA 2.1.13 Gráfica para el problema 16

17.

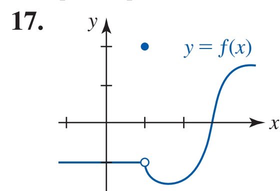


FIGURA 2.1.14 Gráfica para el problema 17

18.

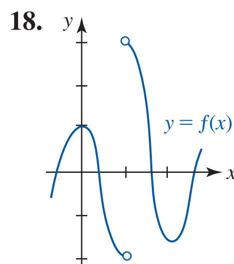


FIGURA 2.1.15 Gráfica para el problema 18

En los problemas 19-28, cada límite tiene el valor 0, pero alguna notación es incorrecta. Si la notación es incorrecta, escriba la declaración correcta.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[4]{x} = 0$

21. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{1 - x} = 0$

22. $\lim\limits_{x\to -2^+} \sqrt{x + 2} = 0$

23. $\lim\limits_{x\to 0^-} \lfloor x \rfloor = 0$

24. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \lfloor x \rfloor = 0$

25. $\lim\limits_{x\to \pi} \operatorname{sen} x = 0$

26. $\lim\limits_{x\to 1} \cos^{-1} x = 0$

27. $\lim\limits_{x\to 3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0$

28. $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$

En los problemas 29 y 30, use la gráfica dada para encontrar cada límite, o concluya que no existe.

29. ***a***) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$ ***b***) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ***d***) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ***f***) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$

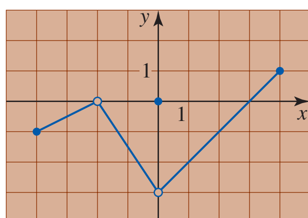


FIGURA 2.1.16 Gráfica para el problema 29

30. ***a***) $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$ ***b***) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ ***d***) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ***f***) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

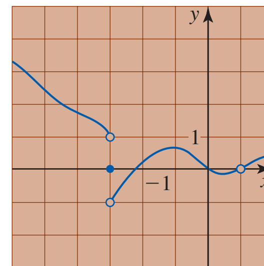


FIGURA 2.1.17 Gráfica para el problema 30

En los problemas 31-34, trace una gráfica de la función f con las propiedades dadas.

31. $f(-1) = 3, f(0) = -1, f(1) = 0, \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe

32. $f(-2) = 3, \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1, f(1) = -2$

33. $f(0) = 1, \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3, \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3, f(1)$ está indefinido, $f(3) = 0$

34. $f(-2) = 2, f(x) = 1, -1 \leq x \leq 1, \lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1,$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe, $f(2) = 3$

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 35-40, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada f sobre el intervalo $[-0.5, 0.5]$. Use la gráfica para conjeturar el valor de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, o concluya que el límite no existe.

35. $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$

36. $f(x) = x\cos\dfrac{1}{x}$

37. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{4 + x}}{x}$

38. $f(x) = \dfrac{9}{x}\left[\sqrt{9 - x} - \sqrt{9 + x}\right]$

39. $f(x) = \dfrac{e^{-2x} - 1}{x}$

40. $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$

En los problemas 41-50, proceda como en los ejemplos 3, 6 y 7 y use una calculadora para construir tablas de valores funcionales. Conjeture el valor de cada límite o concluya que no existe.

41. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6\sqrt{x} - 6\sqrt{2x - 1}}{x - 1}$

42. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$

43. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

44. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

45. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} 3x}$

46. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

47. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

48. $\lim\limits_{x\to 3} \left[\dfrac{6}{x^2 - 9} - \dfrac{6\sqrt{x - 2}}{x^2 - 9}\right]$

49. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 + x - 2}{x - 1}$

50. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

2.2 Teoremas sobre límites

Introducción La intención del análisis informal en la sección 2.1 fue proporcionarle una comprensión intuitiva de cuándo un límite existe o no. Sin embargo, no es aconsejable ni práctico, en ninguna instancia, llegar a una conclusión respecto a la existencia de un límite con base en una gráfica o tabla de valores numéricos. Debe ser posible evaluar un límite, o concluir su no existencia, de alguna forma mecánica. Los teoremas que se considerarán en esta sección establecen tales mecanismos. Las demostraciones de algunos de estos resultados se muestran en el apéndice.

El primer teorema proporciona dos resultados básicos que se usarán en todo el análisis de esta sección.

Teorema 2.2.1 Dos límites fundamentales

i) $\lim_{x \to a} c = c$, donde c es una constante.

ii) $\lim_{x \to a} x = a$

Aunque ambas partes del teorema 2.2.1 requieren una demostración formal, el teorema 2.2.1*ii*) es casi tautológico cuando se plantea verbalmente:

- El límite de x cuando x tiende a a es a.

En el apéndice se proporciona una demostración del teorema 2.2.1*i*).

EJEMPLO 1 Uso del teorema 2.2.1

a) A partir del teorema 2.2.1*i*),

$$\lim_{x \to 2} 10 = 10 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 6} \pi = \pi.$$

b) A partir del teorema 2.2.1*ii*),

$$\lim_{x \to 2} x = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} x = 0.$$

■

El límite de una constante por una función f es la constante por el límite de f cuando x tiende a un número a.

Teorema 2.2.2 Límite de una función multiplicada por una constante

Si c es una constante, entonces

$$\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x).$$

Ahora es posible empezar a usar los teoremas combinados.

EJEMPLO 2 Uso de los teoremas 2.2.1 y 2.2.2

A partir de los teoremas 2.2.1*ii*) y 2.2.2,

a) $\lim_{x \to 8} 5x = 5 \lim_{x \to 8} x = 5 \cdot 8 = 40$

b) $\lim_{x \to -2} \left(-\frac{3}{2}x\right) = -\frac{3}{2} \lim_{x \to -2} x = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-2) = 3.$ ■

El siguiente teorema es particularmente importante porque constituye un medio para calcular límites de manera algebraica.

Teorema 2.2.3 Límites de una suma, un producto y un cociente

Suponga que a es un número real y que $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existen. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, entonces

i) $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \pm L_2$,

ii) $\lim_{x \to a}[f(x)g(x)] = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = L_1 L_2$, y

iii) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}, \; L_2 \neq 0.$

El teorema 2.2.3 puede plantearse coloquialmente como

- Si ambos límites existen, entonces
  i) el límite de una suma es la suma de los límites,
  ii) el límite de un producto es el producto de los límites y
  iii) el límite de un cociente es el cociente de los límites, en el supuesto que el límite del denominador no es cero.

Nota: Si todos los límites existen, entonces el teorema 2.2.3 también es válido para límites laterales; es decir, la notación $x \to a$ en el teorema 2.2.3 puede sustituirse por $x \to a^-$ o por $x \to a^+$. Además, el teorema 2.2.3 puede extenderse a diferencias, sumas, productos y cocientes que implican más de dos funciones. Consulte el apéndice para ver una demostración del teorema 2.2.3.

EJEMPLO 3 Uso del teorema 2.2.3

Evalúe $\lim_{x \to 5} (10x + 7)$.

Solución Por los teoremas 2.2.1 y 2.2.2, sabemos que $\lim_{x \to 5} 7$ y $\lim_{x \to 5} 10x$ existen. Por tanto, a partir del teorema 2.2.3*i*),

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 5} (10x + 7) &= \lim_{x \to 5} 10x + \lim_{x \to 5} 7 \\ &= 10 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 7 \\ &= 10 \cdot 5 + 7 = 57.\end{aligned}$$

■

Límite de una potencia El teorema 2.2.3*ii*) puede usarse para calcular el límite de una potencia entera positiva de una función. Por ejemplo, si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces por el teorema 2.2.3*ii*) con $g(x) = f(x)$,

$$\lim_{x \to a}[f(x)]^2 = \lim_{x \to a}[f(x) \cdot f(x)] = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = L^2.$$

Por el mismo razonamiento es posible aplicar el teorema 2.2.3*ii*) al caso general en que $f(x)$ es un factor n veces. Este resultado se plantea en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.4 Límites de una potencia

Sean $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n un entero positivo. Entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n = L^n.$$

Para el caso especial $f(x) = x^n$, el resultado proporcionado en el teorema 2.2.4 produce

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n. \qquad (1)$$

EJEMPLO 4 Uso de (1) y el teorema 2.2.3

Evalúe

a) $\lim_{x \to 10} x^3$ ***b***) $\lim_{x \to 4} \frac{5}{x^2}$.

Solución

a) Por (1),

$$\lim_{x \to 10} x^3 = 10^3 = 1\,000.$$

b) Por el teorema 2.2.1 y (1) sabemos que $\lim_{x \to 4} 5 = 5$ y $\lim_{x \to 4} x^2 = 16 \neq 0$. En consecuencia, por el teorema 2.2.3*iii*),

$$\lim_{x \to 4} \frac{5}{x^2} = \frac{\lim_{x \to 4} 5}{\lim_{x \to 4} x^2} = \frac{5}{4^2} = \frac{5}{16}. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Uso del teorema 2.2.3

Evalúe $\lim_{x \to 3} (x^2 - 5x + 6)$.

Solución Debido a los teoremas 2.2.1, 2.2.2 y (1), todos los límites existen. En consecuencia, por el teorema 2.2.3*i*),

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 5x + 6) = \lim_{x \to 3} x^2 - \lim_{x \to 3} 5x + \lim_{x \to 3} 6 = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Uso de los teoremas 2.2.3 y 2.2.4

Evalúe $\lim_{x \to 1} (3x - 1)^{10}$.

Solución Primero, por el teorema 2.2.3*i*) se observa que

$$\lim_{x \to 1} (3x - 1) = \lim_{x \to 1} 3x - \lim_{x \to 1} 1 = 2.$$

Luego, por el teorema 2.2.4 se concluye que

$$\lim_{x \to 1} (3x - 1)^{10} = \left[\lim_{x \to 1} (3x - 1)\right]^{10} = 2^{10} = 1\,024. \qquad \blacksquare$$

Límite de funciones polinomiales Algunos límites pueden evaluarse por *sustitución directa*. Para calcular el límite de una función polinomial general pueden usarse (1) y el teorema 2.2.3*i*). Si

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

es una función polinomial, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0\right) \\ &= \lim_{x \to a} c_n x^n + \lim_{x \to a} c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \lim_{x \to a} c_1 x + \lim_{x \to a} c_0 \\ &= c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0. \end{aligned}$$

← f está definida en $x = a$ y este límite es $f(a)$

En otras palabras, para evaluar el límite de una función polinomial f cuando x tiende a un número real a, *sólo es necesario evaluar la función en* $x = a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{2}$$

Al revisar el ejemplo 5 observamos que $\lim_{x \to 3} f(x)$, donde $f(x) = x^2 - 5x + 6$ está dada por $f(3) = 0$.

Debido a que una función racional f es el cociente de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, por (2) y por el teorema 2.2.3*iii*) se concluye que el límite de una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ también puede encontrarse al evaluar f en $x = a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}. \tag{3}$$

Por supuesto, es necesario agregar a (3) el siempre importante requisito de que el límite del denominador no sea cero; es decir, $q(a) \neq 0$.

EJEMPLO 7 Uso de (2) y (3)

Evalúe $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x-4}{8x^2+2x-2}$.

Solución $f(x) = \dfrac{3x-4}{8x^2+2x-2}$ es una función racional, de modo que si se identifican los polinomios $p(x) = 3x - 4$ y $q(x) = 8x^2 + 2x - 2$, entonces por (2)

$$\lim_{x\to -1} p(x) = p(-1) = -7 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -1} q(x) = q(-1) = 4.$$

Puesto que $q(-1) \neq 0$, por (3) se concluye que

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x-4}{8x^2+2x-2} = \frac{p(-1)}{q(-1)} = \frac{-7}{4} = -\frac{7}{4}.$$ ■

Usted no debe quedarse con la impresión de que *siempre* es posible encontrar el límite de una función al sustituir el número *a directamente en la función*.

EJEMPLO 8 Uso del teorema 2.2.3

Evalúe $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$.

Solución En este límite la función es racional, pero si en la función sustituimos $x = 1$, se observa que el límite tiene la forma indeterminada $0/0$. No obstante, si *primero* se simplifica, después puede aplicarse el teorema 2.2.3*iii*):

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)}$$ ← cancelar es válido en el supuesto que $x \neq 1$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 1} 1}{\lim_{x\to 1}(x+2)} = \frac{1}{3}.$$ ■

Si un límite de una función racional tiene la forma indeterminada $0/0$ cuando $x \to a$, entonces por el teorema del factor del álgebra $x - a$ debe ser un factor tanto del numerador como del denominador. Estas cantidades se factorizan y se cancela el factor $x - a$.

Algunas veces es posible afirmar a primera vista *cuándo no existe un límite*.

Teorema 2.2.5 Un límite que no existe

Sean $\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

no existe.

DEMOSTRACIÓN Se proporcionará una demostración indirecta de este resultado, basada en el teorema 2.2.3. Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, y también que $\lim_{x\to a} (f(x)/g(x))$ existe y que es igual a L_2. Entonces

$$L_1 = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)}\right), \qquad g(x) \neq 0,$$

$$= \left(\lim_{x\to a} g(x)\right)\left(\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0 \cdot L_2 = 0.$$

El teorema se ha demostrado por contradicción de la hipótesis $L_1 \neq 0$. ■

EJEMPLO 9 Uso de los teoremas 2.2.3 y 2.2.5

Evalúe

a) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x}{x - 5}$ ***b***) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 10x - 25}{x^2 - 4x - 5}$ ***c***) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{x^2 - 10x + 25}$.

Solución Cada función en los tres incisos del ejemplo es racional.

a) Puesto que el límite del denominador x es 5, pero el límite del denominador $x - 5$ es 0, concluimos del teorema 2.2.5 que el límite no existe.

b) Al sustituir $x = 5$, tanto el denominador como el numerador se hacen iguales a 0, de modo que el límite tiene la forma indeterminada 0/0. Por el teorema del factor del álgebra, $x - 5$ es un factor tanto del numerador como del denominador. Así,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 10x - 25}{x^2 - 4x - 5} &= \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)^2}{(x - 5)(x + 1)} && \leftarrow \text{se cancela el factor } x - 5 \\ &= \lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{x + 1} \\ &= \frac{0}{6} = 0. && \leftarrow \text{el límite existe} \end{aligned}$$

c) De nuevo, el límite tiene la forma indeterminada 0/0. Después de factorizar el denominador y cancelar los factores, por la manipulación algebraica

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{x^2 - 10x + 25} &= \lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{(x - 5)^2} \\ &= \lim_{x \to 5} \frac{1}{x - 5} \end{aligned}$$

se ve que el límite no existe puesto que el límite del numerador en la última expresión ahora es 1, pero el límite del denominador es 0. ■

Límite de una raíz El límite de la raíz n-ésima de una función es la raíz n-ésima del límite siempre que el límite exista y tenga una raíz n-ésima real. El siguiente teorema resume este hecho.

Teorema 2.2.6 Límite de una raíz

Sean $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n un entero positivo. Entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L},$$

en el supuesto que $L \geq 0$ cuando n es par.

Un caso especial inmediato del teorema 2.2.6 es

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}, \tag{4}$$

en el supuesto que $a \geq 0$ cuando n es par. Por ejemplo, $\lim_{x \to 9} \sqrt{x} = \left[\lim_{x \to 9} x\right]^{1/2} = 9^{1/2} = 3$.

EJEMPLO 10 Uso de (4) y del teorema 2.2.3

Evalúe $\lim_{x \to -2} \dfrac{x - \sqrt[3]{x}}{2x + 10}$.

Solución Puesto que $\lim_{x \to -8} (2x + 10) = -6 \neq 0$, por el teorema 2.2.3*iii*) y (4) observamos que

$$\lim_{x \to -8} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{2x + 10} = \frac{\lim_{x \to -8} x - \left[\lim_{x \to -8} x\right]^{1/3}}{\lim_{x \to -8} (2x + 10)} = \frac{-8 - (-8)^{1/3}}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1.$$ ■

Cuando el límite de una función algebraica que implica radicales tiene la forma indeterminada 0/0, algo que puede intentarse es racionalizar el numerador o el denominador.

EJEMPLO 11 Racionalización de un numerador

Evalúe $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$.

En la sección "Notas desde el aula", al final de la sección 2.1, vimos este límite en la ecuación (12).

Solución Puesto que $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+4} = \sqrt{\lim_{x\to 0}(x^2+4)} = 2$ por inspección vemos que el límite dado tiene la forma indeterminada 0/0. Sin embargo, al racionalizar el numerador obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)-4}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)} \quad \leftarrow \text{se cancelan las } x\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}. \quad \leftarrow \text{el límite ya no es } 0/0\end{aligned}$$

Ahora ya es posible que apliquemos los teoremas 2.2.3 y 2.2.6:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}\\ &= \frac{\lim_{x\to 0}1}{\sqrt{\lim_{x\to 0}(x^2+4)}+\lim_{x\to 0}2}\\ &= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

■

En caso de que alguien se pregunte si puede haber más de un límite de una función $f(x)$ cuando $x \to a$, para que quede registro se plantea el último teorema.

Teorema 2.2.7 Existencia implica unicidad

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, entonces es único.

NOTAS DESDE EL AULA

En matemáticas es tan importante saber lo que un teorema o una definición *no* dice, así como saber lo que dice.

i) La propiedad *i*) del teorema 2.2.3 no dice que el límite de una suma *siempre* es la suma de los límites. Por ejemplo, $\lim_{x\to 0}(1/x)$ no existe, de modo que

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right] \neq \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}.$$

A pesar de ello, puesto que $1/x - 1/x = 0$ para $x \neq 0$, el límite de la diferencia existe.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

ii) En forma semejante, el límite de un producto puede existir y no obstante no ser igual al producto de los límites. Por ejemplo, $x/x = 1$, para $x \neq 0$, y así

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

pero

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) \neq \left(\lim_{x\to 0} x\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\right)$$

puesto que $\lim_{x\to 0}(1/x)$ no existe.

iii) El teorema 2.2.5 no afirma que el límite de un cociente no existe cuando el límite del denominador es cero. El ejemplo 8 es un contraejemplo de esa interpretación. No obstante, el teorema 2.2.5 establece que el límite de un cociente no existe cuando el límite del denominador es cero *y* el límite del numerador no es cero.

Ejercicios 2.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-8.

Fundamentos

En los problemas 1-52, encuentre el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim\limits_{x\to -4} 15$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \cos \pi$
3. $\lim\limits_{x\to 3} (-4)x$
4. $\lim\limits_{x\to 2} (3x - 9)$
5. $\lim\limits_{x\to -2} x^2$
6. $\lim\limits_{x\to 5} (-x^3)$
7. $\lim\limits_{x\to -1} (x^3 - 4x + 1)$
8. $\lim\limits_{x\to 6} (-5x^2 + 6x + 8)$
9. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x + 4}{x - 7}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + 5}{3x}$
11. $\lim\limits_{t\to 1} (3t - 1)(5t^2 + 2)$
12. $\lim\limits_{t\to -2} (t + 4)^2$
13. $\lim\limits_{s\to 7} \dfrac{s^2 - 21}{s + 2}$
14. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2 - 6x}{x^2 - 7x + 6}$
15. $\lim\limits_{x\to -1} (x + x^2 + x^3)^{135}$
16. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(3x - 4)^{40}}{(x^2 - 2)^{36}}$
17. $\lim\limits_{x\to 6} \sqrt{2x - 5}$
18. $\lim\limits_{x\to 8} (1 + \sqrt[3]{x})$
19. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\sqrt{t}}{t^2 + t - 2}$
20. $\lim\limits_{x\to 2} x^2\sqrt{x^2 + 5x + 2}$
21. $\lim\limits_{y\to -5} \dfrac{y^2 - 25}{y + 5}$
22. $\lim\limits_{u\to 8} \dfrac{u^2 - 5u - 24}{u - 8}$
23. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$
24. $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{t^3 + 1}{t^2 - 1}$
25. $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{(x - 2)(x + 5)}{(x - 8)}$
26. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x + 6}{4x^2 - 36}$
27. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x - 2}$
28. $\lim\limits_{x\to 1.5} \dfrac{2x^2 + 3x - 9}{x - 1.5}$
29. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^3 - 2t + 1}{t^3 + t^2 - 2}$
30. $\lim\limits_{x\to 0} x^3(x^4 + 2x^3)^{-1}$
31. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(x + 2)(x^5 - 1)^3}{(\sqrt{x} + 4)^2}$
32. $\lim\limits_{x\to -2} x\sqrt{x + 4}\,\sqrt[3]{x - 6}$
33. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{x^2 + 3x - 1}{x} + \dfrac{1}{x}\right]$
34. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{6}{x^2 + 2x - 8}\right]$
35. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{(x + 3)^2}{\sqrt{x - 3}}$
36. $\lim\limits_{x\to 3} (x - 4)^{99}(x^2 - 7)^{10}$
37. $\lim\limits_{x\to 10} \sqrt{\dfrac{10x}{2x + 5}}$
38. $\lim\limits_{r\to 1} \dfrac{\sqrt{(r^2 + 3r - 2)^3}}{\sqrt[3]{(5r - 3)^2}}$
39. $\lim\limits_{h\to 4} \sqrt{\dfrac{h}{h + 5}\left(\dfrac{h^2 - 16}{h - 4}\right)^2}$
40. $\lim\limits_{t\to 2} (t + 2)^{3/2}(2t + 4)^{1/3}$
41. $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt[5]{\dfrac{x^3 - 64x}{x^2 + 2x}}$
42. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(8x + \dfrac{2}{x}\right)^5$
43. $\lim\limits_{t\to 1} (at^2 - bt)^2$
44. $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{u^2x^2 + 2xu + 1}$
45. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(8 + h)^2 - 64}{h}$
46. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}[(1 + h)^3 - 1]$
47. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x + h} - \dfrac{1}{x}\right)$
48. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \quad (x > 0)$
49. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}$
50. $\lim\limits_{u\to 5} \dfrac{\sqrt{u + 4} - 3}{u - 5}$
51. $\lim\limits_{v\to 0} \dfrac{\sqrt{25 + v} - 5}{\sqrt{1 + v} - 1}$
52. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4 - \sqrt{x + 15}}{x^2 - 1}$

En los problemas 53-60, suponga que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 4$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 2$. Encuentre el límite dado, o concluya que no existe.

53. $\lim\limits_{x\to a} [5f(x) + 6g(x)]$
54. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^3$
55. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)}$
56. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$
57. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{f(x) - 2g(x)}$
58. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{[f(x)]^2 - 4[g(x)]^2}{f(x) - 2g(x)}$
59. $\lim\limits_{x\to a} xf(x)g(x)$
60. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{6x + 3}{xf(x) + g(x)}, \; a \neq -\frac{1}{2}$

Piense en ello

En los problemas 61 y 62, use el primer resultado para encontrar los límites en los incisos *a*)-*c*). Justifique cada paso de su trabajo citando la propiedad idónea de los límites.

61. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100} - 1}{x - 1} = 100$

   a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100} - 1}{x^2 - 1}$ ***b***) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{50} - 1}{x - 1}$ ***c***) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^{100} - 1)^2}{(x - 1)^2}$

62. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\operatorname{sen} x}$ ***b***) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2}$ ***c***) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x^2 - \operatorname{sen} x}{x}$

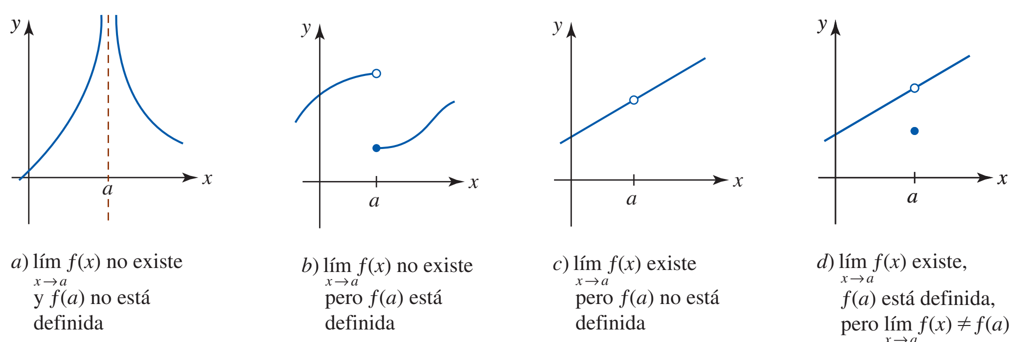
63. Use $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, para mostrar que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

64. Si $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2f(x) - 5}{x + 3} = 4$, encuentre $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

2.3 Continuidad

Introducción En el análisis de la sección 1.1 sobre funciones y gráficas se usó la frase "estos puntos se unen con una curva suave". Esta frase invoca la imagen que es una curva *continua* agradable; en otras palabras, una curva sin rupturas, saltos o huecos. En efecto, una función continua a menudo se describe como una cuya gráfica puede trazarse sin levantar el lápiz del papel.

En la sección 2.2 vimos que el valor funcional $f(a)$ no desempeñaba ningún papel en la determinación de la existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$. Pero en la sección 2.2 observamos que los límites cuando $x \to a$ de funciones polinomiales y ciertas funciones racionales pueden encontrarse simplemente al evaluar la función en $x = a$. La razón por la que puede hacerse lo anterior en algunas instancias es el hecho de que la función es *continua* en un número a. En esta sección veremos que tanto el valor de $f(a)$ como el límite de f cuando x tiende a un número a desempeñan papeles primordiales al definir el concepto de continuidad. Antes de proporcionar la definición, en la FIGURA 2.3.1 se ilustran algunos ejemplos intuitivos de funciones que *no* son continuas en a.



a) $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe y $f(a)$ no está definida

b) $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe pero $f(a)$ está definida

c) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe pero $f(a)$ no está definida

d) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, $f(a)$ está definida, pero $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

FIGURA 2.3.1 Cuatro ejemplos de f *no* continua en a

Continuidad en un número La figura 2.3.1 sugiere la siguiente condición tripartita de continuidad de una función f en un número a.

Definición 2.3.1 Continuidad en a

Se dice que una función f es **continua** en un número a si

i) $f(a)$ está definido, *ii)* $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y *iii)* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si alguna de las condiciones en la definición 2.3.1 no se cumple, entonces se dice que f es **discontinua** en el número a.

EJEMPLO 1 Tres funciones

Determine si cada una de las siguientes funciones es continua en 1.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ **c)** $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$.

Solución

a) f es discontinua en 1 puesto que al sustituir $x = 1$ en la función se obtiene $0/0$. Se afirma que $f(1)$ no está definida, de modo que se viola la primera condición de continuidad en la definición 2.3.1.

b) Debido a que g está definida en 1, es decir, $g(1) = 2$, a continuación se determina si $\lim_{x\to 1} g(x)$ existe. Por

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3 \quad (1)$$

Recuerde de sus conocimientos de álgebra que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

concluimos que $\lim_{x\to 1} g(x)$ existe y es igual a 3. Puesto que este valor no es el mismo que $g(1) = 2$, se viola la segunda condición de la definición 2.3.1. La función g es discontinua en 1.

c) Primero, $h(1)$ está definida; en este caso, $h(1) = 3$. Segundo, $\lim_{x\to 1} h(x) = 3$ por (1) del inciso *b*). Tercero, se tiene $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1) = 3$. Por tanto, se cumplen *las tres* condiciones en la definición 2.3.1 y así la función h es continua en 1.

Las gráficas de las tres funciones se comparan en la FIGURA 2.3.2.

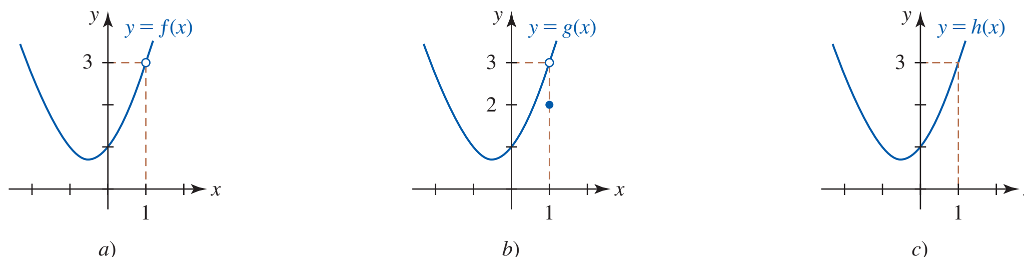


FIGURA 2.3.2 Gráficas de las funciones en el ejemplo 1 ■

EJEMPLO 2 Función definida por partes

Determine si la función definida por partes es continua en 2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ -x + 6, & x > 2. \end{cases}$$

Solución Primero, observe que $f(2)$ está definida y es igual a 5. Luego, por

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} (-x + 6) = 4 \end{aligned}\right\} \text{implica } \lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

observamos que el límite de f existe cuando $x \to 2$. Por último, debido a que $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2) = 5$, por *iii*) de la definición 2.3.1 se concluye que f es discontinua en 2. La gráfica de f se muestra en la FIGURA 2.3.3. ■

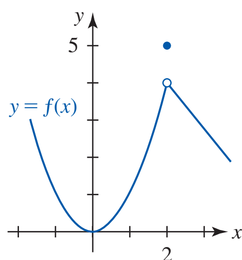


FIGURA 2.3.3 Gráfica de la función en el ejemplo 2

Continuidad sobre un intervalo A continuación veremos que el concepto de continuidad en un número a se extiende a **continuidad sobre un intervalo**.

Definición 2.3.2 Continuidad sobre un intervalo

Una función f es continua

i) sobre un **intervalo abierto** (a, b) si es continua en todo número en el intervalo; y
ii) sobre un **intervalo cerrado** $[a, b]$ si es continua en (a, b) y, además,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Si se cumple la condición límite por la derecha $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ dada por *ii*) de la definición 2.3.1, se dice que ***f* es continua por la derecha en *a***; si $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$, entonces ***f* es continua por la izquierda en *b***.

Extensiones de estos conceptos a intervalos como $[a, b)$, $(a, b]$, (a, ∞), $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$, $[a, \infty)$ y $(-\infty, b]$ se hacen como se espera. Por ejemplo, f es continua en $[1, 5)$ si es continua en el intervalo abierto $(1, 5)$ y es continua por la derecha en 1.

EJEMPLO 3 Continuidad sobre un intervalo

a) Como observamos en la FIGURA 2.3.4*a*), $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo abierto $(-1, 1)$ pero no es continua sobre el intervalo cerrado $[-1, 1]$, ya que ni $f(-1)$ ni $f(1)$ están definidos.

b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre $[-1, 1]$. Observe por la figura 2.3.4*b*) que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \text{ y } \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 0.$$

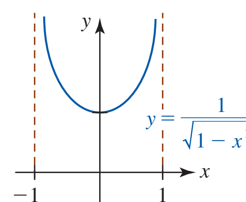
c) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ es continua sobre el intervalo no acotado $[1, \infty)$, ya que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sqrt{\lim_{x\to a}(x - 1)} = \sqrt{a - 1} = f(a),$$

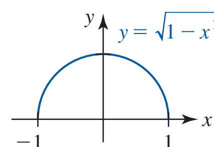
para cualquier número real a que cumpla $a > 1$, y f es continua por la derecha en 1 puesto que

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x - 1} = f(1) = 0.$$

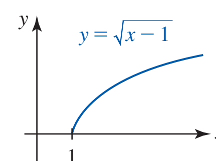
Vea la figura 2.3.4*c*). ■



a)



b)



c)

FIGURA 2.3.4 Gráficas de las funciones en el ejemplo 3

Una revisión de las gráficas en las figuras 1.4.1 y 1.4.2 muestra que $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ son continuas en $(-\infty, \infty)$. Las figuras 1.4.3 y 1.4.5 muestran que $y = \tan x$ y $y = \sec x$ son discontinuas en $x = (2n + 1)\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, mientras las figuras 1.4.4 y 1.4.6 muestran que $y = \cot x$ y $y = \csc x$ son discontinuas en $x = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Las funciones trigonométricas inversas $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ y $y = \cos^{-1} x$ son continuas sobre el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Vea las figuras 1.5.9 y 1.5.12. La función exponencial natural $y = e^x$ es continua sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, mientras que la función logaritmo natural $y = \ln x$ es continua sobre $(0, \infty)$. Vea las figuras 1.6.5 y 1.6.6.

Continuidad de una suma, producto y cociente Cuando dos funciones f y g son continuas en un número a, entonces la combinación de las funciones formadas por suma, multiplicación y división también es continua en a. En el caso de la división f/g es necesario, por supuesto, requerir que $g(a) \neq 0$.

Teorema 2.3.1 Continuidad de una suma, un producto y un cociente

Si las funciones f y g son continuas en un número a, entonces la suma $f + g$, el producto fg y el cociente f/g $(g(a) \neq 0)$ son continuos en $x = a$.

DEMOSTRACIÓN DE LA CONTINUIDAD DEL PRODUCTO *fg* Como una consecuencia de la hipótesis de que las funciones f y g son continuas en un número a, podemos decir que ambas funciones están definidas en $x = a$, los límites de las dos funciones existen cuando x tiende a a y

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Debido a que el límite existe, sabemos que el límite de un producto es el producto de los límites:

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(a)g(a).$$

Las demostraciones de las partes restantes del teorema 2.3.1 se obtienen de manera semejante. ■

Puesto que la definición 2.3.1 implica que $f(x) = x$ es continua en cualquier número real x, a partir de aplicaciones sucesivas del teorema 2.3.1 se observa que las funciones $x, x^2, x^3, \ldots, x^n$ también son continuas para cualquier x en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Debido a que una función polinomial es justo una suma de potencias de x, otra aplicación del teorema 2.3.1 muestra lo siguiente:

- Una función polinomial f es continua en $(-\infty, \infty)$.

Se dice que las funciones, como las polinomiales, el seno y el coseno, que son continuas para *todos* los números reales, es decir, sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, son **continuas en todas partes**. De una función que es continua en todas partes también se dice que es **continua**. Luego,

si $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales, por el teorema 2.3.1 también se concluye directamente que

- Una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ es continua excepto en números en los que el denominador $q(x)$ es cero.

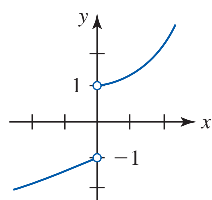


FIGURA 2.3.5 Discontinuidad tipo salto en $x = 0$

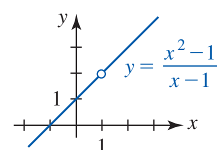
Terminología Una discontinuidad de una función f a menudo se denomina de manera especial.

- Si $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de $y = f(x)$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad infinita** en a.

La figura 2.3.1*a*) ilustra una función con una discontinuidad infinita en a.

- Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$ y $L_1 \neq L_2$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad finita** o una **discontinuidad de tipo salto** en a.

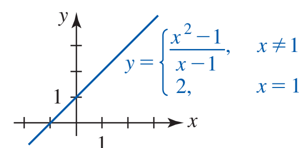
La función $y = f(x)$ dada en la FIGURA 2.3.5 tiene una discontinuidad de tipo salto en 0, puesto que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. La función entero mayor $f(x) = \lfloor x \rfloor$ tiene una discontinuidad de tipo salto en todo valor entero de x.



a) No es continua en 1

- Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe pero f no está definida en $x = a$ o $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad removible** en a.

Por ejemplo, la función $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ no está definida en $x = 1$ pero $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Al *definir* $f(1) = 2$, la nueva función



b) Continua en 1

FIGURA 2.3.6 Discontinuidad removible en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

es continua en todas partes. Vea la FIGURA 2.3.6.

Continuidad de f^{-1} La validez del siguiente teorema se concluye del hecho de que la gráfica de la función inversa f^{-1} es una reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$.

Teorema 2.3.2 Continuidad de una función inversa

Si f es una función continua uno a uno sobre un intervalo $[a, b]$, entonces f^{-1} es continua ya sea sobre $[f(a), f(b)]$ o sobre $[f(b), f(a)]$.

La función seno, $f(x) = \text{sen}\, x$, es continua sobre $[-\pi/2, \pi/2]$, y como ya se observó, la inversa de f, $y = \text{sen}^{-1} x$, es continua sobre el intervalo cerrado $[f(-\pi/2), f(\pi/2)] = [-1, 1]$.

Límite de una función compuesta El siguiente teorema establece que si una función es continua, entonces el límite de esa función es la función del límite. La demostración del teorema 2.3.3 se proporciona en el apéndice.

Teorema 2.3.3 Límite de una función compuesta

Si $\lim_{x\to a} g(x) = L$ y f es continua en L, entonces

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(L).$$

El teorema 2.3.3 es útil en la demostración de otros teoremas. Si la función g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces vemos que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(g(a)).$$

Acabamos de demostrar que la composición de dos funciones continuas es continua.

Teorema 2.3.4 Continuidad de una función compuesta

Si g es continua en un número a y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en a.

EJEMPLO 4 Continuidad de una función compuesta

$f(x) = \sqrt{x}$ es continua sobre el intervalo $[0, \infty)$ y $g(x) = x^2 + 2$ es continua sobre $(-\infty, \infty)$. Pero, puesto que $g(x) \geq 0$ para toda x, la función compuesta

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 2}$$

es continua en todas partes. ■

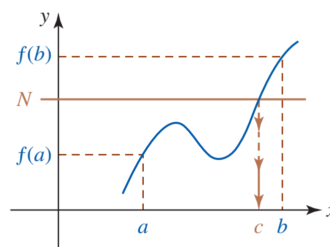


FIGURA 2.3.7 Una función continua f asume todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$

Si una función f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces, como se ilustra en la FIGURA 2.3.7, f asume todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Dicho de otra manera, una función continua f no omite ningún valor.

Teorema 2.3.5 Teorema del valor intermedio

Si f denota una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ para el cual $f(a) \neq f(b)$, y si N es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe por lo menos un número c entre a y b tal que $f(c) = N$.

EJEMPLO 5 Consecuencia de la continuidad

La función polinomial $f(x) = x^2 - x - 5$ es continua sobre el intervalo $[-1, 4]$ y $f(-1) = -3$, $f(4) = 7$. Para cualquier número N para el cual $-3 \leq N \leq 7$, el teorema 2.3.5 garantiza que hay una solución para la ecuación $f(c) = N$, es decir, $c^2 - c - 5 = N$ en $[-1, 4]$. Específicamente, si se escoge $N = 1$, entonces $c^2 - c - 5 = 1$ es equivalente a

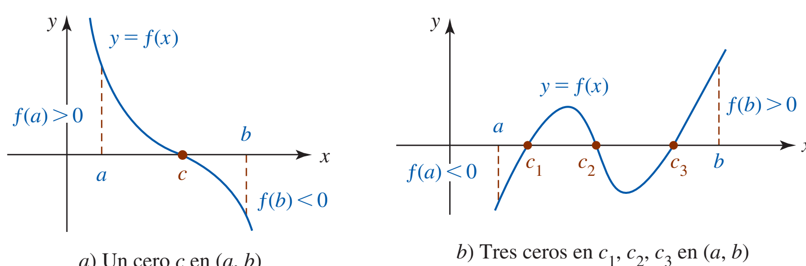
$$c^2 - c - 6 = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad (c - 3)(c + 2) = 0.$$

Aunque la última ecuación tiene dos soluciones, sólo el valor $c = 3$ está entre -1 y 4. ■

El ejemplo anterior sugiere un corolario al teorema del valor intermedio.

- Si f satisface las hipótesis del teorema 2.3.5 y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos algebraicos opuestos, entonces existe un número x entre a y b para el que $f(x) = 0$.

Este hecho se usa a menudo para localizar ceros reales de una función continua f. Si los valores $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces al identificar $N = 0$ podemos afirmar que hay por lo menos un número c en (a, b) para el cual $f(c) = 0$. En otras palabras, si $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ o $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, entonces $f(x)$ tiene por lo menos un cero c en el intervalo (a, b). La validez de esta conclusión se ilustra en la FIGURA 2.3.8.



a) Un cero c en (a, b)

b) Tres ceros en c_1, c_2, c_3 en (a, b)

FIGURA 2.3.8 Localización de ceros de funciones usando el teorema del valor intermedio

Método de bisección Como una consecuencia directa del teorema del valor intermedio, es posible concebir un medio para aproximar los ceros de una función continua hasta cualquier grado de precisión. Suponga que $y = f(x)$ es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos algebraicos opuestos. Luego, como acabamos de ver, f tiene un cero en $[a, b]$. Suponga que el intervalo $[a, b]$ se biseca encontrando el punto medio $m_1 = (a + b)/2$. Si $f(m_1) = 0$, entonces m_1 es un cero de f y ya no se continúa, pero si $f(m_1) \neq 0$, entonces puede afirmarse lo siguiente:

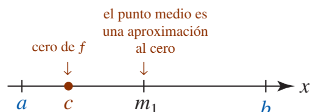


FIGURA 2.3.9 El número m_1 es una aproximación al número c

- Si $f(a)$ y $f(m_1)$ tienen signos algebraicos opuestos, entonces f tiene un cero c en $[a, m_1]$.
- Si $f(m_1)$ y $f(b)$ tienen signos algebraicos opuestos, entonces f tiene un cero c en $[m_1, b]$.

Es decir, si $f(m_1) \neq 0$, entonces f tiene un cero en un intervalo que mide la mitad del intervalo original. Vea la FIGURA 2.3.9. A continuación se repite el proceso al bisecar este nuevo intervalo al encontrar su punto medio m_2. Si m_2 es un cero de f, entonces detenemos el proceso, pero si $f(m_2) \neq 0$, hemos localizado un cero en un intervalo que mide la cuarta parte del intervalo $[a, b]$. Continuamos este proceso de localizar un cero en f de manera indefinida en intervalos cada vez más cortos. Este método de aproximar un cero de una función continua por medio de una sucesión de puntos medios se denomina **método de bisección**. Al volver a inspeccionar la figura 2.3.9 se observa que el error en una aproximación a un cero en un intervalo es menos de la mitad de la longitud del intervalo.

EJEMPLO 6 Ceros de una función polinomial

a) Demuestre que los ceros de la función polinomial $f(x) = x^6 - 3x - 1$ tiene un cero real en $[-1, 0]$ y en $[1, 2]$.

b) Aproxime el cero en $[1, 2]$ hasta dos cifras decimales.

Solución

a) Observe que $f(-1) = 3 > 0$ y $f(0) = -1 < 0$. Este cambio de signo indica que la gráfica de f debe cruzar el eje x por lo menos una vez en el intervalo $[-1, 0]$. En otras palabras, hay por lo menos un cero en $[-1, 0]$.

De manera semejante, $f(1) = -3 < 0$ y $f(2) = 57 > 0$ implican que hay por lo menos un cero de f en el intervalo $[1, 2]$.

b) Una primera aproximación al cero en $[1, 2]$ es el punto medio del intervalo:

$$m_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5, \qquad \text{error} < \frac{1}{2}(2-1) = 0.5.$$

Luego, puesto que $f(m_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ y $f(1) < 0$, se sabe que el cero está en el intervalo $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

La segunda aproximación al cero es el punto medio de $\left[1, \frac{3}{2}\right]$:

$$m_2 = \frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4} = 1.25, \qquad \text{error} < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right) = 0.25.$$

Puesto que $f(m_2) = f\left(\frac{5}{4}\right) < 0$, el cero está en el intervalo $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$.

La tercera aproximación al cero es el punto medio de $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$:

$$m_3 = \frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{2}}{2} = \frac{11}{8} = 1.375, \qquad \text{error} < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right) = 0.125.$$

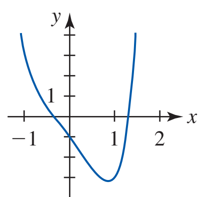


FIGURA 2.3.10 Gráfica de la función en el ejemplo 6

Si se desea que la aproximación sea precisa hasta *tres* cifras decimales, continuamos hasta que el error se vuelva menor que 0.0005, y así sucesivamente.

Después de ocho cálculos, encontramos que $m_8 = 1.300781$ con error menor que 0.005. Por tanto, 1.30 es una aproximación al cero de f en $[1, 2]$ que es precisa hasta dos cifras decimales. La gráfica de f se proporciona en la FIGURA 2.3.10. ■

Ejercicios 2.3 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-8.

Fundamentos

En los problemas 1-12, encuentre los números, en caso de haberlos, en que la función f dada es discontinua.

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7$

2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

3. $f(x) = (x^2 - 9x + 18)^{-1}$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$

5. $f(x) = \dfrac{x - 1}{\operatorname{sen} 2x}$

6. $f(x) = \dfrac{\tan x}{x + 3}$

7. $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}, & x \neq 5 \\ 10, & x = 5 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}, & x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{2 + \ln x}$

12. $f(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

En los problemas 13-24, determine si la función f es continua en el intervalo indicado.

13. $f(x) = x^2 + 1$

a) $[-1, 4]$ ***b***) $[5, \infty)$

14. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

a) $(-\infty, \infty)$ ***b***) $(0, \infty)$

15. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

a) $(0, 4]$ ***b***) $[1, 9]$

16. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

a) $[-3, 3]$ ***b***) $[3, \infty)$

17. $f(x) = \tan x$

a) $[0, \pi]$ ***b***) $[-\pi/2, \pi/2]$

18. $f(x) = \csc x$

a) $(0, \pi)$ ***b***) $(2\pi, 3\pi)$

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 8}$

a) $[-4, -3]$ ***b***) $(-\infty, \infty)$

20. $f(x) = \dfrac{1}{|x| - 4}$

a) $(-\infty, -1]$ ***b***) $[1, 6]$

21. $f(x) = \dfrac{x}{2 + \sec x}$

a) $(-\infty, \infty)$ ***b***) $[\pi/2, 3\pi/2]$

22. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

a) $[1/\pi, \infty)$ ***b***) $[-2/\pi, 2/\pi]$

23.

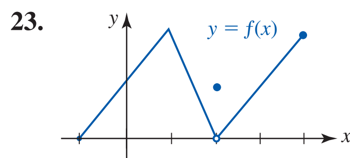


FIGURA 2.3.11 Gráfica para el problema 23

a) $[-1, 3]$ ***b***) $(2, 4]$

24.

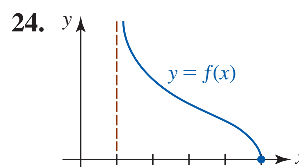


FIGURA 2.3.12 Gráfica para el problema 24

a) $[2, 4]$ ***b***) $[1, 5]$

En los problemas 25-28, encuentre los valores de m y n de tal manera que la función f sea continua.

25. $f(x) = \begin{cases} mx, & x < 4 \\ x^2, & x \ge 4 \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ m, & x = 2 \end{cases}$

27. $f(x) = \begin{cases} mx, & x < 3 \\ n, & x = 3 \\ -2x + 9, & x > 3 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} mx - n, & x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ 2mx + n, & x > 1 \end{cases}$

En los problemas 29 y 30, $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que no excede a x. Trace una gráfica para determinar los puntos en que la función dada es discontinua.

29. $f(x) = \lfloor 2x - 1 \rfloor$

30. $f(x) = \lfloor x \rfloor - x$

En los problemas 31 y 32, determine si la función dada tiene una discontinuidad removible en el número dado a. Si la discontinuidad es removible, defina una nueva función que sea continua en a.

31. $f(x) = \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}, \quad a = 9$

32. $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, \quad a = 1$

En los problemas 33-42, use el teorema 2.3.3 para encontrar el límite dado.

33. $\lim_{x \to \pi/6} \operatorname{sen}(2x + \pi/3)$

34. $\lim_{x \to \pi^2} \cos\sqrt{x}$

35. $\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{sen}(\cos x)$

36. $\lim_{x \to \pi/2} (1 + \cos(\cos x))$

37. $\lim_{t \to \pi} \cos\left(\dfrac{t^2 - \pi^2}{t - \pi}\right)$

38. $\lim_{t \to 0} \tan\left(\dfrac{\pi t}{t^2 + 3t}\right)$

39. $\lim_{t \to \pi} \sqrt{t - \pi + \cos^2 t}$

40. $\lim_{t \to 1} (4t + \operatorname{sen} 2\pi t)^3$

41. $\lim_{x \to -3} \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}\right)$

42. $\lim_{x \to \pi} e^{\cos 3x}$

En los problemas 43 y 44, determine el (los) intervalo(s) donde $f \circ g$ es continua.

43. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}, \quad g(x) = x + 4$

44. $f(x) = \dfrac{5x}{x - 1}, \quad g(x) = (x - 2)^2$

En los problemas 45-48, compruebe el teorema del valor intermedio para f en el intervalo dado. Encuentre un número c en el intervalo para el valor indicado de N.

45. $f(x) = x^2 - 2x$, $[1, 5]$; $N = 8$

46. $f(x) = x^2 + x + 1$, $[-2, 3]$; $N = 6$

47. $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $[-2, 2]$; $N = 1$

48. $f(x) = \dfrac{10}{x^2 + 1}$, $[0, 1]$; $N = 8$

49. Dado que $f(x) = x^5 + 2x - 7$, demuestre que hay un número c tal que $f(c) = 50$.

50. Dado que f y g son continuas sobre $[a, b]$ de modo que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, demuestre que hay un número c en (a, b) tal que $f(c) = g(c)$. [*Sugerencia*: Considere la función $f - g$.]

En los problemas 51-54, muestre que la ecuación dada tiene una solución en el intervalo indicado.

51. $2x^7 = 1 - x$, $(0, 1)$

52. $\dfrac{x^2 + 1}{x + 3} + \dfrac{x^4 + 1}{x - 4} = 0$, $(-3, 4)$

53. $e^{-x} = \ln x$, $(1, 2)$

54. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \dfrac{1}{2}$, $(\pi/2, \pi)$

☰ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 55 y 56, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada. Use el método de bisección para aproximar, con precisión de dos cifras decimales, los ceros reales de f que descubra a partir de la gráfica.

55. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1$ **56.** $f(x) = x^5 + x - 1$

57. Use el método de bisección para aproximar el valor de c en el problema 49 hasta una precisión de dos cifras decimales.

58. Use el método de bisección para aproximar la solución en el problema 51 hasta una precisión de dos cifras decimales.

59. Use el método de bisección para aproximar la solución en el problema 52 hasta una precisión de dos cifras decimales.

60. Suponga que un cilindro circular recto cerrado tiene un volumen V y un área superficial S (lado lateral, tapa y base).

a) Demuestre que el radio r del cilindro debe satisfacer la ecuación $2\pi r^3 - Sr + 2V = 0$.

b) Suponga que $V = 3\,000$ pies^3 y $S = 1\,800$ pies^2. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de

$$f(r) = 2\pi r^3 - 1\,800r + 6\,000.$$

c) Use la gráfica en el inciso *b*) y el método de bisección para encontrar las dimensiones del cilindro correspondientes al volumen y área superficial dadas en el inciso *b*). Use una precisión de dos cifras decimales.

☰ Piense en ello

61. Dado que f y g son continuas en un número a, demuestre que $f + g$ es continua en a.

62. Dado que f y g son continuas en un número a y $g(a) \neq 0$, demuestre que f/g es continua en a.

63. Sean $f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función entero mayor y $g(x) = \cos x$. Determine los puntos en que $f \circ g$ es discontinua.

64. Considere las funciones

$$f(x) = |x| \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Trace las gráficas de $f \circ g$ y $g \circ f$. Determine si $f \circ g$ y $g \circ f$ son continuas en 0.

65. Un clásico matemático La **función de Dirichlet**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

recibe su nombre en honor del matemático alemán **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805-1859). A Dirichlet se debe la definición de una función como se conoce actualmente.

a) Demuestre que f es discontinua en todo número real a. En otras palabras, *f no es una función continua en ninguna parte*.

b) ¿Cómo se ve la gráfica de f?

c) Si r es un número racional positivo, demuestre que f es r-periódica; es decir, $f(x + r) = f(x)$.

2.4 Límites trigonométricos

Introducción En esta sección se analizan límites que implican funciones trigonométricas. Como se ilustrará con los ejemplos de esta sección, el cálculo de límites trigonométricos supone manipulaciones algebraicas y conocimiento de algunas identidades trigonométricas básicas. Empezaremos con algunos resultados simples sobre límites que son consecuencia de la continuidad.

Uso de la continuidad En la sección precedente vimos que las funciones seno y coseno son continuas en todas partes. Por la definición 2.3.1 se concluye que para cualquier número real a,

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a, \tag{1}$$

$$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a. \tag{2}$$

En forma semejante, para un número a en el dominio de la función trigonométrica dada

$$\lim_{x \to a} \tan x = \tan a, \qquad \lim_{x \to a} \cot x = \cot a, \tag{3}$$

$$\lim_{x \to a} \sec x = \sec a, \qquad \lim_{x \to a} \csc x = \csc a. \tag{4}$$

EJEMPLO 1 Uso de (1) y (2)

A partir de (1) y (2) se tiene

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1. \tag{5}$$ ■

Los resultados en (5) se obtendrán en el siguiente análisis sobre el cálculo de otros límites trigonométricos. Pero primero se considera un teorema que reviste una utilidad particular cuando se trabaja con límites trigonométricos.

Teorema de compresión El siguiente teorema posee muchos nombres, algunos de éstos son: **teorema de compresión**, **teorema del pellizco**, **teorema del emparedado**, **teorema del juego de compresión** y **teorema de Flyswatter**. Como se muestra en la FIGURA 2.4.1, si la gráfica de $f(x)$ se "comprime" entre las gráficas de otras dos funciones $g(x)$ y $h(x)$ para toda x próxima a a, y si las funciones g y h tienen un límite común L cuando $x \to a$, tiene sentido afirmar que f también tiende a L cuando $x \to a$. La demostración del teorema 2.4.1 se proporciona en el apéndice.

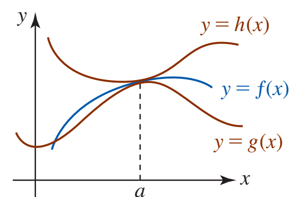


FIGURA 2.4.1 Gráfica de f oprimida entre las gráficas de g y h

Teorema 2.4.1 Teorema de compresión

Suponga que f, g y h son funciones para las cuales $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene a un número a, excepto posiblemente al mismo a. Si

$$\lim_{x \to a} g(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Un colega ruso dijo que este resultado se denominaba **teorema de los dos soldados** cuando estaba en la escuela. Piense en ello.

Antes de aplicar el teorema 2.4.1 se considerará un límite trigonométrico que no existe.

EJEMPLO 2 Un límite que no existe

El límite $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe. La función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ es impar pero no es periódica. La gráfica oscila entre -1 y 1 cuando $x \to 0$:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \pm 1 \quad \text{para} \quad \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Por ejemplo, $\operatorname{sen}(1/x) = 1$ para $n = 500$ o $x \approx 0.00064$, y $\operatorname{sen}(1/x) = -1$ para $n = 501$ o $x \approx 0.00063$. Esto significa que cerca del origen la gráfica de f se vuelve tan comprimida que parece ser una mancha continua de color. Vea la FIGURA 2.4.2. ■

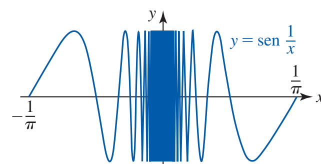


FIGURA 2.4.2 Gráfica de la función en el ejemplo 2

EJEMPLO 3 Uso del teorema de compresión

Encuentre el límite $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

Solución Primero observe que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \neq \left(\lim_{x \to 0} x^2\right)\left(\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

porque en el ejemplo 2 acabamos de ver que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe. Pero para $x \neq 0$ tenemos $-1 \le \operatorname{sen}(1/x) \le 1$. En consecuencia,

$$-x^2 \le x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \le x^2.$$

Luego, si hacemos las identificaciones $g(x) = -x^2$ y $h(x) = x^2$, por (1) de la sección 2.2 se sigue que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$. Así, por el teorema de compresión concluimos que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0.$$

En la FIGURA 2.4.3 observe la pequeña escala en los ejes x y y.

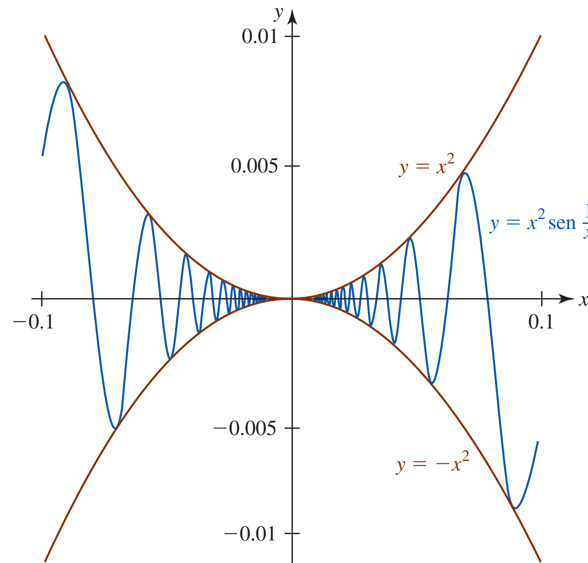


FIGURA 2.4.3 Gráfica de la función en el ejemplo 3 ■

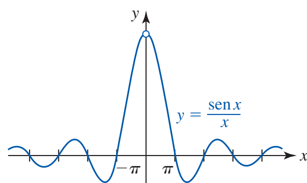


FIGURA 2.4.4 Gráfica de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$

Un límite trigonométrico importante Aunque la función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ no está definida en $x = 0$, la tabla numérica en el ejemplo 7 de la sección 2.1 y la gráfica en la FIGURA 2.4.4 sugieren que $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x$ existe. Ahora ya es posible demostrar esta conjetura usando el teorema de compresión.

Considere un círculo con centro en el origen O y radio 1. Como se muestra en la FIGURA 2.4.5*a*), sea la región sombreada OPR un sector del círculo con ángulo central t tal que $0 < t < \pi/2$. A partir de los incisos *b*), *c*) y *d*) de la figura 2.4.5 se observa que

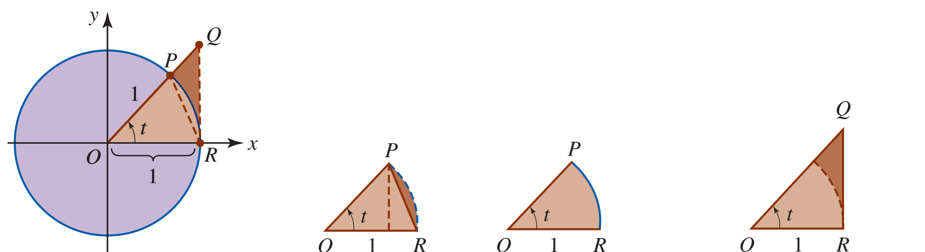
$$\text{área de} \triangle OPR \leq \text{área del sector } OPR \leq \text{área de} \triangle OQR. \tag{6}$$

Por la figura 2.4.5*b*), la altura de $\triangle OPR$ es $\overline{OP} \operatorname{sen} t = 1 \cdot \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t$, y así

$$\text{área de} \triangle OPR = \frac{1}{2}\overline{OR} \cdot (\text{altura}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} t = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t. \tag{7}$$

Por la figura 2.4.5*d*), $\overline{QR}/\overline{OR} = \tan t$ o $\overline{QR} = \tan t$, de modo que

$$\text{área de} \triangle OQR = \frac{1}{2}\overline{OR} \cdot \overline{QR} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan t = \frac{1}{2} \tan t. \tag{8}$$



a) Circunferencia unitaria *b*) Triángulo OPR *c*) Sector OPR *d*) Triángulo rectángulo OQR

FIGURA 2.4.5 Circunferencia unitaria junto con dos triángulos y un sector circular

Por último, el área de un sector del círculo es $\frac{1}{2}r^2\theta$, donde r es el radio y θ es el ángulo central medido en radianes. Así,

$$\text{área del sector } OPR = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot t = \frac{1}{2}t. \tag{9}$$

Al usar (7), (8) y (9) en la desigualdad (6) se obtiene

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} t < \frac{1}{2}t < \frac{1}{2}\tan t \qquad \text{o bien,} \qquad 1 < \frac{t}{\operatorname{sen} t} < \frac{1}{\cos t}.$$

Por las propiedades de las desigualdades, la última desigualdad puede escribirse como

$$\cos t < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1.$$

Ahora se hace $t \to 0^+$ en el último resultado. Puesto que $(\operatorname{sen} t)/t$ está "comprimida" entre 1 y cos t (del cual se sabe por (5) que tiende a (1), a partir del teorema 2.4.1 se concluye que $(\operatorname{sen} t)/t \to 1$. Aunque se ha supuesto $0 < t < \pi/2$, el mismo resultado se cumple para $t \to 0^-$ cuando $-\pi/2 < t < 0$. Al usar el símbolo x en lugar de t, el resultado se resume como sigue:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{10}$$

Como se ilustra con los siguientes ejemplos, los resultados en (1), (2), (3) y (10) se usan a menudo para calcular otros límites. Observe que el límite (10) es de la forma indeterminada 0/0.

EJEMPLO 4 Uso de (10)

Encuentre el límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{10x - 3\operatorname{sen} x}{x}$.

Solución La expresión fraccionaria vuelve a escribirse como dos fracciones con el mismo denominador x:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{10x - 3\operatorname{sen} x}{x} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{10x}{x} - \frac{3\operatorname{sen} x}{x}\right] \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{10x}{x} - 3\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} && \leftarrow \text{puesto que ambos límites existen, las } x \text{ también se cancelan en la primera expresión} \\
&= \lim_{x\to 0} 10 - 3\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} && \leftarrow \text{ahora se usa (10)} \\
&= 10 - 3 \cdot 1 \\
&= 7.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 Uso de la fórmula del ángulo doble

Encuentre el límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$.

Solución Para evaluar el límite dado se usan la fórmula del ángulo doble sen $2x = 2$ sen x cos x de la sección 1.4, y el hecho de que el límite existe:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x \operatorname{sen} x}{x} \\
&= 2\lim_{x\to 0}\left(\cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \\
&= 2\left(\lim_{x\to 0}\cos x\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right).
\end{aligned}$$

Por (5) y (10) se sabe que $\cos x \to 1$ y $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ cuando $x \to 0$, de modo que la línea precedente se vuelve

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

■

EJEMPLO 6 Uso de (5) y (10)

Encuentre el límite $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

Solución Al usar $\tan x = (\text{sen } x)/\cos x$ y el hecho de que el límite existe, puede escribirse

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\text{sen } x)/\cos x}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\text{sen } x}{x}\\ &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}\right)\\ &= \frac{1}{1}\cdot 1 = 1. \leftarrow \text{por (5) y (10)}\end{aligned}$$

■

Uso de una sustitución A menudo se tiene interés en límites semejantes a los considerados en el ejemplo 5. Pero si queremos encontrar, por ejemplo, $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 5x}{x}$, el procedimiento empleado en el ejemplo 5 deja de funcionar a nivel práctico puesto que no se cuenta con una identidad trigonométrica a la mano para sen $5x$. Hay un procedimiento alterno que permite encontrar rápidamente $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } kx}{x}$, donde $k \neq 0$ es cualquier constante real, al simplemente cambiar la variable por medio de una **sustitución**. Si se hace $t = kx$, entonces $x = t/k$. Observe que cuando $x \to 0$ entonces necesariamente $t \to 0$. Así, es posible escribir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } kx}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\text{sen } t}{t/k} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\text{sen } t}{1}\cdot\frac{k}{t}\right) = k\overset{\text{por (10)}}{\downarrow}\!\!\lim_{t\to 0}\frac{\text{sen } t}{t} = k.$$

Por tanto, se ha demostrado el resultado general

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } kx}{x} = k. \tag{11}$$

Por (11), con $k = 2$, se obtiene el mismo resultado $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 2x}{x} = 2$ que se obtuvo en el ejemplo 5.

EJEMPLO 7 Una sustitución

Encuentre el límite $\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen }(x-1)}{x^2+2x-3}$.

Solución Antes de empezar, observe que el límite tiene la forma indeterminada $0/0$ cuando $x \to 1$. Al factorizar $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ el límite dado puede expresarse como un límite de un producto:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(x-1)}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x+3}\cdot\frac{\text{sen}(x-1)}{x-1}\right]. \tag{12}$$

Luego, si se hace $t = x - 1$, veremos que $x \to 1$ implica $t \to 0$. En consecuencia,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} = \lim_{t\to 0}\frac{\text{sen } t}{t} = 1. \leftarrow \text{por (10)}$$

Al volver a (12) es posible escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(x-1)}{x^2+2x-3} &= \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x+3}\cdot\frac{\text{sen}(x-1)}{x-1}\right]\\ &= \left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}\right)\left(\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(x-1)}{x-1}\right)\\ &= \left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}\right)\left(\lim_{t\to 0}\frac{\text{sen } t}{t}\right)\end{aligned}$$

puesto que ambos límites existen. Así,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2+2x-3}=\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}\right)\left(\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)=\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}.$$ ■

EJEMPLO 8 Uso de una identidad pitagórica

Encuentre el límite $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$.

Solución Para calcular este límite empezamos con un poco de ingenio algebraico al multiplicar el numerador y el denominador por el factor conjugado del numerador. Luego usamos la identidad pitagórica fundamental $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$ en la forma $1-\cos^2 x=\operatorname{sen}^2 x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}.\end{aligned}$$

Para el siguiente paso de nuevo se acude al álgebra para volver a escribir la expresión fraccionaria como un producto, y luego se usan los resultados en (5):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)\\&=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right).\end{aligned}$$

Debido a que $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/(1+\cos x)=0/2=0$ se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0. \qquad (13)$$ ■

Puesto que el límite en (13) es igual a 0, puede escribirse

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-(\cos x-1)}{x}=(-1)\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0.$$

Luego, al dividir entre -1 se obtiene otro importante límite trigonométrico:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0. \qquad (14)$$

En la FIGURA 2.4.6 se muestra la gráfica de $f(x)=(\cos x-1)/x$. Los resultados en (10) y (14) se usarán en los ejercicios 2.7 y también en la sección 3.4.

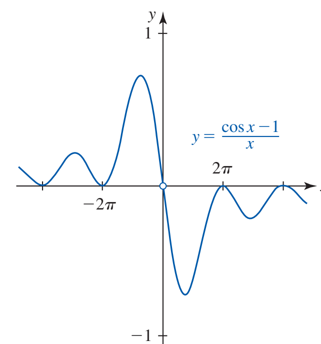


FIGURA 2.4.6 Gráfica de $f(x)=(\cos x-1)/x$

Ejercicios 2.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-8.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-36, encuentre el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3t}{2t}$
2. $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(-4t)}{t}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{4+\cos x}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\cos 3x}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{3x}$
7. $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t\sec t\csc 4t}$
8. $\lim_{t\to 0}5t\cot 2t$
9. $\lim_{t\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2 t}{t\cos^2 t}$
10. $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(t/2)}{\operatorname{sen} t}$
11. $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 6t}{t^2}$
12. $\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{\operatorname{sen}^2 3t}$
13. $\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2x-2}$
14. $\lim_{x\to 2\pi}\frac{x-2\pi}{\operatorname{sen} x}$

15. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x}$

16. $\lim_{\theta \to \pi/2} \frac{1 + \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$

17. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(3x - \pi/2)}{x}$

18. $\lim_{x \to -2} \frac{\operatorname{sen}(5x + 10)}{4x + 8}$

19. $\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3t}{\operatorname{sen} 7t}$

20. $\lim_{t \to 0} \operatorname{sen} 2t \csc 3t$

21. $\lim_{t \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}$

22. $\lim_{t \to 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

23. $\lim_{t \to 0} \frac{t^2 - 5t \operatorname{sen} t}{t^2}$

24. $\lim_{t \to 0} \frac{\cos 4t}{\cos 8t}$

25. $\lim_{x \to 0^+} \frac{(x + 2\sqrt{\operatorname{sen} x})^2}{x}$

26. $\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x}$

27. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\cos^2 x - 1}$

28. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x + \tan x}{x}$

29. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x^2}{x^2}$

30. $\lim_{t \to 0} \frac{t^2}{1 - \cos t}$

31. $\lim_{x \to 2} \frac{\operatorname{sen}(x - 2)}{x^2 + 2x - 8}$

32. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{\operatorname{sen}(x - 3)}$

33. $\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} 4x + 1 - \cos x}{x}$

34. $\lim_{x \to 0} \frac{4x^2 - 2 \operatorname{sen} x}{x}$

35. $\lim_{x \to \pi/4} \frac{1 - \tan x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

36. $\lim_{x \to \pi/4} \frac{\cos 2x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

37. Suponga que $f(x) = \operatorname{sen} x$. Use (10) y (14) de esta sección junto con (17) de la sección 1.4 para encontrar el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}.$$

38. Suponga que $f(x) = \cos x$. Use (10) y (14) de esta sección junto con (18) de la sección 1.4 para encontrar el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}.$$

En los problemas 39 y 40, use el teorema de compresión para establecer el límite dado.

39. $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$

40. $\lim_{x \to 0} x^2 \cos \frac{\pi}{x} = 0$

41. Use las propiedades de los límites dadas en el teorema 2.2.3 para demostrar que

a) $\lim_{x \to 0} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ *b)* $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} = 0.$

42. Si $|f(x)| \le B$ para toda x en un intervalo que contiene a 0, demuestre que $\lim_{x \to 0} x^2 f(x) = 0$.

En los problemas 43 y 44, use el teorema de compresión para establecer el límite dado.

43. $\lim_{x \to 2} f(x)$ donde $2x - 1 \le f(x) \le x^2 - 2x + 3$, $x \neq 2$

44. $\lim_{x \to 0} f(x)$ donde $|f(x) - 1| \le x^2$, $x \neq 0$

≡ Piense en ello

En los problemas 45-48, use una sustitución idónea para encontrar el límite dado.

45. $\lim_{x \to \pi/4} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x - \pi/4}$

46. $\lim_{x \to \pi} \frac{x - \pi}{\tan 2x}$

47. $\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(\pi/x)}{x - 1}$

48. $\lim_{x \to 2} \frac{\cos(\pi/x)}{x - 2}$

49. Analice: ¿La función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

es continua en 0?

50. La existencia de $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no implica la existencia de $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}|x|}{x}$. Explique por qué el segundo límite no existe.

2.5 Límites que involucran el infinito

Introducción En las secciones 1.2 y 1.3 se consideraron algunas funciones cuyas gráficas poseían asíntotas. En esta sección se verá que las asíntotas vertical y horizontal de una gráfica están definidas en términos de límites que implican el concepto de *infinito*. Recuerde, los **símbolos de infinito**, $-\infty$ ("menos infinito") y ∞ ("más infinito") son herramientas de notación usadas para indicar, a su vez, que una cantidad decrece o crece sin límite en la dirección negativa (en el plano cartesiano esto significa a la izquierda para x y hacia abajo para y) y en la dirección positiva (a la derecha para x y hacia arriba para y).

En algunos textos se usa el símbolo $+\infty$ y las palabras *más infinito* en lugar de ∞ e *infinito.*

Aunque la terminología y notación usadas cuando se trabaja con $\pm\infty$ son estándar, lamentablemente son ligeramente desafortunadas y pueden ser confusas. Así, desde el principio se advierte que se considerarán dos tipos de límites. Primero se analizarán

- límites infinitos.

La expresión *límites infinitos* siempre se refiere a *un límite que no existe* porque la función f exhibe un comportamiento no acotado: $f(x) \to -\infty$ o $f(x) \to \infty$. Luego se considerarán

- límites en el infinito.

La expresión *en el infinito* significa que se está intentando determinar si una función f posee un límite cuando se deja que el valor de la variable x disminuya o aumente sin límite: $x \to -\infty$ o $x \to \infty$. Estos límites pueden o no existir.

A lo largo de todo el análisis, no olvide que $-\infty$ y ∞ no representan números reales y *nunca* deben manipularse aritméticamente como se hace con los números.

Límites infinitos El límite de una función f no existe cuando x tiende a un número a siempre que los valores de la función crecen o decrecen sin límite. El hecho de que los valores de la función $f(x)$ crecen sin límite cuando x tiende a a se expresa simbólicamente por

$$f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to a \qquad \text{o bien,} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \infty. \tag{1}$$

Si los valores de la función decrecen sin límite cuando x tiende a a, se escribe

$$f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to a \qquad \text{o bien,} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty. \tag{2}$$

Recuerde que el uso del símbolo $x \to a$ significa que f muestra el mismo comportamiento —en este caso, sin límite— a ambos lados del número a sobre el eje x. Por ejemplo, la notación en (1) indica que

$$f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to a^- \qquad y \qquad f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to a^+.$$

Vea la FIGURA 2.5.1.

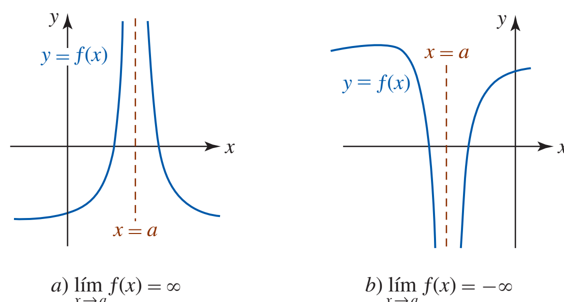


FIGURA 2.5.1 Dos tipos de límites infinitos

En forma semejante, la FIGURA 2.5.2 muestra el comportamiento sin límite de una función f cuando x tiende a a por un lado. Observe en la figura 2.5.2*c*) que no es posible describir el comportamiento de f cerca de a usando un solo símbolo de límite.

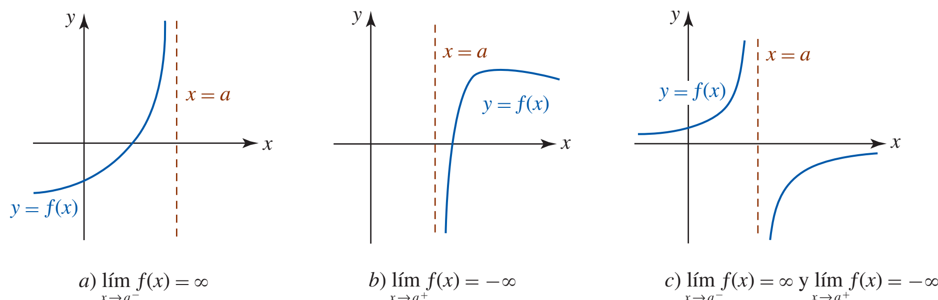


FIGURA 2.5.2 Tres tipos más de límites infinitos

En general, cualquier límite de los seis tipos

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty, \qquad &&\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty, \\ &\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty, \qquad &&\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty, \\ &\lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \qquad &&\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \end{aligned} \tag{3}$$

se denomina **límite infinito**. De nuevo, en cada caso de (3) simplemente se está describiendo de manera simbólica el comportamiento de una función f cerca del número a. *Ninguno de los límites en* (3) *existe*.

En la sección 1.3 se repasó cómo identificar una asíntota vertical para la gráfica de una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$. Ahora ya podemos definir una asíntota vertical de cualquier función en términos del concepto de límite.

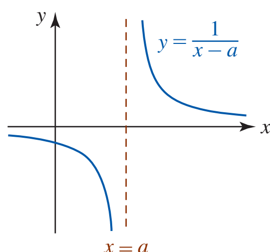
Definición 2.5.1 Asíntota vertical

Se dice que una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de una función f si por lo menos una de las seis afirmaciones en (3) es verdadera.

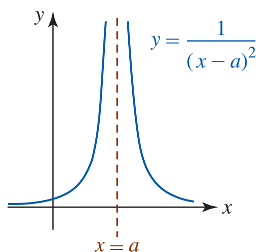
Vea la figura 1.2.1.

En el repaso de las funciones en el capítulo 1 se vio que las gráficas de funciones racionales a menudo poseen asíntotas. Se vio que las gráficas de las funciones racionales $y = 1/x$ y $y = 1/x^2$ eran semejantes a las gráficas en la figura 2.5.2*c*) y 2.5.1*a*), respectivamente. El eje y, es decir, $x = 0$, es una asíntota vertical para cada una de estas funciones. Las gráficas de

$$y = \frac{1}{x-a} \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{(x-a)^2} \tag{4}$$



a)



b)

FIGURA 2.5.3 Gráfica de las funciones en (4)

se obtienen al desplazar las gráficas $y = 1/x$ y $y = 1/x^2$ horizontalmente $|a|$ unidades. Como se observa en la FIGURA 2.5.3, $x = a$ es una asíntota vertical para las funciones racionales en (4). Se tiene

$$\lim_{x\to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} \frac{1}{x-a} = \infty \tag{5}$$

y

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^2} = \infty. \tag{6}$$

Los límites infinitos en (5) y (6) son justo casos especiales del siguiente resultado general:

$$\lim_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty, \tag{7}$$

para n un entero positivo impar y

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty, \tag{8}$$

para n un entero positivo par. Como consecuencia de (7) y (8), la gráfica de una función racional $y = 1/(x-a)^n$ se asemeja a la gráfica en la figura 2.5.3*a*) para n impar o la de la figura 2.5.3*b*) para n par.

Para una función racional general $f(x) = p(x)/q(x)$, donde p y q no tienen factores comunes, por este análisis debe resultar evidente que cuando q contiene un factor $(x-a)^n$, n un entero positivo, entonces la forma de la gráfica cerca de la recta vertical $x = a$ debe ser alguna de las que se muestran en la figura 2.5.3 o su reflexión en el eje x.

EJEMPLO 1 Asíntotas verticales de una función racional

Al inspeccionar la función racional

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2(x+4)}$$

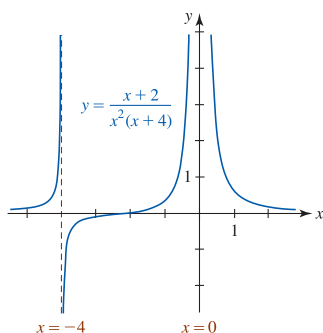


FIGURA 2.5.4 Gráfica de la función en el ejemplo 1

se observa que $x = -4$ y $x = 0$ son asíntotas verticales para la gráfica de f. Puesto que el denominador contiene los factores $(x-(-4))^1$ y $(x-0)^2$, es de esperar que la gráfica de f cerca de la recta $x = -4$ se asemeje a la figura 2.5.3*a*) o a su reflexión en el eje x, y la gráfica de f cerca de $x = 0$ se asemeje a la figura 2.5.3*b*) o a su reflexión en el eje x.

Para x próxima a 0 por cualquier lado, resulta fácil ver que $f(x) > 0$. Pero para x cerca de -4, por ejemplo $x = -4.1$ y $x = -3.9$, se tiene $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$, respectivamente. Al usar la información adicional de que sólo hay una intersección x simple $(-2, 0)$, se obtiene la gráfica de f en la FIGURA 2.5.4. ■

EJEMPLO 2 Límite por un lado

En la figura 1.6.6 se vio que el eje y, o la recta $x = 0$, es una asíntota vertical para la función logarítmica natural $f(x) = \ln x$ puesto que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

La gráfica de la función logarítmica $y = \ln(x + 3)$ es la gráfica de $f(x) = \ln x$ desplazada 3 unidades a la izquierda. Por tanto, $x = -3$ es una asíntota vertical para la gráfica de $y = \ln(x + 3)$ puesto que $\lim_{x\to -3^+} \ln(x + 3) = -\infty$. ■

EJEMPLO 3 Límite por un lado

Grafique la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 2}}$.

Solución Al inspeccionar f se observa que su dominio es el intervalo $(-2, \infty)$ y la intersección con el eje y es $(0, 0)$. A partir de la tabla siguiente se concluye que f decrece

$x \to -2^+$	-1.9	-1.99	-1.999	-1.9999
$f(x)$	-6.01	-19.90	-63.21	-199.90

sin límite cuando x tiende a -2 por la derecha:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty.$$

Por tanto, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical. La gráfica de f se proporciona en la FIGURA 2.5.5. ■

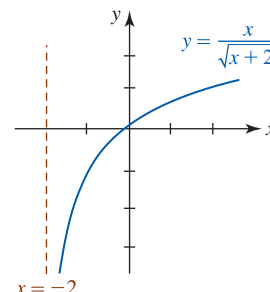


FIGURA 2.5.5 Gráfica de la función en el ejemplo 3

Límites en el infinito Si una función f tiende a un valor constante L cuando la variable independiente x crece sin límite $(x \to \infty)$ o cuando x decrece $(x \to -\infty)$ sin límite, entonces se escribe

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = L \tag{9}$$

y se dice que f posee un **límite en el infinito**. A continuación se presentan todas las posibilidades para límites en el infinito $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$:

- Un límite existe pero el otro no.
- Tanto $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ como $\lim_{x\to \infty} f(x)$ existen y son iguales al mismo número.
- Tanto $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ como $\lim_{x\to \infty} f(x)$ existen pero son números diferentes.
- Ni $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ ni $\lim_{x\to \infty} f(x)$ existen.

Si por lo menos uno de los límites existe, por ejemplo, $\lim_{x\to \infty} f(x) = L$, entonces la gráfica de f puede hacerse arbitrariamente próxima a la recta $y = L$ cuando x crece en la dirección positiva.

Definición 2.5.2 Asíntota horizontal

Se dice que la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de una función f si por lo menos una de las dos declaraciones en (9) es verdadera.

En la FIGURA 2.5.6 se han ilustrado algunas asíntotas horizontales típicas. Se observa, junto con la figura 2.5.6*d*) que, en general, la gráfica de una función puede tener como máximo *dos* asíntotas horizontales, aunque la gráfica de una *función racional* $f(x) = p(x)/q(x)$ puede tener cuando mucho *una*. Si la gráfica de una función racional f posee una asíntota horizontal $y = L$, entonces su comportamiento final es como se muestra en la figura 2.5.6*c*); es decir:

$$f(x) \to L \text{ cuando } x \to -\infty \qquad y \qquad f(x) \to L \text{ cuando } x \to \infty.$$

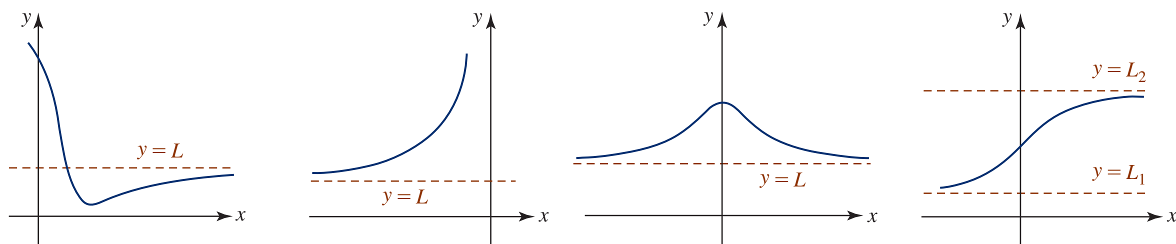


FIGURA 2.5.6 $y = L$ es una asíntota horizontal en *a*), *b*) y *c*); $y = L_1$ y $y = L_2$ son asíntotas horizontales en *d*)

Por ejemplo, si x se vuelve sin límite en la dirección positiva o en la negativa, las funciones en (4) tienden a 0 y se escribe

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-a}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-a}=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x-a)^2}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x-a)^2}=0. \tag{10}$$

En general, si r es un número racional positivo, y si $(x-a)^r$ está definido, entonces

Estos resultados también son verdaderos cuando $x - a$ se sustituye por $a - x$, en el supuesto que $(a - x)^r$ esté definido.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x-a)^r}=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x-a)^r}=0. \tag{11}$$

EJEMPLO 4 Asíntotas horizontal y vertical

El dominio de la función $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}$ es el intervalo $(-\infty, 2)$. En virtud de (11) puede escribirse

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{\sqrt{2-x}}=0.$$

Observe que no es posible considerar el límite de f cuando $x\to\infty$ porque la función no está definida para $x \geq 2$. No obstante, $y = 0$ es una asíntota horizontal. Luego, por el límite en infinito

$$\lim_{x\to2^-}\frac{4}{\sqrt{2-x}}=\infty$$

se concluye que $x = 2$ es una asíntota vertical para la gráfica de f. Vea la FIGURA 2.5.7. ■

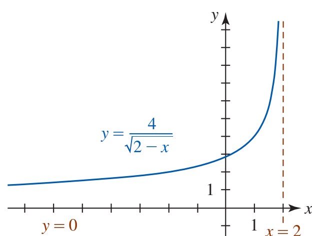


FIGURA 2.5.7 Gráfica de la función en el ejemplo 4

En general, si $F(x) = f(x)/g(x)$, entonces en la siguiente tabla se resumen los resultados para límites de las formas $\lim_{x\to a} F(x)$, $\lim_{x\to\infty} F(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} F(x)$. El símbolo L denota un número real.

forma límite: $x\to a,\ \infty,\ -\infty$	$\dfrac{L}{\pm\infty}$	$\dfrac{\pm\infty}{L},\ L\neq 0$	$\dfrac{L}{0},\ L\neq 0$
el límite es:	0	infinito	infinito

(12)

Se dice que límites de la forma $\lim_{x\to\infty} F(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \pm\infty$ son **límites infinitos en el infinito**. Además, las propiedades de los límites dadas en el teorema 2.2.3 se cumplen al sustituir el símbolo a por ∞ o $-\infty$ en el supuesto de que los límites existen. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)}, \tag{13}$$

siempre que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)$ existan. En el caso del límite de un cociente, también debe tenerse $\lim_{x\to\infty} g(x) \neq 0$.

Comportamiento final En la sección 1.3 vimos que la forma en que una función f se comporta cuando $|x|$ es muy grande se denomina **comportamiento final**. Como ya se analizó, si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces la gráfica de f puede hacerse arbitrariamente próxima a la recta $y = L$ para grandes valores positivos de x. La gráfica de una función polinomial,

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

se asemeja a la gráfica de $y = a_nx^n$ para $|x|$ muy grande. En otras palabras, para

$$f(x) = a_nx^n \boxed{+\, a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0} \tag{14}$$

Los términos encerrados en el rectángulo azul en (14) son irrelevantes cuando la gráfica de una función polinomial se observa globalmente; es decir, para $|x|$ muy grande. Así, se tiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0\right), \tag{15}$$

cuando (15) es ∞ o $-\infty$ dependiendo de a_n y n. En otras palabras, el límite en (15) constituye un ejemplo de límite infinito en el infinito.

EJEMPLO 5 Límite en el infinito

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-6x^4 + x^2 + 1}{2x^4 - x}$.

Solución No es posible aplicar la ley del límite de un cociente en (13) a la función dada, puesto que $\lim_{x\to\infty}(-6x^4 + x^2 + 1) = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty}(2x^4 - x) = \infty$. No obstante, al dividir el numerador y el denominador entre x^4 podemos escribir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-6x^4 + x^2 + 1}{2x^4 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6 + \left(\dfrac{1}{x^2}\right) + \left(\dfrac{1}{x^4}\right)}{2 - \left(\dfrac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left[-6 + \left(\dfrac{1}{x^2}\right) + \left(\dfrac{1}{x^4}\right)\right]}{\lim_{x\to\infty}\left[2 - \left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right]} \quad \leftarrow \text{El límite del numerador existe, así como el límite del denominador, y el límite del denominador no es cero}$$

$$= \frac{-6 + 0 + 0}{2 - 0} = -3.$$

Esto significa que la recta $y = -3$ es una asíntota horizontal para la gráfica de la función.

Solución alterna En virtud de (14) es posible descartar todas las potencias de x, menos la más alta:

descartar términos de los recuadros azules ↓

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-6x^4 \boxed{+ x^2 + 1}}{2x^4 \boxed{- x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x^4}{2x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6}{2} = -3.$$ ■

EJEMPLO 6 Límite infinito en el infinito

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - x^3}{3x + 2}$.

Solución Por (14),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - x^3}{3x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3}{3x} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty} x^2 = -\infty.$$

En otras palabras, el límite no existe. ■

EJEMPLO 7 Gráfica de una función racional

Grafique la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$.

Solución Al inspeccionar la función f se observa que su gráfica es simétrica con respecto al eje y, la intersección con el eje y es $(0, 0)$ y las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$. Luego, a partir del límite

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1 - x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -\lim_{x\to\infty} 1 = -1$$

se concluye que la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal. La gráfica de f se muestra en la FIGURA 2.5.8. ■

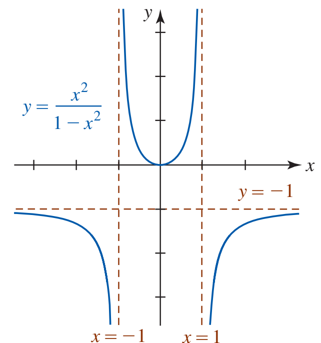


FIGURA 2.5.8 Gráfica de la función en el ejemplo 7

Otra ley de los límites que se cumple para límites en el infinito es que el límite de una raíz n-ésima de una función es la raíz n-ésima del límite, siempre que el límite exista y la raíz n-ésima esté definida. En símbolos, si $\lim_{x\to\infty} g(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to\infty} g(x)} = \sqrt[n]{L}, \qquad (16)$$

en el supuesto de que $L \geq 0$ cuando n es par. El resultado también se cumple para $x \to -\infty$.

EJEMPLO 8 Límite de una raíz cuadrada

Evalúe $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 6}{6x^3 + 2x}}$.

Solución Debido a que el límite de la función racional en el radical existe y es positivo, puede escribirse

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 6}{6x^3 + 2x}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 6}{6x^3 + 2x}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{6x^3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$ ■

EJEMPLO 9 Gráfica con dos asíntotas horizontales

Determine si la gráfica de $f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ tiene asíntotas horizontales.

Solución Puesto que la función no es racional, es necesario investigar el límite de f cuando $x\to\infty$ y cuando $x\to-\infty$. Primero, recuerde del álgebra que $\sqrt{x^2}$ es no negativa, o más al punto,

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Luego, volvemos a escribir f como

$$f(x) = \frac{\dfrac{5x}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{\dfrac{5x}{|x|}}{\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{\dfrac{5x}{|x|}}{\sqrt{1 + \dfrac{4}{x^2}}}.$$

Los límites de f cuando $x\to\infty$ y $x\to-\infty$ son, respectivamente,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5x}{|x|}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5x}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to\infty} 5}{\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)}} = \frac{5}{1} = 5,$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{5x}{|x|}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{5x}{-x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to-\infty}(-5)}{\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)}} = \frac{-5}{1} = -5.$$

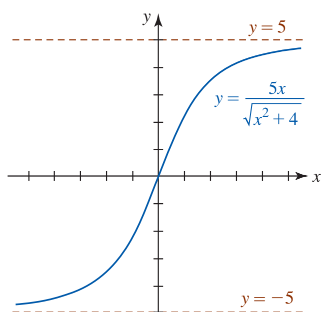


FIGURA 2.5.9 Gráfica de la función en el ejemplo 9

Por tanto, la gráfica de f tiene dos asíntotas horizontales $y = 5$ y $y = -5$. La gráfica de f, que es semejante a la figura 2.5.6*d*), se proporciona en la FIGURA 2.5.9. ■

En el siguiente ejemplo se ve que la forma del límite dado es $\infty - \infty$, pero el límite existe y *no es* 0.

EJEMPLO 10 Uso de racionalización

Evalúe $\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}\right)$.

Solución Debido a que $f(x) = x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}$ es una función par (compruebe que $f(-x) = f(x)$) con dominio $(-\infty, \infty)$, si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe, debe ser el mismo que $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Primero racionalizamos el numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}\right)}{1}\cdot\left(\frac{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4 - (x^4 + 7x^2 + 1)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-7x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}.
\end{aligned}$$

Luego, el numerador y el denominador se dividen entre $\sqrt{x^4} = x^2$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-7x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{-7x^2}{\sqrt{x^4}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^4}}}{\dfrac{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}{\sqrt{x^4}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-7 - \dfrac{1}{x^2}}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{7}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-7 - \dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{7}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}\right)}}$$

$$= \frac{-7}{1+1} = -\frac{7}{2}.$$

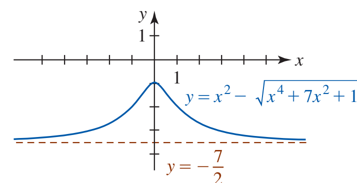


FIGURA 2.5.10 Gráfica de la función en el ejemplo 10

Con ayuda de un SAC, la gráfica de la función f se proporciona en la FIGURA 2.5.10. La recta $y = -\frac{7}{2}$ es una asíntota horizontal. Observe la simetría de la gráfica con respecto al eje y. ■

Cuando se trabaja con funciones que contienen la función exponencial natural, los cuatro siguientes límites ameritan una atención especial:

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty. \qquad (17)$$

Como se analizó en la sección 1.6 y se comprobó por los límites segundo y tercero en (17), $y = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$. Vea la FIGURA 2.5.11.

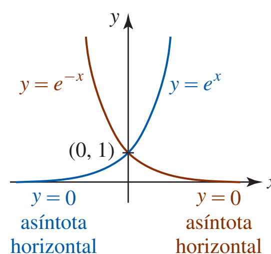


FIGURA 2.5.11 Gráficas de funciones exponenciales

EJEMPLO 11 Gráfica con dos asíntotas horizontales

Determine si la gráfica de $f(x) = \dfrac{6}{1 + e^{-x}}$ tiene alguna asíntota horizontal.

Solución Debido a que f no es una función racional, es necesario analizar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Primero, en virtud del tercer resultado proporcionado en (17) podemos escribir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6}{1 + e^{-x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 6}{\lim\limits_{x\to\infty}(1 + e^{-x})} = \frac{6}{1+0} = 6.$$

Así, $y = 6$ es una asíntota horizontal. Luego, debido a que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$ por la tabla en (12) se concluye que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6}{1 + e^{-x}} = 0.$$

En consecuencia, $y = 0$ es una asíntota horizontal. La gráfica de f se muestra en la FIGURA 2.5.12. ■

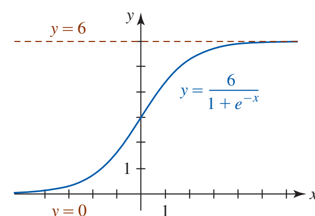


FIGURA 2.5.12 Gráfica de la función en el ejemplo 11

Funciones compuestas El teorema 2.3.3, el límite de una función compuesta, se cumple cuando a se sustituye por $-\infty$ o ∞ y el límite existe. Por ejemplo, si $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = L$ y f es continua en L, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right) = f(L). \qquad (18)$$

El resultado del límite en (16) es justo un caso especial de (18) cuando $f(x) = \sqrt[n]{x}$. El resultado en (18) también se cumple para $x \to -\infty$. El último ejemplo ilustra a (18) cuando implica un límite en ∞.

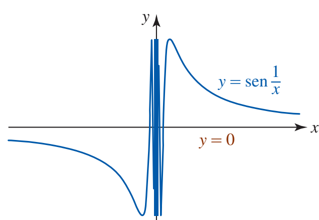


FIGURA 2.5.13 Gráfica de la función en el ejemplo 12

EJEMPLO 12 Otro repaso a una función trigonométrica

En el ejemplo 2 de la sección 2.4 vimos que $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe. No obstante, el límite en el infinito, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(1/x)$, existe. Por la ecuación (18), podemos escribir

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sen} 0 = 0.$$

Como se observa en la FIGURA 2.5.13, $y = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Compare esta gráfica con la mostrada en la figura 2.4.2. ■

Ejercicios 2.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-8.

Fundamentos

En los problemas 1-24, exprese el límite dado como un número, como $-\infty$, o como ∞.

1. $\lim_{x\to5^-}\frac{1}{x-5}$
2. $\lim_{x\to6}\frac{4}{(x-6)^2}$
3. $\lim_{x\to-4^+}\frac{2}{(x+4)^3}$
4. $\lim_{x\to2^-}\frac{10}{x^2-4}$
5. $\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^4}$
6. $\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}$
7. $\lim_{x\to0^+}\frac{2+\operatorname{sen}x}{x}$
8. $\lim_{x\to\pi^+}\csc x$
9. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{4x^2+5}$
10. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^{-2}}$
11. $\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{2}{x^4}\right)$
12. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)$
13. $\lim_{x\to\infty}\frac{8-\sqrt{x}}{1+4\sqrt{x}}$
14. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1+7\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}}$
15. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x+2}-\frac{x-1}{2x+6}\right)$
16. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3x+1}\right)\left(\frac{4x^2+1}{2x^2+x}\right)^3$
17. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3x+2}{6x-8}}$
18. $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{2x-1}{7-16x}}$
19. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$
20. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$
21. $\lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{5}{x}\right)$
22. $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3-6x}\right)$
23. $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$
24. $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x}{x+8}\right)$

En los problemas 25-32, encuentre $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$ para la función dada f.

25. $f(x)=\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+1}}$
26. $f(x)=\frac{\sqrt{9x^2+6}}{5x-1}$
27. $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{3x^2+1}}$
28. $f(x)=\frac{-5x^2+6x+3}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$
29. $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
30. $f(x)=1+\frac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
31. $f(x)=\frac{|x-5|}{x-5}$
32. $f(x)=\frac{|4x|+|x-1|}{x}$

En los problemas 33-42, encuentre todas las asíntotas verticales y horizontales para la gráfica de la función dada f. Trace la gráfica.

33. $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$
34. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$
35. $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$
36. $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}$
37. $f(x)=\frac{1}{x^2(x-2)}$
38. $f(x)=\frac{4x^2}{x^2+4}$
39. $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$
40. $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
41. $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$
42. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}$

En los problemas 43-46, use la gráfica dada para encontrar:

a) $\lim_{x\to2^-} f(x)$ *b)* $\lim_{x\to2^+} f(x)$
c) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *d)* $\lim_{x\to\infty} f(x)$

43.

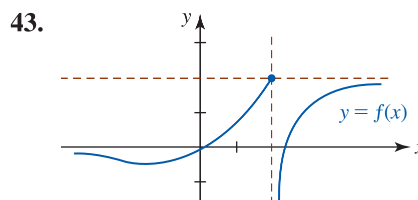


FIGURA 2.5.14 Gráfica para el problema 43

44.

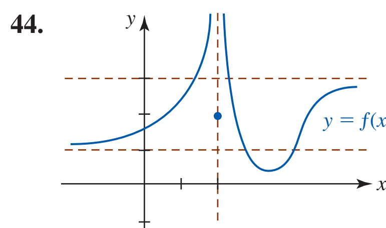


FIGURA 2.5.15 Gráfica para el problema 44

45.

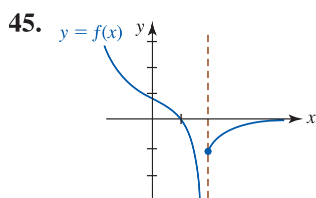


FIGURA 2.5.16 Gráfica para el problema 45

46.

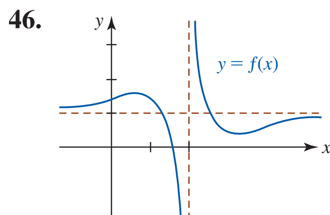


FIGURA 2.5.17 Gráfica para el problema 46

En los problemas 47-50, trace una gráfica de una función f que satisface las condiciones dadas.

47. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $f(2) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

48. $f(0) = 1$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$

49. $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

50. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, $f(3) = 0$,

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

51. Use una sustitución idónea para evaluar

$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{3}{x}.$$

52. Según la teoría de la relatividad de Einstein, la masa m de un cuerpo que se mueve con velocidad v es $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde m_0 es la masa inicial y c es la velocidad de la luz. ¿Qué ocurre a m cuando $v \to c^-$?

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 53 y 54, use una calculadora o SAC para investigar el límite dado. Conjeture su valor.

53. $\lim_{x\to\infty} x^2 \operatorname{sen}\frac{2}{x^2}$

54. $\lim_{x\to\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^x$

55. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = (1 + x)^{1/x}$. Use la gráfica para conjeturar los valores de $f(x)$ cuando

a) $x \to -1^+$, ***b)*** $x \to 0$ y ***c)*** $x \to \infty$.

56. ***a)*** Un n-gono regular es un polígono regular de n lados inscrito en un círculo; el polígono está formado por n puntos equidistantes sobre el círculo. Suponga que el polígono que se muestra en la FIGURA 2.5.18 representa un n-gono regular inscrito en un círculo de radio r. Use trigonometría para demostrar que el área $A(n)$ del n-gono está dada por

$$A(n) = \frac{n}{2}r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

b) Tiene sentido afirmar que el área $A(n)$ tiende al área del círculo a medida que aumenta el número de lados del n-gono. Use una calculadora para obtener $A(100)$ y $A(1\,000)$.

c) Sea $x = 2\pi/n$ en $A(n)$ y observe que cuando $n \to \infty$ entonces $x \to 0$. Use (10) de la sección 2.4 para demostrar que $\lim_{n\to\infty} A(n) = \pi r^2$.

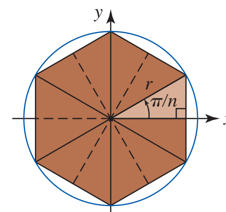


FIGURA 2.5.18 n-gono inscrito para el problema 56

≡ Piense en ello

57. ***a)*** Suponga que $f(x) = x^2/(x + 1)$ y $g(x) = x - 1$. Demuestre que

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

b) ¿Qué indica el resultado del inciso *a)* respecto a las gráficas de f y g, donde $|x|$ es grande?

c) De ser posible, asigne un nombre a la función g.

58. Muy a menudo los estudiantes e incluso los profesores trazan incorrectamente gráficas desplazadas verticalmente. Por ejemplo, las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^2 + 1$ están dibujadas incorrectamente en la FIGURA 2.5.19*a)* pero lo están correctamente en la figura 2.5.19*b)*. Demuestre que la figura 2.5.19*b)* es correcta al mostrar que la distancia horizontal entre los dos puntos P y Q en la figura tiende a 0 cuando $x \to \infty$.

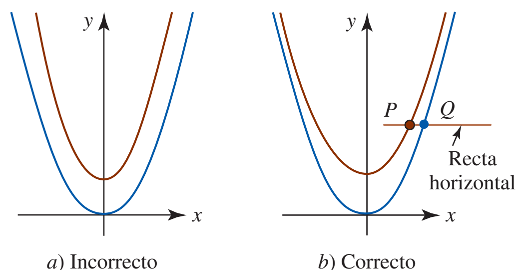


FIGURA 2.5.19 Gráficas para el problema 58

2.6 Límites: un enfoque formal

Introducción En el análisis que se presenta a continuación se considerará un enfoque alterno a la idea de límite, que se basa en conceptos analíticos más que en conceptos intuitivos. Una **demostración** de la existencia de un límite jamás debe estar basada en la habilidad para elaborar gráficas o en tablas de valores numéricos. Aunque una buena comprensión intuitiva de

$\lim_{x\to a} f(x)$ es suficiente para continuar con el estudio del cálculo en este texto, en general una comprensión intuitiva es algo muy vago como para usarlo en la demostración de teoremas. Para presentar una demostración rigurosa de la existencia de un límite, o para demostrar los importantes teoremas de la sección 2.2, es necesario empezar con una definición precisa de límite.

Límite de una función Se intentará demostrar que $\lim_{x\to 2}(2x+6) = 10$ al trabajar la siguiente idea: "Si $f(x) = 2x + 6$ puede hacerse arbitrariamente próximo a 10 al tomar x suficientemente próximo a 2, por ambos lados pero diferente de 2, entonces $\lim_{x\to 2} f(x) = 10$." Es necesario precisar los conceptos *arbitrariamente próximo* y *suficientemente próximo*. Para establecer una norma de proximidad arbitraria, se pedirá que la distancia entre los números $f(x)$ y 10 sea menor que 0.1; es decir,

$$|f(x) - 10| < 0.1 \qquad \text{o} \qquad 9.9 < f(x) < 10.1. \tag{1}$$

Así, ¿cuán próximo a 2 debe estar x para satisfacer (1)? Para averiguarlo, es posible usar álgebra normal para volver a escribir la desigualdad

$$9.9 < 2x + 6 < 10.1$$

cuando $1.95 < x < 2.05$. Al sumar -2 a ambos miembros de esta desigualdad simultánea se obtiene

$$-0.05 < x - 2 < 0.05.$$

Al usar valores absolutos y recordar que $x \neq 2$, la última desigualdad puede escribirse como $0 < |x - 2| < 0.05$. Así, para una *cercanía arbitrariamente próxima a 10* de 0.1, *suficientemente próximo a 2* significa a menos de 0.05. En otras palabras, si x es un número diferente de 2 tal que su distancia a 2 satisface $|x - 2| < 0.05$, entonces se garantiza que la distancia de $f(x)$ a 10 satisface $|f(x) - 10| < 0.1$. Al expresarlo de otra manera, cuando x es un número diferente de 2, pero que está en el intervalo abierto (1.95, 2.05) sobre el eje x, entonces $f(x)$ está en el intervalo (9.9, 10.1) sobre el eje y.

Se intentará generalizar usando el mismo ejemplo. Suponga que ε (la letra griega *épsilon*) denota un *número positivo* arbitrario que constituye la medida de la proximidad arbitraria al número 10. Si se pide que

$$|f(x) - 10| < \varepsilon \qquad \text{o} \qquad 10 - \varepsilon < f(x) < 10 + \varepsilon, \tag{2}$$

entonces por $10 - \varepsilon < 2x + 6 < 10 + \varepsilon$ y por álgebra, se encuentra que

$$2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{o} \qquad -\frac{\varepsilon}{2} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

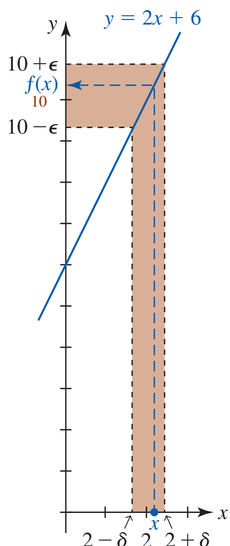


FIGURA 2.6.1 $f(x)$ está en $(10 - \varepsilon, 10 + \varepsilon)$ siempre que x esté en $(2 - \delta, 2 + \delta)$, $x \neq 2$

De nuevo, al usar valores absolutos y al recordar que $x \neq 2$, la última desigualdad en (3) puede escribirse como

$$0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Si $\varepsilon/2$ se denota por el nuevo símbolo δ (la letra griega *delta*), (2) y (4) pueden escribirse como

$$|f(x) - 10| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - 2| < \delta.$$

Así, para un nuevo valor para ε, por ejemplo $\varepsilon = 0.001$, $\delta = \varepsilon/2 = 0.0005$ establece la proximidad correspondiente a 2. Para cualquier número x diferente de 2 en (1.9995, 2.0005),* puede tenerse la certeza de que $f(x)$ está en (9.999, 10.001). Vea la FIGURA 2.6.1.

Una definición El análisis anterior conduce a la **definición ε-δ de límite**.

Definición 2.6.1 Definición de límite

Suponga que una función f está definida en todas partes sobre un intervalo abierto, excepto quizás en un número a en el intervalo. Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

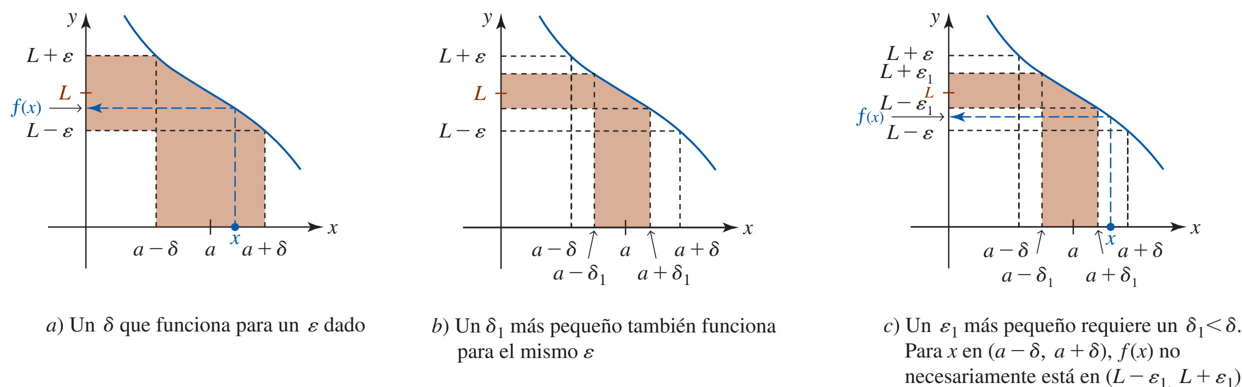
significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta.$$

---

* Por esta razón se usa $0 < |x - 2| < \delta$ en lugar de $|x - 2| < \delta$. Al considerar $\lim_{x\to 2} f(x)$, no olvide que f *en* 2 carece de importancia.

Sea $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y suponga que $\delta > 0$ es el número que "funciona" en el sentido de la definición 2.6.1 para un $\varepsilon > 0$ dado. Como se muestra en la FIGURA 2.6.2*a*), toda x en $(a - \delta, a + \delta)$, con la posible excepción de a mismo, tendrá entonces una imagen $f(x)$ en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Además, en la figura 2.6.2*b*), una elección $\delta_1 < \delta$ para la misma ε también "funciona" en el sentido de que toda x diferente a a en $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ proporciona $f(x)$ en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. No obstante, la figura 2.6.2*c*) muestra que al escoger un ε_1, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, más pequeño, demanda encontrar un nuevo valor de δ. Observe en la figura 2.6.2*c*) que x está en $(a - \delta, a + \delta)$ pero no en $(a - \delta_1, a + \delta_1)$, de modo que $f(x)$ no necesariamente está en $(L - \varepsilon_1, L + \varepsilon_1)$.



a) Un δ que funciona para un ε dado

b) Un δ_1 más pequeño también funciona para el mismo ε

c) Un ε_1 más pequeño requiere un $\delta_1 < \delta$. Para x en $(a - \delta, a + \delta)$, $f(x)$ no necesariamente está en $(L - \varepsilon_1, L + \varepsilon_1)$

FIGURA 2.6.2 $f(x)$ está en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ siempre que x esté en $(a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$

EJEMPLO 1 Uso de la definición 2.6.1

Demuestre que $\lim_{x \to 3} (5x + 2) = 17$.

Solución Para cualquier $\varepsilon > 0$, arbitrario sin importar cuán pequeño sea, se quiere encontrar un δ de modo que

$$|(5x + 2) - 17| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 3| < \delta.$$

Para hacer lo anterior, considere

$$|(5x + 2) - 17| = |5x - 15| = 5|x - 3|.$$

Así, para hacer $|(5x + 2) - 17| = 5|x - 3| < \varepsilon$, sólo es necesario hacer $0 < |x - 3| < \varepsilon/5$; es decir, se escoge $\delta = \varepsilon/5$.

Verificación Si $0 < |x - 3| < \varepsilon/5$, entonces $5|x - 3| < \varepsilon$ implica

$$|5x - 15| < \varepsilon \quad \text{o bien,} \quad |(5x + 2) - 17| < \varepsilon \quad \text{o bien,} \quad |f(x) - 17| < \varepsilon. \quad ■$$

EJEMPLO 2 Uso de la definición 2.6.1

Demuestre que $\lim_{x \to -4} \dfrac{16 - x^2}{4 + x} = 8$.

◀ Este límite se analizó en (1) y (2) de la sección 2.1.

Solución Para $x \neq -4$,

$$\left| \frac{16 - x^2}{4 + x} - 8 \right| = |4 - x - 8| = |-x - 4| = |x + 4| = |x - (-4)|$$

Así,
$$\left| \frac{16 - x^2}{4 + x} - 8 \right| = |x - (-4)| < \varepsilon$$

siempre que se tiene $0 < |x - (-4)| < \varepsilon$; es decir, se escoge $\delta = \varepsilon$. ■

EJEMPLO 3 Un límite que no existe

Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

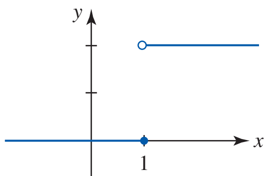


FIGURA 2.6.3 El límite de f no existe cuando x tiende a 1 en el ejemplo 3

En la FIGURA 2.6.3 se reconoce que f tiene una discontinuidad de tipo salto en 1, de modo que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe. No obstante, para *demostrar* este último hecho, se procederá indirectamente. Suponga que el límite existe; a saber, $\lim_{x\to 1} f(x) = L$. Luego, por la definición 2.6.1 sabemos que para la elección $\varepsilon = \frac{1}{2}$ debe existir un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \frac{1}{2} \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - 1| < \delta.$$

Luego, a la derecha de 1 se escoge $x = 1 + \delta/2$. Puesto que

$$0 < \left|1 + \frac{\delta}{2} - 1\right| = \left|\frac{\delta}{2}\right| < \delta$$

debe tenerse

$$\left|f\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) - L\right| = |2 - L| < \frac{1}{2}. \tag{5}$$

A la izquierda de 1, se escoge $x = 1 - \delta/2$. Pero

$$0 < \left|1 - \frac{\delta}{2} - 1\right| = \left|-\frac{\delta}{2}\right| < \delta$$

implica

$$\left|f\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) - L\right| = |0 - L| = |L| < \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Al resolver las desigualdades en valor absoluto (5) y (6) se obtiene, respectivamente,

$$\frac{3}{2} < L < \frac{5}{2} \qquad \text{y} \qquad -\frac{1}{2} < L < \frac{1}{2}.$$

Puesto que ningún número L puede satisfacer estas dos desigualdades, concluimos que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no debe existir. ■

En el siguiente ejemplo se considera el límite de una función cuadrática. Veremos que en este caso encontrar la δ requiere un poco más de ingenio que en los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 4 Uso de la definición 2.6.1

Este límite se analizó en el ejemplo 1 de la sección 2.1.

Demuestre que $\lim_{x\to 4} (-x^2 + 2x + 2) = -6$.

Solución Para un $\varepsilon > 0$ arbitrario es necesario encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$|-x^2 + 2x + 2 - (-6)| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - 4| < \delta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |-x^2 + 2x + 2 - (-6)| &= |(-1)(x^2 - 2x - 8)| \\ &= |(x + 2)(x - 4)| \\ &= |x + 2||x - 4|. \end{aligned} \tag{7}$$

En otras palabras, se quiere hacer $|x + 2||x - 4| < \varepsilon$. Pero puesto que hemos acordado examinar valores de x *cerca de* 4, sólo se consideran aquellos valores para los cuales $|x - 4| < 1$. Esta última desigualdad da $3 < x < 5$ o, de manera equivalente, $5 < x + 2 < 7$. En consecuencia, podemos escribir $|x + 2| < 7$. Entonces, por (7),

$$0 < |x - 4| < 1 \qquad \text{implica} \qquad |-x^2 + 2x + 2 - (-6)| < 7|x - 4|.$$

Si ahora δ se escoge como el mínimo de los dos números 1 y $\varepsilon/7$, escrito $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$ se tiene

$$0 < |x - 4| < \delta \qquad \text{implica} \qquad |-x^2 + 2x + 2 - (-6)| < 7|x - 4| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon.$$ ■

El razonamiento en el ejemplo 4 es sutil. En consecuencia, merece la pena dedicar unos minutos para volver a leer el análisis que está inmediatamente después de la definición 2.6.1,

volver a examinar la figura 2.3.2*b*) y luego volver a pensar en por qué $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$ es el δ que "funciona" en el ejemplo. Recuerde que el valor de ε puede escogerse arbitrariamente; considere δ para, por ejemplo, $\varepsilon = 8$, $\varepsilon = 6$ y $\varepsilon = 0.01$.

Límites laterales A continuación se presentan las definiciones de los **límites laterales**, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

Definición 2.6.2 Límite por la izquierda

Suponga que una función f está definida sobre un intervalo abierto (c, a). Entonces

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad a - \delta < x < a.$$

Definición 2.6.3 Límite por la derecha

Suponga que una función f está definida sobre un intervalo abierto (a, c). Entonces

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad a < x < a + \delta.$$

EJEMPLO 5 Uso de la definición 2.6.3

Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Solución Primero, podemos escribir

$$|\sqrt{x} - 0| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x}.$$

Luego, $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$ siempre que $0 < x < 0 + \varepsilon^2$. En otras palabras, se escoge $\delta = \varepsilon^2$.

Verificación Si $0 < x < \varepsilon^2$, entonces $0 < \sqrt{x} < \varepsilon$ implica

$$|\sqrt{x}| < \varepsilon \qquad \text{o bien,} \qquad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon.$$ ■

Límites que implican el infinito Los dos conceptos de **límite infinito**

$$f(x) \to \infty \text{ (o bien, } -\infty) \quad \text{cuando} \quad x \to a$$

y **límite en el infinito**

$$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \text{ (o bien, } -\infty)$$

se formalizan en las dos secciones siguientes.

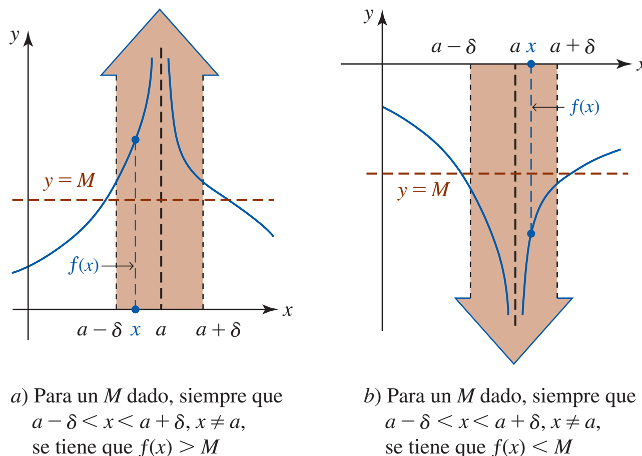
Recuerde que un límite infinito es un límite que no existe cuando $x \to a$.

Definición 2.6.4 Límites infinitos

i) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ significa que para todo $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

ii) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ significa que para todo $M < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < M$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Los incisos *i*) y *ii*) de la definición 2.6.4 se ilustran en la FIGURA 2.6.4*a*) y en la figura 2.6.4*b*), respectivamente. Recuerde, si $f(x) \to \infty$ (o $-\infty$) cuando $x \to a$, entonces $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de *f*. En el caso en que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$, entonces $f(x)$ puede hacerse más grande que cualquier número positivo arbitrario (es decir, $f(x) > M$) al tomar *x* suficientemente próximo a *a* (es decir, $0 < |x - a| < \delta$).



a) Para un *M* dado, siempre que $a - \delta < x < a + \delta, x \neq a$, se tiene que $f(x) > M$

b) Para un *M* dado, siempre que $a - \delta < x < a + \delta, x \neq a$, se tiene que $f(x) < M$

FIGURA 2.6.4 Límites infinitos cuando $x \to a$

Los cuatro límites infinitos por un lado

$$f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to a^-, \qquad f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to a^-$$
$$f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to a^+, \qquad f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to a^+$$

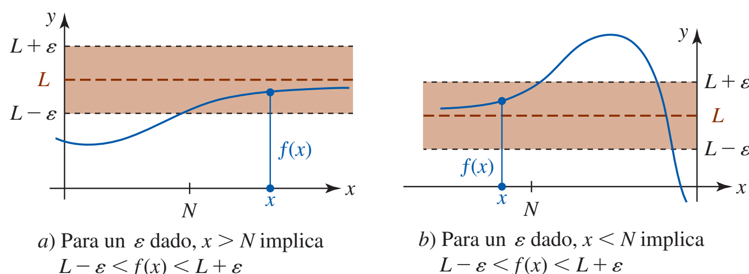
se definen de forma análoga a la proporcionada en las definiciones 2.6.2 y 2.6.3.

Definición 2.6.5 Límites en el infinito

i) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x > N$.

ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x < N$.

Los incisos *i*) y *ii*) de la definición 2.6.5 se ilustran en la FIGURA 2.6.5*a*) y en la figura 2.6.5*b*), respectivamente. Recuerde, si $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$ (o $-\infty$), entonces $y = L$ es una asíntota horizontal para la gráfica de *f*. En el caso en que $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$, entonces la gráfica de *f* puede hacerse arbitrariamente próxima a la recta $y = L$ (es decir, $|f(x) - L| < \varepsilon$) al tomar *x* suficientemente lejos sobre el eje *x* positivo (es decir, $x > N$).



a) Para un ε dado, $x > N$ implica $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

b) Para un ε dado, $x < N$ implica $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

FIGURA 2.6.5 Límites en el infinito

EJEMPLO 6 Uso de la definición 2.6.5*i*)

Demuestre que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x+1}=3.$

Solución Por la definición 2.6.5*i*), para cualquier $\varepsilon > 0$ es necesario encontrar un número $N > 0$ tal que

$$\left|\frac{3x}{x+1}-3\right|<\varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad x>N.$$

Luego, al considerar $x > 0$, tenemos

$$\left|\frac{3x}{x+1}-3\right|=\left|\frac{-3}{x+1}\right|=\frac{3}{x+1}<\frac{3}{x}<\varepsilon$$

siempre que $x > 3/\varepsilon$. Entonces, se escoge $N = 3/\varepsilon$. Por ejemplo, si $\varepsilon = 0.01$, entonces $N = 3/(0.01) = 300$ garantiza que $|f(x) - 3| < 0.01$ siempre que $x > 300$. ■

Posdata: Un poco de historia Después de esta sección tal vez esté de acuerdo con el filósofo, predicador, historiador y científico inglés William Whewell (1794-1866), quien escribió en 1858 que "Un límite es una concepción. . . peculiar". Durante muchos años después de la invención del cálculo en el siglo XVII, los matemáticos discutían y debatían acerca de la naturaleza de un límite. Había la percepción de que la intuición, las gráficas y ejemplos numéricos de razones de cantidades que desaparecen proporcionan cuando mucho un cimiento inestable para tal concepto fundamental. Como se verá al principio del siguiente capítulo, el concepto de límite juega un papel central en cálculo. El estudio del cálculo pasó por varios periodos de creciente rigor matemático empezando con el matemático francés Augustin-Louis Cauchy y luego con el matemático alemán Karl Wilhelm Weierstrass.


Cauchy

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) nació durante una época de convulsión en la historia de Francia. Cauchy estaba destinado a iniciar una revolución por sí mismo en matemáticas. Por muchas contribuciones, pero especialmente debido a sus esfuerzos por clarificar cuestiones matemáticas oscuras, su demanda incesante por contar con definiciones satisfactorias y demostraciones rigurosas de teoremas, Cauchy a menudo es denominado "padre del análisis moderno". Escritor prolífico cuyo trabajo sólo ha sido superado por unos cuantos, Cauchy produjo casi 800 artículos sobre astronomía, física y matemáticas. Sin embargo, la misma mentalidad que siempre estaba abierta y preguntaba sobre ciencia y matemáticas también era estrecha y no cuestionaba muchas otras áreas. Franca y arrogante, la postura apasionada de Cauchy respecto a asuntos políticos y religiosos a menudo lo alejaron de sus colegas.


Weierstrass

Karl Wilhelm Weierstrass (1815-1897) ¡Uno de los analistas matemáticos más destacados del siglo XIX sin haber tenido ningún grado académico! Después de especializarse en leyes en la Universidad de Bonn, aunque concentrado en esgrima y en beber cerveza durante cuatro años, Weierstrass se "graduó" en la vida real sin ningún título. Al necesitar trabajo, Weierstrass aprobó un examen estatal y recibió un certificado para enseñar en 1841. Durante 15 años como profesor de enseñanza secundaria, su genio matemático dormido floreció. Aunque la cantidad de sus investigaciones publicadas era modesta, especialmente en comparación con la de Cauchy, la calidad de estos trabajos impresionó tanto a la comunidad matemática alemana que se le otorgó un doctorado, *honoris causa*, de la Universidad de Königsberg, y finalmente fue contratado como profesor en la Universidad de Berlín. Una vez ahí, Weierstrass obtuvo reconocimiento internacional como matemático y como maestro de matemáticas. Una de sus estudiantes fue Sonja Kowalewski, la más grande matemática del siglo XIX. Fue Karl Weierstrass quien dotó de sólidos fundamentos al concepto de límite con la definición ε-δ.

Ejercicios 2.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-9.

Fundamentos

En los problemas 1-24, use las definiciones 2.6.1, 2.6.2 o 2.6.3 para demostrar el resultado sobre límites dado.

1. $\lim_{x\to 5} 10 = 10$

2. $\lim_{x\to -2} \pi = \pi$

3. $\lim_{x\to 3} x = 3$

4. $\lim_{x\to 4} 2x = 8$

5. $\lim_{x\to -1} (x + 6) = 5$

6. $\lim_{x\to 0} (x - 4) = -4$

7. $\lim_{x\to 0} (3x + 7) = 7$

8. $\lim_{x\to 1} (9 - 6x) = 3$

9. $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x - 3}{4} = \dfrac{1}{4}$

10. $\lim_{x\to 1/2} 8(2x + 5) = 48$

11. $\lim_{x\to -5} \dfrac{x^2 - 25}{x + 5} = -10$

12. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{2x - 6} = -\dfrac{1}{2}$

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{8x^5 + 12x^4}{x^4} = 12$

14. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 2x - 5}{x^2 - 1} = 7$

15. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

16. $\lim_{x\to 0} 8x^3 = 0$

17. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{5x} = 0$

18. $\lim_{x\to (1/2)^+} \sqrt{2x - 1} = 0$

19. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1, \quad f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$

20. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$

21. $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$

22. $\lim_{x\to 2} (2x^2 + 4) = 12$

23. $\lim_{x\to 1} (x^2 - 2x + 4) = 3$

24. $\lim_{x\to 5} (x^2 + 2x) = 35$

25. Para $a > 0$, use la identidad

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

y el hecho de que $\sqrt{x} \ge 0$ para demostrar que $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

26. Demuestre que $\lim_{x\to 2} (1/x) = \frac{1}{2}$. [*Sugerencia*: Considere sólo los números x tales que $1 < x < 3$.]

En los problemas 27-30, demuestre que $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe.

27. $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}; \quad a = 1$

28. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 3 \\ -1, & x > 3 \end{cases}; \quad a = 3$

29. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ 2 - x, & x > 0 \end{cases}; \quad a = 0$

30. $f(x) = \dfrac{1}{x}; \quad a = 0$

En los problemas 31-34, use la definición 2.6.5 para demostrar el resultado de límites dado.

31. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{5x - 1}{2x + 1} = \dfrac{5}{2}$

32. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2x}{3x + 8} = \dfrac{2}{3}$

33. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{10x}{x - 3} = 10$

34. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2 + 3} = 1$

Piense en ello

35. Demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$,

donde $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional.} \end{cases}$

2.7 El problema de la recta tangente

Introducción En un curso de cálculo se estudian muchas cosas diferentes, pero como se mencionó en la introducción de la sección 2.1, el tema "cálculo" por lo regular se divide en dos amplias áreas —relacionadas entre sí— denominadas **cálculo diferencial** y **cálculo integral**. El análisis de cada uno de estos temas suele comenzar con un problema de motivación que implica la gráfica de una función. El estudio del cálculo diferencial se motiva con el siguiente problema.

- Encontrar la recta tangente a la gráfica de una función f,

mientras el estudio del cálculo integral se motiva con el siguiente problema:

- Encontrar el área bajo la gráfica de una función f.

El primer problema se abordará en esta sección, el segundo se analizará en la sección 5.3.

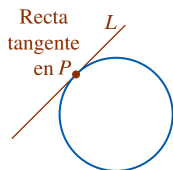


FIGURA 2.7.1 La recta tangente L toca un círculo en el punto P

Recta tangente a una gráfica La palabra *tangente* surge del verbo latín *tangere*, que significa "tocar". Quizá recuerde del estudio de geometría plana que una tangente a un círculo es una recta L que corta, o toca, al círculo exactamente en un punto P. Vea la FIGURA 2.7.1. No resulta tan fácil definir una recta tangente a la gráfica de una función f. La idea de *tocar* traslada del concepto de recta tangente a la gráfica de una función, pero la idea de *cortar la gráfica en un punto* no lo hace.

Suponga que $y = f(x)$ es una función continua. Si, como se muestra en la FIGURA 2.7.2, f posee una recta tangente L a su gráfica en un punto P, entonces ¿cuál es la ecuación de esta recta? Para contestar esta pregunta requerimos las coordenadas de P y la pendiente $m_{\tan}$ de L. Las coordenadas de P no presentan ninguna dificultad, puesto que un punto sobre la gráfica de una función f se obtiene al especificar un valor de x en el dominio de f. Así, las coordenadas del punto de tangencia en $x = a$ son $(a, f(a))$. En consecuencia, el problema de encontrar una recta tangente se vuelve en el problema de encontrar la pendiente $m_{\tan}$ de la recta. Como medio para *aproximar* $m_{\tan}$, es fácil encontrar las pendientes $m_{\sec}$ de *rectas secantes* (del verbo latino *secare*, que significa "cortar") que pasan por el punto P y cualquier otro punto Q sobre la gráfica. Vea la FIGURA 2.7.3.

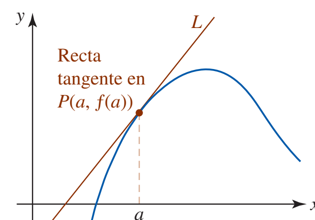


FIGURA 2.7.2 Recta tangente L a una gráfica en el punto P

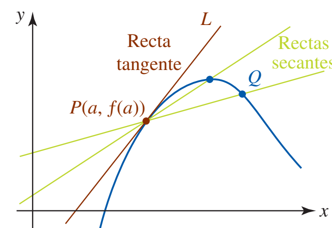


FIGURA 2.7.3 Pendientes de rectas secantes aproximan la pendiente $m_{\tan}$ de L

Pendiente de rectas secantes Si las coordenadas de P son $(a, f(a))$ y las coordenadas de Q son $(a + h, f(a + h))$, entonces como se muestra en la FIGURA 2.7.4, la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q es

$$m_{\sec} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a}$$

o bien,

$$m_{\sec} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \qquad (1)$$

La expresión en el miembro derecho de la igualdad en (1) se denomina **cociente diferencial**. Cuando se hace que h asuma valores que cada vez son más próximos a cero, es decir, cuando $h \to 0$, entonces los puntos $Q(a + h, f(a + h))$ se mueven en la curva cada vez más cerca del punto $P(a, f(a))$. Intuitivamente, es de esperar que las rectas secantes tiendan a la recta tangente L, y que $m_{\sec} \to m_{\tan}$ cuando $h \to 0$. Es decir,

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\sec}$$

en el supuesto de que el límite existe. Esta conclusión se resume en una forma equivalente del límite usando el cociente diferencial (1).

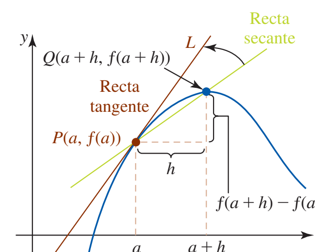


FIGURA 2.7.4 Rectas secantes giran en la recta tangente L cuando $h \to 0$

Definición 2.7.1 Recta tangente con pendiente

Sea $y = f(x)$ continua en el número a. Si el límite

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \qquad (2)$$

existe, entonces la **recta tangente** a la gráfica de f en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente $m_{\tan}$.

Justo como muchos de los problemas analizados antes en este capítulo, observe que el límite en (2) tiene la forma indeterminada $0/0$ cuando $h \to 0$.

Si el límite en (2) existe, el número $m_{\tan}$ también se denomina **pendiente de la curva** $y = f(x)$ en $(a, f(a))$.

El cálculo de (2) es esencialmente un *proceso de cuatro pasos*, tres de los cuales implican sólo precálculo matemático: álgebra y trigonometría. Si los tres primeros pasos se llevan a cabo con precisión, el cuarto, o paso de cálculo, *puede ser* la parte más sencilla del problema.

Directrices para calcular (2)

i) Evaluar $f(a)$ y $f(a + h)$.

ii) Evaluar la diferencia $f(a + h) - f(a)$. Simplificar.

iii) Simplificar el cociente diferencial

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

iv) Calcular el límite del cociente diferencial

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

En muchas instancias, el cálculo de la diferencia $f(a + h) - f(a)$ en el paso *ii*) es el más importante. Resulta imperativo que usted simplifique este paso cuanto sea posible. Un consejo de cómo hacerlo: en *muchos* problemas que implican el cálculo de (2) es posible factorizar h de la diferencia $f(a + h) - f(a)$.

Nota ▶

EJEMPLO 1 El proceso de cuatro pasos

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en $x = 1$.

Solución El procedimiento de cuatro pasos presentado antes se usa con el número 1 en lugar del símbolo a.

i) El paso inicial es el cálculo de $f(1)$ y $f(1 + h)$. Se tiene $f(1) = 1^2 + 2 = 3$, y

$$\begin{aligned} f(1 + h) &= (1 + h)^2 + 2 \\ &= (1 + 2h + h^2) + 2 \\ &= 3 + 2h + h^2. \end{aligned}$$

ii) Luego, por el resultado en el paso precedente, la diferencia es:

$$\begin{aligned} f(1 + h) - f(1) &= 3 + 2h + h^2 - 3 \\ &= 2h + h^2 \\ &= h(2 + h). \quad \leftarrow \text{observe el factor de } h \end{aligned}$$

iii) Ahora, el cálculo del cociente diferencial $\dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h}$ es directo. De nuevo, se usan los resultados del paso precedente:

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{h(2 + h)}{h} = 2 + h. \quad \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

iv) Ahora el último paso es fácil. Se observa que el límite en (2) es

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2. \quad (\text{por el paso precedente})$$

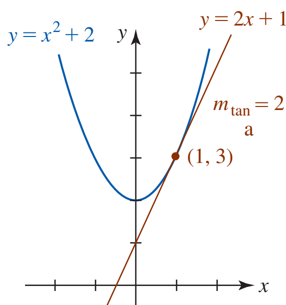


FIGURA 2.7.5 Recta tangente en el ejemplo 2

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en (1, 3) es 2. ■

EJEMPLO 2 Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

Solución Se conocen el punto de tangencia (1, 3) y la pendiente $m_{\tan} = 2$, de modo que por la ecuación punto-pendiente de una recta se encuentra

$$y - 3 = 2(x - 1) \qquad \text{o bien,} \qquad y = 2x + 1.$$

Observe que la última ecuación es consistente con las intersecciones x y y de la recta roja en la FIGURA 2.7.5. ■

EJEMPLO 3 Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2/x$ en $x = 2$.

Solución Se empieza por usar (2) para encontrar $m_{\tan}$ con a identificada como 2. En el segundo de los cuatro pasos es necesario combinar dos fracciones simbólicas por medio de un común denominador.

i) Se tiene $f(2) = 2/2 = 1$ y $f(2 + h) = 2/(2 + h)$.

ii)
$$\begin{aligned} f(2 + h) - f(2) &= \frac{2}{2 + h} - 1 \\ &= \frac{2}{2 + h} - \frac{1}{1} \cdot \frac{2 + h}{2 + h} \quad \leftarrow \text{un común denominador es } 2 + h \\ &= \frac{2 - 2 - h}{2 + h} \\ &= \frac{-h}{2 + h}. \quad \leftarrow \text{aquí está el factor de } h \end{aligned}$$

iii) El último resultado debe dividirse entre h o, más precisamente, entre $\frac{h}{1}$. Se invierte y multiplica por $\frac{1}{h}$:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\dfrac{-h}{2+h}}{\dfrac{h}{1}} = \frac{-h}{2+h}\cdot\frac{1}{h} = \frac{-1}{2+h}. \quad \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

iv) Por (2), $m_{\tan}$ es

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{2+h} = -\frac{1}{2}.$$

Como $f(2) = 1$, el punto de tangencia es $(2, 1)$ y la pendiente de la recta tangente en $(2, 1)$ es $m_{\tan} = -\frac{1}{2}$. Con base en la ecuación punto-pendiente de una recta, la recta tangente es

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-2) \qquad \text{o} \qquad y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Las gráficas de $y = 2/x$ y la recta tangente en $(2, 1)$ se muestran en la FIGURA 2.7.6. ■

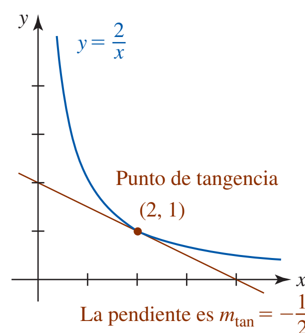


FIGURA 2.7.6 Recta tangente en el ejemplo 3

EJEMPLO 4 Pendiente de una recta tangente

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $x = 5$.

Solución Al sustituir a por 5 en (2) se tiene:

i) $f(5) = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$, y

$$f(5+h) = \sqrt{5+h-1} = \sqrt{4+h}.$$

ii) La diferencia es

$$f(5+h) - f(5) = \sqrt{4+h} - 2.$$

Debido a que se espera encontrar un factor de h en esta diferencia, procedemos a racionalizar el numerador:

$$\begin{aligned} f(5+h) - f(5) &= \frac{\sqrt{4+h}-2}{1}\cdot\frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2} \\ &= \frac{(4+h)-4}{\sqrt{4+h}+2} \\ &= \frac{h}{\sqrt{4+h}+2}. \quad \leftarrow \text{éste es el factor de } h \end{aligned}$$

iii) Así, el cociente diferencial $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}$ es:

$$\begin{aligned} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} &= \frac{\dfrac{h}{\sqrt{4+h}+2}}{h} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}. \end{aligned}$$

iv) El límite en (2) es

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $(5, 2)$ es $\frac{1}{4}$. ■

El resultado obtenido en el siguiente ejemplo no es sorprendente.

EJEMPLO 5 Recta tangente a una recta

Para cualquier función lineal $y = mx + b$, la recta tangente a su gráfica coincide con la recta misma. Así, no de manera inesperada, la pendiente de la recta tangente para cualquier número $x = a$ es

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{m(a+h)+b-(ma+b)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{mh}{h} = \lim_{h\to 0} m = m. \quad ■$$

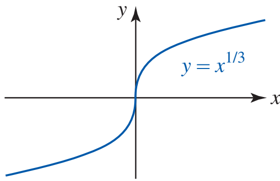


FIGURA 2.7.7 Tangente vertical en el ejemplo 6

Tangentes verticales El límite en (2) puede no existir para una función f en $x = a$ y aun así ser una tangente en el punto $(a, f(a))$. La recta tangente a una gráfica puede ser **vertical**, en cuyo caso su pendiente está indefinida. El concepto de tangente vertical se abordará en la sección 3.1.

EJEMPLO 6 Recta tangente vertical

Aunque por esta ocasión no se abundará en los detalles, puede demostrarse que la gráfica de $f(x) = x^{1/3}$ posee una tangente vertical en el origen. En la FIGURA 2.7.7 se observa que el eje y, es decir, la recta $x = 0$, es tangente a la gráfica en el punto (0, 0). ■

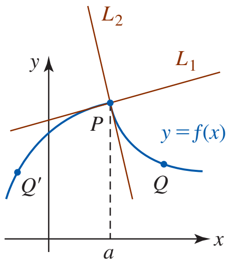


FIGURA 2.7.8 La tangente no existe en $(a, f(a))$

Una tangente que puede no existir La gráfica de una función f que es continua en un número a no tiene por qué poseer una recta tangente en el punto $(a, f(a))$. Una recta tangente no existirá cuando la gráfica de f tenga un pico pronunciado en $(a, f(a))$. En la FIGURA 2.7.8 se indica qué puede ser erróneo cuando la gráfica de la función tiene un "pico". En este caso f es continua en a, pero las rectas secantes que pasan por P y Q tienden a L_2 cuando $Q \to P$, y las rectas secantes que pasan por P y Q' tienden a una recta diferente L_1 cuando $Q' \to P$. En otras palabras, el límite en (2) no existe porque los límites laterales del cociente diferencial son diferentes (cuando $h \to 0^+$ y cuando $h \to 0^-$).

EJEMPLO 7 Gráfica con un pico

Demuestre que la gráfica de $f(x) = |x|$ no tiene tangente en (0, 0).

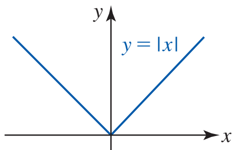


FIGURA 2.7.9 Función en el ejemplo 7

Solución La gráfica de la función valor absoluto en la FIGURA 2.7.9 tiene un pico en el origen. Para demostrar que la gráfica de f no posee una recta tangente en el origen es necesario examinar

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}.$$

Por la definición de valor absoluto

$$|h| = \begin{cases} h, & h > 0 \\ -h, & h < 0 \end{cases}$$

observamos que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h} = 1 \qquad \text{mientras} \qquad \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h} = -1.$$

Puesto que los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales, se concluye que el límite (2) no existe. Aunque la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, la gráfica de f no posee ninguna tangente en (0, 0). ■

Razón de cambio media En contextos diferentes el cociente diferencial en (1) y (2), o pendiente de la recta secante, se escribe en términos de símbolos alternos. El símbolo h en (1) y (2) a menudo se escribe como Δx y la diferencia $f(a + \Delta x) - f(a)$ se denota por Δy, es decir, el cociente diferencial es

$$\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3}$$

Además, si $x_1 = a + \Delta x$, $x_0 = a$, entonces $\Delta x = x_1 - x_0$ y (3) es lo mismo que

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{4}$$

La pendiente $\Delta y/\Delta x$ de la recta secante que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ se denomina **razón de cambio media de la función** f sobre el intervalo $[x_0, x_1]$. Así, el límite $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y/\Delta x$ se denomina **razón de cambio media instantánea de la función** con respecto a x en x_0.

Casi todo mundo tiene una noción intuitiva de la velocidad como la razón a la cual se cubre una distancia en cierto lapso. Cuando, por ejemplo, un autobús recorre 60 mi en 1 h, la

velocidad media del autobús debe haber sido 60 mi/h. Por supuesto, resulta difícil mantener la razón de 60 mi/h durante todo el recorrido porque el autobús disminuye su velocidad al pasar por poblaciones y la aumenta al rebasar a otros vehículos. En otras palabras, la velocidad cambia con el tiempo. Si el programa de la compañía de transportes demanda que el autobús recorra las 60 millas de una población a otra en 1 h, el conductor sabe instintivamente que debe compensar velocidades inferiores a 60 mi/h al conducir a velocidades superiores en otros puntos del recorrido. Saber que la velocidad media es 60 mi/h no permite, sin embargo, contestar la pregunta: ¿cuál es la velocidad del autobús en un instante particular?

Velocidad media En general, la **velocidad media** o **rapidez media** de un objeto en movimiento está definida por

$$v_{\text{pro}} = \frac{\text{cambio en distancia}}{\text{cambio en tiempo}}. \tag{5}$$

Considere un corredor que termina una carrera de 10 km en un tiempo de 1 h 15 min (1.25 h). La velocidad media del corredor, o rapidez media de la carrera, fue

$$v_{\text{pro}} = \frac{10 - 0}{1.25 - 0} = 8 \text{ km/h}.$$

Pero suponga ahora que deseamos determinar la velocidad *exacta* v en el instante en que el corredor ya lleva media hora corriendo. Si se mide que la distancia recorrida en el intervalo de 0 h a 0.5 h es igual a 5 km, entonces

$$v_{\text{pro}} = \frac{5}{0.5} = 10 \text{ km/h}.$$

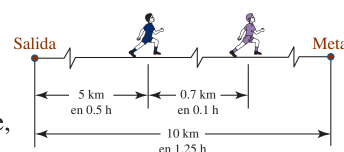


FIGURA 2.7.10 Corredor en una carrera de 10 km

De nuevo, este número no es una medida, o necesariamente incluso un indicador aceptable, de la velocidad instantánea v a que el corredor se ha movido 0.5 h en la carrera. Si determinamos que a 0.6 h el corredor está a 5.7 km de la línea de salida, entonces la velocidad media de 0 h a 0.6 h es $v_{\text{pro}} = 5.7/0.6 = 9.5$ km/h. No obstante, durante el lapso de 0.5 h a 0.6 h,

$$v_{\text{pro}} = \frac{5.7 - 5}{0.6 - 0.5} = 7 \text{ km/h}.$$

El último número es una medida más realista de la razón v. Vea la FIGURA 2.7.10. Al "estirar" el lapso entre 0.5 h y el tiempo que corresponde a la posición medida cerca de 5 km, se espera obtener incluso una mejor aproximación a la velocidad del corredor en el instante 0.5 h.

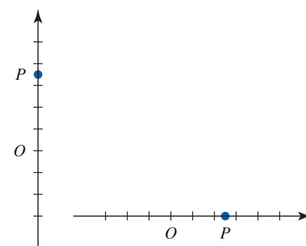


FIGURA 2.7.11 Rectas coordenadas

Movimiento rectilíneo Para generalizar el análisis precedente, suponga que un objeto, o partícula, en el punto P se mueve a lo largo de una recta de coordenadas vertical u horizontal como se muestra en la FIGURA 2.7.11. Además, considere que la partícula se mueve de modo que su posición, o coordenada, sobre la recta está dada por una función $s = s(t)$, donde t representa el tiempo. Los valores de s son distancias dirigidas medidas a partir de O en unidades como centímetros, metros, pies o millas. Cuando P está a la derecha o arriba de O, se considera $s > 0$, mientras $s < 0$ cuando P está a la izquierda o abajo de O. El movimiento en línea recta se denomina **movimiento rectilíneo**.

Si un objeto, como un automóvil de juguete, se mueve sobre una recta de coordenadas horizontal, se trata de un punto P en el instante t_0 y un punto P' en el instante t_1, y entonces las coordenadas de los puntos, que se muestran en la FIGURA 2.7.12, son $s(t_0)$ y $s(t_1)$. Por (4), la **velocidad media** del objeto en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es

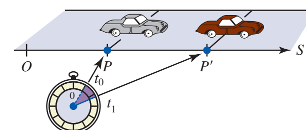


FIGURA 2.7.12 Posición de un automóvil de juguete sobre una recta coordenada en dos instantes

$$v_{\text{pro}} = \frac{\text{cambio en posición}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}. \tag{6}$$

EJEMPLO 8 Velocidad media

La altura s por arriba del suelo a que se suelta una pelota desde la parte superior del Arco de San Luis Missouri está dada por $s(t) = -16t^2 + 630$, donde s se mide en pies y t en segundos. Vea la FIGURA 2.7.13. Encuentre la velocidad media de la pelota que cae entre el instante en que se suelta la pelota y el instante en que golpea el suelo.

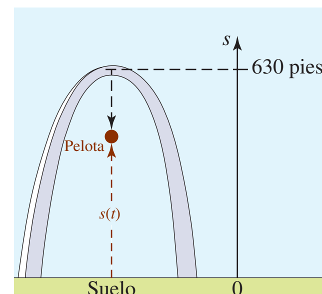


FIGURA 2.7.13 Pelota que cae en el ejemplo 8

Solución El instante en que se suelta la pelota está determinado por la ecuación $s(t) = 630$ o $-16t^2 + 630 = 630$. Así se obtiene $t = 0$ s. Cuando la pelota golpea el suelo, entonces

$s(t) = 0$ o $-16t^2 + 630 = 0$. Con la última ecuación se obtiene $t = \sqrt{315/8} \approx 6.27$ s. Así, por (6) la velocidad media en el intervalo de tiempo $\left[0, \sqrt{315/8}\right]$ es

$$v_{\text{pro}} = \frac{s\left(\sqrt{351/8}\right) - s(0)}{\sqrt{351/8} - 0} = \frac{0 - 630}{\sqrt{351/8} - 0} \approx -100.40 \text{ pies/s.}$$ ■

Si se hace $t_1 = t_0 + \Delta t$, o $\Delta t = t_1 - t_0$, y $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$, entonces (6) es equivalente a

$$v_{\text{pro}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{7}$$

Esto sugiere que el límite de (7) cuando $\Delta t \to 0$ proporciona la **razón de cambio instantánea** de $s(t)$ en $t = t_0$, o **velocidad instantánea**.

Definición 2.7.2 Velocidad instantánea

Sea $s = s(t)$ una función que proporciona la posición de un objeto que se mueve en línea recta. Entonces la **velocidad instantánea** en el instante $t = t_0$ es

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{8}$$

siempre que el límite exista.

Nota: Excepto por notación e interpretación, no hay ninguna diferencia matemática entre (2) y (8). También, a menudo se omite la palabra *instantánea*, de modo que entonces se habla de la *razón de cambio* de una función o la *velocidad* de una partícula en movimiento.

EJEMPLO 9 Otro repaso al ejemplo 8

Encuentre la velocidad instantánea de la pelota que cae en el ejemplo 8 en $t = 3$ s.

Solución Se usa el mismo procedimiento de cuatro pasos que en los ejemplos anteriores con $s = s(t)$ dada en el ejemplo 8.

i) $s(3) = -16(9) + 630 = 486$. Para cualquier $\Delta t \neq 0$,

$$s(3 + \Delta t) = -16(3 + \Delta t)^2 + 630 = -16(\Delta t)^2 - 96\Delta t + 486.$$

ii) $s(3 + \Delta t) - s(3) = [-16(\Delta t)^2 - 96\Delta t + 486] - 486$

$$= -16(\Delta t)^2 - 96\Delta t = \Delta t(-16\Delta t - 96)$$

iii) $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{\Delta t(-16\Delta t - 96)}{\Delta t} = -16\Delta t - 96$

iv) Por (8),

$$v(3) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}(-16\Delta t - 96) = -96 \text{ pies/s.} \tag{9}$$ ■

En el ejemplo 9, el número $s(3) = 486$ pies es la altura de la pelota por arriba del nivel del suelo a 3 s de haber sido soltada. El signo menos en (9) es importante porque la pelota se está moviendo en dirección opuesta a la dirección positiva (hacia arriba), es decir, se mueve hacia abajo.

Ejercicios 2.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-9.

Fundamentos

En los problemas 1-6, trace la gráfica de la función y la recta tangente en el punto dado. Encuentre la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos que corresponden a los valores indicados de x.

1. $f(x) = -x^2 + 9$, $(2, 5)$; $x = 2$, $x = 2.5$
2. $f(x) = x^2 + 4x$, $(0, 0)$; $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$
3. $f(x) = x^3$, $(-2, -8)$; $x = -2$, $x = -1$
4. $f(x) = 1/x$, $(1, 1)$; $x = 0.9$, $x = 1$
5. $f(x) = \text{sen } x$, $(\pi/2, 1)$; $x = \pi/2$, $x = 2\pi/3$
6. $f(x) = \cos x$, $\left(-\pi/3, \frac{1}{2}\right)$; $x = -\pi/2$, $x = -\pi/3$

En los problemas 7-18, use (2) para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de x. Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente.

7. $f(x) = x^2 - 6, x = 3$

8. $f(x) = -3x^2 + 10, x = -1$

9. $f(x) = x^2 - 3x, x = 1$

10. $f(x) = -x^2 + 5x - 3, x = -2$

11. $f(x) = -2x^3 + x, x = 2$

12. $f(x) = 8x^3 - 4, x = \frac{1}{2}$

13. $f(x) = \frac{1}{2x}, x = -1$

14. $f(x) = \frac{4}{x-1}, x = 2$

15. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, x = 0$

16. $f(x) = 4 - \frac{8}{x}, x = -1$

17. $f(x) = \sqrt{x}, x = 4$

18. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x = 1$

En los problemas 19 y 20, use (2) para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de x. Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente. Antes de empezar, revise los límites en (10) y (14) de la sección 2.4, así como las fórmulas de suma (17) y (18) en la sección 1.4.

19. $f(x) = \operatorname{sen} x, x = \pi/6$

20. $f(x) = \cos x, x = \pi/4$

En los problemas 21 y 22, determine si la recta que pasa por los puntos rojos es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto azul.

21.

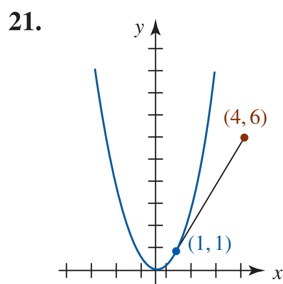


FIGURA 2.7.14 Gráfica para el problema 21

22.

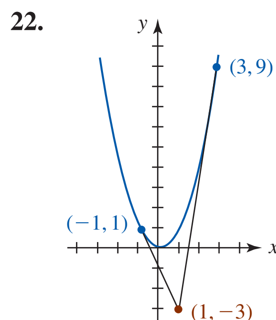


FIGURA 2.7.15 Gráfica para el problema 22

23. En la FIGURA 2.7.16, la recta roja es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto indicado. Encuentre una ecuación de la recta tangente. ¿Cuál es la intersección y de la recta tangente?

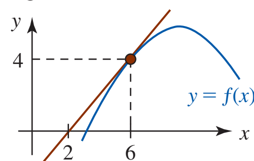


FIGURA 2.7.16 Gráfica para el problema 23

24. En la FIGURA 2.7.17, la recta roja es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto indicado. Encuentre $f(-5)$.

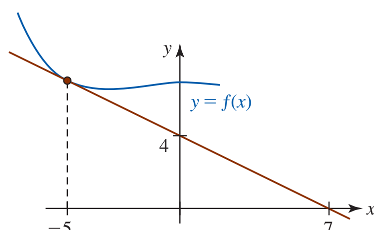


FIGURA 2.7.17 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25-28, use (2) para encontrar una fórmula para $m_{\tan}$ en un punto general $(x, f(x))$ sobre la gráfica de f. Use la fórmula $m_{\tan}$ para determinar los puntos en que la recta tangente a la gráfica es horizontal.

25. $f(x) = -x^2 + 6x + 1$

26. $f(x) = 2x^2 + 24x - 22$

27. $f(x) = x^3 - 3x$

28. $f(x) = -x^3 + x^2$

Aplicaciones

29. Un automóvil recorre 290 mi entre Los Ángeles y Las Vegas en 5 h. ¿Cuál es la velocidad media?

30. Dos señalizaciones sobre una carretera recta están a una distancia de $\frac{1}{2}$ mi entre sí. Una patrulla observa que un automóvil cubre la distancia entre las marcas en 40 s. Suponiendo que la velocidad límite es 60 mi/h, ¿el automóvil será detenido por exceso de velocidad?

31. Un avión se desplaza a 920 mi/h para recorrer los 3 500 km que hay entre Hawaii y San Francisco. ¿En cuántas horas realiza este vuelo?

32. Una carrera de maratón se lleva a cabo en una pista recta de 26 mi. La carrera empieza a mediodía. A la 1:30 p.m., un corredor cruza la marca de 10 mi y a las 3:10 p.m. el corredor pasa por la marca de 20 mi. ¿Cuál es la velocidad media del corredor entre la 1:30 p.m. y las 3:10 p.m.?

En los problemas 33 y 34, la posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal de coordenadas está dada por la función. Use (8) para encontrar la velocidad instantánea de la partícula en el instante indicado.

33. $s(t) = -4t^2 + 10t + 6, t = 3$

34. $s(t) = t^2 + \frac{1}{5t+1}, t = 0$

35. La altura por arriba del suelo a que se suelta una pelota a una altura inicial de 122.5 m está dada por $s(t) = -4.9t^2 + 122.5$, donde s se mide en metros y t en segundos.

a) ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = \frac{1}{2}$?

b) ¿En qué instante la pelota golpea el suelo?

c) ¿Cuál es la velocidad de impacto?

36. Al ignorar la resistencia del aire, si un objeto se deja caer desde una altura inicial h, entonces su altura por arriba del nivel del suelo en el instante $t > 0$ está dada por $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$, donde g es la aceleración de la gravedad.

a) ¿En qué instante el objeto choca contra el suelo?

b) Si $h = 100$ pies, compare los instantes de impacto para la Tierra ($g = 32$ pies/s^2), Marte ($g = 12$ pies/s^2) y la Luna ($g = 5.5$ pies/s^2).

c) Use (8) para encontrar una fórmula para la velocidad instantánea v en el instante general t.

d) Use los instantes encontrados en el inciso *b*) y la fórmula encontrada en el inciso *c*) para calcular las velocidades de impacto correspondientes para la Tierra, Marte y la Luna.

37. La altura de un proyectil disparado desde el nivel del suelo está dada por $s = -16t^2 + 256t$, donde s se mide en pies y t en segundos.

a) Determine la altura del proyectil en $t = 2$, $t = 6$, $t = 9$ y $t = 10$.

b) ¿Cuál es la velocidad media del proyectil entre $t = 2$ y $t = 5$?

c) Demuestre que la velocidad media entre $t = 7$ y $t = 9$ es cero. Interprete físicamente.
d) ¿En qué instante el proyectil choca contra el suelo?
e) Use (8) para encontrar una fórmula para la velocidad instantánea v en el instante general t.
f) Use el resultado del inciso *d*) y la fórmula encontrada en el inciso *e*) para aproximar la velocidad de impacto final.
g) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?

38. Suponga que la gráfica mostrada en la FIGURA 2.7.18 es la de la función de posición $s = s(t)$ de una partícula que se mueve en una línea recta, donde s se mide en metros y t en segundos.

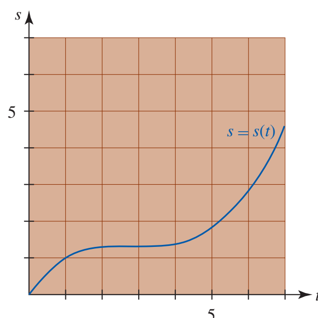


FIGURA 2.7.18 Gráfica para el problema 38

a) Calcule la posición de la partícula en $t = 4$ y $t = 6$.
b) Calcule la velocidad media de la partícula entre $t = 4$ y $t = 6$.
c) Calcule la velocidad inicial de la partícula; es decir, su velocidad en $t = 0$.
d) Calcule el instante en que la velocidad de la partícula es cero.
e) Determine un intervalo en que la velocidad de la partícula es decreciente.
f) Determine un intervalo en que la velocidad de la partícula es creciente.

≡ Piense en ello

39. Sea $y = f(x)$ una función par cuya gráfica tiene una recta tangente m con pendiente $(a, f(a))$. Demuestre que la pendiente de la recta tangente en $(-a, f(a))$ es $-m$. [*Sugerencia*: Explique por qué $f(-a + h) = f(a - h)$.]

40. Sea $y = f(x)$ una función impar cuya gráfica tiene una recta tangente m con pendiente $(a, f(a))$. Demuestre que la pendiente de la recta tangente en $(-a, -f(a))$ es m.

41. Proceda como en el ejemplo 7 y demuestre que no hay recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + |x|$ en $(0, 0)$.

Revisión del capítulo 2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-9.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-22, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$ _____

2. $\lim_{x\to 5} \sqrt{x - 5} = 0$ _____

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x} = 1$ _____

4. $\lim_{x\to\infty} e^{2x - x^2} = \infty$ _____

5. $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ no existe. _____

6. $\lim_{z\to 1} \dfrac{z^3 + 8z - 2}{z^2 + 9z - 10}$ no existe. _____

7. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ no existe. _____

8. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe, entonces $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ no existe. _____

9. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 1$. _____

10. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = 0$. _____

11. Si f es una función polinomial, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. _____

12. Toda función polinomial es continua sobre $(-\infty, \infty)$. _____

13. Para $f(x) = x^5 + 3x - 1$ existe un número c en $[-1, 1]$ tal que $f(c) = 0$. _____

14. Si f y g son continuas en el número 2, entonces f/g es continua en 2. _____

15. La función entero mayor $f(x) = \lfloor x \rfloor$ no es continua sobre el intervalo $[0, 1]$. _____

16. Si $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existen, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. _____

17. Si una función f es discontinua en el número 3, entonces $f(3)$ no está definido. _____

18. Si una función f es discontinua en el número a, entonces $\lim_{x\to a} (x - a)f(x) = 0$. _____

19. Si f es continua y $f(a)f(b) < 0$, existe una raíz de $f(x) = 0$ en el intervalo $[a, b]$. _____

20. La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}, & x \neq 5 \\ 4, & x = 5 \end{cases}$ es discontinua en 5. _____

21. La función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$ tiene una asíntota vertical en $x = -1$. _____

22. Si $y = x - 2$ es una recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en $(3, f(3))$, entonces $f(3) = 1$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-22, llene los espacios en blanco.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 4x) =$ _____

2. $\lim\limits_{x\to 3}(5x^2)^0 =$ _____

3. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{2t - 1}{3 - 10t} =$ _____

4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 1} =$ _____

5. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{1 - \cos^2(t - 1)}{t - 1} =$ _____

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{5x} =$ _____

7. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} =$ _____

8. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x} =$ _____

9. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{1/x} =$ _____

10. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1 + 2e^x}{4 + e^x} =$ _____

11. $\lim\limits_{x\to __} \dfrac{1}{x - 3} = -\infty$

12. $\lim\limits_{x\to __}(5x + 2) = 22$

13. $\lim\limits_{x\to __} x^3 = -\infty$

14. $\lim\limits_{x\to __} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \infty$

15. Si $f(x) = 2(x - 4)/|x - 4|$, $x \neq 4$, y $f(4) = 9$, entonces $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) =$ _____.

16. Suponga que $x^2 - x^4/3 \leq f(x) \leq x^2$ para toda x. Entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x^2 =$ _____.

17. Si f es continua en un número a y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 10$, entonces $f(a) =$ _____.

18. Si f es continua en $x = 5$, $f(5) = 2$, y $\lim\limits_{x\to 5} g(x) = 10$, entonces $\lim\limits_{x\to 5} [g(x) - f(x)] =$ _____.

19. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 1}{4x^2 - 1}, & x \neq \frac{1}{2} \\ 0.5, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$ es _________ (continua/discontinua) en el número $\frac{1}{2}$.

20. La ecuación $e^{-x^2} = x^2 - 1$ tiene precisamente _____ raíces en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

21. La función $f(x) = \dfrac{10}{x} + \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ tiene una discontinuidad removible en $x = 2$. Para quitar la discontinuidad, es necesario definir que $f(2)$ sea _____.

22. Si $\lim\limits_{x\to -5} g(x) = -9$ y $f(x) = x^2$, entonces $\lim\limits_{x\to -5} f(g(x)) =$ _____.

C. Ejercicios

En los problemas 1-4, trace una gráfica de la función f que satisface las condiciones dadas.

1. $f(0) = 1, f(4) = 0, f(6) = 0, \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2, \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0, f(0) = 1, \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \infty, f(5) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1$

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2, f(-1) = 3, f(0) = 0, f(-x) = -f(x)$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0, f(0) = -3, f(1) = 0, f(-x) = f(x)$

En los problemas 5-10, establezca cuáles de las condiciones *a*)-*j*) son aplicables a la gráfica de $y = f(x)$.

***a*)** $f(a)$ no está definida **_b_)** $f(a) = L$ **_c_)** f es continua en $x = a$ **_d_)** f es continua sobre $[0, a]$ **_e_)** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$

***f*)** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ **_g_)** $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$ **_h_)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ **_i_)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ **_j_)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

5.

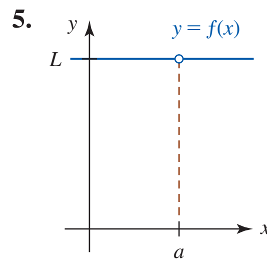


FIGURA 2.R.1 Gráfica para el problema 5

6.

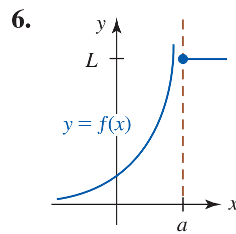


FIGURA 2.R.2 Gráfica para el problema 6

7.

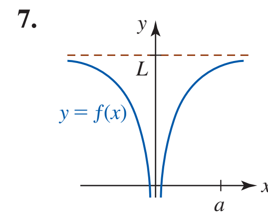


FIGURA 2.R.3 Gráfica para el problema 7

8.

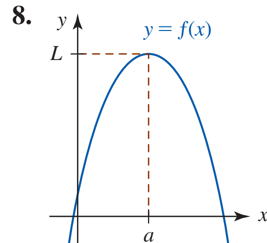


FIGURA 2.R.4 Gráfica para el problema 8

9.

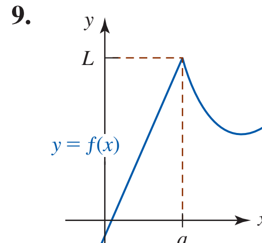


FIGURA 2.R.5 Gráfica para el problema 9

10.

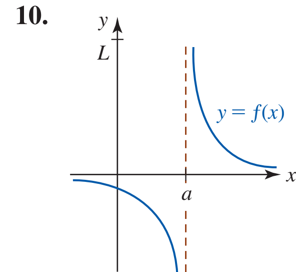


FIGURA 2.R.6 Gráfica para el problema 10

En los problemas 11 y 12, trace la gráfica de la función dada. Determine los valores (números), en caso de haber alguno, en que f es continua.

11. $f(x) = |x| + x$

12. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ 3, & 2 < x < 4 \\ -x + 7, & x > 4 \end{cases}$

En los problemas 13-16, determine intervalos sobre los que la función dada es continua.

13. $f(x) = \dfrac{x + 6}{x^3 - x}$

14. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 4x + 3}$

15. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$

16. $f(x) = \dfrac{\csc x}{\sqrt{x}}$

17. Encuentre un número k de modo que

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \leq 3 \\ 2 - kx, & x > 3 \end{cases}$$

sea continua en el número 3.

18. Encuentre números a y b tales que

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leq 1 \\ ax + b, & 1 < x \leq 3 \\ 3x - 8, & x > 3 \end{cases}$$

sea continua en todas partes.

En los problemas 19-22, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de x. Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente.

19. $f(x) = -3x^2 + 16x + 12, \quad x = 2$

20. $f(x) = x^3 - x^2, \quad x = -1$

21. $f(x) = \dfrac{-1}{2x^2}, \quad x = \dfrac{1}{2}$

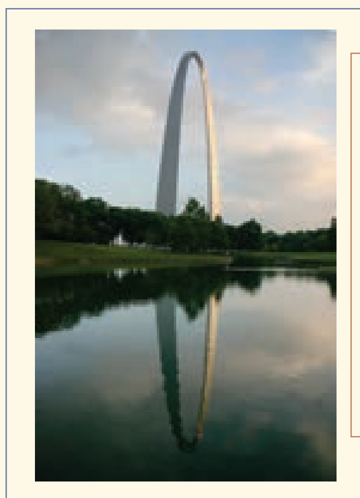
22. $f(x) = x + 4\sqrt{x}, \quad x = 4$

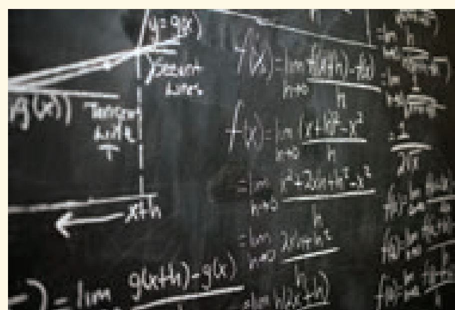
23. Encuentre una ecuación de la recta que es perpendicular a la recta tangente en el punto $(1, 2)$ sobre la gráfica de $f(x) = -4x^2 + 6x$.

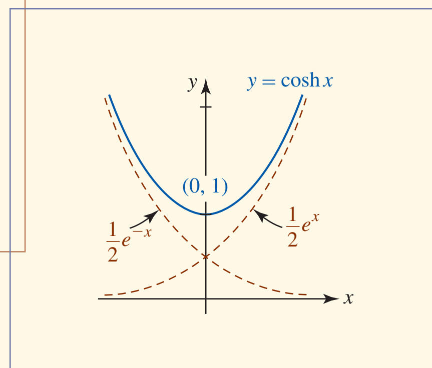
24. Suponga que $f(x) = 2x + 5$ y $\varepsilon = 0.01$. Encuentre un $\delta > 0$ que garantice que $|f(x) - 7| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - 1| < \delta$. Al encontrar δ, ¿qué límite se ha demostrado?

Capítulo 3

La derivada







En este capítulo La palabra *calculus* es una forma diminutiva de la palabra *calx*, que significa “piedra”. En civilizaciones antiguas, piedras pequeñas o guijarros se usaban a menudo como medio de reconocimiento. En consecuencia, la palabra *calculus* se refiere a cualquier método sistemático de computación. No obstante, durante los últimos siglos la connotación de la palabra *cálculo* ha evolucionado para significar esa rama de las matemáticas relacionada con el cálculo y la aplicación de entidades conocidas como derivadas e integrales. Así, el tema conocido como **cálculo** se ha dividido en dos áreas amplias pero relacionadas: el **cálculo diferencial** y el **cálculo integral**.

En este capítulo se inicia el estudio del cálculo diferencial.

3.1 La derivada

Introducción En la última sección del capítulo 2 vimos que la recta tangente a una gráfica de una función $y = f(x)$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente dada por

Recuerde que m_{tan} también se denomina pendiente de la curva en $(a, f(a))$.

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

siempre que el límite exista. Para muchas funciones suele ser posible obtener una fórmula general que proporcione el valor de la pendiente de la recta tangente. Esto se lleva a cabo al calcular

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

para *cualquier* x (para la que existe el límite). Luego sustituimos un valor de x *después* que se ha encontrado el límite.

Una definición El límite del cociente de la diferencia en (1) define una función: una función que se *deriva* de la función original $y = f(x)$. Esta nueva función se denomina **función derivada**, o simplemente la **derivada**, de f y se denota por f'.

Definición 3.1.1 Derivada

La **derivada** de una función $y = f(x)$ en x está dada por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

siempre que el límite exista.

A continuación reconsideraremos los ejemplos 1 y 2 de la sección 2.7.

EJEMPLO 1 Una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = x^2 + 2$.

Solución Así como en el cálculo de m_{tan} en la sección 2.7, el proceso de encontrar la derivada $f'(x)$ consta de cuatro pasos:

i) $f(x + h) = (x + h)^2 + 2 = x^2 + 2xh + h^2 + 2$

ii) $f(x + h) - f(x) = [x^2 + 2xh + h^2 + 2] - x^2 - 2 = h(2x + h)$

iii) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \dfrac{h(2x + h)}{h} = 2x + h$ ← las h se cancelan

iv) $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} [2x + h] = 2x.$

Por el paso *iv)* vemos que la derivada de $f(x) = x^2 + 2$ es $f'(x) = 2x$. ■

Observe que el resultado $m_{tan} = 2$ en el ejemplo 1 de la sección 2.7 se obtiene al evaluar la derivada $f'(x) = 2x$ en $x = 1$, es decir, $f'(1) = 2$.

EJEMPLO 2 Valor de la derivada

Para $f(x) = x^2 + 2$, encuentre $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$ y $f'(1)$. Interprete.

Solución Por el ejemplo 1 sabemos que la derivada es $f'(x) = 2x$. Por tanto,

en $x = -2$, $\begin{cases} f(-2) = 6 \\ f'(-2) = -4 \end{cases}$ ← el punto de tangencia es $(-2, 6)$
← la pendiente de la recta tangente en $(-2, 6)$ es $m = -4$

en $x = 0$, $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$ ← el punto de tangencia es $(0, 2)$
← la pendiente de la recta tangente en $(0, 2)$ es $m = 0$

$$\text{en } x = \tfrac{1}{2}, \quad \begin{cases} f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{9}{4} \\ f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 \end{cases}$$
← el punto de tangencia es $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$
← la pendiente de la recta tangente en $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ es $m = 1$

$$\text{en } x = 1, \quad \begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 2. \end{cases}$$
← el punto de tangencia es (1, 3)
← la pendiente de la recta tangente en (1, 3) es $m = 2$

Recuerde que la pendiente de una recta horizontal es 0. Así, el hecho de que $f'(0) = 0$ significa que la recta tangente es horizontal en (0, 2). ■

Por cierto, si regresa al proceso de cuatro pasos en el ejemplo 1, encontrará que la derivada de $g(x) = x^2$ también es $g'(x) = 2x = f'(x)$. Esto tiene sentido intuitivo: puesto que la gráfica de $f(x) = x^2 + 2$ es una traslación vertical rígida o desplazamiento de la gráfica de $g(x) = x^2$ para un valor dado de x, los puntos de tangencia cambian, pero no así la pendiente de la recta tangente en los puntos. Por ejemplo, en $x = 3$, $g'(3) = 6 = f'(3)$ pero los puntos de tangencia son $(3, g(3)) = (3, 9)$ y $(3, f(3)) = (3, 11)$.

EJEMPLO 3 Una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = x^3$.

Solución Para calcular $f(x + h)$, usamos el teorema del binomio.

i) $f(x + h) = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

ii) $f(x + h) - f(x) = [x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3] - x^3 = h(3x^2 + 3xh + h^2)$

iii) $$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{h[3x^2 + 3xh + h^2]}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

iv) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} [3x^2 + 3xh + h^2] = 3x^2.$$

Recuerde de sus estudios de álgebra que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Luego, a se sustituye por x y b por h.

La derivada de $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$. ■

EJEMPLO 4 Recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ en $x = \frac{1}{2}$.

Solución Por el ejemplo 3 tenemos dos funciones $f(x) = x^3$ y $f'(x) = 3x^2$. Como vimos en el ejemplo 2, cuando estas funciones se evalúan en el mismo número $x = \frac{1}{2}$ se obtiene diferente información:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$ ← el punto de tangencia es $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$ ← la pendiente de la recta tangente en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ es $\frac{3}{4}$

Así, por la ecuación punto-pendiente de una recta,* una ecuación de la recta tangente está dada por

$$y - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{o bien,} \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

La gráfica de la función y la recta tangente se muestran en la FIGURA 3.1.1. ■

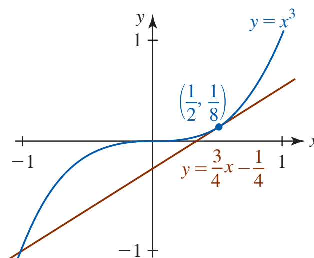


FIGURA 3.1.1 Recta tangente en el ejemplo 4

EJEMPLO 5 Una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = 1/x$.

Solución En este caso usted debe poder demostrar que la diferencia es

$$f(x + h) - f(x) = \frac{1}{x + h} - \frac{1}{x} = \frac{-h}{(x + h)x}.$$ ← las fracciones se suman usando un común denominador

En consecuencia,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(x + h)x}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x + h)x} = \frac{-1}{x^2}.$$

La derivada de $f(x) = 1/x$ es $f'(x) = -1/x^2$. ■

*N. del RT. También se le conoce como forma punto-pendiente.

Notación A continuación se presenta una lista de la **notación** común usada en la literatura matemática para denotar la derivada de una función:

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad Dy, \quad D_x y.$$

Para una función como $f(x) = x^2$, escribimos $f'(x) = 2x$; si la misma función se escribe $y = x^2$, entonces utilizamos $dy/dx = 2x$, $y' = 2x$ o $D_x y = 2x$. En este texto usaremos las tres primeras formas. Por supuesto, en varias aplicaciones se usan otros símbolos. Por tanto, si $z = t^2$, entonces

$$\frac{dz}{dt} = 2t \qquad \text{o bien,} \qquad z' = 2t.$$

La notación dy/dx tiene su origen en la forma derivada de (3) de la sección 2.7. Al sustituir h por Δx y denotar la diferencia $f(x + h) - f(x)$ por Δy en (2), a menudo la derivada se define como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3}$$

EJEMPLO 6 Una derivada donde se usa (3)

Use (3) para encontrar la derivada de $y = \sqrt{x}$.

Solución En el procedimiento de cuatro pasos, la manipulación algebraica importante tiene lugar en el tercer paso:

i) $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$

ii) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$

iii)
$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \quad \leftarrow \text{racionalización del numerador} \\ &= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

iv)
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La derivada de $y = \sqrt{x}$ es $dy/dx = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$. ■

Valor de una derivada El **valor** de la derivada en un número a se denota por los símbolos

$$f'(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \quad y'(a), \quad \left.D_x y\right|_{x=a}.$$

EJEMPLO 7 Una derivada

Por el ejemplo 6, el valor de la derivada de $y = \sqrt{x}$ en, por ejemplo, $x = 9$ se escribe

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=9} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=9} = \frac{1}{6}.$$

En forma alterna, para evitar la torpe barra vertical, simplemente escribimos $y'(9) = \frac{1}{6}$. ■

Operadores diferenciación El proceso de encontrar o calcular una derivada se denomina **diferenciación**. Así, la diferenciación es una operación que se lleva a cabo sobre una función

$y = f(x)$. La operación de diferenciación de una función con respecto a la variable x se representa con los símbolos d/dx y D_x. Estos símbolos se denominan **operadores diferenciación**. Por ejemplo, los resultados en los ejemplos 1, 3 y 6 pueden expresarse, a su vez, como

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2) = 2x, \quad \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

El símbolo

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{entonces significa} \quad \frac{d}{dx}y.$$

Diferenciabilidad Si el límite en (2) existe para un número x dado en el dominio de f, se dice que la función es **diferenciable** en x. Si una función f es diferenciable en todo número x en los intervalos abiertos (a, b), $(-\infty, b)$ y (a, ∞), entonces f es **diferenciable sobre el intervalo abierto**. Si f es diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$, entonces se dice que f es **diferenciable en todas partes**. Se dice que una función f es **diferenciable sobre un intervalo cerrado** $[a, b]$ cuando f es diferenciable sobre el intervalo abierto (a, b), y

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$
$$f'_-(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b + h) - f(b)}{h} \qquad (4)$$

ambos existen. Los límites en (4) se denominan **derivadas por la derecha** y **por la izquierda**, respectivamente. Una función es diferenciable sobre $[a, \infty)$ cuando es diferenciable sobre (a, ∞) y tiene derivada por la derecha en a. Una definición semejante en términos de una derivada por la izquierda se cumple para diferenciabilidad sobre $(-\infty, b]$. Además, puede demostrarse que:

- Una función es diferenciable en un número c en un intervalo (a, b) si y sólo si $f'_+(c) = f'_-(c)$. (5)

Tangentes horizontales Si $y = f(x)$ es continua en un número a y $f'(a) = 0$, entonces la recta tangente en $(a, f(a))$ es **horizontal**. En los ejemplos 1 y 2 vimos que el valor de la derivada $f'(x) = 2x$ de la función $f(x) = x^2 + 2$ en $x = 0$ es $f'(0) = 0$. Por tanto, la recta tangente a la gráfica es horizontal en $(0, f(0))$ o $(0, 0)$. Se deja como ejercicio (vea el problema 7 en los ejercicios 3.1) comprobar por la definición 3.1.1 que la derivada de la función continua $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ es $f'(x) = -2x + 4$. Observe en este último caso que $f'(x) = 0$ cuando $-2x + 4 = 0$ o $x = 2$. Hay una tangente horizontal en el punto $(2, f(2)) = (2, 5)$.

Dónde *f* no es diferenciable Una función no tiene derivada en $x = a$ si

i) la función es discontinua en $x = a$, o
ii) la gráfica de f tiene un pico en $(a, f(a))$.

Además, puesto que la derivada proporciona la pendiente, f no es diferenciable

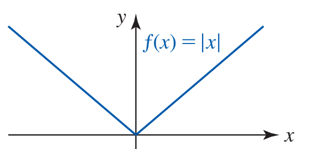
iii) en un punto $(a, f(a))$ en el cual la recta tangente es vertical.

El dominio de la derivada f', definido por (2), es el conjunto de números x para los cuales el límite existe. Por tanto, el dominio de f' necesariamente es un subconjunto del dominio de f.

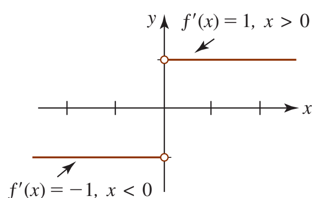
EJEMPLO 8 Diferenciabilidad

a) La función $f(x) = x^2 + 2$ es diferenciable para todos los números reales x; es decir, el dominio de $f'(x) = 2x$ es $(-\infty, \infty)$.

b) Debido a que $f(x) = 1/x$ es discontinua en $x = 0$, f no es diferenciable en $x = 0$ y en consecuencia no es diferenciable sobre cualquier intervalo que contenga 0. ■



a) Función valor absoluto de *f*



b) Gráfica de la derivada f'

FIGURA 3.1.2 Gráficas de f y f' en el ejemplo 9

EJEMPLO 9 Otro repaso al ejemplo 7 de la sección 2.7

En el ejemplo 7 de la sección 2.7 vimos que la gráfica de $f(x) = |x|$ no tiene tangente en el origen (0, 0). Así, $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$. Pero $f(x) = |x|$ es diferenciable sobre los intervalos abiertos $(0, \infty)$ y $(-\infty, 0)$. En el ejemplo 5 de la sección 2.7 demostramos que la derivada de una función lineal $f(x) = mx + b$ es $f'(x) = m$. Por tanto, para $x > 0$ tenemos $f(x) = |x| = x$ y así $f'(x) = 1$. También, para $x < 0, f(x) = |x| = -x$ y así $f'(x) = -1$. Puesto que la derivada de f es una función definida por partes,

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

que podemos graficar como cualquier función. En la FIGURA 3.1.2*b*) observamos que f' es discontinua en $x = 0$. ■

Con símbolos diferentes, lo que demostramos en el ejemplo 9 es que $f'_-(0) = -1$ y $f'_+(0) = 1$. Puesto que $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ por (5) se concluye que f no es diferenciable en 0.

Tangentes verticales Sea $y = f(x)$ continua en un número a. Si $\lim_{x\to a} |f'(x)| = \infty$, entonces se dice que la gráfica de f tiene una **tangente vertical** en $(a, f(a))$. Las gráficas de muchas funciones con exponentes radicales tienen tangentes verticales.

En el ejemplo 6 de la sección 2.7 se mencionó que la gráfica de $y = x^{1/3}$ tiene una línea tangente vertical en (0, 0). Verificamos esta afirmación en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10 Tangente vertical

Se deja como ejercicio demostrar que la derivada de $f(x) = x^{1/3}$ está dada por

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

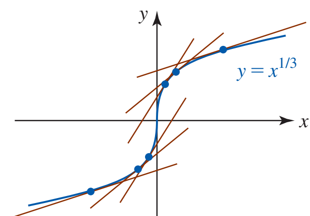


FIGURA 3.1.3 Rectas tangentes a la gráfica de la función en el ejemplo 10

(Vea el problema 55 en los ejercicios 3.1.) Aunque f es continua en 0, resulta evidente que f' no está definida en ese número. En otras palabras, f no es diferenciable en $x = 0$. Además, debido a que

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \infty$$

tenemos $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to 0$. Esto es suficiente para afirmar que en $(0, f(0))$ o (0, 0) hay una recta tangente y que es vertical. En la FIGURA 3.1.3 se muestra que las rectas tangentes a la gráfica a cualquier lado del origen se vuelven cada vez más pronunciadas cuando $x \to 0$. ■

La gráfica de una función f también puede tener una tangente vertical en un punto $(a, f(a))$ si f es diferenciable sólo por un lado de a, es continua por la izquierda (derecha) en a, y se cumple $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to a^-$ o $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to a^+$.

EJEMPLO 11 Tangente vertical por un lado

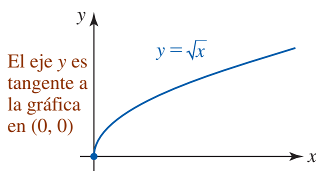


FIGURA 3.1.4 Tangente vertical en el ejemplo 11

La función $f(x) = \sqrt{x}$ no es diferenciable sobre el intervalo $[0, \infty)$ porque por la derivada $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ observamos que $f'_+(0)$ no existe. La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua sobre $[0, \infty)$ pero diferenciable sobre $(0, \infty)$. Además, debido a que f es continua en 0 y $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty$, en el origen (0, 0) hay una tangente vertical. En la FIGURA 3.1.4 vemos que la tangente vertical es el eje y. ■

Importante ▶ Las funciones $f(x) = |x|$ y $f(x) = x^{1/3}$ son continuas en todas partes. En particular, ambas son continuas en 0 pero ninguna es diferenciable en ese número. En otras palabras, la continuidad en un número a no es suficiente para garantizar que una función sea diferenciable en a. No obstante, si f es diferenciable en a, entonces f debe ser continua en ese número. Este hecho se resume en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1 Diferenciabilidad implica continuidad

Si f es diferenciable en un número a, entonces f es continua en a.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la continuidad de f en un número a, es suficiente demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ o bien, de manera equivalente, que $\lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] = 0$. La hipótesis es que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe. Si se hace $x = a + h$, entonces cuando $h \to 0$ tenemos $x \to a$. Por tanto, el límite anterior equivale a

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Luego, puede escribirse

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) && \leftarrow \text{multiplicación por } \frac{x-a}{x-a} = 1 \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a} (x - a) && \leftarrow \text{ambos límites existen} \\
&= f'(a) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

■

Posdata: Un poco de historia Se sabe que **Isaac Newton** (1642-1727), matemático y físico inglés, fue el primero en establecer muchos de los principios básicos del cálculo en manuscritos no publicados sobre el *método de fluxiones*, fechado en 1665. La palabra *fluxión* se originó por el concepto de cantidades que "fluyen"; es decir, cantidades que cambian a cierta razón. Newton usó la notación de punto $\dot{y}$ para representar una fluxión, o como se conoce ahora: la derivada de una función. El símbolo $\dot{y}$ nunca fue popular entre los matemáticos, de modo que en la actualidad lo usan esencialmente los físicos. Debido a razones tipográficas, la así denominada "notación flyspeck" ha sido sustituida por la notación prima. Newton alcanzó fama imperecedera con la publicación de su ley de la gravitación universal en su tratado monumental *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* en 1687. Newton también fue el primero en demostrar, usando el cálculo y su ley de gravitación, las tres leyes empíricas de Johannes Kepler del movimiento planetario, y el primero en demostrar que la luz blanca está compuesta de todos los colores. Newton fue electo al Parlamento, nombrado guardián de la Real Casa de Moneda y nombrado caballero en 1705. Sir Isaac Newton dijo acerca de estos logros: "Si he visto más lejos que otros, es porque me apoyé en los hombros de gigantes."



Newton

El matemático, abogado y filósofo alemán **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) publicó una versión corta de su cálculo en un artículo en un periódico alemán en 1684. La notación dy/dx para la derivada de una función se debe a Leibniz. De hecho, fue Leibniz quien introdujo la palabra *función* en la literatura matemática. Pero, puesto que es bien sabido que los manuscritos de Newton sobre el *método de fluxiones* datan de 1665, Leibniz fue acusado de apropiarse de las ideas de Newton a partir de esta obra no publicada. Alimentado por orgullos nacionalistas, durante muchos años hubo una controversia sobre quién de los dos "inventó" el cálculo. Hoy los historiadores coinciden en que ambos llegaron a muchas de las premisas más importantes del cálculo de manera independiente. Leibniz y Newton se consideran "coinventores" del tema.



Leibniz

$\frac{d}{dx}$ NOTAS DESDE EL AULA

i) En el análisis precedente vimos que la derivada de una función es en sí misma una función que proporciona la pendiente de una recta tangente. La derivada *no es*, sin embargo, una ecuación de una recta tangente. También, afirmar que $y - y_0 = f'(x) \cdot (x - x_0)$ es una ecuación de la tangente en (x_0, y_0) es incorrecto. Recuerde que $f'(x)$ debe evaluarse en x_0 *antes* de usarla en la forma punto-pendiente. Si f es diferenciable en x_0, entonces una ecuación de la recta tangente en (x_0, y_0) es $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

ii) Aunque en esta sección se han recalcado las pendientes, no olvide el análisis sobre razones de cambio promedio y razones de cambio instantáneas en la sección 2.7. La derivada $f'(x)$ también es la **razón de cambio instantánea** de la función $y = f(x)$ con respecto a la variable x. En las secciones que siguen se dirá más sobre estas razones.

iii) Los matemáticos de los siglos XVII al XIX creían que una función continua solía tener una derivada. (En esta sección hemos observado excepciones.) En 1872, el matemático alemán Karl Weierstrass destruyó de manera contundente este principio al publicar un ejemplo de función que es *continua en todas partes pero no es diferenciable en ninguna*.

Ejercicios 3.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-10.

Fundamentos

En los problemas 1-20, use (2) de la definición 3.1.1 para encontrar la derivada de la función dada.

1. $f(x) = 10$

2. $f(x) = x - 1$

3. $f(x) = -3x + 5$

4. $f(x) = \pi x$

5. $f(x) = 3x^2$

6. $f(x) = -x^2 + 1$

7. $f(x) = -x^2 + 4x + 1$

8. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x - 7$

9. $y = (x + 1)^2$

10. $f(x) = (2x - 5)^2$

11. $f(x) = x^3 + x$

12. $f(x) = 2x^3 + x^2$

13. $y = -x^3 + 15x^2 - x$

14. $y = 3x^4$

15. $y = \dfrac{2}{x + 1}$

16. $y = \dfrac{x}{x - 1}$

17. $y = \dfrac{2x + 3}{x + 4}$

18. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

19. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

20. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

En los problemas 21-24, use (2) de la definición 3.1.1 para encontrar la derivada de la función dada. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor indicado de x.

21. $f(x) = 4x^2 + 7x;\quad x = -1$

22. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 4;\quad x = 0$

23. $y = x - \dfrac{1}{x};\quad x = 1$

24. $y = 2x + 1 + \dfrac{6}{x};\quad x = 2$

En los problemas 25-28, use (2) de la definición 3.1.1 para encontrar la derivada de la función dada. Encuentre uno o varios puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

25. $f(x) = x^2 + 8x + 10$

26. $f(x) = x(x - 5)$

27. $f(x) = x^3 - 3x$

28. $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

En los problemas 29-32, use (2) de la definición 3.1.1 para encontrar la derivada de la función dada. Encuentre uno o varios puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es paralela a la recta dada.

29. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1;\quad 3x - y = 1$

30. $f(x) = x^2 - x;\quad -2x + y = 0$

31. $f(x) = -x^3 + 4;\quad 12x + y = 4$

32. $f(x) = 6\sqrt{x} + 2;\quad -x + y = 2$

En los problemas 33 y 34, demuestre que la función dada no es diferenciable en el valor indicado de x.

33. $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \le 2 \\ 2x - 4, & x > 2 \end{cases};\quad x = 2$

34. $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0 \\ -4x, & x \ge 0 \end{cases};\quad x = 0$

En la demostración del teorema 3.1.1 vimos que un planteamiento alterno de la derivada de una función f en a está dado por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{6}$$

siempre que el límite exista. En los problemas 35-40, use (6) para calcular $f'(a)$.

35. $f(x) = 10x^2 - 3$

36. $f(x) = x^2 - 3x - 1$

37. $f(x) = x^3 - 4x^2$

38. $f(x) = x^4$

39. $f(x) = \dfrac{4}{3 - x}$

40. $f(x) = \sqrt{x}$

41. Encuentre una ecuación de la recta tangente mostrada en rojo en la FIGURA 3.1.5. ¿Cuáles son los valores $f(-3)$ y $f'(-3)$?

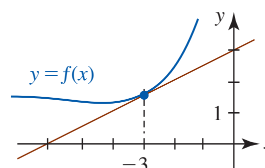


FIGURA 3.1.5 Gráfica del problema 41

42. Encuentre una ecuación de la recta tangente mostrada en rojo en la FIGURA 3.1.6. ¿Cuál es el valor de $f'(3)$? ¿Cuál es la intersección con el eje y de la recta tangente?

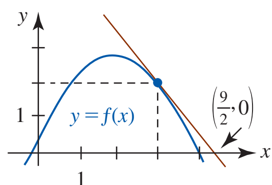


FIGURA 3.1.6 Gráfica del problema 42

En los problemas 43-48, trace la gráfica de f' a partir de la gráfica de f.

43.

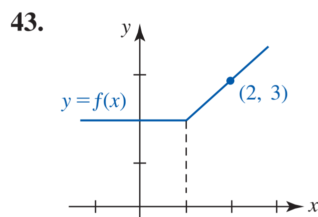


FIGURA 3.1.7 Gráfica del problema 43

44.

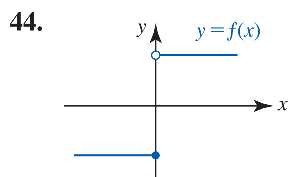


FIGURA 3.1.8 Gráfica del problema 44

45.

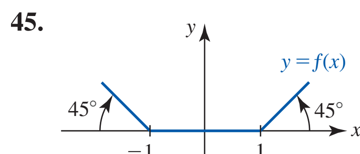


FIGURA 3.1.9 Gráfica del problema 45

46.

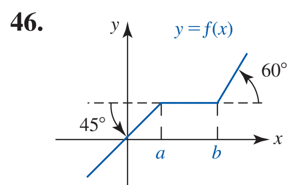


FIGURA 3.1.10 Gráfica del problema 46

47.

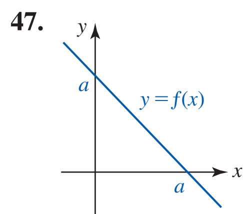


FIGURA 3.1.11 Gráfica del problema 47

48.

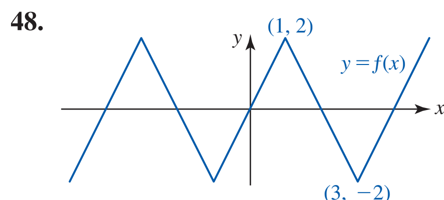
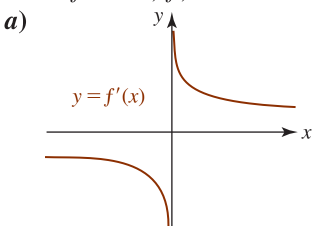


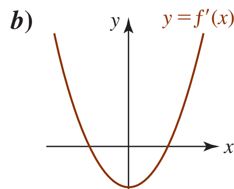
FIGURA 3.1.12 Gráfica del problema 48

En los problemas 49-54, relacione la gráfica de f con una gráfica de f' de *a*)-*f*).

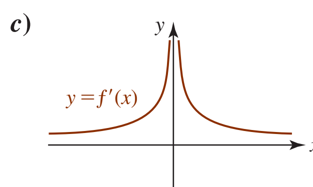
***a*)**



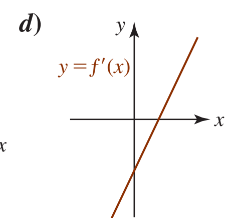
***b*)**



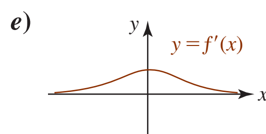
***c*)**



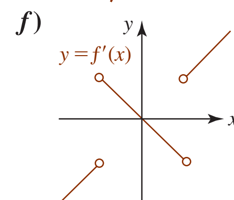
***d*)**



***e*)**



***f*)**



49.

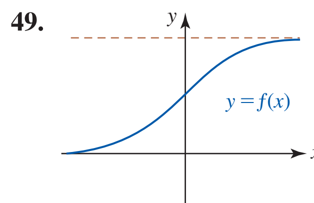


FIGURA 3.1.13 Gráfica del problema 49

50.

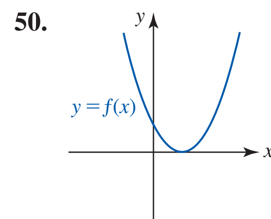


FIGURA 3.1.14 Gráfica del problema 50

51.

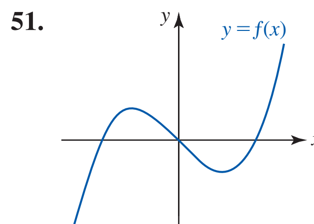


FIGURA 3.1.15 Gráfica del problema 51

52.

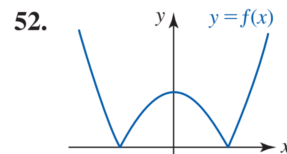


FIGURA 3.1.16 Gráfica del problema 52

53.

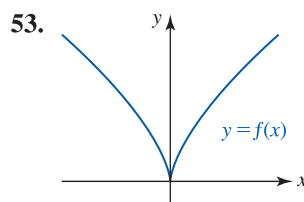


FIGURA 3.1.17 Gráfica del problema 53

54.

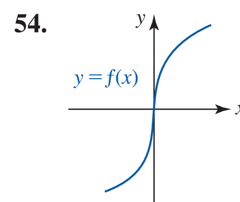


FIGURA 3.1.18 Gráfica del problema 54

≡ Piense en ello

55. Use la definición alterna de la derivada (6) para encontrar la derivada de $f(x) = x^{1/3}$.

[*Sugerencia*: Observe que $x - a = (x^{1/3})^3 - (a^{1/3})^3$.]

56. En los ejemplos 10 y 11 vimos, respectivamente, que las funciones $f(x) = x^{1/3}$ y $f(x) = \sqrt{x}$ tenían tangentes verticales en el origen (0, 0). Conjeture dónde las gráficas de $y = (x - 4)^{1/3}$ y $y = \sqrt{x + 2}$ pueden tener tangentes verticales.

57. Suponga que f es diferenciable en todas partes y que tiene tres propiedades:

i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$, *ii*) $f(0) = 1$,
iii) $f'(0) = 1$.

Use (2) de la definición 3.1.1 para demostrar que $f'(x) = f(x)$ para toda x.

58. ***a***) Suponga que f es una función par diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$. Use razonamiento geométrico para explicar por qué $f'(-x) = -f'(x)$; es decir, que f' es una función impar.

b) Suponga que f es una función impar diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$. Use razonamiento geométrico para explicar por qué $f'(-x) = f'(x)$; es decir, que f' es una función par.

59. Suponga que f es una función diferenciable sobre $[a, b]$ tal que $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$. Experimente con gráficas para decidir si la siguiente afirmación es falsa o verdadera: hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

60. Trace gráficas de varias funciones f que tengan la propiedad $f'(x) > 0$ para toda x en $[a, b]$. ¿Qué tienen en común éstas?

≡ Problemas con calculadora/SAC

61. Considere la función $f(x) = x^n + |x|$, donde n es un entero positivo. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de f para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. Luego use (2) para demostrar que f no es diferenciable en $x = 0$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. ¿Puede demostrar esto para *cualquier* entero positivo n? ¿Cuáles son $f'_-(0)$ y $f'_+(0)$ para $n > 1$?

3.2 Reglas de potencias y sumas

Introducción La definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

tiene la desventaja evidente de ser más bien molesta y cansada de aplicar. Para encontrar la derivada de la función polinomial $f(x) = 6x^{100} + 4x^{35}$ usando la definición anterior *sólo* es necesario hacer malabares con 137 términos en los desarrollos del binomio de $(x + h)^{100}$ y $(x + h)^{35}$. Hay formas más eficaces para calcular derivadas de una función que usar la definición cada vez. En esta sección, y en las secciones que siguen, veremos que hay algunos atajos o **reglas** generales a partir de las cuales es posible obtener las derivadas de funciones como $f(x) = 6x^{100} + 4x^{35}$ literalmente, con un truco de pluma.

En la última sección vimos que las derivadas de las funciones potencia

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

eran, a su vez,

Vea los ejemplos 3, 5 y 6 en la sección 3.1.

$$f'(x) = 2x, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

Si los miembros derechos de estas cuatro derivadas se escriben

$$2 \cdot x^{2-1}, \quad 3 \cdot x^{3-1}, \quad (-1) \cdot x^{-1-1}, \quad \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1},$$

observamos que cada coeficiente (indicado en rojo) corresponde al exponente original de x en f y que el nuevo exponente de x en f' puede obtenerse a partir del exponente anterior (también indicado en rojo) al restarle 1. En otras palabras, el patrón para la derivada de la función potencia general $f(x) = x^n$ es

el exponente se escribe como múltiplo

$$(\;)x^{(\;)-1}. \tag{2}$$

el exponente disminuye por uno

Derivada de la función potencia En efecto, el patrón ilustrado en (2) se cumple para cualquier exponente que sea un número real n, y este hecho se planteará como un teorema formal, pero en este momento del curso no se cuenta con las herramientas matemáticas necesarias para demostrar su validez completa. Sin embargo, es posible demostrar un caso especial de esta regla de potencias; las partes restantes de la demostración se proporcionarán en las secciones idóneas más adelante.

Teorema 3.2.1 Regla de potencias

Para cualquier número real n,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN La demostración sólo se presenta para el caso donde n es un entero positivo. A fin de calcular (1) para $f(x) = x^n$ usamos el método de cuatro pasos:

$$i)\quad f(x+h) = (x+h)^n = \overbrace{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}^{\text{Teorema general del binomio}}$$

Vea las *Páginas de recursos* para un repaso del teorema del binomio.

$$ii)\quad f(x+h) - f(x) = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n$$

$$= nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n$$

$$= h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]$$

$$iii)\quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h}$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

$$iv)\quad f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}}_{\text{estos términos } \to 0 \text{ cuando } h \to 0}\right] = nx^{n-1}. \quad ■$$

EJEMPLO 1 Regla de potencias

Diferencie

a) $y = x^7$ ***b)*** $y = x$ ***c)*** $y = x^{-2/3}$ ***d)*** $y = x^{\sqrt{2}}$.

Solución Por la regla de potencias (3),

a) con $n = 7$: $\dfrac{dy}{dx} = 7x^{7-1} = 7x^6$,

b) con $n = 1$: $\dfrac{dy}{dx} = 1x^{1-1} = x^0 = 1$,

c) con $n = -\frac{2}{3}$: $\dfrac{dy}{dx} = \left(-\dfrac{2}{3}\right)x^{(-2/3)-1} = -\dfrac{2}{3}x^{-5/3} = -\dfrac{2}{3x^{5/3}}$,

d) con $n = \sqrt{2}$: $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$. ■

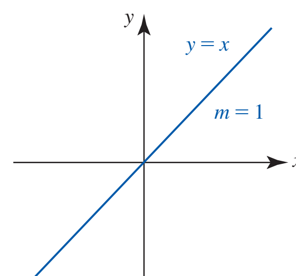


FIGURA 3.2.1 La pendiente de la recta $m = 1$ es consistente con $dy/dx = 1$

Observe en el inciso *b)* del ejemplo 1 que el resultado es consistente con el hecho de que la pendiente de la recta $y = x$ es $m = 1$. Vea la FIGURA 3.2.1.

Teorema 3.2.2 Regla de la función constante

Si $f(x) = c$ es una función constante, entonces $f'(x) = 0$. (4)

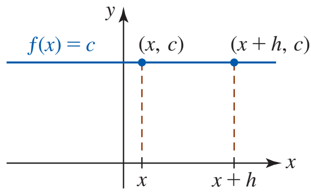


FIGURA 3.2.2 La pendiente de una recta horizontal es 0

DEMOSTRACIÓN Si $f(x) = c$, donde c es cualquier número real, entonces se concluye que la diferencia es $f(x + h) - f(x) = c - c = 0$. Así, por (1),

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$ ■

El teorema 3.2.2 tiene una interpretación geométrica evidente. Como se muestra en la FIGURA 3.2.2, la pendiente de la recta horizontal $y = c$ es, por supuesto, cero. Además, el teorema 3.2.2 coincide con (3) en el caso donde $x \neq 0$ y $n = 0$.

Teorema 3.2.3 Regla de la multiplicación por constante

Si c es cualquier constante y f es diferenciable en x, entonces cf es diferenciable en x, y

$$\frac{d}{dx} cf(x) = cf'(x). \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $G(x) = cf(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x + h) - G(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x + h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x + h) - f(x)}{h}\right] \\ &= c \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = cf'(x). \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 2 Un múltiplo constante

Diferencie $y = 5x^4$.

Solución Por (3) y (5),

$$\frac{dy}{dx} = 5\frac{d}{dx}x^4 = 5(4x^3) = 20x^3.$$ ■

Teorema 3.2.4 Reglas de suma y diferencia

Si f y g son diferenciables en x, entonces $f + g$ y $f - g$ son diferenciables en x, y

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x), \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x). \tag{7}$$

DEMOSTRACIÓN DE (6) Sea $G(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x + h) - G(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x + h) + g(x + h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x) + g(x + h) - g(x)}{h} \quad \leftarrow \text{reordenando términos} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$ ■

puesto que los límites existen, el límite de una suma es la suma de los límites →

El teorema 3.2.4 se cumple para cualquier suma finita de diferenciables. Por ejemplo, si f, g y h son diferenciables en x, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x) + h(x)] = f'(x) + g'(x) + h'(x).$$

Ya que $f - g$ puede escribirse como una suma, $f + (-g)$, no es necesario demostrar (7) puesto que el resultado se concluye de (6) y (5). Por tanto, el teorema 3.2.4 puede plantearse coloquialmente como:

- La derivada de una suma es la suma de las derivadas.

Derivada de un polinomio Como sabemos cómo diferenciar potencias de x y múltiplos constantes de esas potencias, resulta fácil diferenciar sumas de estos múltiplos constantes. La derivada de una función polinomial es particularmente fácil de obtener. Por ejemplo, ahora vemos fácilmente que la derivada de la función polinomial $f(x) = 6x^{100} + 4x^{35}$, mencionada en la introducción de esta sección, es $f'(x) = 600x^{99} + 140x^{34}$.

EJEMPLO 3 Polinomio con seis términos

Diferencie $y = 4x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 13x + 6$.

Solución Al usar (3), (5) y (6) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{d}{dx}x^5 - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}x^4 + 9\frac{d}{dx}x^3 + 10\frac{d}{dx}x^2 - 13\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}6.$$

Puesto que $\frac{d}{dx}6 = 0$ por (4), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 4(5x^4) - \frac{1}{2}(4x^3) + 9(3x^2) + 10(2x) - 13(1) + 0 \\ &= 20x^4 - 2x^3 + 27x^2 + 20x - 13.\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 4 Recta tangente

Encuentre una ecuación de una recta tangente a la gráfica $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x$ en el punto correspondiente a $x = -1$.

Solución Por la regla de la suma,

$$f'(x) = 3(4x^3) + 2(3x^2) - 7(1) = 12x^3 + 6x^2 - 7.$$

Cuando las f y f' se evalúan en el mismo número $x = -1$, obtenemos

$f(-1) = 8$ ← el punto de tangencia es $(-1, 8)$

$f'(-1) = -13.$ ← la pendiente de la tangente en $(-1, 8)$ es -13

Con la ecuación punto-pendiente obtenemos una ecuación de la recta tangente

$$y - 8 = -13(x - (-1)) \qquad \text{o bien,} \qquad y = -13x - 5.$$ ■

Volver a escribir una función En algunas circunstancias, para aplicar una regla de diferenciación de manera eficiente puede ser necesario *volver a escribir* una expresión en una forma alterna. Esta forma alterna a menudo es resultado de algo de manipulación algebraica o una aplicación de las leyes de los exponentes. Por ejemplo, es posible usar (3) para diferenciar las siguientes expresiones, que primero reescribimos usando las leyes de los exponentes

Vale la pena recordar este análisis.

$\frac{4}{x^2}, \quad \frac{10}{\sqrt{x}}, \quad \sqrt{x^3}$ → las raíces cuadradas se vuelven a escribir como potencias → $\frac{4}{x^2}, \quad \frac{10}{x^{1/2}}, \quad (x^3)^{1/2},$

luego se vuelve a escribir usando exponentes negativos → $4x^{-2}, \quad 10x^{-1/2}, \quad x^{3/2},$

la derivada de cada término usando (3) → $-8x^{-3}, \quad -5x^{-3/2}, \quad \frac{3}{2}x^{1/2}.$

Una función como $f(x) = (5x + 2)/x^2$ puede escribirse de nuevo como dos fracciones

$$f(x) = \frac{5x + 2}{x^2} = \frac{5x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 5x^{-1} + 2x^{-2}.$$

Por la última forma de f, ahora resulta evidente que la derivada f' es

$$f'(x) = 5(-x^{-2}) + 2(-2x^{-3}) = -\frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}.$$

EJEMPLO 5 Volver a escribir los términos de una función

Diferencie $y = 4\sqrt{x} + \dfrac{8}{x} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} + 10.$

Solución Antes de diferenciar, los tres primeros términos se vuelven a escribir como potencias de x:

$$y = 4x^{1/2} + 8x^{-1} - 6x^{-1/3} + 10.$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{d}{dx}x^{1/2} + 8\frac{d}{dx}x^{-1} - 6\frac{d}{dx}x^{-1/3} + \frac{d}{dx}10.$$

Por la regla de potencias (3) y (4) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 4 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} + 8 \cdot (-1)x^{-2} - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3} + 0$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^{4/3}}.$$ ■

EJEMPLO 6 Tangentes horizontales

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$ donde la recta tangente es horizontal.

Solución En un punto $(x, f(x))$ sobre la gráfica de f donde la tangente es horizontal, debemos tener $f'(x) = 0$. La derivada de f es $f'(x) = -3x^2 + 6x$ y las soluciones de $f'(x) = -3x^2 + 6x = 0$ o $-3x(x - 2) = 0$ son $x = 0$ y $x = 2$. Así, los puntos correspondientes son $(0, f(0)) = (0, 2)$ y $(2, f(2)) = (2, 6)$. Vea la FIGURA 3.2.3. ■

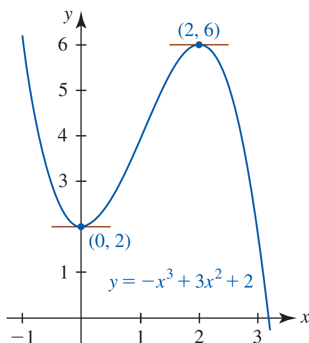


FIGURA 3.2.3 Gráfica de la función en el ejemplo 6

Recta normal Una **recta normal** en un punto P sobre una gráfica es una recta perpendicular a la recta tangente en P.

EJEMPLO 7 Ecuación de una recta normal

Encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = x^2$ en $x = 1$.

Solución Puesto que $dy/dx = 2x$, sabemos que $m_{\tan} = 2$ en $(1, 1)$. Por tanto, la pendiente de la recta normal que se muestra en verde en la FIGURA 3.2.4 es el negativo recíproco de la pendiente de la recta tangente; es decir, $m = -\frac{1}{2}$. Por la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, entonces una ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \qquad \text{o bien,} \qquad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$ ■

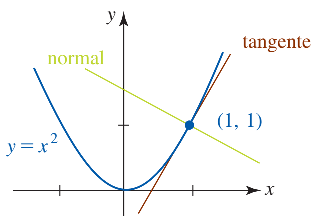


FIGURA 3.2.4 Recta normal en el ejemplo 7

EJEMPLO 8 Tangente vertical

Para la función potencia $f(x) = x^{2/3}$ la derivada es

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}.$$

Observe que $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty$ mientras $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty$. Puesto que f es continua en $x = 0$ y $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to 0$, concluimos que el eje y es una tangente vertical en $(0, 0)$. Este hecho resulta evidente a partir de la gráfica en la FIGURA 3.2.5. ■

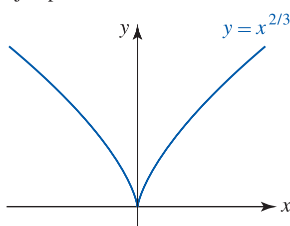


FIGURA 3.2.5 Gráfica de la función en el ejemplo 8

Cúspide Se dice que la gráfica de $f(x) = x^{2/3}$ en el ejemplo 8 tiene una **cúspide** en el origen. En general, la gráfica de una función $y = f(x)$ tiene una cúspide en un punto $(a, f(a))$ si f es continua en a, $f'(x)$ tiene signos opuestos a cualquier lado de a, y $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to a$.

Derivadas de orden superior Hemos visto que la derivada $f'(x)$ es una función derivada de $y = f(x)$. Al diferenciar la primera derivada obtenemos otra función denominada **segunda derivada**, que se denota por $f''(x)$. En términos del símbolo de operación d/dx, la segunda derivada con respecto a x la definimos como la función que se obtiene al diferenciar dos veces consecutivas a $y = f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

La segunda derivada suele denotarse por los símbolos

$$f''(x), \quad y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x), \quad D^2, \quad D_x^2.$$

EJEMPLO 9 Segunda derivada

Encuentre la segunda derivada de $y = \dfrac{1}{x^3}$.

Solución Primero se simplifica la ecuación al escribirla como $y = x^{-3}$. Luego, por la regla de potencias (3) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}.$$

La segunda derivada se obtiene al diferenciar la primera derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-3x^{-4}) = -3(-4x^{-5}) = 12x^{-5} = \frac{12}{x^5}.$$ ■

Si se supone que todas las derivadas existen, es posible diferenciar una función $y = f(x)$ tantas veces como se quiera. La **tercera derivada** es la derivada de la segunda derivada; la **cuarta derivada** es la derivada de la tercera derivada; y así sucesivamente. Las derivadas tercera y cuarta se denotan por d^3y/dx^3 y d^4y/dx^4, y se definen como

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \quad \text{y} \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right).$$

En general, si n es un entero positivo, entonces la ***n*-ésima derivada** se define como

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Otras notaciones para las primeras derivadas n son

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \quad f^{(4)}(x), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x),$$
$$y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{(4)}, \quad \ldots, \quad y^{(n)},$$
$$\frac{d}{dx}f(x), \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x), \quad \frac{d^3}{dx^3}f(x), \quad \frac{d^4}{dx^4}f(x), \quad \ldots, \quad \frac{d^n}{dx^n}f(x),$$
$$D, \quad D^2, \quad D^3, \quad D^4, \quad \ldots, \quad D^n,$$
$$D_x, \quad D_x^2, \quad D_x^3, \quad D_x^4, \quad \ldots, \quad D_x^n.$$

Observe que la notación "prima" se usa para denotar sólo las tres primeras derivadas; después de eso se usa el supraíndice $y^{(4)}, y^{(5)}$, y así sucesivamente. El **valor de la *n*-ésima derivada** de una función $y = f(x)$ en un número a se denota por

$$f^{(n)}(a), \qquad y^{(n)}(a) \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=a}.$$

EJEMPLO 10 Quinta derivada

Encuentre las cinco primeras derivadas de $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 5x$.

Solución Tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^3 - 18x^2 + 14x + 5 \\ f''(x) &= 24x^2 - 36x + 14 \\ f'''(x) &= 48x - 36 \\ f^{(4)}(x) &= 48 \\ f^{(5)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

■

Después de reflexionar un momento, usted debe convencerse que al derivar la $(n + 1)$ veces una función polinomial de grado n el resultado es cero.

$\frac{d}{dx}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

i) En los diversos contextos de ciencias, ingeniería y negocios, las funciones a menudo se expresan en otras variables distintas a x y y. De manera correspondiente, la notación de la derivada debe adaptarse a los nuevos símbolos. Por ejemplo,

Función	***Derivada***
$v(t) = 32t$	$v'(t) = \frac{dv}{dt} = 32$
$A(r) = \pi r^2$	$A'(r) = \frac{dA}{dr} = 2\pi r$
$r(\theta) = 4\theta^2 - 3\theta$	$r'(\theta) = \frac{dr}{d\theta} = 8\theta - 3$
$D(p) = 800 - 129p + p^2$	$D'(p) = \frac{dD}{dp} = -129 + 2p.$

ii) Quizá se pregunte qué interpretación puede darse a las derivadas de orden superior. Si piensa en términos de gráficas, entonces f'' proporciona la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la función f'; f''' proporciona la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la función f'', y así sucesivamente. Además, si f es diferenciable, entonces la primera derivada f' proporciona la razón de cambio instantánea de f. En forma semejante, si f' es diferenciable, entonces f'' proporciona la razón de cambio instantánea de f'.

Ejercicios 3.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-10.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-8, encuentre dy/dx.

1. $y = -18$

2. $y = \pi^6$

3. $y = x^9$

4. $y = 4x^{12}$

5. $y = 7x^2 - 4x$

6. $y = 6x^3 + 3x^2 - 10$

7. $y = 4\sqrt{x} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$

8. $y = \dfrac{x - x^2}{\sqrt{x}}$

En los problemas 9-16, encuentre $f'(x)$. Simplifique.

9. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + 9x^2 + 1$

10. $f(x) = -\frac{2}{3}x^6 + 4x^5 - 13x^2 + 8x + 2$

11. $f(x) = x^3(4x^2 - 5x - 6)$

12. $f(x) = \dfrac{2x^5 + 3x^4 - x^3 + 2}{x^2}$

13. $f(x) = x^2(x^2 + 5)^2$ **14.** $f(x) = (x^3 + x^2)^3$

15. $f(x) = (4\sqrt{x} + 1)^2$ **16.** $f(x) = (9 + x)(9 - x)$

En los problemas 17-20, encuentre la derivada de la función dada.

17. $h(u) = (4u)^3$ **18.** $p(t) = (2t)^{-4} - (2t^{-1})^2$

19. $g(r) = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r^3} + \dfrac{1}{r^4}$ **20.** $Q(t) = \dfrac{t^5 + 4t^2 - 3}{6}$

En los problemas 21-24, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

21. $y = 2x^3 - 1;\ x = -1$ **22.** $y = -x + \dfrac{8}{x};\ x = 2$

23. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x};\ x = 4$ **24.** $f(x) = -x^3 + 6x^2;\ x = 1$

En los problemas 25-28, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

25. $y = x^2 - 8x + 5$ **26.** $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

27. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ **28.** $f(x) = x^4 - 4x^3$

En los problemas 29-32, encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

29. $y = -x^2 + 1;\ x = 2$ **30.** $y = x^3;\ x = 1$

31. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2;\ x = 4$ **32.** $f(x) = x^4 - x;\ x = -1$

En los problemas 33-38, encuentre la segunda derivada de la función dada.

33. $y = -x^2 + 3x - 7$ **34.** $y = 15x^2 - 24\sqrt{x}$

35. $y = (-4x + 9)^2$ **36.** $y = 2x^5 + 4x^3 - 6x^2$

37. $f(x) = 10x^{-2}$ **38.** $f(x) = x + \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^3$

En los problemas 39 y 40, encuentre la derivada de orden superior indicada.

39. $f(x) = 4x^6 + x^5 - x^3;\quad f^{(4)}(x)$

40. $y = x^4 - \dfrac{10}{x};\quad d^5y/dx^5$

En los problemas 41 y 42, determine intervalos para los cuales $f'(x) > 0$ e intervalos para los cuales $f'(x) < 0$.

41. $f(x) = x^2 + 8x - 4$ **42.** $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

En los problemas 43 y 44, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de f donde $f''(x) = 0$.

43. $f(x) = x^3 + 12x^2 + 20x$ **44.** $f(x) = x^4 - 2x^3$

En los problemas 45 y 46, determine intervalos para los cuales $f''(x) > 0$ e intervalos para los cuales $f''(x) < 0$.

45. $f(x) = (x - 1)^3$ **46.** $f(x) = x^3 + x^2$

Una ecuación que contiene una o más derivadas de una función desconocida $y(x)$ se denomina **ecuación diferencial**. En los problemas 47 y 48, demuestre que la función satisface la ecuación diferencia dada.

47. $y = x^{-1} + x^4;\quad x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$

48. $y = x + x^3 + 4;\quad x^2y'' - 3xy' + 3y = 12$

49. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ donde la pendiente de la recta tangente es 5.

50. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = x^2 - x$ donde la recta tangente es $3x - 9y - 4 = 0$.

51. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = x^2 - x$ donde la pendiente de la recta normal es 2.

52. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$ donde la recta tangente es paralela a la recta $3x - 2y + 1 = 0$.

53. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ en el punto donde el valor de la segunda derivada es cero.

54. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^4$ en el punto donde el valor de la tercera derivada es 12.

≡ Aplicaciones

55. El volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre el área superficial S de la esfera si S es la razón de cambio instantánea del volumen con respecto al radio.

56. Según el físico francés Jean Louis Poiseuille (1799-1869), la velocidad v del flujo sanguíneo en una arteria cuya sección transversal circular es constante de radio R es $v(r) = (P/4\nu l)(R^2 - r^2)$, donde P, ν y l son constantes. ¿Cuál es la velocidad del flujo sanguíneo en el valor de r para el cual $v'(r) = 0$?

57. La energía potencial de un sistema masa-resorte cuando el resorte se estira una distancia de x unidades es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, donde k es la constante del resorte. La fuerza ejercida sobre la masa es $F = -dU/dx$. Encuentre la fuerza si la constante del resorte es 30 N/m y la cantidad de estiramiento es $\frac{1}{2}$ m.

58. La altura s por arriba del nivel del suelo de un proyectil en el instante t está dada por

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0,$$

donde g, v_0 y s_0 son constantes. Encuentre la razón de cambio instantánea de s con respecto a t en $t = 4$.

≡ Piense en ello

En los problemas 59 y 60, el símbolo n representa un entero positivo. Encuentre una fórmula para la derivada dada.

59. $\dfrac{d^n}{dx^n}x^n$ **60.** $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{x}$

61. A partir de las gráficas de f y g en la FIGURA 3.2.6, determine qué función es la derivada de la otra. Explique verbalmente su decisión.

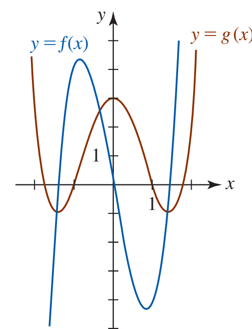


FIGURA 3.2.6 Gráficas para el problema 61

62. A partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ dada en la FIGURA 3.2.7, trace la gráfica de f'.

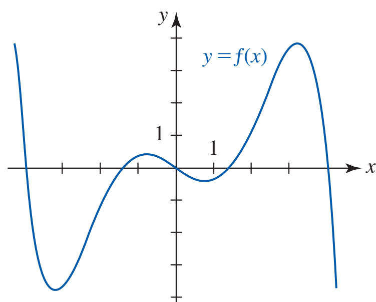


FIGURA 3.2.7 Gráfica para el problema 62

63. Encuentre una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(-1) = -11$, $f'(-1) = 7$ y $f''(-1) = -4$.

64. Se dice que las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son **ortogonales** si las rectas tangentes a cada gráfica son perpendiculares en cada punto de intersección. Demuestre que las gráficas de $y = \frac{1}{8}x^2$ y $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ son ortogonales.

65. Encuentre los valores de b y c de modo que la gráfica de $f(x) = x^2 + bx$ tenga la recta tangente $y = 2x + c$ en $x = -3$.

66. Encuentre una ecuación de la(s) recta(s) que pasa(n) por $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ y es(son) tangente(s) a la gráfica de $f(x) = x^2 + 2x + 2$.

67. Encuentre los puntos de la gráfica de $f(x) = x^2 - 5$ tal que la línea tangente a los puntos interseque al eje en x $(-3, 0)$.

68. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $f(x) = x^2$ tal que la recta tangente interseque al eje y en $(0, -2)$.

69. Explique por qué la gráfica de $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3$ no tiene recta tangente con pendiente -1.

70. Encuentre coeficientes A y B de modo que la función $y = Ax^2 + Bx$ satisfaga la ecuación diferencial $2y'' + 3y' = x - 1$.

71. Encuentre valores de a y b tales que la pendiente de la tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx$ en $(1, 4)$ sea -5.

72. Encuentre las pendientes de todas las rectas normales a la gráfica de $f(x) = x^2$ que pasan por el punto $(2, 4)$. [*Sugerencia*: Elabore una figura y observe que *en* $(2, 4)$ sólo hay una recta normal.]

73. Encuentre un punto sobre la gráfica de $f(x) = x^2 + x$ y un punto sobre la gráfica de $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ donde las rectas tangentes son paralelas.

74. Encuentre un punto sobre la gráfica de $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 2x$ donde la recta tangente tiene la menor pendiente posible.

75. Encuentre las condiciones sobre los coeficientes a, b y c de modo que la gráfica de la función polinomial

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga exactamente una tangente horizontal. Exactamente dos tangentes horizontales. Ninguna tangente horizontal.

76. Sea f una función diferenciable. Si $f'(x) > 0$ para toda x en el intervalo (a, b), trace gráficas posibles de f sobre el intervalo. Describa verbalmente el comportamiento de la gráfica de f sobre el intervalo. Repita si $f'(x) < 0$ para toda x en el intervalo (a, b).

77. Suponga que f es una función diferenciable tal que $f'(x) - f(x) = 0$. Encuentre $f^{(100)}(x)$.

78. Las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2 + 2x - 3$ dada por la FIGURA 3.2.8 muestran que hay dos rectas L_1 y L_2 que son simultáneamente tangentes a ambas gráficas. Encuentre los puntos de tangencia de ambas gráficas. Encuentre una ecuación para cada recta tangente.

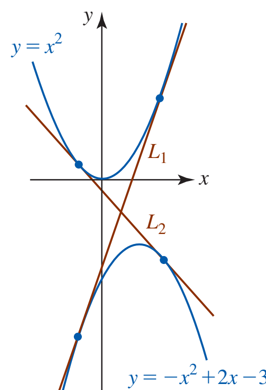


FIGURA 3.2.8 Gráficas para el problema 78

≡ Problemas con calculadora/SAC

79. ***a)*** Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 2$.

b) Evalúe $f''(x)$ en $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$.

c) A partir de los datos del inciso *b*), ¿observa alguna relación entre la forma de la gráfica de f y los signos algebraicos de f''?

80. Use una calculadora o un sistema algebraico computacional para obtener la gráfica de las funciones dadas. Por inspección de las gráficas, indique dónde cada función puede no ser diferenciable. Encuentre $f'(x)$ para todos los puntos donde f es diferenciable.

a) $f(x) = |x^2 - 2x|$ ***b)*** $f(x) = |x^3 - 1|$

3.3 Reglas de productos y cocientes

Introducción Hasta el momento sabemos que la derivada de una función constante y una potencia de x son, a su vez:

$$\frac{d}{dx}c = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \tag{1}$$

También sabemos que para funciones diferenciables f y g:

$$\frac{d}{dx}cf(x) = cf'(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x). \tag{2}$$

Aunque los resultados en (1) y (2) nos permiten diferenciar rápidamente funciones algebraicas (como polinomios), ni (1) ni (2) constituyen una ayuda inmediata para encontrar la derivada de funciones como $y = x^4\sqrt{x^2+4}$ o $y = x/(2x+1)$. Se requieren reglas adicionales para diferenciar productos fg y cocientes f/g.

Regla del producto Las reglas de diferenciación y las derivadas de funciones surgen en última instancia de la definición de la derivada. La regla de la suma en (2), que se obtuvo en la sección precedente, se concluye de la definición y del hecho de que el límite de una suma es la suma de los límites siempre que los límites existan. También sabemos que cuando los límites existen, el límite de un producto es el producto de los límites. Al razonar por analogía, parecería plausible que la derivada de un producto de dos funciones es el producto de las derivadas. Lamentablemente, la regla del producto que se presenta a continuación *no es* tan simple.

Teorema 3.3.1 Regla del producto

Si f y g son funciones diferenciables en x, entonces fg es diferenciable en x, y

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $G(x) = f(x)g(x)$. Entonces por la definición de la derivada junto con algo de manipulación algebraica:

$$G'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)\overbrace{-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)}^{\text{cero}}-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0}g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Debido a que f es diferenciable en x, es continua ahí y entonces $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. Además, $\lim_{h\to 0} g(x) = g(x)$. Por tanto, la última ecuación se vuelve

$$G'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$ ■

La regla del producto se memoriza mejor en palabras:

- La primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.

EJEMPLO 1 Regla del producto

Diferencie $y = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$.

Solución De la regla del producto (3),

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{(x^3-2x^2+3)}^{\text{primera}}\cdot\overbrace{\frac{d}{dx}(7x^2-4x)}^{\text{derivada de la segunda}} + \overbrace{(7x^2-4x)}^{\text{segunda}}\cdot\overbrace{\frac{d}{dx}(x^3-2x^2+3)}^{\text{derivada de la primera}}$$

$$= (x^3-2x^2+3)(14x-4) + (7x^2-4x)(3x^2-4x)$$

$$= 35x^4 - 72x^3 + 24x^2 + 42x - 12.$$

Solución alterna Los dos términos en la función dada pueden multiplicarse para obtener un polinomio de quinto grado. Luego, la derivada puede obtenerse usando la regla de la suma. ■

EJEMPLO 2 Recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = (1 + \sqrt{x})(x - 2)$ en $x = 4$.

Solución Antes de tomar la derivada, $\sqrt{x}$ volvemos a escribirla como $x^{1/2}$. Luego, por la regla del producto (3),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (1 + x^{1/2})\frac{d}{dx}(x - 2) + (x - 2)\frac{d}{dx}(1 + x^{1/2})\\ &= (1 + x^{1/2}) \cdot 1 + (x - 2) \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}\\ &= \frac{3x + 2\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Al evaluar la función dada y su derivada en $x = 4$ obtenemos:

$$y(4) = (1 + \sqrt{4})(4 - 2) = 6 \quad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (4, 6)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} = \frac{12 + 2\sqrt{4} - 2}{2\sqrt{4}} = \frac{7}{2}. \quad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } (4, 6) \text{ es } \tfrac{7}{2}$$

Por la forma punto-pendiente, la recta tangente es

$$y - 6 = \frac{7}{2}(x - 4) \qquad \text{o bien,} \qquad y = \frac{7}{2}x - 8.$$ ■

Aunque (3) se ha planteado sólo para el producto de dos funciones, puede aplicarse a funciones con un mayor número de factores. La idea consiste en agrupar dos (o más) funciones y tratar este agrupamiento como una función. El siguiente ejemplo ilustra la técnica.

EJEMPLO 3 Producto de tres funciones

Diferencie $y = (4x + 1)(2x^2 - x)(x^3 - 8x)$.

Solución Los dos primeros factores se identifican como la "primera función":

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{(4x + 1)(2x^2 - x)}^{\text{primera}}\overbrace{\frac{d}{dx}(x^3 - 8x)}^{\text{derivada de la segunda}} + \overbrace{(x^3 - 8x)}^{\text{segunda}}\overbrace{\frac{d}{dx}(4x + 1)(2x^2 - x)}^{\text{derivada de la primera}}.$$

Observe que para encontrar la derivada de la primera función es necesario aplicar la regla del producto por segunda ocasión:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (4x + 1)(2x^2 - x) \cdot (3x^2 - 8) + (x^3 - 8x) \cdot \overbrace{[(4x + 1)(4x - 1) + (2x^2 - x) \cdot 4]}^{\text{De nuevo la regla del producto}}\\ &= (4x + 1)(2x^2 - x)(3x^2 - 8) + (x^3 - 8x)(16x^2 - 1) + 4(x^3 - 8x)(2x^2 - x).\end{aligned}$$ ■

Regla del cociente

A continuación se presenta la derivada del cociente de dos funciones f y g.

Teorema 3.3.2 Regla del cociente

Si f y g son funciones diferenciables en x y $g(x) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable en x, y

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $G(x) = f(x)/g(x)$. Entonces

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) \overbrace{- g(x)f(x) + g(x)f(x)}^{\text{cero}} - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x)\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim\limits_{h\to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) \cdot \lim\limits_{h\to 0} g(x)}.$$

Puesto que se supone que todos los límites existen, la última línea es lo mismo que

$$G'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$ ■

En palabras, la regla del cociente empieza con el denominador:

- El denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el denominador al cuadrado.

EJEMPLO 4 Regla del cociente

Diferencie $y = \dfrac{3x^2 - 1}{2x^3 + 5x^2 + 7}$.

Solución Por la regla del cociente (4),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overbrace{(2x^3 + 5x^2 + 7)}^{\text{denominador}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(3x^2 - 1)}^{\text{derivada del numerador}} - \overbrace{(3x^2 - 1)}^{\text{numerador}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(2x^3 + 5x^2 + 7)}^{\text{derivada del denominador}}}{\underbrace{(2x^3 + 5x^2 + 7)^2}_{\text{cuadrado del denominador}}}$$

$$= \frac{(2x^3 + 5x^2 + 7) \cdot 6x - (3x^2 - 1) \cdot (6x^2 + 10x)}{(2x^3 + 5x^2 + 7)^2} \quad \leftarrow \text{se multiplica por el numerador}$$

$$= \frac{-6x^4 + 6x^2 + 52x}{(2x^3 + 5x^2 + 7)^2}.$$ ■

EJEMPLO 5 Reglas del producto y el cociente

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $y = \dfrac{(x^2 + 1)(2x^2 + 1)}{3x^2 + 1}$ donde la recta tangente es horizontal.

Solución Se empieza con la regla del cociente y luego se usa la regla del producto al diferenciar el numerador:

Regla del producto aquí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}[(x^2 + 1)(2x^2 + 1)] - (x^2 + 1)(2x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 + 1)}{(3x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(3x^2 + 1)[(x^2 + 1)4x + (2x^2 + 1)2x] - (x^2 + 1)(2x^2 + 1)6x}{(3x^2 + 1)^2} \quad \leftarrow \text{se multiplica por el numerador}$$

$$= \frac{12x^5 + 8x^3}{(3x^2 + 1)^2}.$$

En un punto donde la recta tangente es horizontal, debe tenerse $dy/dx = 0$. La derivada que acaba de encontrarse sólo puede ser 0 cuando el numerador satisface

Por supuesto, los valores de x que hacen cero al numerador *no* deben hacer simultáneamente cero al denominador.

$$12x^5 + 8x^3 = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad x^3(12x^2 + 8) = 0. \tag{5}$$

En (5), debido a que $12x^2 + 8 \neq 0$ para todos los números reales x, debe tenerse $x = 0$. Al sustituir este número en la función obtenemos $y(0) = 1$. La recta tangente es horizontal en la intersección con el eje y, el punto (0, 1). ■

Posdata: Otro repaso a la regla de potencias Recuerde que en la sección 3.2 establecimos que la regla de potencias, $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$, es válida para todos los números reales exponentes n. Ahora ya nos es posible demostrar la regla cuando el exponente es un entero negativo $-m$. Puesto que, por definición $x^{-m} = 1/x^m$, donde m es un entero positivo, la derivada de x^{-m} puede obtenerse por medio de la regla del cociente y las leyes de los exponentes:

se restan los exponentes ↓

$$\frac{d}{dx}x^{-m} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{x^m \cdot \frac{d}{dx}1 - 1 \cdot \frac{d}{dx}x^m}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}.$$

d/dx NOTAS DESDE EL AULA

i) Las reglas del producto y del cociente suelen conducir a expresiones que demandan simplificación. Si su respuesta a un problema no se parece a la que se proporciona en la sección de respuestas del texto, quizá no ha realizado suficientes simplificaciones. No quede contento con sólo llevar a cabo las partes mecánicas de las diversas reglas de diferenciación; siempre resulta una buena idea poner en práctica sus habilidades algebraicas.

ii) Algunas veces, la regla del cociente se usa cuando no es necesario. Aunque es posible usar esta regla para diferenciar funciones como

$$y = \frac{x^5}{6} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{10}{x^3},$$

es más simple (y rápido) volver a escribir las funciones como $y = \frac{1}{6}x^5$ y $y = 10x^{-3}$, y luego usar las reglas del múltiplo constante y de potencias:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}\frac{d}{dx}x^5 = \frac{5}{6}x^4 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = 10\frac{d}{dx}x^{-3} = -30x^{-4}.$$

Ejercicios 3.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-10.

Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre dy/dx.

1. $y = (x^2 - 7)(x^3 + 4x + 2)$

2. $y = (7x + 1)(x^4 - x^3 - 9x)$

3. $y = \left(4\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\left(2x - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)$

4. $y = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$

5. $y = \dfrac{10}{x^2 + 1}$ **6.** $y = \dfrac{5}{4x - 3}$

7. $y = \dfrac{3x + 1}{2x - 5}$ **8.** $y = \dfrac{2 - 3x}{7 - x}$

9. $y = (6x - 1)^2$ **10.** $y = (x^4 + 5x)^2$

En los problemas 11-20, encuentre $f'(x)$.

11. $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x^3}\right)(x^3 - 5x - 1)$

12. $f(x) = (x^2 - 1)\left(x^2 - 10x + \dfrac{2}{x^2}\right)$

13. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x^2 + x + 1}$ **14.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 2}{x(x^2 - 1)}$

15. $f(x) = (x + 1)(2x + 1)(3x + 1)$

16. $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - x)(3x^4 + 2x - 1)$

17. $f(x) = \dfrac{(2x + 1)(x - 5)}{3x + 2}$ **18.** $f(x) = \dfrac{x^5}{(x^2 + 1)(x^3 + 4)}$

19. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)\left(\dfrac{x + 1}{x + 3}\right)$

20. $f(x) = (x + 1)\left(x + 1 - \dfrac{1}{x + 2}\right)$

En los problemas 21-24, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

21. $y = \dfrac{x}{x - 1}; \quad x = \dfrac{1}{2}$ **22.** $y = \dfrac{5x}{x^2 + 1}; \quad x = 2$

23. $y = (2\sqrt{x} + x)(-2x^2 + 5x - 1); \quad x = 1$

24. $y = (2x^2 - 4)(x^3 + 5x + 3); \quad x = 0$

En los problemas 25-28, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

25. $y = (x^2 - 4)(x^2 - 6)$ **26.** $y = x(x - 1)^2$

27. $y = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$ **28.** $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x}$

En los problemas 29 y 30, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente tiene la pendiente indicada.

29. $y = \dfrac{x + 3}{x + 1}; \quad m = -\dfrac{1}{8}$

30. $y = (x + 1)(2x + 5); \quad m = -3$

En los problemas 31 y 32, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente tiene la propiedad indicada.

31. $y = \dfrac{x + 4}{x + 5}$; perpendicular a $y = -x$

32. $y = \dfrac{x}{x + 1}$; paralela a $y = \dfrac{1}{4}x - 1$

33. Encuentre el valor de k tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (k + x)/x^2$ tiene pendiente 5 en $x = 2$.

34. Demuestre que la tangente a la gráfica de $f(x) = (x^2 + 14)/(x^2 + 9)$ en $x = 1$ es perpendicular a la tangente de la gráfica de $g(x) = (1 + x^2)(1 + 2x)$ en $x = 1$.

En los problemas 35-40, f y g son funciones diferenciables. Encuentre $F'(1)$ si $f(1) = 2$, $f'(1) = -3$ y $g(1) = 6$, $g'(1) = 2$.

35. $F(x) = 2f(x)g(x)$ **36.** $F(x) = x^2f(x)g(x)$

37. $F(x) = \dfrac{2g(x)}{3f(x)}$ **38.** $F(x) = \dfrac{1 + 2f(x)}{x - g(x)}$

39. $F(x) = \left(\dfrac{4}{x} + f(x)\right)g(x)$ **40.** $F(x) = \dfrac{xf(x)}{g(x)}$

41. Suponga que $F(x) = \sqrt{x}\,f(x)$, donde f es una función diferenciable. Encuentre $F''(4)$ si $f(4) = -16$, $f'(4) = 2$ y $f''(4) = 3$.

42. Suponga que $F(x) = xf(x) + xg(x)$, donde f y g son funciones diferenciables. Encuentre $F''(0)$ si $f'(0) = -1$ y $g'(0) = 6$.

43. Suponga que $F(x) = f(x)/x$, donde f es una función diferenciable. Encuentre $F''(x)$.

44. Suponga que $F(x) = x^3f(x)$, donde f es una función diferenciable. Encuentre $F'''(x)$.

En los problemas 45-48, determine intervalos para los cuales $f'(x) > 0$ e intervalos para los cuales $f'(x) < 0$.

45. $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 2x}$ **46.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$

47. $f(x) = (-2x + 6)(4x + 7)$

48. $f(x) = (x - 2)(4x^2 + 8x + 4)$

≡ Aplicaciones

49. La ley de gravitación universal establece que la fuerza F entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados por una distancia r es $F = km_1m_2/r^2$, donde k es constante. ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de F con respecto a r cuando $r = \frac{1}{2}$ km?

50. La energía potencial U entre dos átomos en una molécula diatómica está dada por $U(x) = q_1/x^{12} - q_2/x^6$, donde q_1 y q_2 son constantes positivas y x es la distancia entre los átomos. La fuerza entre los átomos se define como $F(x) = -U'(x)$. Demuestre que $F\left(\sqrt[6]{2q_1/q_2}\right) = 0$.

51. La **ecuación de estado de Van der Waals** para un gas ideal es

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

donde P es la presión, V es el volumen por mol, R es la constante universal de los gases, T es la temperatura y a y b son constantes que dependen del gas. Encuentre dP/dV en el caso donde T es constante.

52. Para una lente convexa, la distancia focal f está relacionada con la distancia al objeto p y la distancia a la imagen q por la **ecuación de la lente**

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Encuentre la razón de cambio instantánea de q con respecto a p en el caso donde f es constante. Explique el significado del signo negativo en su respuesta. ¿Qué ocurre a q cuando p crece?

Piense en ello

53. ***a***) Grafique la función racional $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$.

b) Encuentre todos los puntos sobre la gráfica de f tales que las rectas normales pasen por el origen.

54. Suponga que $y = f(x)$ es una función diferenciable.

a) Encuentre dy/dx para $y = [f(x)]^2$.

b) Encuentre dy/dx para $y = [f(x)]^3$.

c) Conjeture una regla para encontrar la derivada de $y = [f(x)]^n$, donde n es un entero positivo.

d) Use su conjetura en el inciso *c*) para encontrar la derivada de $y = (x^2 + 2x - 6)^{500}$.

55. Suponga que $y_1(x)$ satisface la ecuación diferencial $y' + P(x)y = 0$, donde P es una función conocida. Demuestre que $y = u(x)y_1(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$y' + P(x)y = f(x)$$

siempre que $u(x)$ satisface $du/dx = f(x)/y_1(x)$.

3.4 Funciones trigonométricas

Introducción En esta sección desarrollaremos las derivadas de las seis funciones trigonométricas. Una vez que se han encontrado las derivadas de sen x y cos x es posible determinar las derivadas de tan x, cot x, sec x y csc x usando la regla del cociente encontrada en la sección precedente. De inmediato veremos que la derivada de sen x usa los dos siguientes resultados de límites

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \tag{1}$$

que se encontraron en la sección 2.4.

Derivadas del seno y coseno Para encontrar la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ se usa la definición básica de la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

y el proceso de cuatro pasos introducido en las secciones 2.7 y 3.1. En el primer paso usamos la fórmula de la suma para la función seno,

$$\operatorname{sen}(x_1 + x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2, \tag{3}$$

pero donde x y h desempeñan las partes de los símbolos x_1 y x_2.

i) $f(x + h) = \operatorname{sen}(x + h) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h$ ← por (3)

ii) $f(x + h) - f(x) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x$ ← se factoriza sen x de los términos primero y tercero

$= \operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h$

Como observamos en la línea siguiente, no es posible cancelar las h en el cociente diferencial, aunque es posible volver a escribir la expresión para usar los resultados sobre límites en (1).

iii) $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h}$$
$$= \operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

iv) En esta línea, el símbolo h desempeña la parte del símbolo x en (1):

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

A partir de los resultados sobre límites en (1), la última línea es lo mismo que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x. \tag{4}$$

De manera semejante es posible demostrar que

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x. \tag{5}$$

Vea el problema 50 en los ejercicios 3.4.

EJEMPLO 1 Ecuación de una recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 4\pi/3$.

Solución A partir de (4) la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $f'(x) = \cos x$. Cuando éstas se evalúan en el mismo número $x = 4\pi/3$ obtenemos:

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } \left(\tfrac{4\pi}{3}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}. \quad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } \left(\tfrac{4\pi}{3}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ es } -\tfrac{1}{2}$$

A partir de la forma punto-pendiente de una recta, una ecuación de la recta tangente es

$$y + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) \quad \text{o bien,} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La tangente se muestra en rojo en la FIGURA 3.4.1. ■

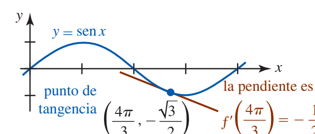


FIGURA 3.4.1 Recta tangente en el ejemplo 1

Otras funciones trigonométricas Los resultados en (4) y (5) pueden usarse junto con las reglas de diferenciación para encontrar las derivadas de la tangente, cotangente, secante y cosecante.

Para diferenciar $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$ se usa la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}\cos x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x\,(\cos x) - \operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}^{\text{esto es igual a 1}}}{\cos^2 x}.$$

Al usar la identidad pitagórica fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y el hecho de que $1/\cos^2 x = (1/\cos x)^2 = \sec^2 x$, la última ecuación se simplifica a

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x. \tag{6}$$

La fórmula de la derivada para la cotangente

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x \tag{7}$$

se obtiene en forma análoga y se deja como ejercicio. Vea el problema 51 en los ejercicios 3.4.

Así, $\sec x = 1/\cos x$. En consecuencia, es posible usar otra vez la regla del cociente para encontrar la derivada de la función secante:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}1 - 1\cdot\dfrac{d}{dx}\cos x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{0 - (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}. \tag{8}$$

Al escribir
$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

podemos expresar (8) como

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x. \tag{9}$$

El resultado final también se concluye de inmediato a partir de la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x. \tag{10}$$

Vea el problema 52 en los ejercicios 3.4.

EJEMPLO 2 Regla del producto

Diferencie $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

Solución La regla del producto junto con (4) da

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^2\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x\frac{d}{dx}x^2\\ &= x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Regla del producto

Diferencie $y = \cos^2 x$.

Solución Una forma de diferenciar esta función es reconocerla como un producto: $y = (\cos x)(\cos x)$. Luego, por la regla del producto y (5),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \cos x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{d}{dx}\cos x\\ &= \cos x(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(-\operatorname{sen} x)\\ &= -2\operatorname{sen} x\cos x.\end{aligned}$$

En la siguiente sección veremos que hay un procedimiento alterno para diferenciar una potencia de una función. ■

EJEMPLO 4 Regla del cociente

Diferencie $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \sec x}$.

Solución Por la regla del cociente, (4) y (9),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(2+\sec x)\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x\frac{d}{dx}(2+\sec x)}{(2+\sec x)^2}\\ &= \frac{(2+\sec x)\cos x - \operatorname{sen} x(\sec x\tan x)}{(2+\sec x)^2} \quad \leftarrow \sec x\cos x = 1 \text{ y } \operatorname{sen} x(\sec x\tan x) = \operatorname{sen}^2 x/\cos^2 x\\ &= \frac{1 + 2\cos x - \tan^2 x}{(2+\sec x)^2}.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 Segunda derivada

Encuentre la segunda derivada de $f(x) = \sec x$.

Solución Por (9), la primera derivada es

$$f'(x) = \sec x \tan x.$$

Para obtener la segunda derivada, ahora es necesario usar la regla del producto junto con (6) y (9):

$$\begin{aligned}f''(x) &= \sec x\frac{d}{dx}\tan x + \tan x\frac{d}{dx}\sec x\\ &= \sec x(\sec^2 x) + \tan x(\sec x\tan x)\\ &= \sec^3 x + \sec x\tan^2 x.\end{aligned}$$

■

Para referencia futura, a continuación se resumen las fórmulas de derivadas presentadas en esta sección.

Teorema 3.4.1 Derivadas de funciones trigonométricas

Las derivadas de las seis funciones trigonométricas son

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x, \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x. \tag{13}$$

$\frac{d}{dx}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

Cuando trabaje los problemas en los ejercicios 3.4, puede que no obtenga la misma respuesta que la proporcionada en la sección de respuestas al final del libro. Esto se debe a que hay muchas identidades trigonométricas cuyas respuestas pueden expresarse en una forma más breve. Por ejemplo, la respuesta en el ejemplo 3:

$$\frac{dy}{dx} = -2\operatorname{sen} x \cos x \quad \text{es la misma que} \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} 2x$$

por la fórmula del ángulo doble para la función seno. Intente resolver las diferencias entre su respuesta y la respuesta proporcionada.

Ejercicios 3.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-10.

Fundamentos

En los problemas 1-12, encuentre dy/dx.

1. $y = x^2 - \cos x$
2. $y = 4x^3 + x + 5\operatorname{sen} x$
3. $y = 1 + 7\operatorname{sen} x - \tan x$
4. $y = 3\cos x - 5\cot x$
5. $y = x \operatorname{sen} x$
6. $y = (4\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x})\cos x$
7. $y = (x^3 - 2)\tan x$
8. $y = \cos x \cot x$
9. $y = (x^2 + \operatorname{sen} x)\sec x$
10. $y = \csc x \tan x$
11. $y = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$
12. $y = x^3 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x$

En los problemas 13-22, encuentre $f'(x)$. Simplifique.

13. $f(x) = (\csc x)^{-1}$
14. $f(x) = \dfrac{2}{\cos x \cot x}$
15. $f(x) = \dfrac{\cot x}{x + 1}$
16. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{1 + \cos x}$
17. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2\tan x}$
18. $f(x) = \dfrac{2 + \operatorname{sen} x}{x}$
19. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$
20. $f(x) = \dfrac{1 + \csc x}{1 + \sec x}$
21. $f(x) = x^4 \operatorname{sen} x \tan x$
22. $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{x \cos x}$

En los problemas 23-26, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

23. $f(x) = \cos x; \quad x = \pi/3$
24. $f(x) = \tan x; \quad x = \pi$
25. $f(x) = \sec x; \quad x = \pi/6$
26. $f(x) = \csc x; \quad x = \pi/2$

En los problemas 27-30, considere la gráfica de la función dada sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. Encuentre las coordenadas x del o de los puntos sobre la gráfica de la función donde la recta tangente es horizontal.

27. $f(x) = x + 2\cos x$
28. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$
29. $f(x) = \dfrac{1}{x + \cos x}$
30. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

En los problemas 31-34, encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

31. $f(x) = \operatorname{sen} x; \quad x = 4\pi/3$
32. $f(x) = \tan^2 x; \quad x = \pi/4$
33. $f(x) = x\cos x; \quad x = \pi$
34. $f(x) = \dfrac{x}{1 + \operatorname{sen} x}; \quad x = \pi/2$

En los problemas 35 y 36, use una identidad trigonométrica idónea para encontrar la derivada de la función dada.

35. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$
36. $f(x) = \cos^2 \dfrac{x}{2}$

En los problemas 37-42, encuentre la segunda derivada de la función dada.

37. $f(x) = x \operatorname{sen} x$
38. $f(x) = 3x - x^2 \cos x$
39. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
40. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \cos x}$
41. $y = \csc x$
42. $y = \tan x$

En los problemas 43 y 44, C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

43. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x; \quad y'' + y = \operatorname{sen} x$

44. $y = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}; \quad x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$

☰ Aplicaciones

45. Cuando el ángulo de elevación del Sol es θ, un poste telefónico de 40 pies de altura proyecta una sombra de longitud s como se muestra en la FIGURA 3.4.2. Encuentre la razón de cambio de s con respecto a θ cuando $\theta = \pi/3$ radianes. Explique el significado del signo menos en la respuesta.

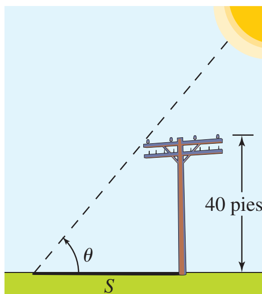


FIGURA 3.4.2 Sombra en el problema 45

46. Los dos extremos de una tabla de 10 pies de longitud se sujetan a rieles perpendiculares como se muestra en la FIGURA 3.4.3, de modo que el punto P puede desplazarse con libertad sobre la vertical y el punto R puede moverse libremente en dirección horizontal.

a) Exprese el área A del triángulo PQR como una función del ángulo θ indicado.

b) Encuentre la razón de cambio de A con respecto a θ.

c) Al inicio la tabla está en posición plana sobre el riel horizontal. Suponga que luego el punto R se mueve en dirección del punto Q, obligando así al punto P a moverse hacia arriba sobre el riel vertical. Al principio el área del triángulo es 0 ($\theta = 0$), pero luego aumenta durante un instante a medida que θ crece y después disminuye cuando R tiende a Q. Cuando la tabla está vertical, el área del triángulo es 0 ($\theta = \pi/2$) de nuevo. Grafique la derivada $dA/d\theta$. Interprete la gráfica para encontrar valores de θ para los cuales A es creciente y los valores de θ para los cuales A es decreciente. Luego compruebe su interpretación de la gráfica de la derivada al graficar $A(\theta)$.

d) Use las gráficas en el inciso *c*) para encontrar el valor de θ para el cual el área del triángulo es máxima.

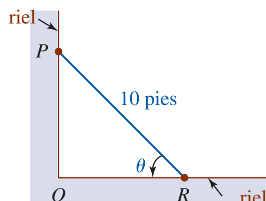


FIGURA 3.4.3 Tabla en el problema 46

☰ Piense en ello

47. ***a***) Encuentre todos los enteros positivos n tales que

$$\frac{d^n}{dx^n}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x; \quad \frac{d^n}{dx^n}\cos x = \cos x;$$
$$\frac{d^n}{dx^n}\cos x = \operatorname{sen} x; \quad \frac{d^n}{dx^n}\operatorname{sen} x = \cos x.$$

b) Use los resultados en el inciso *a*) como ayuda para encontrar

$$\frac{d^{21}}{dx^{21}}\operatorname{sen} x, \quad \frac{d^{30}}{dx^{30}}\operatorname{sen} x, \quad \frac{d^{40}}{dx^{40}}\cos x \quad \text{y} \quad \frac{d^{67}}{dx^{67}}\cos x.$$

48. Encuentre dos puntos distintos P_1 y P_2 sobre la gráfica de $y = \cos x$ de modo que la recta tangente en P_1 sea perpendicular a la recta tangente en P_2.

49. Encuentre dos puntos distintos P_1 y P_2 sobre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ de modo que la recta tangente en P_1 sea paralela a la recta tangente en P_2.

50. Use (1), (2) y la fórmula de la suma para el coseno para demostrar que

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x.$$

51. Use (4) y (5) y la regla del cociente para demostrar que

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x.$$

52. Use (4) y la regla del cociente para demostrar que

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x.$$

☰ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 53 y 54, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada. Por inspección de la gráfica, indique dónde la función puede no ser diferenciable.

53. $f(x) = 0.5(\operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|)$ **54.** $f(x) = |x + \operatorname{sen} x|$

55. Como se muestra en la FIGURA 3.4.4, un joven jala un trineo donde va sentada su hermana. Si el peso total del trineo y la chica es de 70 lb, y si el coeficiente de fricción de suelo cubierto por nieve es 0.2, entonces la magnitud F de la fuerza (medida en libras) necesaria para mover el trineo es

$$F = \frac{70(0.2)}{0.2\operatorname{sen}\theta + \cos\theta},$$

donde θ es el ángulo que la cuerda forma con la horizontal.

a) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de F sobre el intervalo $[-1, 1]$.

b) Encuentre la derivada $dF/d\theta$.

c) Encuentre el ángulo (en radianes) para el que $dF/d\theta = 0$.

d) Encuentre el valor de F correspondiente al ángulo encontrado en el inciso *c*).

e) Use la gráfica en el inciso *a*) como ayuda para interpretar los resultados encontrados en los incisos *c*) y *d*).

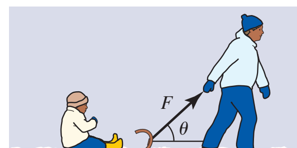


FIGURA 3.4.4 Trineo en el problema 55

3.5 Regla de la cadena

Introducción Como se analizó en la sección 3.2, la regla de potencias

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

es válida para todos los números reales exponentes n. En esta sección veremos que una regla semejante se cumple para la derivada de una potencia de una función $y = [g(x)]^n$. Antes de plantear el resultado formal, se considerará un ejemplo cuando n es un entero positivo.

Suponga que queremos diferenciar

$$y = (x^5 + 1)^2. \tag{1}$$

Al escribir (1) como $y = (x^5 + 1) \cdot (x^5 + 1)$, podemos encontrar la derivada al usar la regla del producto:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^5 + 1)^2 &= (x^5 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x^5 + 1) + (x^5 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x^5 + 1)\\ &= (x^5 + 1) \cdot 5x^4 + (x^5 + 1) \cdot 5x^4\\ &= 2(x^5 + 1) \cdot 5x^4. \end{aligned} \tag{2}$$

En forma semejante, para diferenciar la función $y = (x^5 + 1)^3$, es posible escribirla como $y = (x^5 + 1)^2 \cdot (x^5 + 1)$ y usar la regla del producto y el resultado que se proporciona en (2):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^5 + 1)^3 &= \frac{d}{dx}(x^5 + 1)^2 \cdot (x^5 + 1)\\ &= (x^5 + 1)^2 \cdot \frac{d}{dx}(x^5 + 1) + (x^5 + 1) \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(x^5 + 1)^2}^{\text{sabemos esto por (2)}}\\ &= (x^5 + 1)^2 \cdot 5x^4 + (x^5 + 1) \cdot 2(x^5 + 1) \cdot 5x^4\\ &= 3(x^5 + 1)^2 \cdot 5x^4. \end{aligned} \tag{3}$$

Asimismo, al escribir $y = (x^5 + 1)^4$ como $y = (x^5 + 1)^3 \cdot (x^5 + 1)$ es posible demostrar con facilidad mediante la regla del producto y (3) que

$$\frac{d}{dx}(x^5 + 1)^4 = 4(x^5 + 1)^3 \cdot 5x^4. \tag{4}$$

Regla de potencias para funciones La inspección de (2), (3) y (4) revela un patrón para diferenciar una potencia de una función g. Por ejemplo, en (4) vemos

el exponente se escribe como múltiplo ↓

↓ derivada de la función entre paréntesis

$$4(x^5 + 1)^3 \cdot 5x^4$$

↑ disminuir el exponente por 1

Para recalcar lo anterior, si la función diferenciable se denota por [ ], resulta evidente que

$$\frac{d}{dx}[\ ]^n = n[\ ]^{n-1}\frac{d}{dx}[\ ].$$

El análisis anterior sugiere el resultado que se plantea en el siguiente teorema.

Teorema 3.5.1 Regla de potencias para funciones

Si n es cualquier número real y $u = g(x)$ es diferenciable en x, entonces

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x), \tag{5}$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{6}$$

El teorema 3.5.1 constituye en sí un caso especial de un teorema más general, denominado **regla de la cadena**, que se presentará después de considerar algunos ejemplos de esta nueva regla de potencias.

EJEMPLO 1 Regla de potencias para funciones

Diferencie $y = (4x^3 + 3x + 1)^7$.

Solución Con la identificación de que $u = g(x) = 4x^3 + 3x + 1$, por (6) vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{7}^{n}\overbrace{(4x^3 + 3x + 1)^6}^{u^{n-1}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(4x^3 + 3x + 1)}^{du/dx} = 7(4x^3 + 3x + 1)^6(12x^2 + 3).$$ ■

EJEMPLO 2 Regla de potencias para funciones

Para diferenciar $y = 1/(x^2 + 1)$, podríamos, por supuesto, usar la regla del cociente. No obstante, al volver a escribir la función como $y = (x^2 + 1)^{-1}$, también es posible usar la regla de potencias para funciones con $n = -1$:

$$\frac{dy}{dx} = (-1)(x^2 + 1)^{-2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = (-1)(x^2 + 1)^{-2}\, 2x = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}.$$ ■

EJEMPLO 3 Regla de potencias para funciones

Diferencie $y = \dfrac{1}{(7x^5 - x^4 + 2)^{10}}$.

Solución Escribimos la función dada como $y = (7x^5 - x^4 + 2)^{-10}$. Se identifica $u = 7x^5 - x^4 + 2$, $n = -10$ y se usa la regla de potencias (6):

$$\frac{dy}{dx} = -10(7x^5 - x^4 + 2)^{-11} \cdot \frac{d}{dx}(7x^5 - x^4 + 2) = \frac{-10(35x^4 - 4x^3)}{(7x^5 - x^4 + 2)^{11}}.$$ ■

EJEMPLO 4 Regla de potencias para funciones

Diferencie $y = \tan^3 x$.

Solución Para recalcar, primero volvemos a escribir la función como $y = (\tan x)^3$ y luego se usa (6) con $u = \tan x$ y $n = 3$:

$$\frac{dy}{dx} = 3(\tan x)^2 \cdot \frac{d}{dx}\tan x.$$

Recuerde por (6) de la sección 3.4 que $(d/dx)\tan x = \sec^2 x$. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = 3\tan^2 x \sec^2 x.$$ ■

EJEMPLO 5 Regla del cociente y luego regla de potencias

Diferencie $y = \dfrac{(x^2 - 1)^3}{(5x + 1)^8}$.

Solución Empezamos con la regla del cociente seguida por dos aplicaciones de la regla de potencias para:

Regla de potencias para funciones

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5x + 1)^8 \cdot \frac{d}{dx}(x^2 - 1)^3 - (x^2 - 1)^3 \cdot \frac{d}{dx}(5x + 1)^8}{(5x + 1)^{16}}$$

$$= \frac{(5x + 1)^8 \cdot 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x - (x^2 - 1)^3 \cdot 8(5x + 1)^7 \cdot 5}{(5x + 1)^{16}}$$

$$= \frac{6x(5x+1)^8(x^2-1)^2 - 40(5x+1)^7(x^2-1)^3}{(5x+1)^{16}}$$
$$= \frac{(x^2-1)^2(-10x^2+6x+40)}{(5x+1)^9}.$$ ■

EJEMPLO 6 Regla de potencias y luego regla del cociente

Diferencie $y = \sqrt{\frac{2x-3}{8x+1}}$.

Solución Al volver a escribir la función como

$$y = \left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{1/2} \quad \text{podemos identificarla} \quad u = \frac{2x-3}{8x+1}$$

y $n = \frac{1}{2}$. Por tanto, para calcular du/dx en (6) es necesario usar la regla del cociente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{(8x+1)\cdot 2 - (2x-3)\cdot 8}{(8x+1)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{26}{(8x+1)^2}.$$

Por último, se simplifica usando las leyes de los exponentes:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{13}{(2x-3)^{1/2}(8x+1)^{3/2}}.$$ ■

Regla de la cadena Una potencia de una función puede escribirse como una función compuesta. Si identificamos $f(x) = x^n$ y $u = g(x)$, entonces $f(u) = f(g(x)) = [g(x)]^n$. La regla de la cadena constituye un mecanismo para diferenciar cualquier composición $f \circ g$ de dos funciones diferenciables f y g.

Teorema 3.5.2 Regla de la cadena

Si la función f es diferenciable en $u = g(x)$ y la función g es diferenciable en x, entonces la composición $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ es diferenciable en x y

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{7}$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{8}$$

DEMOSTRACIÓN PARA $\Delta u \neq 0$ En esta demostración parcial resulta conveniente usar la forma de la definición de la derivada proporcionada en (3) de la sección 3.1. Para $\Delta x \neq 0$,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \tag{9}$$

o bien, $g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta u = u + \Delta u$. Además,

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)).$$

Cuando x y $x + \Delta x$ están en algún intervalo abierto para el que $\Delta u \neq 0$, es posible escribir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Puesto que se supone que g es diferenciable, es continua. En consecuencia, cuando $\Delta x \to 0$, $g(x + \Delta x) \to g(x)$, y así por (9) vemos que $\Delta u \to 0$. Por tanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right). \quad \leftarrow \text{observe que } \Delta u \to 0 \text{ en el primer término}$$

Por la definición de derivada, (3) de la sección 3.1, se concluye que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \qquad \blacksquare$$

Se supone que $\Delta u \neq 0$ sobre algunos intervalos no se cumple para toda función diferenciable g. Aunque el resultado proporcionado en (7) sigue siendo válido cuando $\Delta u = 0$, la demostración precedente no.

Para comprender la derivada de una composición $y = f(g(x))$ podría ser de utilidad considerar a f como la *función externa* y a $u = g(x)$ como la *función interna*. Así, la derivada de $y = f(g(x)) = f(u)$ es el *producto de la derivada de la función externa* (evaluada en la función interna) *y la derivada de la función interna* (evaluada en x):

derivada de la función externa ↓

$$\frac{d}{dx} f(u) = f'(u) \cdot u'. \tag{10}$$

↑ derivada de la función interna

El resultado en (10) lo escribimos de varias formas. Puesto que $y = f(u)$, tenemos $f'(u) = dy/du$, y, por supuesto, $u' = du/dx$. El producto de las derivadas en (10) es el mismo que en (8). Por otra parte, si los símbolos u y u' en (10) los sustituimos por $g(x)$ y $g'(x)$, obtenemos (7).

Demostración de la regla de potencias para funciones Como ya se observó, una potencia de una función puede escribirse como una composición $(f \circ g)(x)$ donde la función externa es $y = f(x) = x^n$ y la función interna es $u = g(x)$. La derivada de la función interna $y = f(u) = u^n$ es $\dfrac{dy}{dx} = nu^{n-1}$ y la derivada de la función externa es $\dfrac{du}{dx}$. Así, el producto de estas derivadas es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x).$$

Ésta es la regla de potencias para funciones proporcionada en (5) y (6).

Funciones trigonométricas Las derivadas de las funciones trigonométricas compuestas con una función diferenciable g se obtienen como una consecuencia directa de la regla de la cadena. Por ejemplo, si $y = \operatorname{sen} u$, donde $u = g(x)$, entonces la derivada de y con respecto a la variable u es

$$\frac{dy}{du} = \cos u.$$

Por tanto, (8) da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

o bien, de manera equivalente,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}[\ \ ] = \cos[\ \ ]\frac{d}{dx}[\ \ ].$$

En forma semejante, si $y = \tan u$ donde $u = g(x)$, entonces $dy/du = \sec^2 u$ y así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}.$$

A continuación se resumen los resultados de la regla de la cadena para las seis funciones trigonométricas.

Teorema 3.5.3 Derivadas de funciones trigonométricas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}. \tag{13}$$

EJEMPLO 7 Regla de la cadena

Diferencie $y = \cos 4x$.

Solución La función es $\cos u$ con $u = 4x$. Por la segunda fórmula en (11) del teorema 3.5.3, la derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{-\operatorname{sen} 4x}^{\frac{dy}{du}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}4x}^{\frac{du}{dx}} = -4 \operatorname{sen} 4x.$$

■

EJEMPLO 8 Regla de la cadena

Diferencie $y = \tan(6x^2 + 1)$.

Solución La función es $\tan u$ con $u = 6x^2 + 1$. Por la segunda fórmula en (12) del teorema 3.5.3, la derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{\sec^2(6x^2 + 1)}^{\sec^2 u} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(6x^2 + 1)}^{\frac{du}{dx}} = 12x \sec^2(6x^2 + 1).$$

■

EJEMPLO 9 Reglas del producto, de potencias y de la cadena

Diferencie $y = (9x^3 + 1)^2 \operatorname{sen} 5x$.

Solución Primero se usa la regla del producto:

$$\frac{dy}{dx} = (9x^3 + 1)^2 \cdot \frac{d}{dx}\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 5x \cdot \frac{d}{dx}(9x^3 + 1)^2$$

seguida de la regla de potencias (6) y la primera fórmula (11) del teorema 3.5.3,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= (9x^3 + 1)^2 \cdot \underset{\text{por (11)}}{\cos 5x \cdot \frac{d}{dx}5x} + \operatorname{sen} 5x \cdot \underset{\text{por (6)}}{2(9x^3 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(9x^3 + 1)} \\
&= (9x^3 + 1)^2 \cdot 5 \cos 5x + \operatorname{sen} 5x \cdot 2(9x^3 + 1) \cdot 27x^2 \\
&= (9x^3 + 1)(45x^3 \cos 5x + 5 \cos 5x + 54x^2 \operatorname{sen} 5x).
\end{aligned}$$

■

En las secciones 3.2 y 3.3 vimos que aun cuando las reglas de la suma y el producto se plantearon en términos de dos funciones f y g, son válidas para cualquier número finito de funciones diferenciables. De este modo, también se planteó la regla de la cadena para la composición de dos funciones f y g, aunque es posible aplicarla a la composición de tres (o más) funciones diferenciables. En el caso de las tres, f, g y h, (7) se vuelve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(g(h(x))) &= f'(g(h(x))) \cdot \frac{d}{dx}g(h(x)) \\
&= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).
\end{aligned}$$

EJEMPLO 10 Uso repetido de la regla de la cadena

Diferencie $y = \cos^4(7x^3 + 6x - 1)$.

Solución Para recalcar, primero escribimos la función dada como $y = [\cos(7x^3 + 6x - 1]^4$. Observe que esta función es la composición $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ donde $f(x) = x^4$, $g(x) = \cos x$ y $h(x) = 7x^3 + 6x - 1$. Primero aplicamos la regla de la cadena en la forma de regla de potencias (6) seguida por la segunda fórmula en (11):

$$\frac{dy}{dx} = 4[\cos(7x^3 + 6x - 1)]^3 \cdot \frac{d}{dx}\cos(7x^3 + 6x - 1) \quad \leftarrow \text{primera regla de la cadena: diferenciar la potencia}$$

$$= 4\cos^3(7x^3 + 6x - 1) \cdot \left[-\operatorname{sen}(7x^3 + 6x - 1) \cdot \frac{d}{dx}(7x^3 + 6x - 1)\right] \quad \leftarrow \text{segunda regla de la cadena: diferenciar el coseno}$$

$$= -4(21x^2 + 6)\cos^3(7x^3 + 6x - 1)\operatorname{sen}(7x^3 + 6x - 1).$$

En el ejemplo final, la función dada es una composición de cuatro funciones. ■

EJEMPLO 11 Uso repetido de la regla de la cadena

Diferencie $y = \operatorname{sen}\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right)$.

Solución La función es $f(g(h(k(x))))$, donde $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \tan x$, $h(x) = \sqrt{x}$, y $k(x) = 3x^2 + 4$. En este caso se aplica la regla de la cadena tres veces consecutivas como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \frac{d}{dx}\tan\sqrt{3x^2 + 4} \quad \leftarrow \text{primera regla de la cadena: diferenciar el seno}$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{3x^2 + 4} \quad \leftarrow \text{segunda regla de la cadena: diferenciar la tangente}$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 + 4)^{1/2} \quad \leftarrow \text{se vuelve a escribir la potencia}$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 + 4)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 + 4) \quad \leftarrow \text{tercera regla de la cadena: diferenciar la potencia}$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 + 4)^{-1/2} \cdot 6x \quad \leftarrow \text{simplificar}$$

$$= \frac{3x\cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2 + 4}}{\sqrt{3x^2 + 4}}.$$

■

Por supuesto, usted debe volverse tan apto en aplicar la regla de la cadena que al final ya no piense en el número de funciones presentes en la composición que se trate.

$\frac{d}{dx}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

i) Quizás el error más frecuente es olvidar efectuar la segunda parte de la regla de la cadena; a saber: la derivada de la función interna. Ésta es la parte du/dx en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Por ejemplo, la derivada de $y = (1 - x)^{57}$ no es $dy/dx = 57(1 - x)^{56}$ puesto que $57(1 - x)^{56}$ es sólo la parte dy/du. Podría ser útil usar de manera consistente el símbolo de operación d/dx:

$$\frac{d}{dx}(1 - x)^{57} = 57(1 - x)^{56} \cdot \frac{d}{dx}(1 - x) = 57(1 - x)^{56} \cdot (-1).$$

ii) Un error menos común, pero tal vez más grave que el primero, consiste en diferenciar dentro la función dada. En su examen, un estudiante escribió que la derivada de $y = \cos(x^2 + 1)$ era $dy/dx = -\text{sen}(2x)$; es decir, que la derivada del coseno es el negativo del seno y que la derivada de $x^2 + 1$ es $2x$. Ambas observaciones son correctas, pero la forma donde se escribieron juntas es incorrecta. Tenga en cuenta que la derivada de la función interna es un múltiplo de la derivada de la función externa. De nuevo, podría ser de ayuda usar el símbolo de operación d/dx. La derivada correcta de $y = \cos(x^2 + 1)$ es el producto de dos derivadas.

$$\frac{dy}{dx} = -\text{sen}(x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = -2x\ \text{sen}(x^2 + 1).$$

Ejercicios 3.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-11.

Fundamentos

En los problemas 1-20, encuentre dy/dx.

1. $y = (-5x)^{30}$

2. $y = (3/x)^{14}$

3. $y = (2x^2 + x)^{200}$

4. $y = \left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)^5$

5. $y = \dfrac{1}{(x^3 - 2x^2 + 7)^4}$

6. $y = \dfrac{10}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$

7. $y = (3x - 1)^4(-2x + 9)^5$

8. $y = x^4(x^2 + 1)^6$

9. $y = \text{sen}\sqrt{2x}$

10. $y = \sec x^2$

11. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$

12. $y = \dfrac{3x - 4}{(5x + 2)^3}$

13. $y = [x + (x^2 - 4)^3]^{10}$

14. $y = \left[\dfrac{1}{(x^3 - x + 1)^2}\right]^4$

15. $y = x(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3})^{-4}$

16. $y = (2x + 1)^3\sqrt{3x^2 - 2x}$

17. $y = \text{sen}(\pi x + 1)$

18. $y = -2\cos(-3x + 7)$

19. $y = \text{sen}^3 5x$

20. $y = 4\cos^2\sqrt{x}$

En los problemas 21-38, encuentre $f'(x)$.

21. $f(x) = x^3\cos x^3$

22. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,5x}{\cos 6x}$

23. $f(x) = (2 + x\,\text{sen}\,3x)^{10}$

24. $f(x) = \dfrac{(1 - \cos 4x)^2}{(1 + \text{sen}\,5x)^3}$

25. $f(x) = \tan(1/x)$

26. $f(x) = x\cot(5/x^2)$

27. $f(x) = \text{sen}\,2x\cos 3x$

28. $f(x) = \text{sen}^2 2x\cos^3 3x$

29. $f(x) = (\sec 4x + \tan 2x)^5$

30. $f(x) = \csc^2 2x - \csc 2x^2$

31. $f(x) = \text{sen}(\text{sen}\,2x)$

32. $f(x) = \tan\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$

33. $f(x) = \cos\left(\text{sen}\sqrt{2x + 5}\right)$

34. $f(x) = \tan(\tan x)$

35. $f(x) = \text{sen}^3(4x^2 - 1)$

36. $f(x) = \sec(\tan^2 x^4)$

37. $f(x) = (1 + (1 + (1 + x^3)^4)^5)^6$

38. $f(x) = \left[x^2 - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-4}\right]^2$

En los problemas 39-42, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

39. $y = (x^2 + 2)^3$; $x = -1$

40. $y = \dfrac{1}{(3x + 1)^2}$; $x = 0$

41. $y = \text{sen}\,3x + 4x\cos 5x$; $x = \pi$

42. $y = 50x - \tan^3 2x$; $x = \pi/6$

En los problemas 43-46, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

43. $y = \left(\dfrac{x}{x + 1}\right)^2$; $x = -\dfrac{1}{2}$

44. $y = x^2(x - 1)^3$; $x = 2$

45. $y = \tan 3x$; $x = \pi/4$

46. $y = (-1 + \cos 4x)^3$; $x = \pi/8$

En los problemas 47 y 48, encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

47. $y = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6x}\right)\cos(\pi x^2)$; $x = \dfrac{1}{2}$

48. $y = \text{sen}^3\dfrac{x}{3}$; $x = \pi$

En los problemas 49-52, encuentre la derivada indicada.

49. $f(x) = \text{sen}\,\pi x$; $f'''(x)$

50. $y = \cos(2x + 1)$; d^5y/dx^5

51. $y = x\,\text{sen}\,5x$; d^3y/dx^3

52. $f(x) = \cos x^2$; $f''(x)$

53. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $f(x) = x/(x^2 + 1)^2$ donde la recta tangente es horizontal. La gráfica de f, ¿tiene alguna tangente vertical?

54. Determine los valores de t en los que la razón de cambio instantánea de $g(t) = \text{sen}\,t + \frac{1}{2}\cos 2t$ es cero.

55. Si $f(x) = \cos(x/3)$, ¿cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f' en $x = 2\pi$?

56. Si $f(x) = (1 - x)^4$, ¿cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f'' en $x = 2$?

Aplicaciones

57. La función $R = (v_0^2/g)\text{sen } 2\theta$ proporciona el rango de un proyectil disparado a un ángulo θ con respecto a la horizontal con una velocidad inicial v_0. Si v_0 y g son constantes, encuentre los valores de θ con los cuales $dR/d\theta = 0$.

58. El volumen de un globo esférico de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. El radio es una función del tiempo t y aumenta a razón constante de 5 pulg/min. ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de V con respecto a r?

59. Suponga que un globo esférico se infla a razón constante $dV/dt = 10$ pulg^3/min. ¿A qué ritmo aumenta su radio cuando $r = 2$ pulg?

60. Considere una masa sobre un resorte como se muestra en la FIGURA 3.5.1. En ausencia de fuerzas de amortiguación, el desplazamiento (o distancia dirigida) de la masa, medido desde una posición denominada **posición de equilibrio**, está dado por la función

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega}\text{sen } \omega t,$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$, k es la constante del resorte (un indicador de la rigidez del resorte), m es la masa (medida en slugs o kilogramos), y_0 es el desplazamiento inicial de la masa (medido por arriba o por debajo de la posición de equilibrio), v_0 es la velocidad inicial de la masa y t es el tiempo medido en segundos.

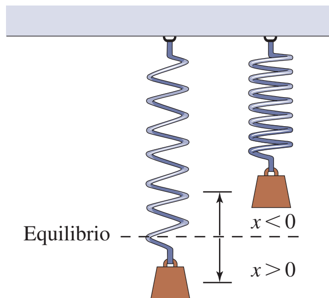


FIGURA 3.5.1 Masa en un resorte en el problema 60

a) Compruebe que $x(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

b) Compruebe que $x(t)$ satisface las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$.

Piense en ello

61. Sea F una función diferenciable. ¿Qué es $\frac{d}{dx}F(3x)$?

62. Sea G una función diferenciable. ¿Qué es $\frac{d}{dx}[G(-x^2)]^2$?

63. Suponga $\frac{d}{du}f(u) = \frac{1}{u}$. ¿Qué es $\frac{d}{dx}f(-10x + 7)$?

64. Suponga $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$. ¿Qué es $\frac{d}{dx}f(x^3)$?

En los problemas 65 y 66, el símbolo n representa un entero positivo. Encuentre una fórmula para la derivada dada.

65. $\frac{d^n}{dx^n}(1 + 2x)^{-1}$

66. $\frac{d^n}{dx^n}\sqrt{1 + 2x}$

67. Suponga que $g(t) = h(f(t))$, donde $f(1) = 3$, $f'(1) = 6$, y $h'(3) = -2$. ¿Qué es $g'(1)$?

68. Suponga que $g(1) = 2$, $g'(1) = 3$, $g''(1) - 1$, $f'(2) = 4$, y $f''(2) = 3$. ¿Qué es $\left.\frac{d^2}{dx^2}f(g(x))\right|_{x=1}$?

69. Dado que f es una función impar diferenciable, use la regla de la cadena para demostrar que f' es una función par.

70. Dado que f es una función par diferenciable, use la regla de la cadena para demostrar que f' es una función impar.

3.6 Diferenciación implícita

Introducción Las gráficas de las diversas ecuaciones que se estudian en matemáticas no son las gráficas de funciones. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 = 4 \tag{1}$$

describe un círculo de radio 2 con centro en el origen. La ecuación (1) no es una función, puesto que para cualquier elección de x que satisfaga $-2 < x < 2$ corresponden dos valores de y. Vea la FIGURA 3.6.1*a*). A pesar de ello, las gráficas de ecuaciones como (1) pueden tener rectas tangentes en varios puntos (x, y). La ecuación (1) define *por lo menos* dos funciones f y g sobre el intervalo $[-2, 2]$. Gráficamente, las funciones evidentes son la mitad superior y la mitad inferior del círculo. A fin de obtener fórmulas para éstas, se despeja y de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ en términos de x:

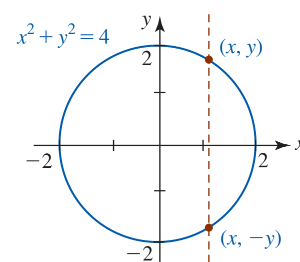
$$y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad \leftarrow \text{semicírculo superior} \tag{2}$$

y

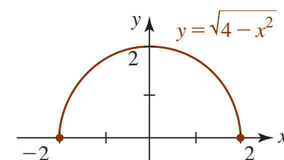
$$y = g(x) = -\sqrt{4 - x^2}. \quad \leftarrow \text{semicírculo inferior} \tag{3}$$

Vea las figuras 3.6.1*b*) y *c*). Ahora ya es posible encontrar pendientes de las rectas tangentes para $-2 < x < 2$ al diferenciar (2) y (3) con la regla de potencias para funciones.

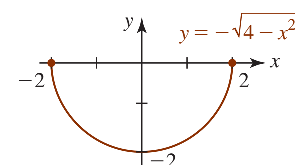
En esta sección veremos cómo obtener la derivada dy/dx para (1), así como para ecuaciones más complicadas $F(x, y) = 0$, sin necesidad de resolver la ecuación para la variable y.



a) No es una función



b) Función



c) Función

FIGURA 3.6.1 La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ determina por lo menos dos funciones

Funciones implícitas y explícitas Se dice que una función donde la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente x, a saber, $y = f(x)$, es una **función explícita**. Por ejemplo, $y = \frac{1}{2}x^3 - 1$ es una función explícita. Por otra parte, se dice que una ecuación equivalente $2y - x^3 + 2 = 0$ define **implícitamente** la función, o que y es una **función implícita** de x. Acabamos de ver que la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ define implícitamente las dos funciones $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$.

En general, si una ecuación $F(x, y) = 0$ define implícitamente una función en algún intervalo, entonces $F(x, f(x)) = 0$ es una identidad sobre el intervalo. La gráfica de f es una porción o un arco (o toda) de la gráfica de la ecuación $F(x, y) = 0$. En el caso de las funciones en (2) y (3), observe que ambas ecuaciones

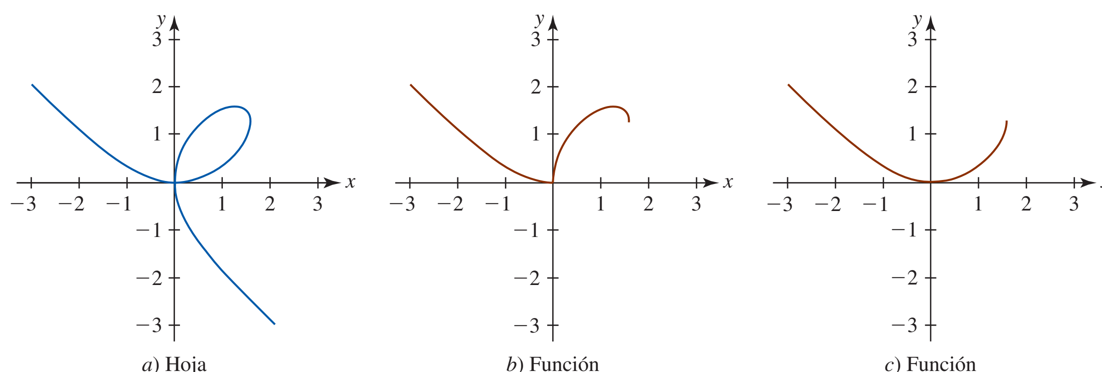
$$x^2 + [f(x)]^2 = 4 \quad \text{y} \quad x^2 + [g(x)]^2 = 4$$

son identidades sobre el intervalo $[-2, 2]$.

La gráfica de la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$ que se muestra en la FIGURA 3.6.2*a*) es una curva famosa denominada **hoja de Descartes**. Con ayuda de un SAC como *Mathematica* o *Maple*, encontramos que una de las funciones implícitas definidas por $x^3 + y^3 = 3xy$ es

$$y = \frac{2x}{\sqrt[3]{-4x^3 + 4\sqrt{x^6 - 4x^3}}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-4x^3 + 4\sqrt{x^6 - 4x^3}}. \tag{4}$$

La gráfica de esta función es el arco rojo que observamos en la figura 3.6.2*b*). En la figura 3.6.2*c*) se proporciona la gráfica de otra función implícita definida por $x^3 + y^3 = 3xy$.



a) Hoja *b*) Función *c*) Función

FIGURA 3.6.2 Las porciones de la gráfica en *a*) que se muestran en rojo en *b*) y *c*) son gráficas de dos funciones implícitas de x

Diferenciación implícita A partir del análisis anterior, no salte a la conclusión de que siempre es posible resolver una ecuación $F(x, y) = 0$ para una función implícita de x como se hizo en (2), (3) y (4). Por ejemplo, resolver una ecuación como

$$x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + y \tag{5}$$

Aunque no es posible resolver ciertas ecuaciones para una función explícita, sigue siendo posible graficar la ecuación con ayuda de un SAC. Así, es posible *ver* las funciones como se hizo en la figura 3.6.2.

para y en términos de x es más que un ejercicio en algún desafío algebraico o una lección sobre el uso de la sintaxis correcta en un SAC. ¡Es *imposible*! Sin embargo, (5) puede determinar varias funciones implícitas sobre un intervalo restringido del eje x. A pesar de ello, *podemos* determinar la derivada dy/dx por medio de un proceso denominado **diferenciación implícita**. Este proceso consiste en diferenciar ambos miembros de una ecuación con respecto a x, usando las reglas de diferenciación y luego resolviendo para dy/dx. Puesto que se considera que y está determinada por la ecuación dada como una función diferenciable de x, la regla de la cadena, en forma de la regla de potencias para funciones, proporciona el resultado útil

$$\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}, \tag{6}$$

donde n es cualquier número real. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \qquad \text{mientras} \qquad \frac{d}{dx}y^2 = 2y\frac{dy}{dx}.$$

En forma semejante, si y es una función de x, entonces por la regla del producto

$$\frac{d}{dx}xy = x\frac{d}{dx}y + y\frac{d}{dx}x = x\frac{dy}{dx} + y,$$

y por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 5y = \cos 5y \cdot \frac{d}{dx}5y = 5\cos 5y\frac{dy}{dx}.$$

Directrices para diferenciación implícita

i) Al diferenciar con respecto a x ambos miembros de la ecuación, use las reglas de diferenciación y considere a y como una función diferenciable de x. Para potencias del símbolo y, use (6).
ii) Agrupe todos los términos donde aparece dy/dx en el miembro izquierdo de la ecuación diferenciada. Mueva todos los otros términos al miembro derecho de la ecuación.
iii) Factorice dy/dx en todos los términos donde aparezca este término. Luego, despeje dy/dx.

En los siguientes ejemplos se supondrá que la ecuación dada determina por lo menos una función diferenciable implícitamente.

EJEMPLO 1 Uso de la diferenciación implícita

Encuentre dy/dx si $x^2 + y^2 = 4$.

Solución Se diferencian ambos miembros de la ecuación y luego se usa (6):

use la regla de potencias (6) aquí ↓

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}4$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Al despejar la derivada obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{7}$$ ■

Como se ilustra en (7) del ejemplo 1, la diferenciación implícita suele producir una derivada que depende de ambas variables x y y. En el análisis introductorio vimos que la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ define dos funciones que pueden diferenciarse implícitamente sobre el intervalo abierto $-2 < x < 2$. El simbolismo $dy/dx = -x/y$ representa la derivada de cualquiera de las funciones sobre el intervalo. Observe que esta derivada indica con claridad que las funciones (2) y (3) no son diferenciables en $x = -2$ y $x = 2$ puesto que $y = 0$ para estos valores de x. En general, la diferenciación implícita produce la derivada de cualquier función que puede derivarse implícitamente definida por una ecuación $F(x, y) = 0$.

EJEMPLO 2 La pendiente de una recta tangente

Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ en los puntos correspondientes a $x = 1$.

Solución Al sustituir $x = 1$ en la ecuación dada obtenemos $y^2 = 3$ o $y = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, hay rectas tangentes en $\left(1, \sqrt{3}\right)$ y $\left(1, -\sqrt{3}\right)$. Aunque $\left(1, \sqrt{3}\right)$ y $\left(1, -\sqrt{3}\right)$ son puntos sobre la

gráfica de dos funciones que pueden diferenciarse implícitamente, indicadas con colores diferentes en la FIGURA 3.6.3, (7) en el ejemplo 1 proporciona la pendiente correcta en cada número en el intervalo $(-2, 2)$. Tenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\sqrt{3})} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-\sqrt{3})} = -\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$ ■

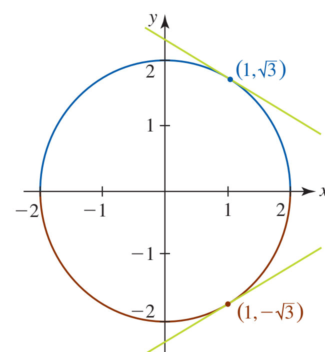


FIGURA 3.6.3 Las rectas tangentes en el ejemplo 2 se muestran en verde

EJEMPLO 3 Uso de diferenciación implícita

Encuentre dy/dx si $x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1$.

Solución En este caso, usamos (6) y la regla del producto:

regla del producto aquí ↓ regla de potencias (6) aquí ↓

$$\frac{d}{dx}x^4 + \frac{d}{dx}x^2y^3 - \frac{d}{dx}y^5 = \frac{d}{dx}2x + \frac{d}{dx}1$$

$$4x^3 + x^2 \cdot 3y^2\frac{dy}{dx} + 2xy^3 - 5y^4\frac{dy}{dx} = 2 \leftarrow \text{factorice } dy/dx \text{ de los términos segundo y cuarto}$$

$$(3x^2y^2 - 5y^4)\frac{dy}{dx} = 2 - 4x^3 - 2xy^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 4x^3 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 5y^4}.$$ ■

Derivadas de orden superior Por medio de diferenciación implícita determinamos dy/dx. Al diferenciar dy/dx con respecto a x obtenemos la segunda derivada d^2y/dx^2. Si la primera derivada contiene a y, entonces d^2y/dx^2 de nuevo contiene el símbolo dy/dx; esa cantidad puede eliminarse al sustituir su valor conocido. El siguiente ejemplo ilustra el método.

EJEMPLO 4 Segunda derivada

Encuentre d^2y/dx^2 si $x^2 + y^2 = 4$.

Solución Por el ejemplo 1, ya sabemos que la primera derivada es $dy/dx = -x/y$. La segunda derivada es la derivada de dy/dx, de modo que por la regla del cociente:

al sustituir por dy/dx ↓ ↓

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y \cdot 1 - x \cdot \frac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

Al observar que $x^2 + y^2 = 4$, es posible volver a escribir la segunda derivada como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{y^3}.$$ ■

EJEMPLO 5 Reglas de la cadena y del producto

Encuentre dy/dx si $\operatorname{sen} y = y\cos 2x$.

Solución Por la regla de la cadena y la regla del producto obtenemos

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} y = \frac{d}{dx}y\cos 2x$$

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = y(-\operatorname{sen} 2x \cdot 2) + \cos 2x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$(\cos y - \cos 2x)\frac{dy}{dx} = -2y\operatorname{sen} 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y\operatorname{sen} 2x}{\cos y - \cos 2x}.$$ ■

Posdata: Otro repaso a la regla de potencias Hasta el momento se ha demostrado la regla de potencias $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$ para todos los enteros exponentes n. La diferenciación implícita constituye un mecanismo para demostrar esta regla cuando el exponente es un número racional p/q, donde p y q son enteros y $q \neq 0$. En el caso donde $n = p/q$, la función

$$y = x^{p/q} \qquad \text{proporciona} \qquad y^q = x^p.$$

Luego, para $y \neq 0$, la diferenciación implícita

$$\frac{d}{dx}y^q = \frac{d}{dx}x^p \qquad \text{produce} \qquad qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}.$$

Al despejar dy/dx en la última ecuación y simplificar con las leyes de los exponentes obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} = \frac{p}{q}x^{p/q-1}.$$

Al examinar el último resultado observamos que se trata de (3) de la sección 3.2 con $n = p/q$.

Ejercicios 3.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-11.

Fundamentos

En los problemas 1-4, suponga que y es una función diferenciable de x. Encuentre la derivada indicada.

1. $\frac{d}{dx}x^2y^4$
2. $\frac{d}{dx}\frac{x^2}{y^2}$
3. $\frac{d}{dx}\cos y^2$
4. $\frac{d}{dx}y \operatorname{sen} 3y$

En los problemas 5-24, suponga que la ecuación dada define por lo menos una función diferenciable implícita. Use diferenciación implícita para encontrar dy/dx.

5. $y^2 - 2y = x$
6. $4x^2 + y^2 = 8$
7. $xy^2 - x^2 + 4 = 0$
8. $(y - 1)^2 = 4(x + 2)$
9. $3y + \cos y = x^2$
10. $y^3 - 2y + 3x^3 = 4x + 1$
11. $x^3y^2 = 2x^2 + y^2$
12. $x^5 - 6xy^3 + y^4 = 1$
13. $(x^2 + y^2)^6 = x^3 - y^3$
14. $y = (x - y)^2$
15. $y^{-3}x^6 + y^6x^{-3} = 2x + 1$
16. $y^4 - y^2 = 10x - 3$
17. $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$
18. $\frac{x + y}{x - y} = x$
19. $y^2 = \frac{x - 1}{x + 2}$
20. $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$
21. $xy = \operatorname{sen}(x + y)$
22. $x + y = \cos(xy)$
23. $x = \sec y$
24. $x \operatorname{sen} y - y \cos x = 1$

En los problemas 25 y 26, use diferenciación implícita para encontrar la derivada indicada.

25. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$; $dr/d\theta$
26. $\pi r^2 h = 100$; dh/dr

En los problemas 27 y 28, encuentre dy/dx en el punto indicado.

27. $xy^2 + 4y^3 + 3x = 0$; $(1, -1)$
28. $y = \operatorname{sen} xy$; $(\pi/2, 1)$

En los problemas 29 y 30, encuentre dy/dx en los puntos que corresponden al número indicado.

29. $2y^2 + 2xy - 1 = 0$; $x = \frac{1}{2}$
30. $y^3 + 2x^2 = 11y$; $y = 1$

En los problemas 31-34, encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto o número indicado.

31. $x^4 + y^3 = 24$; $(-2, 2)$
32. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$; $x = 3$
33. $\tan y = x$; $y = \pi/4$
34. $3y + \cos y = x^2$; $(1, 0)$

En los problemas 35 y 36, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la ecuación dada donde la recta tangente es horizontal.

35. $x^2 - xy + y^2 = 3$
36. $y^2 = x^2 - 4x + 7$
37. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ donde la pendiente de la tangente es $\frac{1}{2}$.
38. Encuentre el punto donde se cortan las rectas tangentes a la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ en $(-3, 4)$ y $(-3, -4)$.
39. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $y^3 = x^2$ donde la recta tangente es perpendicular a la recta $y + 3x - 5 = 0$.
40. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $x^2 - xy + y^2 = 27$ donde la recta tangente es paralela a la recta $y = 5$.

En los problemas 41-48, encuentre d^2y/dx^2.

41. $4y^3 = 6x^2 + 1$
42. $xy^4 = 5$
43. $x^2 - y^2 = 25$
44. $x^2 + 4y^2 = 16$
45. $x + y = \operatorname{sen} y$
46. $y^2 - x^2 = \tan 2x$
47. $x^2 + 2xy - y^2 = 1$
48. $x^3 + y^3 = 27$

En los problemas 49-52, primero use diferenciación implícita para encontrar dy/dx. Luego despeje y explícitamente en términos de x y diferencie. Demuestre que las dos respuestas son equivalentes.

49. $x^2 - y^2 = x$
50. $4x^2 + y^2 = 1$
51. $x^3y = x + 1$
52. $y \operatorname{sen} x = x - 2y$

En los problemas 53-56, determine una función implícita a partir de la ecuación dada tal que su gráfica sea la curva azul en la figura.

53. $(y - 1)^2 = x - 2$

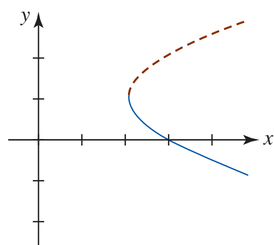


FIGURA 3.6.4 Gráfica para el problema 53

54. $x^2 + xy + y^2 = 4$

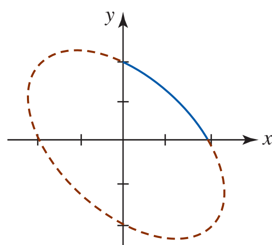


FIGURA 3.6.5 Gráfica para el problema 54

55. $x^2 + y^2 = 4$

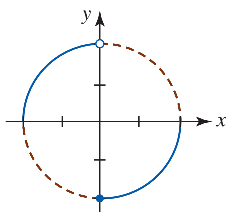


FIGURA 3.6.6 Gráfica para el problema 55

56. $y^2 = x^2(2 - x)$

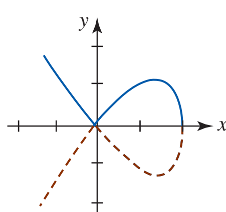


FIGURA 3.6.7 Gráfica para el problema 56

En los problemas 57 y 58, suponga que tanto x como y son diferenciables de una variable t. Encuentre dy/dt en términos de x, y y dx/dt.

57. $x^2 + y^2 = 25$ **58.** $x^2 + xy + y^2 - y = 9$

59. La gráfica de la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$ es la hoja de Descartes proporcionada en la figura 3.6.2*a*).

a) Encuentre una ecuación para la recta tangente en el punto en el primer cuadrante donde la hoja corta la gráfica de $y = x$.

b) Encuentre el punto en el primer cuadrante donde la recta tangente es horizontal.

60. La gráfica de la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ mostrada en la FIGURA 3.6.8 se denomina **lemniscata**.

a) Encuentre los puntos sobre la gráfica que corresponden a $x = 1$.

b) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica en cada punto encontrado en el inciso *a*).

c) Encuentre los puntos sobre la gráfica en los que la tangente es horizontal.

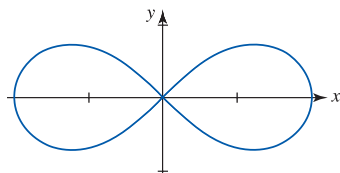


FIGURA 3.6.8 Lemniscata en el problema 60

En los problemas 61 y 62, demuestre que las gráficas de las ecuaciones dadas son ortogonales en el punto de intersección indicado. Vea el problema 64 en los ejercicios 3.2.

61. $y^2 = x^3$, $2x^2 + 3y^2 = 5$; $(1, 1)$

62. $y^3 + 3x^2y = 13$, $2x^2 - 2y^2 = 3x$; $(2, 1)$

Si todas las curvas de una familia de curvas $G(x, y) = c_1$, c_1 una constante, cortan ortogonalmente a todas las curvas de otra familia $H(x, y) = c_2$, c_2 una constante, entonces se dice que las familias tienen **trayectorias ortogonales** entre sí. En los problemas 63 y 64, demuestre que las familias de curvas tienen trayectorias ortogonales entre sí. Trace las dos familias de curvas.

63. $x^2 - y^2 = c_1$, $xy = c_2$ **64.** $x^2 + y^2 = c_1$, $y = c_2x$

≡ Aplicaciones

65. Una mujer conduce hacia una señal en la carretera como se muestra en la FIGURA 3.6.9. Sea θ su ángulo de visión de la señal y sea x su distancia (medida en pies) a esa señal.

a) Si el nivel de sus ojos está a 4 pies de la superficie de la carretera, demuestre que

$$\tan\theta = \frac{4x}{x^2 + 252}.$$

b) Encuentre la razón a la que cambia θ con respecto a x.

c) ¿A qué distancia se cumple que la razón del inciso *b*) es igual a cero?

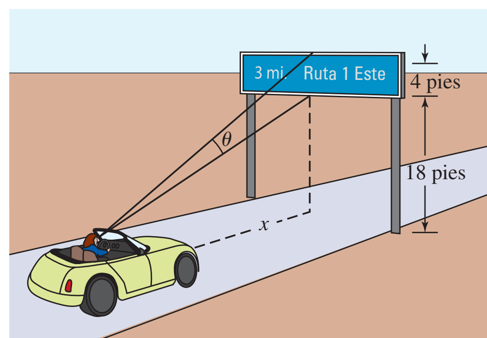


FIGURA 3.6.9 Automóvil en el problema 65

66. Un avión caza describe un círculo de 1 km de radio como se muestra en la FIGURA 3.6.10. Suponga que se escoge un sistema de coordenadas rectangulares de modo que el origen está en el centro del círculo. La nave dispara un misil que describe una trayectoria rectilínea tangente al círculo e impacta en un blanco sobre el suelo cuyas coordenadas son $(2, -2)$.

a) Determine el punto sobre el círculo donde fue disparado el misil.

b) Si un misil se dispara en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sobre el círculo, ¿en qué punto choca contra el suelo?

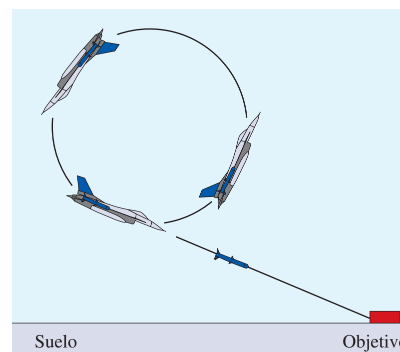


FIGURA 3.6.10 Avión caza en el problema 66

Piense en ello

67. El ángulo θ $(0 < \theta < \pi)$ entre dos curvas se define como el ángulo entre sus rectas tangentes en el punto P de intersección. Si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas tangentes en P, es posible demostrar que $\tan\theta = (m_1 - m_2)/(1 + m_1 m_2)$. Determine el ángulo entre las gráficas de $x^2 + y^2 + 4y = 6$ y $x^2 + 2x + y^2 = 4$ en $(1, 1)$.

68. Demuestre que una ecuación de la recta tangente a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en el punto (x_0, y_0) está dada por

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

69. Considere la ecuación $x^2 + y^2 = 4$. Establezca otra función implícita $h(x)$ definida por esta ecuación para $-2 \le x \le 2$ diferente de la proporcionada en (2), (3) y el problema 55.

70. Para $-1 < x < 1$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$, la ecuación $x = \operatorname{sen} y$ define una función implícita diferenciable.

a) Encuentre dy/dx en términos de y.

b) Encuentre dy/dx en términos de x.

3.7 Derivadas de funciones inversas

Introducción En la sección 1.5 vimos que las gráficas de una función f uno a uno y su inversa f^{-1} son **reflexiones** entre sí en la recta $y = x$. Como una consecuencia, si (a, b) es un punto sobre la gráfica de f, entonces (b, a) es un punto sobre la gráfica de f^{-1}. En esta sección también veremos que las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de una función diferenciable f están relacionadas con las pendientes de tangentes a la gráfica de f^{-1}.

Empezamos con dos teoremas sobre la continuidad de f y f^{-1}.

Continuidad de f^{-1} Aunque los dos teoremas siguientes se plantean sin demostración, su validez se concluye a partir del hecho de que f^{-1} es una reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$.

Teorema 3.7.1 Continuidad de la función inversa

Sea f una función continua uno a uno sobre su dominio X. Entonces f^{-1} es continua sobre su dominio.

Funciones crecientes-decrecientes Suponga que $y = f(x)$ es una función definida sobre un intervalo I, y que x_1 y x_2 son dos números cualesquiera en el intervalo tales que $x_1 < x_2$. Entonces por la sección 1.3 y la figura 1.3.4, recuerde que se dice que f es

- **creciente** sobre el intervalo si $f(x_1) < f(x_2)$, y (1)
- **decreciente** sobre el intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$. (2)

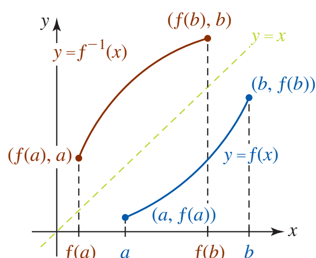


FIGURA 3.7.1 f (curva azul) y f^{-1} (curva roja) son continuas y crecientes

Los dos teoremas siguientes establecen una relación entre el concepto de creciente/decreciente y la existencia de una función inversa.

Teorema 3.7.2 Existencia de una función inversa

Sea f una función continua y creciente sobre un intervalo $[a, b]$. Entonces f^{-1} existe y es continua y creciente sobre $[f(a), f(b)]$.

El teorema 3.7.2 también se cumple cuando sustituimos la palabra *creciente* por la palabra *decreciente* y el intervalo en la conclusión se reemplaza por $[f(b), f(a)]$. Vea la FIGURA 3.7.1. Además, por el teorema 3.7.2 concluimos que si f es continua y creciente sobre un intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces f^{-1} existe y es continua y creciente sobre su dominio de inspección. Al analizar las figuras 1.3.4 y 3.7.1 también observamos que si f en el teorema 3.7.2 es una función diferenciable sobre (a, b), entonces

f creciente y diferenciable significa que las rectas tangentes tienen pendiente positiva.

- f es creciente sobre el intervalo $[a, b]$ si $f'(x) > 0$ sobre (a, b), y
- f es decreciente sobre el intervalo $[a, b]$ si $f'(x) < 0$ sobre (a, b).

Estas afirmaciones se demostrarán en el siguiente capítulo.

Teorema 3.7.3 Diferenciabilidad de una función inversa

Suponga que f es una función diferenciable sobre un intervalo abierto (a, b). Si $f'(x) > 0$ sobre el intervalo o $f'(x) < 0$ sobre el intervalo, entonces f es uno a uno. Además, f^{-1} es diferenciable para toda x en el rango de f.

EJEMPLO 1 Existencia de una inversa

Demuestre que $f(x) = 5x^3 + 8x - 9$ tiene una inversa.

Solución Puesto que f es una función polinomial, es diferenciable en todas partes; es decir, f es diferenciable sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. También, $f'(x) = 15x^2 + 8 > 0$ para toda x implica que f es creciente sobre $(-\infty, \infty)$. Por el teorema 3.7.3 se concluye que f es uno a uno y entonces f^{-1} existe. ■

Derivada de f^{-1} Si f es diferenciable sobre un intervalo I y es uno a uno sobre ese intervalo, entonces para a en I el punto (a, b) sobre la gráfica de f y el punto (b, a) sobre la gráfica de f^{-1} son imágenes especulares entre sí en la recta $y = x$. Como veremos a continuación, las pendientes de las rectas tangentes en (a, b) y (b, a) también están relacionadas.

EJEMPLO 2 Derivada de una inversa

En el ejemplo 5 de la sección 1.5 se demostró que la inversa de una función uno a uno $f(x) = x^2 + 1, x \geq 0$ es $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$. En $x = 2$,

$$f(2) = 5 \quad \text{y} \quad f^{-1}(5) = 2.$$

Luego, por

$$f'(x) = 2x \quad \text{y} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Observamos que $f'(2) = 4$ y $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{4}$. Esto muestra que la pendiente de la tangente a la gráfica de f en $(2, 5)$ y la pendiente de la tangente a la gráfica de f^{-1} en $(5, 2)$ son recíprocos:

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(2)} \quad \text{o} \quad (f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(5))}.$$

Vea la FIGURA 3.7.2. ■

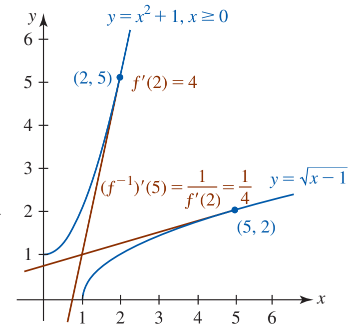


FIGURA 3.7.2 Rectas tangentes en el ejemplo 2

El siguiente teorema muestra que el resultado en el ejemplo 2 no es una coincidencia.

Teorema 3.7.4 Derivada de una función inversa

Suponga que f es diferenciable sobre un intervalo I y que $f'(x)$ nunca es cero sobre I. Si f tiene una inversa f^{-1} sobre I, entonces f^{-1} es diferenciable en un número x y

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN Como vimos en (5) de la sección 1.5, $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}. Por diferenciación implícita y la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}f(f^{-1}(x)) = \frac{d}{dx}x \quad \text{o} \quad f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx}f^{-1}(x) = 1.$$

Al despejar $\frac{d}{dx}f^{-1}(x)$ en la última ecuación obtenemos (3). ■

Resulta evidente que la ecuación (3) muestra que para encontrar la función derivada para f^{-1} es necesario conocer de manera explícita $f^{-1}(x)$. Para una función uno a uno $y = f(x)$, resolver la ecuación $x = f(y)$ para y algunas veces es difícil y a menudo imposible. En este

caso resulta conveniente volver a escribir (3) usando otra notación. De nuevo, por diferenciación implícita,

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}f(y) \qquad \text{proporciona} \qquad 1 = f'(y)\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Al despejar dy/dx en la última ecuación y escribir $dx/dy = f'(y)$ obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}. \tag{4}$$

Si (a, b) es un punto conocido sobre la gráfica de f, el resultado en (4) permite evaluar la derivada de f^{-1} en (b, a) sin contar con una ecuación que defina $f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 3 Derivada de una inversa

En el ejemplo 1 se indicó que la función polinomial $f(x) = 5x^3 + 8x - 9$ es diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$ y por tanto es continua sobre el intervalo. Puesto que el comportamiento final de f es el de la función polinomial con un solo término $y = 5x^3$, podemos concluir que el rango de f también es $(-\infty, \infty)$. Además, puesto que $f'(x) = 15x^2 + 8 > 0$ para toda x, f es creciente sobre su dominio $(-\infty, \infty)$. Entonces, por el teorema 3.7.3, f tiene una inversa diferenciable f^{-1} con dominio $(-\infty, \infty)$. Al intercambiar x y y, la inversa se define por la ecuación $x = 5y^3 + 8y - 9$, pero resolver esta ecuación para y en términos de x es difícil (se requiere la fórmula cúbica). No obstante, al usar $dx/dy = 15y^2 + 8$, se encuentra que la derivada de la función inversa está dada por (4):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{15y^2 + 8}. \tag{5}$$

Por ejemplo, puesto que $f(1) = 4$, sabemos que $f^{-1}(4) = 1$. Entonces, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en $(4, 1)$ está dada por (5):

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} = \left.\frac{1}{15y^2 + 8}\right|_{y=1} = \frac{1}{23}.$$ ■

Lea otra vez este párrafo.

En el ejemplo 3, la derivada de la función inversa también puede obtenerse directamente a partir de $x = 5y^3 + 8y - 9$ usando diferenciación implícita:

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}(5y^3 + 8y - 9) \qquad \text{proporciona} \qquad 1 = 15y^2\frac{dy}{dx} + 8\frac{dy}{dx}.$$

Al resolver la ecuación para dy/dx obtenemos (5). Como una consecuencia de esta observación, es posible usar diferenciación implícita para encontrar la derivada de una función inversa con el mínimo esfuerzo. En el siguiente análisis se encontrarán las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

Derivadas de funciones trigonométricas inversas Un repaso de las figuras 1.5.15 y 1.5.17*a*) revela que la tangente inversa y la cotangente inversa son diferenciables para toda x. No obstante, las cuatro funciones trigonométricas restantes no son diferenciables en $x = -1$ o $x = 1$. Centraremos la atención en obtener las fórmulas de las derivadas del seno inverso, la tangente inversa y la secante inversa, y la obtención de las otras se dejan como ejercicios.

Seno inverso: $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ si y sólo si $x = \operatorname{sen} y$, donde $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. En consecuencia, la diferenciación implícita

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} y \qquad \text{proporciona} \qquad 1 = \cos y\cdot\frac{dy}{dx}$$

y así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}. \tag{6}$$

Para la restricción dada sobre la variable y, $\cos y \ge 0$ y así $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Al sustituir esta cantidad en (6), hemos demostrado que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{7}$$

Como habíamos pronosticado, observe que (7) no está definida en $x = -1$ o $x = 1$. La función seno inverso o arcsen es diferenciable sobre el intervalo abierto $(-1, 1)$.

Tangente inversa: $y = \tan^{-1} x$ si y sólo si $x = \tan y$, donde $-\infty < x < \infty$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$. Por tanto,

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\tan y \qquad \text{proporciona} \qquad 1 = \sec^2 y \cdot \frac{dy}{dx}$$

o bien,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}. \tag{8}$$

Debido a la identidad $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, (8) se vuelve

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{9}$$

Secante inversa: Para $|x| > 1$ y $0 \le y < \pi/2$ o $\pi/2 < y \le \pi$,

$$y = \sec^{-1} x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = \sec y.$$

Al diferenciar implícitamente la última ecuación obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}. \tag{10}$$

Debido a las restricciones sobre y, tenemos $\tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, $|x| > 1$. Por tanto, (10) se vuelve

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{11}$$

Es posible deshacernos del signo $\pm$ en (11) al observar en la figura 1.5.17*b*) que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \sec^{-1} x$ es positiva para $x < 1$ y positiva para $x > 1$. Así, (11) es equivalente a

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \begin{cases} -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, & x < -1 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, & x > 1. \end{cases} \tag{12}$$

El resultado en (12) puede volver a escribirse en forma más breve usando el símbolo de valor absoluto:

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{13}$$

La derivada de la composición de una función trigonométrica inversa con una función diferenciable $u = g(x)$ se obtiene a partir de la regla de la cadena.

Teorema 3.7.5 Funciones trigonométricas inversas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}}\frac{du}{dx}, \tag{14}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1 + u^2}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cot^{-1} u = \frac{-1}{1 + u^2}\frac{du}{dx}, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\csc^{-1} u = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}. \tag{16}$$

En las fórmulas en (14) debe tenerse $|u| < 1$, mientras que en las fórmulas en (16) debe tenerse $|u| > 1$.

EJEMPLO 4 Derivada del seno inverso

Diferencie $y = \operatorname{sen}^{-1} 5x$.

Solución Con $u = 5x$, por la primera fórmula en (14) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}5x = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}.$$ ■

EJEMPLO 5 Derivada de la tangente inversa

Diferencie $y = \tan^{-1}\sqrt{2x+1}$.

Solución Con $u = \sqrt{2x+1}$, por la primera fórmula en (15) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+\left(\sqrt{2x+1}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}(2x+1)^{1/2}\\ &= \frac{1}{1+(2x+1)} \cdot \frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2} \cdot 2\\ &= \frac{1}{(2x+2)\sqrt{2x+1}}.\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 6 Derivada de la secante inversa

Diferencie $y = \sec^{-1} x^2$.

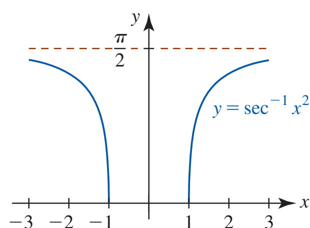


FIGURA 3.7.3 Gráfica de la función en el ejemplo 6

Solución Para $x^2 > 1 > 0$, por la primera fórmula en (16) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{|x^2|\sqrt{(x^2)^2-1}} \cdot \frac{d}{dx}x^2\\ &= \frac{2x}{x^2\sqrt{x^4-1}} = \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}.\end{aligned} \qquad (17)$$

Con ayuda de un dispositivo para graficar obtenemos la gráfica de $y = \sec^{-1} x^2$ que se muestra en la FIGURA 3.7.3. Observe que (17) proporciona una pendiente positiva para $x > 1$ y una negativa para $x < -1$. ■

EJEMPLO 7 Recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 \cos^{-1} x$ en $x = -\frac{1}{2}$.

Solución Por la regla del producto y la segunda fórmula en (14):

$$f'(x) = x^2\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + 2x\cos^{-1} x.$$

Puesto que $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi/3$, al evaluar las dos funciones f y f' en $x = -\frac{1}{2}$ obtenemos:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\pi}{6}\right)$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}. \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\pi}{6}\right) \text{ es } -\tfrac{1}{2\sqrt{3}} - \tfrac{2\pi}{3}$$

Por la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, la ecuación sin simplificar de la recta tangente es

$$y - \frac{\pi}{6} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

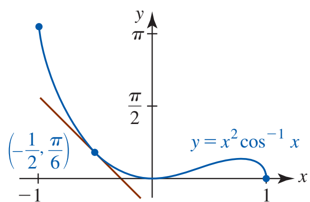


FIGURA 3.7.4 Recta tangente en el ejemplo 7

Puesto que el dominio de $\cos^{-1} x$ es el intervalo $[-1, 1]$, el dominio de f es $[-1, 1]$. El rango correspondiente es $[0, \pi]$. La FIGURA 3.7.4 se obtuvo con ayuda de un dispositivo para graficar. ■

Ejercicios 3.7 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-11.

Fundamentos

En los problemas 1-4, sin graficar determine si la función f dada tiene una inversa.

1. $f(x) = 10x^3 + 8x + 12$

2. $f(x) = -7x^5 - 6x^3 - 2x + 17$

3. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$

4. $f(x) = x^4 - 2x^2$

En los problemas 5 y 6, use (3) para encontrar la derivada de f^{-1} en el punto indicado.

5. $f(x) = 2x^3 + 8;\quad \left(f\left(\tfrac{1}{2}\right), \tfrac{1}{2}\right)$

6. $f(x) = -x^3 - 3x + 7;\quad (f(-1), -1)$

En los problemas 7 y 8, encuentre f^{-1}. Use (3) para encontrar $(f^{-1})'$ y luego compruebe este resultado por diferenciación directa de f^{-1}.

7. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x}$ **8.** $f(x) = (5x + 7)^3$

En los problemas 9-12, sin encontrar la inversa, encuentre, en el valor indicado de x, el punto correspondiente sobre la gráfica de f^{-1}. Luego use (4) para encontrar una ecuación de la recta tangente en este punto.

9. $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x - 7;\quad x = 3$ **10.** $y = \dfrac{2x + 1}{4x - 1};\quad x = 0$

11. $y = (x^5 + 1)^3;\quad x = 1$

12. $y = 8 - 6\sqrt[3]{x + 2};\quad x = -3$

En los problemas 13-32, encuentre la derivada de la función dada.

13. $y = \operatorname{sen}^{-1}(5x - 1)$ **14.** $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{x + 1}{3}\right)$

15. $y = 4\cot^{-1}\dfrac{x}{2}$ **16.** $y = 2x - 10\sec^{-1}5x$

17. $y = 2\sqrt{x}\tan^{-1}\sqrt{x}$ **18.** $y = (\tan^{-1}x)(\cot^{-1}x)$

19. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}2x}{\cos^{-1}2x}$ **20.** $y = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\operatorname{sen}x}$

21. $y = \dfrac{1}{\tan^{-1}x^2}$ **22.** $y = \dfrac{\sec^{-1}x}{x}$

23. $y = 2\operatorname{sen}^{-1}x + x\cos^{-1}x$

24. $y = \cot^{-1}x - \tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

25. $y = \left(x^2 - 9\tan^{-1}\dfrac{x}{3}\right)^3$ **26.** $y = \sqrt{x - \cos^{-1}(x + 1)}$

27. $F(t) = \arctan\left(\dfrac{t - 1}{t + 1}\right)$ **28.** $g(t) = \arccos\sqrt{3t + 1}$

29. $f(x) = \operatorname{arcsen}(\cos 4x)$ **30.** $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{2}\right)$

31. $f(x) = \tan(\operatorname{sen}^{-1}x^2)$ **32.** $f(x) = \cos(x\operatorname{sen}^{-1}x)$

En los problemas 33 y 34, use diferenciación implícita para encontrar dy/dx.

33. $\tan^{-1}y = x^2 + y^2$ **34.** $\operatorname{sen}^{-1}y - \cos^{-1}x = 1$

En los problemas 35 y 36, demuestre que $f'(x) = 0$. Interprete el resultado.

35. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x$

36. $f(x) = \tan^{-1}x + \tan^{-1}(1/x)$.

En los problemas 37 y 38, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

37. $y = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{2};\quad x = 1$

38. $y = (\cos^{-1}x)^2;\quad x = 1/\sqrt{2}$

En los problemas 39 y 40, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

39. $f(x) = x\tan^{-1}x;\quad x = 1$

40. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x - 1);\quad x = \dfrac{1}{2}$

41. Encuentre los puntos sobre la gráfica de $f(x) = 5 - 2\operatorname{sen}x$, $0 \le x \le 2\pi$, donde la recta tangente es paralela a la recta $y = \sqrt{3}x + 1$.

42. Encuentre todas las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = \arctan x$ cuya pendiente es $\frac{1}{4}$.

Piense en ello

43. Si f y $(f^{-1})'$ son diferenciables, use (3) para encontrar una fórmula para $(f^{-1})''(x)$.

3.8 Funciones exponenciales

Introducción En la sección 1.6 vimos que la función exponencial $f(x) = b^x$, $b > 0$, $b \neq 1$, está definida para todos los números reales; es decir, el dominio de f es $(-\infty, \infty)$. Al revisar la figura 1.6.2 observamos que f es continua en todas partes. Resulta que una función exponencial también es diferenciable en todas partes. En esta sección desarrollaremos la derivada de $f(x) = b^x$.

Derivada de una función exponencial Para encontrar la derivada de una función exponencial $f(x) = b^x$ usamos la definición de la derivada proporcionada en (2) de la definición 3.1.1. Primero calculamos el cociente diferencial

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

en tres pasos. Para la función exponencial $f(x) = b^x$, tenemos

i) $f(x+h) = b^{x+h} = b^x b^h$ ← leyes de los exponentes

ii) $f(x+h) - f(x) = b^{x+h} - b^x = b^x b^h - b^x = b^x(b^h - 1)$ ← leyes de los exponentes y factorización

iii) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{b^x(b^h-1)}{h} = b^x \cdot \dfrac{b^h-1}{h}.$

En el cuarto paso, el paso de cálculo, hacemos $h \to 0$ pero en forma semejante a las derivadas de sen x y cos x en la sección 3.4, no hay forma evidente de cancelar la h en el cociente diferencial *iii*). No obstante, la derivada de $f(x) = b^x$ es

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} b^x \cdot \frac{b^h-1}{h}. \tag{2}$$

Debido a que b^x no depende de la variable h, (2) puede escribirse como

$$f'(x) = b^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{b^h-1}{h}. \tag{3}$$

A continuación se presentan algunos resultados sorprendentes. Puede demostrarse que el límite en (3),

$$\lim_{h\to 0} \frac{b^h-1}{h}, \tag{4}$$

existe para toda base positiva b. No obstante, como sería de esperar, para cada base b obtenemos una respuesta diferente. Así, por conveniencia, la expresión en (4) se denotará por el símbolo $m(b)$. Entonces, la derivada de $f(x) = b^x$ es

$$f'(x) = b^x m(b). \tag{5}$$

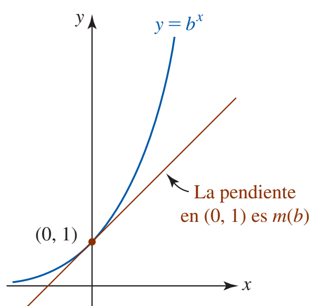


FIGURA 3.8.1 Encuentre una base b de modo que la pendiente $m(b)$ de la recta tangente en (0, 1) sea 1

Se solicita al lector aproximar el valor de $m(b)$ en los cuatro casos $b = 1.5$, 2, 3 y 5 en los problemas 57-60 de los ejercicios 3.8. Por ejemplo, puede demostrar que $m(10) \approx 2.302585\ldots$ y como una consecuencia, si $f(x) = 10^x$, entonces

$$f'(x) = (2.302585\ldots)10^x. \tag{6}$$

Es posible que comprenda mejor lo que evalúa $m(b)$ al evaluar (5) en $x = 0$. Puesto que $b^0 = 1$, tenemos $f'(0) = m(b)$. En otras palabras, $m(b)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = b^x$ en $x = 0$; es decir, en la intersección y (0, 1). Vea la FIGURA 3.8.1. Dado que es necesario calcular una $m(b)$ diferente para cada base b, y que es probable que $m(b)$ sea un número "espantoso" como en (6), con el tiempo la siguiente pregunta surge de manera *natural*:

- ¿Hay alguna base b para la cual $m(b) = 1$? (7)

Derivada de la función exponencial natural Para contestar la pregunta planteada en (7), es necesario volver a las definiciones de e proporcionadas en la sección 1.6. En específico, (4) de la sección 1.6,

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} \tag{8}$$

constituye el mecanismo para responder la pregunta planteada en (7). Sabemos que, a nivel intuitivo, la igualdad en (8) significa que cuando h se aproxima cada vez más a 0 entonces $(1+h)^{1/h}$ puede hacerse arbitrariamente próximo al número e. Así, para valores de h cercanos a 0, tenemos la aproximación $(1+h)^{1/h} \approx e$ y así se concluye que $1 + h \approx e^h$. La última expresión escrita en la forma

$$\frac{e^h-1}{h} \approx 1 \tag{9}$$

sugiere que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1. \tag{10}$$

Puesto que el miembro izquierdo de (10) es $m(e)$, tenemos la respuesta a la pregunta planteada en (7):

- La base b para la cual $m(b) = 1$ es $b = e$. (11)

Además, por (3) hemos descubierto un resultado maravillosamente simple. La derivada de $f(x) = e^x$ es e^x. En resumen,

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x. \tag{12}$$

El resultado en (12) es el mismo que $f'(x) = f(x)$. Además, si $c \neq 0$ es una constante, entonces la otra función diferente de cero f en cálculo cuya derivada es igual a sí misma es $y = ce^x$ puesto que por la regla del múltiplo constante de la sección 3.2

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}ce^x = c\frac{d}{dx}e^x = ce^x = y.$$

Otro repaso a la derivada de $f(x) = b^x$ En el análisis precedente vimos que $m(e) = 1$, pero se dejó sin contestar la pregunta de si $m(b)$ tiene un valor exacto para todo $b > 0$. Tiene más. A partir de la identidad $e^{\ln b} = b$, $b > 0$, podemos escribir cualquier función exponencial $f(x) = b^x$ en términos de la base e:

$$f(x) = b^x = (e^{\ln b})^x = e^{x(\ln b)}.$$

Por la regla de la cadena, la derivada de b^x es

$$f'(x) = \frac{d}{dx}e^{x(\ln b)} = e^{x(\ln b)}\cdot\frac{d}{dx}x(\ln b) = e^{x(\ln b)}(\ln b).$$

Volviendo a $b^x = e^{x(\ln b)}$, la línea precedente muestra que

$$\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b). \tag{13}$$

Al relacionar el resultado en (5) con el de (13) concluimos que $m(b) = \ln b$. Por ejemplo, la derivada de $f(x) = 10^x$ es $f'(x) = 10^x(\ln 10)$. Debido a que $\ln 10 \approx 2.302585$ observamos que $f'(x) = 10^x(\ln 10)$ es lo mismo que el resultado en (6).

A continuación se proporcionan las formas de los resultados de la regla de la cadena en (12) y (13).

Teorema 3.8.1 Derivadas de funciones exponenciales

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}, \tag{14}$$

y

$$\frac{d}{dx}b^u = b^u(\ln b)\frac{du}{dx}. \tag{15}$$

EJEMPLO 1 Regla de la cadena

Diferencie

a) $y = e^{-x}$ ***b***) $y = e^{1/x^3}$ ***c***) $y = 8^{5x}$.

Solución

a) Con $u = -x$, por (14) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}\cdot\frac{d}{dx}(-x) = e^{-x}(-1) = -e^{-x}.$$

b) Al volver a escribir $u = 1/x^3$ como $u = x^{-3}$, por (14) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = e^{1/x^3} \cdot \frac{d}{dx}x^{-3} = e^{1/x^3}(-3x^{-4}) = -3\frac{e^{1/x^3}}{x^4}.$$

c) Con $u = 5x$, por (15) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 8^{5x} \cdot (\ln 8) \cdot \frac{d}{dx}5x = 5 \cdot 8^{5x}(\ln 8).$$ ■

EJEMPLO 2 Reglas del producto y de la cadena

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $y = 3x^2e^{-x^2}$ donde la recta tangente es horizontal.

Solución Se usa la regla del producto junto con (14):

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3x^2 \cdot \frac{d}{dx}e^{-x^2} + e^{-x^2} \cdot \frac{d}{dx}3x^2\\ &= 3x^2(-2xe^{-x^2}) + 6xe^{-x^2}\\ &= e^{-x^2}(-6x^3 + 6x).\end{aligned}$$

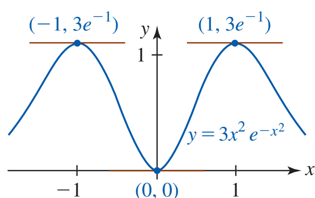


FIGURA 3.8.2 Gráfica de la función en el ejemplo 2

Puesto que $e^{-x^2} \neq 0$ para todos los números reales x, $\frac{dy}{dx} = 0$ cuando $-6x^3 + 6x = 0$. Al factorizar la última ecuación obtenemos $x(x + 1)(x - 1) = 0$ y así $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$. Así, los puntos correspondientes sobre la gráfica de la función dada son $(0, 0)$, $(-1, 3e^{-1})$ y $(1, 3e^{-1})$. La gráfica de $y = 3x^2e^{-x^2}$ junto con las tres rectas tangentes (en rojo) se muestran en la FIGURA 3.8.2. ■

En el ejemplo siguiente se recuerda el hecho de que una ecuación exponencial puede escribirse en una forma logarítmica equivalente. En particular, se usa (9) de la sección 1.6 en la forma

$$y = e^x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \ln y. \tag{16}$$

EJEMPLO 3 Recta tangente paralela a una recta

Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = 2e^{-x}$ donde la recta tangente es paralela a $y = -4x - 2$.

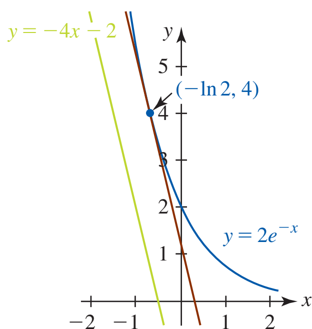


FIGURA 3.8.3 Gráfica de la función y rectas en el ejemplo 3

Solución Sea $(x_0, f(x_0)) = (x_0, 2e^{-x_0})$ el punto desconocido sobre la gráfica de $f(x) = 2e^{-x}$ donde la recta tangente es paralela a $y = -4x - 2$. Entonces, a partir de la derivada $f'(x) = -2e^{-x}$, la pendiente de la recta tangente en este punto es $f'(x_0) = -2e^{-x_0}$. Puesto que $y = -4x - 2$ y la recta tangente es paralela en ese punto, las pendientes son iguales:

$$f'(x_0) = -4 \quad \text{o bien,} \quad -2e^{-x_0} = -4 \quad \text{o bien,} \quad e^{-x_0} = 2.$$

A partir de (16), la última ecuación proporciona $-x_0 = \ln 2$ o $x_0 = -\ln 2$. Por tanto, el punto es $(-\ln 2, 2e^{\ln 2})$. Puesto que $e^{\ln 2} = 2$, el punto es $(-\ln 2, 4)$. En la FIGURA 3.8.3, la línea proporcionada se muestra en verde y la recta tangente en rojo. ■

$\frac{d}{dx}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

Los números e y π son **trascendentes**, así como irracionales. Un número trascendente es un número que *no* es raíz de una ecuación polinomial con coeficientes enteros. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es irracional pero no trascendente, puesto que es una raíz de la ecuación polinomial $x^2 - 2 = 0$. El hecho de que el número e sea trascendente fue demostrado por el matemático francés **Charles Hermite** (1822-1901) en 1873, mientras que el matemático alemán **Ferdinand Lindemann** (1852-1939) demostró nueve años después que π es trascendente. Esta última demostración evidenció de manera concluyente que resolver la "cuadratura del círculo" con regla y compás era imposible.

Ejercicios 3.8

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-11.

Fundamentos

En los problemas 1-26, encuentre la derivada de la función dada.

1. $y = e^{-x}$

2. $y = e^{2x+3}$

3. $y = e^{\sqrt{x}}$

4. $y = e^{\operatorname{sen} 10x}$

5. $y = 5^{2x}$

6. $y = 10^{-3x^2}$

7. $y = x^3 e^{4x}$

8. $y = e^{-x} \operatorname{sen} \pi x$

9. $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x}$

10. $f(x) = \dfrac{xe^x}{x + e^x}$

11. $y = \sqrt{1 + e^{-5x}}$

12. $y = (e^{2x} - e^{-2x})^{10}$

13. $y = \dfrac{2}{e^{x/2} + e^{-x/2}}$

14. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

15. $y = \dfrac{e^{7x}}{e^{-x}}$

16. $y = e^{2x}e^{3x}e^{4x}$

17. $y = (e^3)^{x-1}$

18. $y = \left(\dfrac{1}{e^x}\right)^{100}$

19. $f(x) = e^{x^{1/3}} + (e^x)^{1/3}$

20. $f(x) = (2x + 1)^3 e^{-(1-x)^4}$

21. $f(x) = e^{-x} \tan e^x$

22. $f(x) = \sec e^{2x}$

23. $f(x) = e^{x\sqrt{x^2+1}}$

24. $y = e^{\frac{x+2}{x-2}}$

25. $y = e^{e^{x^2}}$

26. $y = e^x + e^{x+e^{-x}}$

27. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = (e^x + 1)^2$ en $x = 0$.

28. Encuentre la pendiente de la recta normal a la gráfica de $y = (x - 1)e^{-x}$ en $x = 0$.

29. Encuentre el punto sobre la gráfica de $y = e^x$ donde la recta tangente es paralela a $3x - y = 7$.

30. Encuentre el punto sobre la gráfica de $y = 5x + e^{2x}$ donde la recta tangente es paralela a $y = 6x$.

En los problemas 31 y 32, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal. Use un dispositivo para graficar y obtenga la gráfica de cada función.

31. $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$

32. $f(x) = (3 - x^2)e^{-x}$

En los problemas 33-36, encuentre la derivada de orden superior indicada.

33. $y = e^{x^2}; \quad \dfrac{d^3y}{dx^3}$

34. $y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}; \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$

35. $y = \operatorname{sen} e^{2x}; \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$

36. $y = x^2 e^x; \quad \dfrac{d^4y}{dx^4}$

En los problemas 37 y 38, C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

37. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}; \quad y'' + y' - 6y = 0$

38. $y = C_1e^{-x} \cos 2x + C_2e^{-x} \operatorname{sen} 2x; \quad y'' + 2y' + 5y = 0$

39. Si C y k son constantes reales, demuestre que la función $y = Ce^{kx}$ satisface la ecuación diferencial $y' = ky$.

40. Use el problema 39 para encontrar una función que satisfaga las condiciones dadas.

a) $y' = -0.01y$ y $y(0) = 100$

b) $\dfrac{dP}{dt} - 0.15P = 0$ y $P(0) = P_0$

En los problemas 41-46, use diferenciación implícita para encontrar dy/dx.

41. $y = e^{x+y}$

42. $xy = e^y$

43. $y = \cos e^{xy}$

44. $y = e^{(x+y)^2}$

45. $x + y^2 = e^{x/y}$

46. $e^x + e^y = y$

47. *a*) Trace la gráfica de $f(x) = e^{-|x|}$.

b) Encuentre $f'(x)$.

c) Trace la gráfica de f'.

d) ¿La función es diferenciable en $x = 0$?

48. *a*) Demuestre que la función $f(x) = e^{\cos x}$ es periódica con periodo 2π.

b) Encuentre todos los puntos sobre la gráfica de f donde la tangente es horizontal.

c) Trace la gráfica de f.

Aplicaciones

49. La función logística

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}},$$

donde a y b son constantes positivas, a menudo sirve como modelo matemático para una población en crecimiento pero limitada.

a) Demuestre que $P(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP).$$

b) La gráfica de $P(t)$ se denomina **curva logística**, donde $P(0) = P_0$ es la población inicial. Considere el caso donde $a = 2$, $b = 1$ y $P_0 = 1$. Encuentre asíntotas horizontales para la gráfica de $P(t)$ al determinar los límites $\lim_{t\to-\infty} P(t)$ y $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

c) Grafique $P(t)$.

d) Encuentre el o los valores de t para los cuales $P''(t) = 0$.

50. El **modelo matemático de Jenss** (1937) constituye una de las fórmulas empíricas más precisas para pronosticar la estatura h (en centímetros) en términos de la edad t (en años) para niños en edad preescolar (de 3 meses a 6 años):

$$h(t) = 79.04 + 6.39t - e^{3.26-0.99t}.$$

a) ¿Qué estatura pronostica este modelo para un niño de 2 años?

b) ¿Cuán rápido crece en estatura un niño de 2 años?

c) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de h sobre el intervalo $[\frac{1}{4}, 6]$.

d) Use la gráfica del inciso *c*) para estimar la edad de un niño en edad preescolar que mide 100 cm de estatura.

Piense en ello

51. Demuestre que la intersección con el eje x de la recta tangente a la gráfica de $y = e^{-x}$ en $x = x_0$ está una unidad a la derecha de x_0.

52. ¿Cómo está relacionada la recta tangente a la gráfica de $y = e^x$ en $x = 0$ con la recta tangente a la gráfica de $y = e^{-x}$ en $x = 0$?

53. Explique por qué sobre la gráfica de $y = e^x$ no hay ningún punto donde la recta tangente sea paralela a $2x + y = 1$.

54. Encuentre todas las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = e^x$ que pasan por el origen.

En los problemas 55 y 56, el símbolo n representa un entero positivo. Encuentre una fórmula para la derivada dada.

55. $\dfrac{d^n}{dx^n}\sqrt{e^x}$ **56.** $\dfrac{d^n}{dx^n}xe^{-x}$

Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 57-60, use una calculadora para estimar el valor $m(b) = \lim_{h\to 0}\dfrac{b^h - 1}{h}$ para $b = 1.5$, $b = 2$, $b = 3$ y $b = 5$ al llenar la tabla siguiente.

57.

$h \to 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\dfrac{(1.5)^h - 1}{h}$						

58.

$h \to 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\dfrac{2^h - 1}{h}$						

59.

$h \to 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\dfrac{3^h - 1}{h}$						

60.

$h \to 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\dfrac{5^h - 1}{h}$						

61. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Demuestre que f es diferenciable para toda x. Use la definición de la derivada para calcular $f'(0)$.

3.9 Funciones logarítmicas

Introducción Debido a que la inversa de la función exponencial $y = b^x$ es la función logarítmica $y = \log_b x$, la derivada de la segunda función puede encontrarse de tres maneras: (3) de la sección 3.7, diferenciación implícita o a partir de la definición fundamental (2) en la sección 3.1. Demostraremos los dos últimos métodos.

Derivada de la función logaritmo natural Por (9) de la sección 1.6 sabemos que $y = \ln x$ es lo mismo que $x = e^y$. Por diferenciación implícita, la regla de la cadena y (14) de la sección 3.8,

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}e^y \quad \text{proporciona} \quad 1 = e^y\frac{dy}{dx}.$$

En consecuencia,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}.$$

Al sustituir e^y por x, obtenemos el siguiente resultado:

Así como en las funciones trigonométricas inversas, la derivada de la inversa de la función exponencial natural es una función algebraica.

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Derivada de $f(x) = \log_b x$ Precisamente de la misma manera en que se obtuvo (1), la derivada de $y = \log_b x$ puede obtenerse al diferenciar implícitamente $x = b^y$.

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}b^y \quad \text{proporciona} \quad 1 = b^y(\ln b)\frac{dy}{dx}.$$

En consecuencia,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b^y(\ln b)}.$$

Al sustituir b^y por x, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{x(\ln b)}. \tag{2}$$

Puesto que $\ln e = 1$, (2) se vuelve (1) cuando $b = e$.

EJEMPLO 1 Regla del producto

Diferencie $f(x) = x^2 \ln x$.

Solución Por la regla del producto y (1) tenemos

$$f'(x) = x^2 \cdot \frac{d}{dx}\ln x + (\ln x)\cdot\frac{d}{dx}x^2 = x^2\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)\cdot 2x$$

o bien, $$f'(x) = x + 2x\ln x.$$ ■

EJEMPLO 2 Pendiente de una recta tangente

Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \log_{10} x$ en $x = 2$.

Solución Por (2), la derivada de $y = \log_{10} x$ es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(\ln 10)}.$$

Con ayuda de una calculadora, la pendiente de la recta tangente en $(2, \log_{10} 2)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{1}{2\ln 10} \approx 0.2171.$$ ■

Los resultados en (1) y (2) se resumen en forma de regla de la cadena.

Teorema 3.9.1 Derivadas de funciones logarítmicas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \tag{3}$$

y

$$\frac{d}{dx}\log_b u = \frac{1}{u(\ln b)}\frac{du}{dx}. \tag{4}$$

EJEMPLO 3 Regla de la cadena

Diferencie

a) $f(x) = \ln(\cos x)$ y ***b)*** $y = \ln(\ln x)$.

Solución

a) Por (3), con $u = \cos x$ tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{d}{dx}\cos x = \frac{1}{\cos x}\cdot(-\operatorname{sen} x)$$

o bien, $$f'(x) = -\tan x.$$

b) Al usar de nuevo (3), ahora con $u = \ln x$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x}.$$ ■

EJEMPLO 4 Regla de la cadena

Diferencie $f(x) = \ln x^3$.

Solución Debido a que x^3 debe ser positiva, se entiende que $x > 0$. Así, por (3), con $u = x^3$, tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{d}{dx} x^3 = \frac{1}{x^3} \cdot (3x^2) = \frac{3}{x}.$$

Solución alterna: Por *iii*) de las leyes de los logaritmos (teorema 1.6.1), $\ln N^c = c \ln N$ y así es posible volver a escribir $y = \ln x^3$ como $y = 3 \ln x$ y después diferenciar:

$$f(x) = 3 \frac{d}{dx} \ln x = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}.$$ ■

Aunque el dominio del logaritmo natural $y = \ln x$ es el conjunto $(0, \infty)$, el dominio de $y = \ln|x|$ se extiende al conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Para los números en este último dominio,

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} &\text{para } x > 0, \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \\ &\text{para } x < 0, \quad \frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{5}$$

Las derivadas en (5) prueban que para $x \neq 0$,

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}. \tag{6}$$

Así, el resultado en (6) se generaliza por la regla de la cadena. Para una función diferenciable $u = g(x)$, $u \neq 0$,

$$\frac{d}{dx} \ln|u| = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}. \tag{7}$$

EJEMPLO 5 Uso de (6)

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln|x|$ en $x = -2$ y $x = 2$.

Solución Puesto que (6) proporciona $dy/dx = 1/x$, tenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Debido a que $\ln|-2| = \ln 2$, (8) proporciona, respectivamente, las pendientes de las rectas tangentes en los puntos $(-2, \ln 2)$ y $(2, \ln 2)$. Observe en la FIGURA 3.9.1 que la gráfica de $y = \ln|x|$ es simétrica con respecto al eje y; las rectas tangentes se muestran en rojo. ■

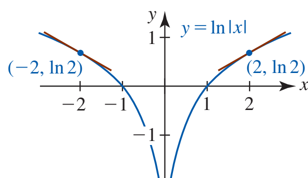


FIGURA 3.9.1 Gráficas de las rectas tangentes y función en el ejemplo 5

EJEMPLO 6 Uso de (7)

Diferencie

a) $y = \ln(2x - 3)$ y ***b***) $y = \ln|2x - 3|$.

Solución

a) Para $2x - 3 > 0$, o $x > \frac{3}{2}$, por (3) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x-3} \cdot \frac{d}{dx}(2x - 3) = \frac{2}{2x-3}. \tag{9}$$

b) Para $2x - 3 \neq 0$, o $x \neq \frac{3}{2}$, por (7) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x-3} \cdot \frac{d}{dx}(2x - 3) = \frac{2}{2x-3}. \tag{10}$$

Aunque (9) y (10) *parecen* iguales, definitivamente no se trata de la misma función. La diferencia consiste simplemente en que el dominio de la derivada en (9) es el intervalo $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, mientras el dominio de la derivada en (10) es el conjunto de números reales excepto $x = \frac{3}{2}$. ■

EJEMPLO 7 Una distinción

Las funciones $f(x) = \ln x^4$ y $g(x) = 4 \ln x$ no son las mismas. Puesto que $x^4 > 0$ para toda $x \neq 0$, el dominio de f es el conjunto de números reales excepto $x = 0$. El dominio de g es el intervalo $(0, \infty)$. Así,

$$f'(x) = \frac{4}{x}, \quad x \neq 0 \qquad \text{mientras} \qquad g'(x) = \frac{4}{x}, \quad x > 0.$$ ■

EJEMPLO 8 Simplificar antes de diferenciar

Diferencie $y = \ln \dfrac{x^{1/2}(2x + 7)^4}{(3x^2 + 1)^2}$.

Solución Al usar las leyes de los logaritmos proporcionadas en la sección 1.6 para $x > 0$, podemos volver a escribir el miembro derecho de la función dada como

$$\begin{aligned} y &= \ln x^{1/2}(2x + 7)^4 - \ln(3x^2 + 1)^2 && \leftarrow \ln(M/N) = \ln M - \ln N \\ &= \ln x^{1/2} + \ln(2x + 7)^4 - \ln(3x^2 + 1)^2 && \leftarrow \ln(MN) = \ln M + \ln N \\ &= \frac{1}{2} \ln x + 4 \ln(2x + 7) - 2 \ln(3x^2 + 1) && \leftarrow \ln N^c = c \ln N \end{aligned}$$

de modo que $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{2x + 7} \cdot 2 - 2 \cdot \frac{1}{3x^2 + 1} \cdot 6x$$

o bien, $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x} + \frac{8}{2x + 7} - \frac{12x}{3x^2 + 1}.$$ ■

Diferenciación logarítmica La diferenciación de una función complicada $y = f(x)$ que contiene productos, cocientes y potencias puede simplificarse por medio de una técnica denominada **diferenciación logarítmica**. El procedimiento consta en tres pasos.

Directrices para diferenciación logarítmica

i) Tome el logaritmo natural de ambos miembros de $y = f(x)$. Use las propiedades generales de los logaritmos para simplificar tanto como sea posible el miembro derecho de $\ln y = \ln f(x)$.

ii) Diferencie implícitamente la versión simplificada de $\ln y = \ln f(x)$:

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} \ln f(x).$$

iii) Puesto que la derivada del miembro izquierdo es $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}$, multiplique ambos miembros por y y sustituya y por $f(x)$.

Ahora ya sabe cómo diferenciar cualquier función del tipo

$$y = (\text{constante})^{\text{variable}} \qquad \text{y} \qquad y = (\text{variable})^{\text{constante}}.$$

Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx} \pi^x = \pi^x(\ln \pi) \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx} x^\pi = \pi x^{\pi - 1}.$$

Hay funciones donde tanto la base como el exponente son variables:

$$y = (\text{variable})^{\text{variable}}. \tag{11}$$

Por ejemplo, $f(x) = (1 + 1/x)^x$ es una función del tipo descrito en (11). Recuerde que en la sección 1.6 vimos que $f(x) = (1 + 1/x)^x$ desempeñaba un papel importante en la definición del número e. A pesar de que no se desarrollará una fórmula general para la derivada de funciones del tipo dado en (11), es posible obtener sus derivadas por medio del proceso de diferenciación logarítmica. El siguiente ejemplo ilustra el método para encontrar dy/dx.

EJEMPLO 9 Diferenciación logarítmica

Diferencie $y = x^{\sqrt{x}}, x > 0$.

Solución Al tomar el logaritmo natural de ambos miembros de la ecuación dada y simplificar obtenemos

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x. \quad \leftarrow \text{propiedad } iii) \text{ de las leyes de los logaritmos. Sección 1.6}$$

Luego se diferencia implícitamente:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{-1/2}\cdot\ln x \quad \leftarrow \text{regla del producto}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right] \quad \leftarrow \text{ahora se sustituye } y \text{ por } x^{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2}x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2 + \ln x). \quad \leftarrow \text{denominador común y leyes de los exponentes}$$

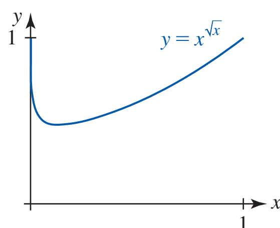


FIGURA 3.9.2 Gráfica de la función en el ejemplo 9

La gráfica de $y = x^{\sqrt{x}}$ en la FIGURA 3.9.2 se obtuvo con ayuda de un dispositivo para graficar. Observe que la gráfica tiene una tangente horizontal en el punto donde $dy/dx = 0$. Por tanto, la coordenada x del punto de tangencia horizontal se determina a partir de $2 + \ln x = 0$ o $\ln x = -2$. La última ecuación proporciona $x = e^{-2}$. ■

EJEMPLO 10 Diferenciación logarítmica

Encuentre la derivada de $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}}$.

Solución Observe que la función dada no contiene logaritmos. Entonces podemos encontrar dy/dx usando una aplicación ordinaria de las reglas del cociente, del producto y de potencias. Este procedimiento, que es tedioso, puede evitarse al tomar primero el logaritmo de ambos miembros de la ecuación dada, simplificar como se hizo en el ejemplo con las leyes de los logaritmos y *luego* diferenciar implícitamente. Se toma el logaritmo de ambos miembros de la ecuación dada y se simplifica el miembro derecho:

$$\ln y = \ln\frac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}}$$

$$= \ln\sqrt[3]{x^4 + 6x^2} + \ln(8x + 3)^5 - \ln(2x^2 + 7)^{2/3}$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x^4 + 6x^2) + 5\ln(8x + 3) - \frac{2}{3}\ln(2x^2 + 7).$$

Al diferenciar la última línea con respecto a x obtenemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^4 + 6x^2}\cdot(4x^3 + 12x) + 5\cdot\frac{1}{8x + 3}\cdot 8 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2x^2 + 7}\cdot 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{4x^3 + 12x}{3(x^4 + 6x^2)} + \frac{40}{8x + 3} - \frac{8x}{3(2x^2 + 7)}\right] \quad \leftarrow \text{ambos lados se multiplican por } y$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}}\left[\frac{4x^3 + 12x}{3(x^4 + 6x^2)} + \frac{40}{8x + 3} - \frac{8x}{3(2x^2 + 7)}\right]. \quad \leftarrow y \text{ se sustituye por la expresión original}$$ ■

Posdata: Otro repaso a la derivada de $f(x) = \log_b x$ Como se afirmó en la introducción de esta sección, podemos obtener la derivada de $f(x) = \log_b x$ al usar la definición de la derivada. Por (2) de la sección 3.1,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_b(x+h) - \log_b x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\log_b \frac{x+h}{x} \qquad \leftarrow \text{álgebra y las leyes de los logaritmos}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\log_b\left(1 + \frac{h}{x}\right) \qquad \leftarrow \text{división de } x + h \text{ entre } x$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_b\left(1 + \frac{h}{x}\right) \qquad \leftarrow \text{multiplicación por } x/x = 1$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_b\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} \qquad \leftarrow \text{las leyes de los logaritmos}$$

$$= \frac{1}{x}\log_b\left[\lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}\right]. \qquad (12)$$

El último paso, tomar el límite dentro de la función logarítmica, se justifica al invocar la continuidad de la función sobre $(0, \infty)$ y suponer que el límite entre corchetes existe. Si en la última ecuación se hace $t = h/x$, entonces, puesto que x es fija, $h \to 0$ implica $t \to 0$. En consecuencia, por (4) de la sección 1.6 vemos que

$$\lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} = \lim_{t\to 0}(1 + t)^{1/t} = e.$$

Por tanto, el resultado en (12) muestra que

$$\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{x}\log_b e. \qquad (13)$$

Quienes poseen un ojo agudo y gran memoria han observado que (13) no es lo mismo que (2). Los resultados son equivalentes, puesto que por las fórmulas de cambio de base para logaritmos tenemos que $\log_b e = \ln e/\ln b = 1/\ln b$.

Una vez que se hace la elección "natural" de $b = e$, (13) se vuelve (1) puesto que $\log_e e = \ln e = 1$.

Posdata: Otro repaso a la regla de potencias Finalmente, ya es posible demostrar la regla de potencias $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$, (3) de la sección 3.2, para todos los números reales exponentes n. Nuestra demostración usa el siguiente hecho: para $x > 0$, x^n se define para todos los números reales n. Luego, debido a la identidad $x = e^{\ln x}$ podemos escribir

$$x^n = (e^{\ln x})^n = e^{n \ln x}.$$

Así,

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}e^{n\ln x} = e^{n\ln x}\frac{d}{dx}(n\ln x) = \frac{n}{x}e^{n\ln x}.$$

Al sustituir $e^{n \ln x} = x^n$ en el último resultado se completa la demostración para $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{n}{x}x^n = nx^{n-1}.$$

La última fórmula de derivada también es válida para $x < 0$ cuando $n = p/q$ es un número racional y q es un entero impar.

Ejercicios 3.9

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-12.

Fundamentos

En los problemas 1-24, encuentre la derivada de la función dada.

1. $y = 10 \ln x$
2. $y = \ln 10x$
3. $y = \ln x^{1/2}$
4. $y = (\ln x)^{1/2}$
5. $y = \ln(x^4 + 3x^2 + 1)$
6. $y = \ln(x^2 + 1)^{20}$
7. $y = x^2 \ln x^3$
8. $y = x - \ln|5x + 1|$
9. $y = \dfrac{\ln x}{x}$
10. $y = x(\ln x)^2$
11. $y = \ln\dfrac{x}{x+1}$
12. $y = \dfrac{\ln 4x}{\ln 2x}$
13. $y = -\ln|\cos x|$
14. $y = \dfrac{1}{3}\ln|\operatorname{sen} 3x|$
15. $y = \dfrac{1}{\ln x}$
16. $y = \ln\dfrac{1}{x}$
17. $f(x) = \ln(x \ln x)$
18. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$
19. $g(x) = \sqrt{\ln\sqrt{x}}$
20. $w(\theta) = \theta \operatorname{sen}(\ln 5\theta)$
21. $H(t) = \ln t^2(3t^2 + 6)$
22. $G(t) = \ln\sqrt{5t+1}(t^3 + 4)^6$
23. $f(x) = \ln\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+3}$
24. $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{(3x+2)^5}{x^4+7}}$

25. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln x$ en $x = 1$.

26. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln(x^2 - 3)$ en $x = 2$.

27. Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \ln(e^{3x} + x)$ en $x = 0$.

28. Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \ln(xe^{-x^3})$ en $x = 1$.

29. Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de f' en el punto en que la pendiente de la tangente a la gráfica de $f(x) = \ln x^2$ es 4.

30. Determine el punto sobre la gráfica de $y = \ln 2x$ donde la recta tangente es perpendicular a $x + 4y = 1$.

En los problemas 31 y 32, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

31. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ **32.** $f(x) = x^2 \ln x$

En los problemas 33-36, encuentre la derivada indicada y simplifique tanto como pueda.

33. $\dfrac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ **34.** $\dfrac{d}{dx}\ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$

35. $\dfrac{d}{dx}\ln(\sec x + \tan x)$ **36.** $\dfrac{d}{dx}\ln(\csc x - \cot x)$

En los problemas 37-40, encuentre la derivada de orden superior indicada.

37. $y = \ln x$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ **38.** $y = x \ln x$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

39. $y = (\ln|x|)^2$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **40.** $y = \ln(5x - 3)$; $\dfrac{d^4y}{dx^4}$

En los problemas 41 y 42, C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada para $x > 0$.

41. $y = C_1x^{-1/2} + C_2x^{-1/2} \ln x$; $4x^2y'' + 8xy' + y = 0$

42. $y = C_1x^{-1}\cos\left(\sqrt{2} \ln x\right) + C_2x^{-1} \operatorname{sen}\left(\sqrt{2} \ln x\right)$; $x^2y'' + 3xy' + 3y = 0$

En los problemas 43-48, use diferenciación implícita para encontrar dy/dx.

43. $y^2 = \ln xy$ **44.** $y = \ln(x + y)$

45. $x + y^2 = \ln\dfrac{x}{y}$ **46.** $y = \ln xy^2$

47. $xy = \ln(x^2 + y^2)$ **48.** $x^2 + y^2 = \ln(x + y)^2$

En los problemas 49-56, use diferenciación logarítmica para encontrar dy/dx.

49. $y = x^{\operatorname{sen} x}$ **50.** $y = (\ln|x|)^x$

51. $y = x(x - 1)^x$ **52.** $y = \dfrac{(x^2 + 1)^x}{x^2}$

53. $y = \dfrac{\sqrt{(2x + 1)(3x + 2)}}{4x + 3}$ **54.** $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^2 + 2}}$

55. $y = \dfrac{(x^3 - 1)^5(x^4 + 3x^3)^4}{(7x + 5)^9}$ **56.** $y = x\sqrt{x + 1}\,\sqrt[3]{x^2 + 2}$

57. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^{x+2}$ en $x = 1$.

58. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x(\ln x)^x$ en $x = e$.

En los problemas 59 y 60, encuentre el punto sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal. Use un dispositivo para graficar a fin de obtener la gráfica de cada función sobre el intervalo $[0.01, 1]$.

59. $y = x^x$ **60.** $y = x^{2x}$

≡ Piense en ello

61. Encuentre las derivadas de
a) $y = \tan x^x$ ***b***) $y = x^xe^{x^x}$ ***c***) $y = x^{x^{x}}$.

62. Encuentre d^2y/dx^2 para $y = \sqrt{x^x}$.

63. La función $f(x) = \ln|x|$ no es diferenciable sólo en $x = 0$. La función $g(x) = |\ln x|$ no es diferenciable en $x = 0$ ni en otro valor de $x > 0$. ¿Cuál es?

64. Encuentre una manera para calcular $\dfrac{d}{dx}\log_x e$.

≡ Problemas con calculadora/SAC

65. ***a***) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$ sobre el intervalo $(0, 5\pi)$.
b) Explique por qué en ciertos intervalos parece que no hay gráfica. Identifique los intervalos.

66. ***a***) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = |\cos x|^{\cos x}$ sobre el intervalo $[0, 5\pi]$.
b) Determine, por lo menos aproximadamente, los valores de x en el intervalo $[0, 5\pi]$ para los cuales la tangente a la gráfica es horizontal.

67. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = x^3 - 12 \ln x$. Luego encuentre al valor *exacto* del menor valor de $f(x)$.

3.10 Funciones hiperbólicas

Introducción Si alguna vez ha visitado el Arco de San Luis, Missouri, que mide 630 pies de altura, quizá se haya preguntado: ¿cuál es la forma del arco?, y recibido la respuesta críptica: la forma de una catenaria invertida. La palabra *catenaria* proviene de la palabra latina *catena* y significa literalmente “cadena colgante” (los romanos usaban una cadena para suje-

tar a los perros). Es posible demostrar que la forma que asumen un alambre flexible, una cadena, un cable o una cuerda colgantes suspendidos en dos puntos es la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{k}{2}(e^{cx} + e^{-cx}) \tag{1}$$

para elecciones idóneas de las constantes c y k. La gráfica de cualquier función de la forma dada en (1) se denomina **catenaria**.



El Arco de San Luis, Missouri.

Funciones hiperbólicas Combinaciones como (1) que implican las funciones exponenciales e^x y e^{-x} ocurren tan a menudo en matemáticas que ameritan definiciones especiales.

Definición 3.10.1 Seno y coseno hiperbólico

Para cualquier número real x, el **seno hiperbólico** de x es

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{2}$$

y el **coseno hiperbólico** de x es

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{3}$$

Puesto que el dominio de cada una de las funciones exponenciales e^x y e^{-x} es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$, el dominio de $y = \operatorname{senh} x$ y $y = \cosh x$ es $(-\infty, \infty)$. Por (2) y (3) de la definición 3.10.1, también resulta evidente que

$$\operatorname{senh} 0 = 0 \quad \text{y} \quad \cosh 0 = 1.$$

La forma del Arco de San Luis, Missouri, está basada en el modelo matemático

$$y = A - B\cosh(Cx/L).$$

donde $A = 693.8597$, $B = 68.7672$, $L = 299.2239$, $C = 3.0022$, y x y y se miden en pies. Cuando $x = 0$, se obtiene la altura aproximada de 630 pies.

En forma análoga a las funciones trigonométricas $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$ que están definidas en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, las cuatro funciones hiperbólicas adicionales se definen en términos de $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$.

Definición 3.10.2 Otras funciones hiperbólicas

Para un número real x, la **tangente hiperbólica** de x es

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \tag{4}$$

la **cotangente hiperbólica** de x, $x \neq 0$, es

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \tag{5}$$

la **secante hiperbólica** de x es

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \tag{6}$$

la **cosecante hiperbólica** de x, $x \neq 0$, es

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}. \tag{7}$$

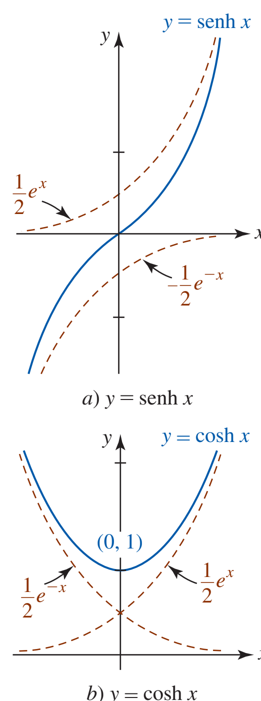
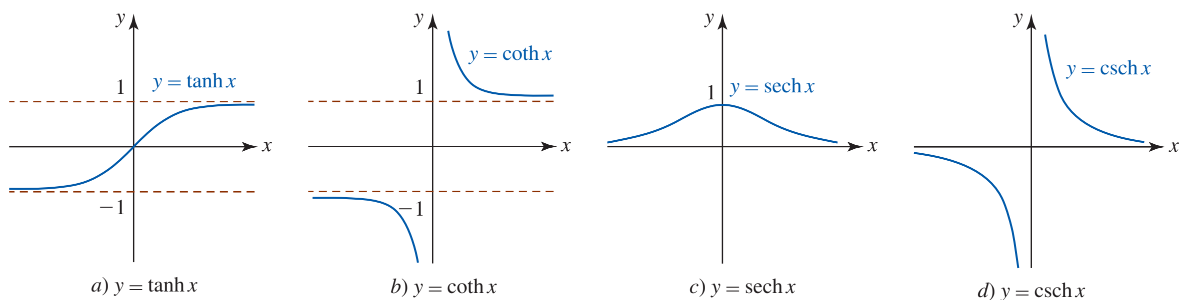


FIGURA 3.10.1 Gráficas del seno y coseno hiperbólicos

Gráficas de funciones hiperbólicas Las gráficas del seno hiperbólico y del coseno hiperbólico se proporcionan en la FIGURA 3.10.1. Observe la semejanza de la gráfica en la figura 3.10.1*b*) y la forma del Arco de San Luis, Missouri, en la foto al principio de esta sección. Las gráficas de la tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas se muestran en la FIGURA 3.10.2. Observe que $x = 0$ es una asíntota vertical de las gráficas de $y = \coth x$ y $y = \operatorname{csch} x$.



a) $y = \tanh x$ *b*) $y = \coth x$ *c*) $y = \operatorname{sech} x$ *d*) $y = \operatorname{csch} x$

FIGURA 3.10.2 Gráficas de la tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas

Identidades Aunque las funciones hiperbólicas no son periódicas, cuentan con muchas identidades que son semejantes a las de las funciones trigonométricas. Observe que las gráficas en la figura 3.10.1*a*) y *b*) son simétricas con respecto al origen y al eje *y*, respectivamente. En otras palabras, $y = \operatorname{senh} x$ es una función impar y $y = \cosh x$ es una función par:

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x, \tag{8}$$

$$\cosh(-x) = \cosh x. \tag{9}$$

En trigonometría, una identidad fundamental es $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. Para funciones hiperbólicas, el análogo de esta identidad es

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1. \tag{10}$$

Para demostrar (10) recurrimos a (2) y (3) de la definición 3.10.1:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1.\end{aligned}$$

Las ecuaciones (8) a (10) y otras once identidades se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.10.1 Identidades hiperbólicas

$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$	$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$	(11)
$\cosh(-x) = \cosh x$	$\operatorname{senh}(x - y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y$	(12)
$\tanh(-x) = -\tanh x$	$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$	(13)
$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$	$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$	(14)
$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$	$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$	(15)
$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$	(16)
$\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}(-1 + \cosh 2x)$	$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$	(17)

Derivadas de funciones hiperbólicas Las derivadas de las funciones hiperbólicas se concluyen por (14) de la sección 3.8 y las reglas de diferenciación; por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}e^x - \frac{d}{dx}e^{-x}\right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Es decir,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x. \tag{18}$$

En forma semejante, a partir de la definición del coseno hiperbólico en (3) debe resultar evidente que

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x. \tag{19}$$

Para diferenciar, por ejemplo, la tangente hiperbólica, se usan la regla del cociente y la definición que se proporcionó en (4):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tanh x &= \frac{d}{dx}\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\\ &= \frac{\cosh x \cdot \dfrac{d}{dx}\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} x \cdot \dfrac{d}{dx}\cosh x}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} \leftarrow \text{por (10), esto es igual a 1}\\ &= \frac{1}{\cosh^2 x}.\end{aligned}$$

En otras palabras,

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x. \qquad (20)$$

Las derivadas de las seis funciones hiperbólicas en el caso más general se concluyen por la regla de la cadena.

Teorema 3.10.2 Derivadas de las funciones hiperbólicas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} u = \cosh u\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cosh u = \operatorname{senh} u\frac{du}{dx}, \qquad (21)$$

$$\frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch}^2 u\frac{du}{dx}, \qquad (22)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u\tanh u\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u\coth u\frac{du}{dx}. \qquad (23)$$

Usted debe tomar nota cuidadosa de la ligera diferencia en los resultados en las ecuaciones (21) a (23) y las fórmulas análogas para las funciones trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \quad \text{mientras} \quad \frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x \quad \text{mientras} \quad \frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x\tanh x.$$

EJEMPLO 1 Regla de la cadena

Diferencie

a) $y = \operatorname{senh}\sqrt{2x+1}$ ***b)*** $y = \coth x^3$.

Solución

a) Por el primer resultado en (21),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \cosh\sqrt{2x+1}\cdot\frac{d}{dx}(2x+1)^{1/2}\\ &= \cosh\sqrt{2x+1}\left(\frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2}\cdot 2\right)\\ &= \frac{\cosh\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.\end{aligned}$$

b) Por el segundo resultado en (22),

$$\frac{dy}{dx} = -\text{csch}^2 x^3 \cdot \frac{d}{dx}x^3$$
$$= -\text{csch}^2 x^3 \cdot 3x^2. \quad ■$$

EJEMPLO 2 Valor de una derivada

Evalúe la derivada de $y = \dfrac{3x}{4 + \cosh 2x}$ en $x = 0$.

Solución Por la regla del cociente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4 + \cosh 2x) \cdot 3 - 3x(\text{senh } 2x \cdot 2)}{(4 + \cosh 2x)^2}.$$

Debido a que senh 0 = 0 y cosh 0 = 1, tenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}. \quad ■$$

Funciones hiperbólicas inversas Al analizar la figura 3.10.1*a*) observamos que $y = \text{senh } x$ es una función uno a uno. Es decir, para cualquier número real y en el rango $(-\infty, \infty)$ del seno hiperbólico corresponde sólo un número real x en su dominio $(-\infty, \infty)$. Por tanto, $y = \text{senh } x$ tiene una función inversa que escribimos $y = \text{senh}^{-1} x$. Vea la FIGURA 3.10.3*a*). Así como en el análisis anterior de las funciones trigonométricas inversas en la sección 1.5, esta última notación es equivalente a $x = \text{senh } y$. A partir de la figura 3.10.2*a*) también observamos que $y = \tanh x$ con dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(-1, 1)$ también es uno a uno y tiene una inversa $y = \tanh^{-1} x$ con dominio $(-1, 1)$ y rango $(-\infty, \infty)$. Vea la figura 3.10.3*c*). Pero por las figuras 3.10.1*b*) y 3.10.2*c*) resulta evidente que $y = \cosh x$ y $y = \text{sech } x$ no son funciones uno a uno, de modo que no tienen funciones inversas a menos que sus dominios se restrinjan en forma conveniente. Al analizar la figura 3.10.1*b*) observamos que cuando el dominio de $y = \cosh x$ se restringe al intervalo $[0, \infty)$, el rango correspondiente es $[1, \infty)$. Entonces, el dominio de la función inversa $y = \cosh^{-1} x$ es $[1, \infty)$ y su rango es $[0, \infty)$. Vea la figura 3.10.3*b*). Las gráficas de todas las funciones hiperbólicas inversas junto con sus dominios y rangos se resumen en la figura 3.10.3.

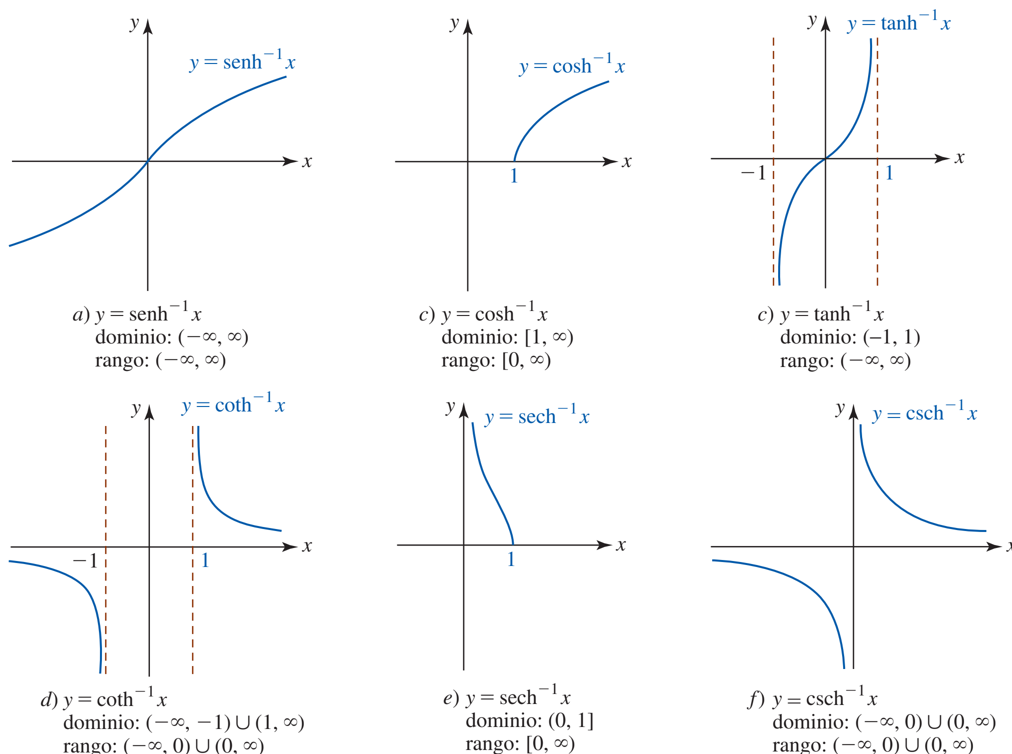


FIGURA 3.10.3 Gráficas de las inversas de las hiperbólicas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante

Funciones hiperbólicas inversas como logaritmos Debido a que todas las funciones hiperbólicas están definidas en términos de combinaciones de e^x, no debe sorprender el hecho de encontrar que las funciones hiperbólicas inversas pueden expresarse en términos del logaritmo natural. Por ejemplo, $y = \operatorname{senh}^{-1}x$ es equivalente a $x = \operatorname{senh} y$, de modo que

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \qquad \text{o bien,} \qquad 2x = \frac{e^{2y} - 1}{e^y} \qquad \text{o bien,} \qquad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Debido a que la última ecuación es cuadrática en e^y, la fórmula cuadrática proporciona

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}. \tag{24}$$

Luego, es necesario rechazar la solución correspondiente al signo menos en (24) porque $e^y > 0$ pero $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$. Así, tenemos

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \qquad \text{o bien,} \qquad y = \operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

En forma semejante, para $y = \tanh^{-1}x$, $|x| < 1$,

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

proporciona

$$e^y(1 - x) = (1 + x)e^{-y}$$

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$2y = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

o bien,

$$y = \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

Se han demostrado dos resultados del siguiente teorema.

Teorema 3.10.3 Identidades logarítmicas

$$\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad \cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), x \geq 1 \tag{25}$$

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), |x| < 1 \qquad \coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right), |x| > 1 \tag{26}$$

$$\operatorname{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), 0 < x \leq 1 \qquad \operatorname{csch}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), x \neq 0 \tag{27}$$

Las identidades anteriores constituyen un medio conveniente para obtener los valores numéricos de una función hiperbólica inversa. Por ejemplo, con ayuda de una calculadora, a partir del primer resultado en (25) en el teorema 3.10.3 vemos que cuando $x = 4$,

$$\operatorname{senh}^{-1}4 = \ln\left(4 + \sqrt{17}\right) \approx 2.0947.$$

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas Para encontrar la derivada de una función hiperbólica inversa es posible proceder de dos formas. Por ejemplo, si

$$y = \operatorname{senh}^{-1}x \qquad \text{entonces} \qquad x = \operatorname{senh} y.$$

Al usar diferenciación implícita es posible escribir

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\operatorname{senh} y$$

$$1 = \cosh y\frac{dy}{dx}.$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

El resultado anterior puede obtenerse de otra manera. Por el teorema 3.10.3 sabemos que

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

En consecuencia, por la derivada del logaritmo obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x\right) \quad \leftarrow \text{por (3) de la sección 3.9}$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\,\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Esencialmente, se ha demostrado la primera entrada en (28) en el siguiente teorema.

Teorema 3.10.4 Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cosh^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx},\ u > 1, \qquad (28)$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}u = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx},\quad |u| < 1, \qquad \frac{d}{dx}\coth^{-1}u = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx},\ |u| > 1, \qquad (29)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}u = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx},\ 0 < u < 1, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}u = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx},\ u \neq 0. \qquad (30)$$

EJEMPLO 3 Derivada del coseno hiperbólico inverso

Diferencie $y = \cosh^{-1}(x^2+5)$.

Solución Con $u = x^2 + 5$, por la segunda fórmula en (28) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+5)^2-1}}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+5) = \frac{2x}{\sqrt{x^4+10x^2+24}}.$$ ■

EJEMPLO 4 Derivada de la tangente hiperbólica inversa

Diferencie $y = \tanh^{-1}4x$.

Solución Con $u = 4x$ por la primera fórmula en (29) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-(4x)^2}\cdot\frac{d}{dx}4x = \frac{4}{1-16x^2}.$$ ■

EJEMPLO 5 Reglas del producto y de la cadena

Diferencie $y = e^{x^2}\operatorname{sech}^{-1}x$.

Solución Por la regla del producto y la primera fórmula en (30) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}\underbrace{\left(\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}\right)}_{\text{por la primera fórmula en (30)}} + \underbrace{2xe^{x^2}}_{\text{por (14) de la sección 3.8}}\operatorname{sech}^{-1}x$$

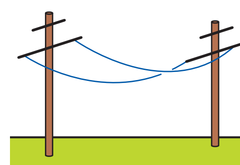
$$= -\frac{e^{x^2}}{x\sqrt{1-x^2}} + 2xe^{x^2}\operatorname{sech}^{-1}x.$$ ■

NOTAS DESDE EL AULA

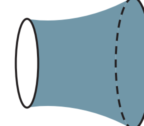
i) Como se mencionó en la introducción de esta sección, la gráfica de cualquier función de la forma $f(x) = k \cosh cx$, k y c constantes, se denomina **catenaria**. La forma que asume un alambre flexible o una cuerda pesada que cuelgan entre dos postes básicamente es la misma que la de la función coseno hiperbólico. Además, si dos anillos circulares se mantienen juntos en forma vertical y no están muy separados entre sí, entonces una película jabonosa estirada entre los anillos asume una superficie con área mínima. La superficie es una porción de una **catenoide**, que es la superficie que obtenemos al hacer girar una catenaria alrededor del eje x. Vea la FIGURA 3.10.4.

ii) La semejanza entre las funciones trigonométricas e hiperbólicas va más allá de las fórmulas de derivadas y las identidades básicas. Si t es un ángulo medido en radianes cuyo lado terminal es OP, entonces las coordenadas de P sobre una *circunferencia* unitaria $x^2 + y^2 = 1$ son $(\cos t, \operatorname{sen} t)$. Luego, el área del sector sombreado que se muestra en la FIGURA 3.10.5*a*) es $A = \frac{1}{2}t$ y así $t = 2A$. De esta forma, las *funciones circulares* cos t y sen t pueden considerarse funciones del área A.

Tal vez usted ya sepa que la gráfica de la ecuación $x^2 - y^2 = 1$ se denomina *hipérbola*. Debido a que $\cosh t \geq 1$ y $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$, se concluye que las coordenadas de un punto P sobre la rama derecha de la hipérbola son $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$. Además, puede demostrarse que el área del sector hiperbólico en la figura 3.10.5*b*) está relacionado con el número t por $t = 2A$. Por tanto, vemos el origen del nombre de la *función hiperbólica*.

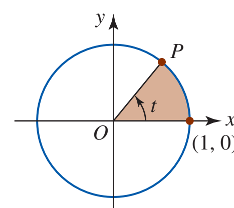


a) cables colgantes

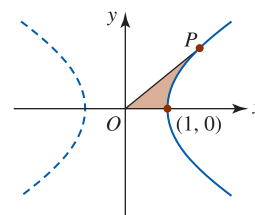


b) película de jabón

FIGURA 3.10.4 Catenaria en *a*); catenoide en *b*)



a) sector circular



b) sector hiperbólico

FIGURA 3.10.5 Círculo en *a*); hipérbola en *b*)

Ejercicios 3.10

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-12.

Fundamentos

1. Si $\operatorname{senh} x = -\frac{1}{2}$, encuentre los valores de las funciones hiperbólicas restantes.

2. Si $\cosh x = 3$, encuentre los valores de las funciones hiperbólicas restantes.

En los problemas 3-26, encuentre la derivada de la función dada.

3. $y = \cosh 10x$

4. $y = \operatorname{sech} 8x$

5. $y = \tanh \sqrt{x}$

6. $y = \operatorname{csch} \dfrac{1}{x}$

7. $y = \operatorname{sech}(3x - 1)^2$

8. $y = \operatorname{senh} e^{x^2}$

9. $y = \coth(\cosh 3x)$

10. $y = \tanh(\operatorname{senh} x^3)$

11. $y = \operatorname{senh} 2x \cosh 3x$

12. $y = \operatorname{sech} x \coth 4x$

13. $y = x \cosh x^2$

14. $y = \dfrac{\operatorname{senh} x}{x}$

15. $y = \operatorname{senh}^3 x$

16. $y = \cosh^4 \sqrt{x}$

17. $f(x) = (x - \cosh x)^{2/3}$

18. $f(x) = \sqrt{4 + \tanh 6x}$

19. $f(x) = \ln(\cosh 4x)$

20. $f(x) = (\ln(\operatorname{sech} x))^2$

21. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + \cosh x}$

22. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 + \operatorname{senh} x}$

23. $F(t) = e^{\operatorname{senh} t}$

24. $H(t) = e^t e^{\operatorname{csch} t^2}$

25. $g(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{senh} 2t}$

26. $w(t) = \dfrac{\tanh t}{(1 + \cosh t)^2}$

27. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \operatorname{senh} 3x$ en $x = 0$.

28. Encuentre de la recta tangente a la gráfica de $y = \cosh x$ en $x = 1$.

En los problemas 29 y 30, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la tangente es horizontal.

29. $f(x) = (x^2 - 2)\cosh x - 2x \operatorname{senh} x$

30. $f(x) = \cos x \cosh x - \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x$

En los problemas 31 y 32, encuentre d^2y/dx^2 para la función dada.

31. $y = \tanh x$

32. $y = \operatorname{sech} x$

En los problemas 33 y 34, C_1, C_2, C_3, C_4 y k son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

33. $y = C_1 \cosh kx + C_2 \operatorname{senh} kx$; $\quad y'' - k^2 y = 0$

34. $y = C_1 \cos kx + C_2 \operatorname{sen} kx + C_3 \cosh kx + C_4 \operatorname{senh} kx$; $y^{(4)} - k^4 y = 0$

En los problemas 35-48, encuentre la derivada de la función dada.

35. $y = \operatorname{senh}^{-1} 3x$ **36.** $y = \cosh^{-1}\dfrac{x}{2}$

37. $y = \tanh^{-1}(1 - x^2)$ **38.** $y = \coth^{-1}\dfrac{1}{x}$

39. $y = \coth^{-1}(\csc x)$ **40.** $y = \operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{sen} x)$

41. $y = x \operatorname{senh}^{-1} x^3$ **42.** $y = x^2 \operatorname{csch}^{-1} x$

43. $y = \dfrac{\operatorname{sech}^{-1} x}{x}$ **44.** $y = \dfrac{\coth^{-1} e^{2x}}{e^{2x}}$

45. $y = \ln(\operatorname{sech}^{-1} x)$ **46.** $y = x \tanh^{-1} x + \ln\sqrt{1 - x^2}$

47. $y = (\cosh^{-1} 6x)^{1/2}$ **48.** $y = \dfrac{1}{(\tanh^{-1} 2x)^3}$

☰ Aplicaciones

49. ***a***) Suponga que k, m y g son constantes reales. Demuestre que la función

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t\right)$$

satisface la ecuación diferencial $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv^2$.

b) La función v representa la velocidad de una masa m que cae cuando la resistencia del aire se considera proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea. Encuentre la **velocidad terminal** o limitante $v_{\text{ter}} = \lim_{t\to\infty} v(t)$ de la masa.

c) Suponga que un paracaidista de 80 kg retrasa la abertura del paracaídas hasta que alcanza la velocidad terminal. Determine la velocidad terminal si se sabe que $k = 0.25$ kg/m.

50. Una mujer, M, se mueve en la dirección positiva del eje x, empezando en el origen, jalando un bote a lo largo de la curva C, denominada **tractriz**, indicada en la FIGURA 3.10.6. El bote, que inicialmente se encuentra sobre el eje y en $(0, a)$, es jalado por una cuerda de longitud constante a que se mantiene durante todo el movimiento. Una ecuación de la tractriz está dada por

$$x = a\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

a) Vuelva a escribir esta ecuación usando una función hiperbólica.

b) Use diferenciación implícita para demostrar que la ecuación de la tractriz satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

c) Interprete geométricamente la ecuación diferencial del inciso *b*).

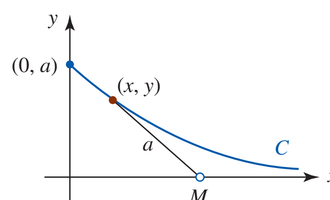


FIGURA 3.10.6 Tractriz en el problema 50

☰ Piense en ello

En los problemas 51 y 52, encuentre el valor numérico exacto de la cantidad dada.

51. $\cosh(\ln 4)$ **52.** $\operatorname{senh}(\ln 0.5)$

En los problemas 53 y 54, exprese la cantidad dada como una función racional de x.

53. $\operatorname{senh}(\ln x)$ **54.** $\tanh(3\ln x)$

55. Demuestre que para cualquier entero positivo n,

$$(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh nx + \operatorname{senh} nx$$

Revisión del capítulo 3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-13.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-20, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. Si $y = f(x)$ es continua en un número a, entonces hay una recta tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$. _____

2. Si f es diferenciable en cualquier un número real x, entonces f es continua en todas partes. _____

3. Si $y = f(x)$ tiene una recta tangente en $(a, f(a))$, entonces f necesariamente es diferenciable en $x = a$. _____

4. La razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ con respecto a x en x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en $(x_0, f(x_0))$. _____

5. En $x = -1$, la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ es paralela a la recta $y = 2$. _____

6. La derivada de un producto es el producto de las derivadas. _____

7. Una función polinomial tiene una recta tangente en todo punto de su gráfica. _____

8. Para $f(x) = -x^2 + 5x + 1$ una ecuación de la recta tangente es $f'(x) = -2x + 5$._____
9. La función $f(x) = x/(x^2 + 9)$ es diferenciable sobre el intervalo $[-3, 3]$._____
10. Si $f'(x) = g'(x)$, entonces $f(x) = g(x)$. _____
11. Si m es la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $-1 \leq m \leq 1$. _____
12. Para $y = \tan^{-1}x$, $dy/dx > 0$ para toda x. _____
13. $\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\operatorname{sen}^{-1}x$ _____
14. La función $f(x) = x^5 + x^3 + x$ tiene una inversa. _____
15. Si $f'(x) < 0$ sobre el intervalo $[2, 8]$, entonces $f(3) > f(5)$. _____
16. Si f es una función creciente diferenciable sobre un intervalo, entonces $f'(x)$ también es creciente sobre el intervalo. _____
17. La única función para la cual $f'(x) = f(x)$ es $f(x) = e^x$. _____
18. $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{|x|}$ _____
19. $\frac{d}{dx}\cosh^2 x = \frac{d}{dx}\operatorname{senh}^2 x$ _____
20. Toda función hiperbólica inversa es un logaritmo. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-20, llene los espacios en blanco.

1. Si $y = f(x)$ es una función polinomial de grado 3, entonces $\frac{d^4}{dx^4}f(x) =$ __________.
2. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln|x|$ en $x = -\frac{1}{2}$ es __________.
3. La pendiente de la recta normal a la gráfica de $f(x) = \tan x$ en $x = \pi/3$ es __________.
4. $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$, entonces $f'(x) =$ __________.
5. Una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = (x + 3)/(x - 2)$ en $x = 0$ es __________.
6. Para $f(x) = 1/(1 - 3x)$ la razón de cambio instantánea de f' con respecto a x en $x = 0$ es __________.
7. Si $f'(4) = 6$ y $g'(4) = 3$, entonces la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = 2f(x) - 5g(x)$ en $x = 4$ es __________.
8. Si $f(2) = 1$, $f'(2) = 5$, $g(2) = 2$ y $g'(2) = -3$, entonces $\left.\frac{d}{dx}\frac{x^2 f(x)}{g(x)}\right|_{x=2} =$ __________.
9. Si $g(1) = 2$, $g'(1) = 3$, $g''(1) = -1$, $f'(2) = 4$ y $f''(2) = 3$, entonces $\left.\frac{d^2}{dx^2}f(g(x))\right|_{x=1} =$ __________.
10. Si $f'(x) = x^2$, entonces $\frac{d}{dx}f(x^3) =$ __________.
11. Si F es una función diferenciable, entonces $\frac{d^2}{dx^2}F(\operatorname{sen} 4x) =$ __________.
12. La función $f(x) = \cot x$ no es diferenciable sobre el intervalo $[0, \pi]$ porque __________.
13. La función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 3 \\ x^2, & x > 3 \end{cases}$$

es diferenciable en $x = 3$ cuando $a =$ __________ y $b =$ __________.
14. Si $f'(x) = \sec^2 2x$, entonces $f(x) =$ __________.
15. La recta tangente a la gráfica de $f(x) = 5 - x + e^{x-1}$ es horizontal en el punto __________.

16. $\dfrac{d}{dx}2^x =$ ________.

17. $\dfrac{d}{dx}\log_{10} x =$ ________.

18. Si $f(x) = \ln|2x - 4|$, el dominio de $f'(x)$ es ________.

19. La gráfica de $y = \cosh x$ se denomina ________.

20. $\cosh^{-1} 1 =$ _______.

C. Ejercicios

En los problemas 1-28, encuentre la derivada de la función dada.

1. $f(x) = \dfrac{4x^{0.3}}{5x^{0.2}}$

2. $y = \dfrac{1}{x^3 + 4x^2 - 6x + 11}$

3. $F(t) = \left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right)^{10}$

4. $h(\theta) = \theta^{1.5}(\theta^2 + 1)^{0.5}$

5. $y = \sqrt[4]{x^4 + 16}\,\sqrt[3]{x^3 + 8}$

6. $g(u) = \sqrt{\dfrac{6u - 1}{u + 7}}$

7. $y = \dfrac{\cos 4x}{4x + 1}$

8. $y = 10 \cot 8x$

9. $f(x) = x^3 \operatorname{sen}^2 5x$

10. $y = \tan^2(\cos 2x)$

11. $y = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{3}{x}$

12. $y = \cos x \cos^{-1} x$

13. $y = (\cot^{-1}x)^{-1}$

14. $y = \operatorname{arc\,sec}(2x - 1)$

15. $y = 2\cos^{-1} x + 2x\sqrt{1 - x^2}$

16. $y = x^2 \tan^{-1}\sqrt{x^2 - 1}$

17. $y = xe^{-x} + e^{-x}$

18. $y = (e + e^2)^x$

19. $y = x^7 + 7^x + 7^\pi + e^{7x}$

20. $y = (e^x + 1)^{-e}$

21. $y = \ln\left(x\sqrt{4x - 1}\right)$

22. $y = \left(\ln \cos^2 x\right)^2$

23. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{sen}^{-1} x)$

24. $y = (\tan^{-1} x)(\tanh^{-1} x)$

25. $y = xe^{x \cosh^{-1} x}$

26. $y = \operatorname{senh}^{-1}\sqrt{x^2 - 1}$

27. $y = \operatorname{senh} e^{x^3}$

28. $y = (\tanh 5x)^{-1}$

En los problemas 29-34, encuentre la derivada indicada.

29. $y = (3x + 1)^{5/2}$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}$

30. $y = \operatorname{sen}(x^3 - 2x)$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

31. $s = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$; $\dfrac{d^4s}{dt^4}$

32. $W = \dfrac{v - 1}{v + 1}$; $\dfrac{d^3W}{dv^3}$

33. $y = e^{\operatorname{sen} 2x}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

34. $f(x) = x^2 \ln x$; $f'''(x)$

35. Use primero las leyes de los logaritmos para simplificar

$$y = \ln\left|\frac{(x + 5)^4(2 - x)^3}{(x + 8)^{10}\sqrt[3]{6x + 4}}\right|,$$

y luego encuentre dy/dx.

36. Encuentre dy/dx para $y = 5^{x^2}x^{\operatorname{sen} 2x}$.

37. Dado que $y = x^3 + x$ es una función uno a uno, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función inversa en $x = 1$.

38. Dado que $f(x) = 8/(1 - x^3)$ es una función uno a uno, encuentre f^{-1} y $(f^{-1})'$.

En los problemas 39 y 40, encuentre dy/dx.

39. $xy^2 = e^x - e^y$ **40.** $y = \ln(xy)$

41. Encuentre una ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ que sea perpendicular a la recta $y = -3x$.

42. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 1$ donde
a) $f''(x) = f(x)$ y ***b***) $f''(x) = f'(x)$.

43. Encuentre ecuaciones para las rectas que pasan por $(0, -9)$ que son tangentes a la gráfica de $y = x^2$.

44. ***a***) Encuentre la intersección con el eje x de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2$ en $x = 1$.
b) Encuentre una ecuación de la recta con la misma intersección con el eje x que es perpendicular a la recta tangente en el inciso *a*).
c) Encuentre el o los puntos donde la recta del inciso *a*) corta la gráfica de $y = x^2$.

45. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ donde la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por $(1, f(1))$ y $(9, f(9))$.

46. Si $f(x) = (1 + x)/x$, ¿cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f'' en $x = 2$?

47. Encuentre las coordenadas x de todos los puntos sobre la gráfica de $f(x) = 2\cos x + \cos 2x$, $0 \le x \le 2\pi$, donde la recta tangente es horizontal.

48. Encuentre el punto sobre la gráfica de $y = \ln 2x$ tal que la recta tangente pase por el origen.

49. Suponga que un circuito en serie contiene un capacitor y un resistor variable. Si la resistencia en el instante t está dada por $R = k_1 + k_2 t$, donde k_1 y k_2 son constantes positivas conocidas, entonces la carga $q(t)$ sobre el capacitor está dada por

$$q(t) = E_0 C + (q_0 - E_0 C)\left(\frac{k_1}{k_1 + k_2 t}\right)^{1/Ck_2},$$

donde C es una constante denominada **capacitancia** y $E(t) = E_0$ es la tensión aplicada. Demuestre que $q(t)$ satisface la condición inicial $q(0) = q_0$ y

$$(k_1 + k_2 t)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_0.$$

50. Suponga que C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función

$$y = C_1 x + C_2\left[\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 1\right]$$

satisface la ecuación diferencial

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

En los problemas 51 y 52, C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

51. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 x e^{-x} + C_4 x e^x$; $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

52. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 x \cos x + C_4 x \operatorname{sen} x$; $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

53. ***a***) Encuentre los puntos sobre la gráfica de $y^3 - y + x^2 - 4 = 0$ correspondientes a $x = 2$.
b) Encuentre las pendientes de las rectas tangentes en los puntos que se encontraron en el inciso *a*).

54. Trace la gráfica de f' a partir de la gráfica de f dada en la FIGURA 3.R.1.

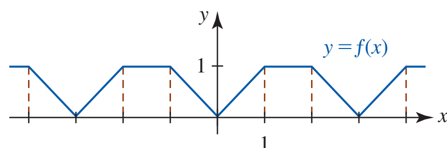


FIGURA 3.R.1 Gráfica para el problema 54

55. La gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, que se muestra en la FIGURA 3.R.2, se denomina **hipocicloide**.* Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica en los puntos correspondientes a $x = \frac{1}{8}$.

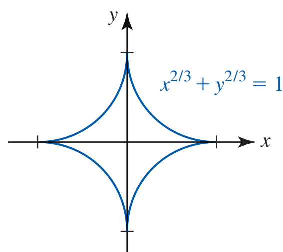


FIGURA 3.R.2 Hipocicloide en el problema 55

56. Encuentre d^2y/dx^2 para la ecuación del problema 55.

57. Suponga

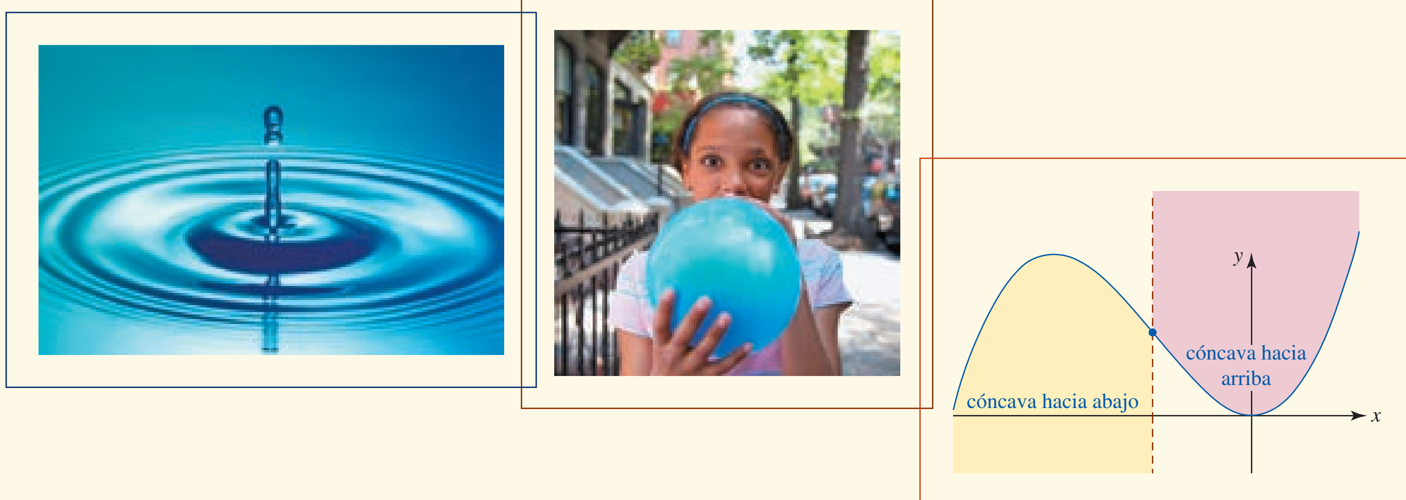
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Encuentre $f'(x)$ para $x \neq 0$. Use la definición de derivada, (2) de la sección 3.1, para determinar si $f'(0)$ existe.

*Consulte el sitio http://mathworld.wolfram.com/Hypocycloid.html para ver varias hipocicloides y sus propiedades.

Capítulo 4

Aplicaciones de la derivada



En este capítulo Las derivadas primera y segunda de una función *f* pueden usarse para determinar la forma de su gráfica. Si imagina la gráfica de una función como una curva que sube y baja, entonces los puntos alto y bajo de la gráfica o, con más precisión, los valores máximo y mínimo de la función, podemos encontrarlos usando la derivada. Como ya vimos, la derivada también proporciona una razón de cambio. En la sección 2.7 vimos brevemente que la razón de cambio con respecto al tiempo *t* de una función que proporciona la posición de un objeto en movimiento es la velocidad del objeto.

Encontrar los valores máximo y mínimo de una función junto con el problema de determinar razones de cambio son dos de los temas centrales de estudio de este capítulo.

4.1 Movimiento rectilíneo

Introducción En la sección 2.7 se definió que el movimiento de un objeto en una línea recta, horizontal o vertical, es un **movimiento rectilíneo**. Una función $s = s(t)$ que proporciona la coordenada del objeto sobre una recta horizontal o vertical se denomina **función posición**. La variable t representa el tiempo y el valor de la función $s(t)$ representa una distancia dirigida, que se mide en centímetros, metros, pies, millas, etc., a partir de un punto de referencia $s = 0$ sobre la recta. Recuerde que sobre una escala horizontal, consideramos la dirección s positiva a la derecha de $s = 0$, y sobre una escala vertical, la dirección s positiva la consideramos hacia arriba.

EJEMPLO 1 Posición de una partícula en movimiento

Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = -t^2 + 4t + 3$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. ¿Cuál es la posición de la partícula a 0, 2 y 6 segundos?

Solución Al sustituir en la función posición obtenemos

$$s(0) = 3, \quad s(2) = 7, \quad s(6) = -9.$$

Como se muestra en la FIGURA 4.1.1, $s(6) = -9 < 0$ significa que la posición de la partícula está a la izquierda del punto de referencia $s = 0$.

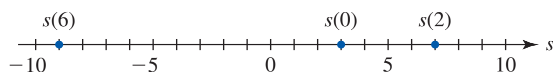


FIGURA 4.1.1 Posición de una partícula en varios instantes en el ejemplo 1 ■

Velocidad y aceleración Si la **velocidad media** de un cuerpo en movimiento sobre un intervalo de tiempo de longitud Δt es

$$\frac{\text{cambio en posición}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

entonces la razón de cambio instantánea, o velocidad del cuerpo, está dada por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Así, tenemos la siguiente definición.

Definición 4.1.1 Función velocidad

Si $s(t)$ es una función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su **función velocidad** $v(t)$ en el instante t es

$$v(t) = \frac{ds}{dt}.$$

La **rapidez** del objeto en el instante t es $|v(t)|$.

La velocidad se mide en centímetros por segundo (cm/s), metros por segundo (m/s), pies por segundo (pies/s), kilómetros por hora (km/h), millas por hora (mi/h), etcétera.

También es posible calcular la razón de cambio de la velocidad.

Definición 4.1.2 Función aceleración

Si $v(t)$ es la función velocidad de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su **función aceleración** $a(t)$ en el instante t es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Las unidades típicas para medir la aceleración son metros por segundo por segundo (m/s^2), pies por segundo por segundo (pies/s^2), millas por hora por hora (mi/h^2), etcétera. A menudo, las unidades de la aceleración se leen literalmente "metros por segundo al cuadrado"

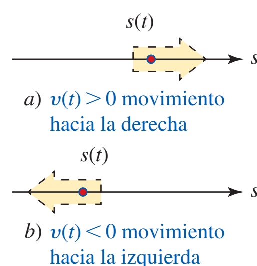


FIGURA 4.1.2 Significado del signo de la función velocidad

Significado de los signos algebraicos En la sección 3.7 vimos que siempre que la derivada de una función f es *positiva* sobre un intervalo I, entonces f es *creciente* sobre I. Geométricamente, la gráfica de una función creciente sube cuando x crece. En forma semejante, si la derivada de una función f es *negativa* sobre I, entonces f es *decreciente*, lo cual significa que su gráfica baja cuando x crece. Sobre un intervalo de tiempo para el cual $v(t) = s'(t) > 0$, es posible afirmar que $s(t)$ es creciente. Por tanto, el objeto se mueve *hacia la derecha* sobre una recta horizontal, o *hacia arriba* sobre una recta vertical. Por otra parte, $v(t) = s'(t) < 0$ implica que $s(t)$ es decreciente y que el movimiento es *hacia la izquierda* sobre una recta horizontal o *hacia abajo* sobre una recta vertical. Vea la FIGURA 4.1.2. Si $a(t) = v'(t) > 0$ sobre un intervalo de tiempo, entonces la velocidad $v(t)$ del objeto es *creciente*, mientras $a(t) = v'(t) < 0$ indica que la velocidad $v(t)$ del objeto es *decreciente*. Por ejemplo, una aceleración de -25 m/s^2 significa que la velocidad decrece por 25 m/s cada segundo. No confunda los términos "velocidad decreciente" y "velocidad creciente" con los conceptos "desaceleración" o "aceleración". Por ejemplo, considere una roca que se deja caer desde la parte superior de un edificio alto. La aceleración de la gravedad es una constante negativa, -32 pies/s^2. El signo negativo significa que la velocidad de la roca disminuye a partir de cero. Una vez que la roca choca contra el suelo, su rapidez $|v(t)|$ es bastante grande, pero $v(t) < 0$. En específico, un objeto en movimiento rectilíneo sobre, por ejemplo, una recta horizontal *desacelera* cuando $v(t) > 0$ (movimiento hacia la derecha) y $a(t) < 0$ (velocidad decreciente), o cuando $v(t) < 0$ (movimiento hacia la izquierda) y $a(t) > 0$ (velocidad creciente). En forma semejante, un objeto en movimiento rectilíneo sobre una recta horizontal *acelera* cuando $v(t) > 0$ (movimiento hacia la derecha) y $a(t) > 0$ (velocidad creciente), o cuando $v(t) < 0$ (movimiento hacia la izquierda) y $a(t) < 0$ (velocidad decreciente). En general,

Un objeto en movimiento rectilíneo

- **desacelera** cuando su velocidad y aceleración tienen signos algebraicos opuestos, y
- **acelera** cuando su velocidad y aceleración tienen el mismo signo algebraico.

De manera alterna, un objeto desacelera cuando su rapidez $|v(t)|$ es decreciente y acelera cuando su rapidez es creciente.

EJEMPLO 2 Otro repaso al ejemplo 1

En el ejemplo 1 las funciones velocidad y aceleración de la partícula son, respectivamente,

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -2t + 4 \qquad \text{y} \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = -2.$$

En los instantes 0, 2 y 6 s, las velocidades son $v(0) = 4$ cm/s, $v(2) = 0$ cm/s y $v(6) = -8$ cm/s, respectivamente. Puesto que la aceleración siempre es negativa, la velocidad siempre es decreciente. Observe que $v(t) = 2(-t + 2) > 0$ para $t < 2$ y $v(t) = 2(-t + 2) < 0$ para $t > 2$. Si se deja que el tiempo t sea negativo y también positivo, entonces la partícula se mueve hacia la derecha para el intervalo de tiempo $(-\infty, 2)$ y se mueve hacia la izquierda para el intervalo de tiempo $(2, \infty)$. El movimiento puede representarse por la gráfica que se muestra en la FIGURA 4.1.3*a*). Puesto que el movimiento en realidad se lleva a cabo *sobre* la recta horizontal, usted debe imaginar el movimiento de un punto P que corresponde a la proyección de un punto en la gráfica sobre la recta horizontal. Vea la figura 4.1.3*b*).

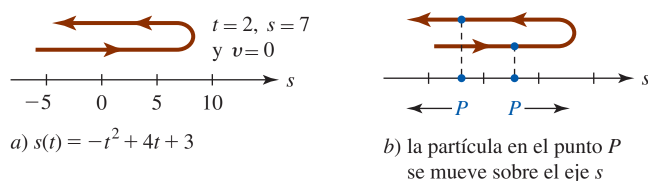


FIGURA 4.1.3 Representación del movimiento de la partícula en el ejemplo 2 ■

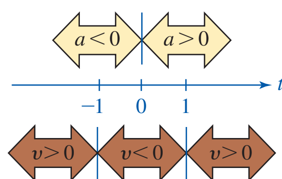


FIGURA 4.1.4 Signos de $v(t)$ y $a(t)$ en el ejemplo 3

EJEMPLO 3 Partícula que desacelera/acelera

Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$. Determine los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula desacelera y los intervalos de tiempo sobre los cuales acelera.

Solución Los signos algebraicos de las funciones velocidad y aceleración

$$v(t) = t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1) \qquad \text{y} \qquad a(t) = 2t$$

se muestran sobre la escala de tiempo en la FIGURA 4.1.4. Puesto que $v(t)$ y $a(t)$ tienen signos opuestos sobre $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$, la partícula desacelera sobre estos intervalos de tiempo; $v(t)$ y $a(t)$ tienen el mismo signo algebraico sobre $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$, de modo que la partícula acelera sobre estos intervalos de tiempo. ■

En el ejemplo 2 verifique que la partícula desacelera sobre el intervalo de tiempo $(-\infty, 2)$ y acelera sobre el intervalo de tiempo $(2, \infty)$.

EJEMPLO 4 Movimiento de una partícula

Un objeto se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = t^4 - 18t^2 + 25$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Use una gráfica para representar el movimiento durante el intervalo de tiempo $[-4, 4]$.

Solución La función velocidad es

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t^3 - 36t = 4t(t + 3)(t - 3)$$

y la función aceleración es

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = 12t^2 - 36 = 12\left(t + \sqrt{3}\right)\left(t - \sqrt{3}b\right).$$

Luego, a partir de las soluciones de $v(t) = 0$ podemos determinar los intervalos de tiempo para los cuales $s(t)$ es creciente o decreciente. A partir de la información que se muestra en las tablas siguientes, se construye la función mostrada en la FIGURA 4.1.5. Al inspeccionar las tablas observamos que la partícula desacelera sobre los intervalos de tiempo $(-4, -3)$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 3)$ (se muestran en verde en la figura) y acelera sobre los intervalos de tiempo $\left(-3, -\sqrt{3}\right)$, $\left(0, \sqrt{3}\right)$, $(3, 4)$ (se muestran en rojo en la figura).

Intervalo de tiempo	**Signo de $v(t)$**	**Dirección de movimiento**
$(-4, -3)$	$-$	a la izquierda
$(-3, 0)$	$+$	a la derecha
$(0, 3)$	$-$	a la izquierda
$(3, 4)$	$+$	a la derecha

Tiempo	**Posición**	**Velocidad**	**Aceleración**
-4	-7	-112	156
-3	-56	0	72
0	25	0	-36
3	-56	0	72
4	-7	112	156

Intervalo de tiempo	**Signo de $a(t)$**	**Velocidad**
$\left(-4, -\sqrt{3}\right)$	$+$	creciente
$\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$	$-$	decreciente
$\left(\sqrt{3}, 4\right)$	$+$	creciente

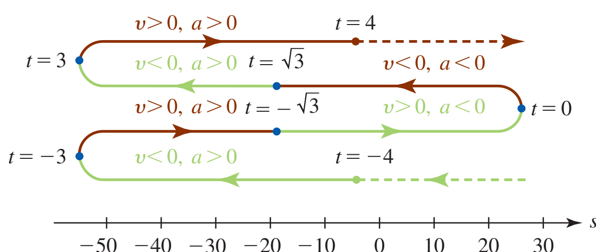


FIGURA 4.1.5 Movimiento de una partícula en el ejemplo 4 ■

Ejercicios 4.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-13.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-8, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Encuentre la posición, velocidad, rapidez y aceleración de la partícula en los instantes indicados.

1. $s(t) = 4t^2 - 6t + 1; \quad t = \frac{1}{2}, t = 3$

2. $s(t) = (2t - 6)^2; \quad t = 1, t = 4$

3. $s(t) = -t^3 + 3t^2 + t; \quad t = -2, t = 2$

4. $s(t) = t^4 - t^3 + t; \quad t = -1, t = 3$

5. $s(t) = t - \frac{1}{t}; \quad t = \frac{1}{4}, t = 1$

6. $s(t) = \frac{t}{t + 2}; \quad t = -1, t = 0$

7. $s(t) = t + \operatorname{sen} \pi t; \quad t = 1, t = \frac{3}{2}$

8. $s(t) = t \cos \pi t; \quad t = \frac{1}{2}, t = 1$

En los problemas 9-12, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal.

9. $s(t) = t^2 - 4t - 5$

a) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 0$?
b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 7$?

10. $s(t) = t^2 + 6t + 10$

a) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = v(t)$?
b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $v(t) = -a(t)$?

11. $s(t) = t^3 - 4t$

a) ¿Cuál es la aceleración de la partícula cuando $v(t) = 2$?
b) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $a(t) = 18$?
c) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 0$?

12. $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8$

a) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $v(t) = 0$?
b) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $a(t) = 0$?
c) ¿Cuándo desacelera la partícula? ¿Cuándo acelera?

En los problemas 13 y 14, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Determine los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula desacelera y los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula acelera.

13. $s(t) = t^3 - 27t$

14. $s(t) = t^4 - t^3$

En los problemas 15-20, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Encuentre las funciones de velocidad y de aceleración. Determine los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula desacelera y los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula acelera. Represente el movimiento durante el intervalo de tiempo indicado con una gráfica.

15. $s(t) = t^2; \quad [-1, 3]$

16. $s(t) = t^3; \quad [-2, 2]$

17. $s(t) = t^2 - 4t - 2; \quad [-1, 5]$

18. $s(t) = (t + 3)(t - 1); \quad [-3, 1]$

19. $s(t) = 2t^3 - 6t^2; \quad [-2, 3]$

20. $s(t) = (t - 1)^2(t - 2); \quad [-2, 3]$

En los problemas 21-28, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Encuentre las funciones de velocidad y de aceleración. Represente el movimiento durante el intervalo de tiempo indicado con una gráfica.

21. $s(t) = 3t^4 - 8t^3; \quad [-1, 3]$

22. $s(t) = t^4 - 4t^3 - 8t^2 + 60; \quad [-2, 5]$

23. $s(t) = t - 4\sqrt{t}; \quad [1, 9]$

24. $s(t) = 1 + \cos \pi t; \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$

25. $s(t) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} t; \quad [0, 4]$

26. $s(t) = \operatorname{sen} \pi t - \cos \pi t; \quad [0, 2]$

27. $s(t) = t^3 e^{-t}; \quad [0, \infty)$

28. $s(t) = t^2 - 12 \ln(t + 1); \quad [0, \infty)$

29. En la FIGURA 4.1.6 se muestra la gráfica en el plano st de una función posición $s(t)$ de una partícula que se mueve rectilíneamente. Complete la tabla siguiente si $v(t)$ y $a(t)$ son positivas, negativas o cero. Proporcione los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula desacelera y los intervalos sobre los cuales acelera.

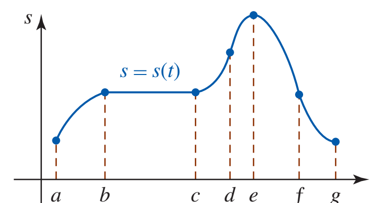


FIGURA 4.1.6 Gráfica para el problema 29

Intervalo	$v(t)$	$a(t)$
(a, b)		
(b, c)		
(c, d)		
(d, e)		
(e, f)		
(f, g)		

30. En la FIGURA 4.1.7 se muestra la gráfica de la función velocidad v de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Elabore una gráfica de una función posición s con esta función velocidad.

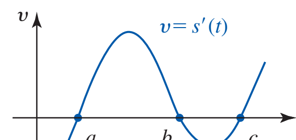


FIGURA 4.1.7 Gráfica para el problema 30

≡ Aplicaciones

31. La altura (en pies) de un proyectil disparado verticalmente hacia arriba desde un punto a 6 pies por arriba del nivel del suelo la proporciona $s(t) = -16t^2 + 48t + 6$, $0 \le t \le T$, donde T es el instante en que el proyectil choca contra el suelo. Vea la FIGURA 4.1.8.

a) Determine el intervalo de tiempo para el cual $v > 0$ y el intervalo de tiempo para el cual $v < 0$.

b) Encuentre la altura máxima alcanzada por el proyectil.

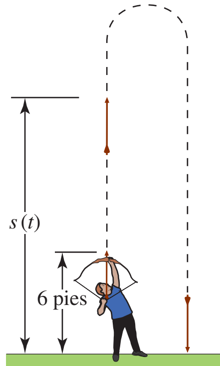


FIGURA 4.1.8 Proyectil en el problema 31

32. Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = -t^2 + 10t - 20$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Determine la distancia total recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo [1, 6].

En los problemas 33 y 34, use la siguiente información. Cuando se ignora la fricción, la distancia s (en pies) que un cuerpo se mueve hacia abajo sobre un plano inclinado cuya inclinación es θ está dada por $s(t) = 16t^2 \text{ sen } \theta$, $[0, t_1]$, donde $s(0) = 0$, $s(t_1) = L$, y t se mide en segundos. Vea la FIGURA 4.1.9.

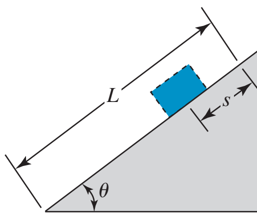


FIGURA 4.1.9 Plano inclinado

33. Un objeto se desliza por una colina de 256 pies de longitud con una inclinación de 30°. ¿Cuáles son la velocidad y aceleración del objeto en la parte superior de la colina?

34. Un participante en una carrera de automóviles de juguete desciende la colina mostrada en la FIGURA 4.1.10. ¿Cuáles son la velocidad y aceleración del automóvil en la parte inferior de la colina?

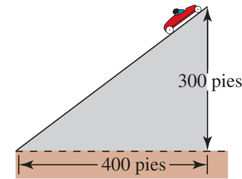


FIGURA 4.1.10 Plano inclinado en el problema 34

35. Un cubo, atado con una cuerda a un molinete circular, se deja caer libremente en línea recta. Si se ignora la inercia rotacional del molinete, entonces la distancia que recorre el cubo es igual a la medida en radianes del ángulo indicado en la FIGURA 4.1.11; es decir, $\theta = \frac{1}{2}gt^2$, donde $g = 32 \text{ pies/s}^2$ es la aceleración debida a la gravedad. Encuentre la razón a la que cambia la coordenada y de un punto P sobre la circunferencia del molinete en $t = \sqrt{\pi}/4$ s. Interprete el resultado.

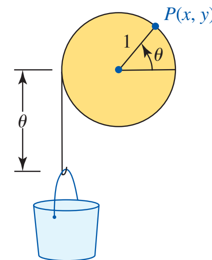


FIGURA 4.1.11 Cubo en el problema 35

36. En mecánica, la fuerza F que actúa sobre un cuerpo se define como la razón de cambio de su cantidad de movimiento: $F = (d/dt)(mv)$. Cuando m es constante, a partir de esta fórmula obtenemos la conocida fórmula denominada segunda ley de Newton $F = ma$, donde la aceleración es $a = dv/dt$. Según la teoría de la relatividad de Einstein, cuando una partícula con masa en reposo m_0 se mueve rectilíneamente a gran velocidad (como en un acelerador lineal), su masa varía con la velocidad v según la fórmula $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde c es la velocidad constante de la luz. Demuestre que en la teoría de la relatividad la fuerza F que actúa sobre la partícula es

$$F = \frac{m_0 a}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}},$$

donde a es la aceleración.

4.2 Razones de cambio relacionadas

Introducción En esta sección abordaremos las **razones de cambio relacionadas**. La derivada dy/dx de una función $y = f(x)$ es su razón de cambio instantánea con respecto a la variable x. En la sección precedente vimos que cuando una función $s = s(t)$ describe la posición de un objeto que se mueve sobre una recta horizontal o vertical, la razón de cambio con el tiempo ds/dt se interpreta como la velocidad del objeto. En general, una razón de cambio con el tiempo es la respuesta a la pregunta: ¿cuán rápido cambia la cantidad? Por ejemplo, si V

representa el volumen que cambia con el tiempo, entonces dV/dt es la razón, o cuán rápido cambia el volumen con respecto al tiempo t. Una razón de, por ejemplo, $dV/dt = 5$ pies^3/s significa que el volumen aumenta 5 pies cúbicos cada segundo. Vea la FIGURA 4.2.1. En forma semejante, si una persona camina *hacia* el poste mostrado en la FIGURA 4.2.2 a razón constante de 3 pies/s, entonces sabemos que $dx/dt = -3$ pies/s. Por otra parte, si la persona se *aleja* del poste, entonces $dx/dt = 3$ pies/s. Las razones negativa y positiva significan, por supuesto, que la distancia x de la persona al poste disminuye (3 pies cada segundo) y aumenta (3 pies cada segundo), respectivamente.

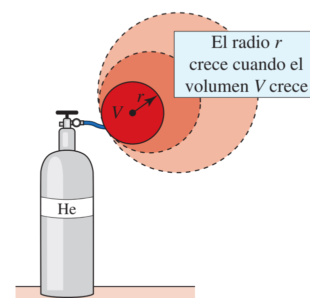


FIGURA 4.2.1 A medida que un globo esférico se llena con gas, su volumen, radio y área superficial cambian con el tiempo

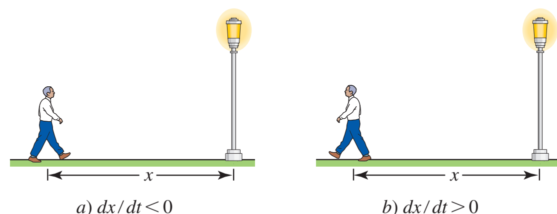


FIGURA 4.2.2 x decreciente en *a*); x creciente en *b*)

Regla de potencias para funciones Recuerde por (6) de la sección 3.6 que si y denota una función de x, entonces con la regla de potencias para funciones obtenemos

$$\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}, \tag{1}$$

donde n es un número real. Por supuesto, (1) es aplicable a cualquier función; por ejemplo r, x o z, que dependa de la variable t:

$$\frac{d}{dt}r^n = nr^{n-1}\frac{dr}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}x^n = nx^{n-1}\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}z^n = nz^{n-1}\frac{dz}{dt}. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Uso de (2)

Un globo esférico se expande con el tiempo. ¿Cómo se relaciona la razón a que aumenta el volumen con la razón a la que aumenta el radio?

Solución En el instante t, el volumen V de una esfera es una función del radio r; es decir, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Por tanto, obtenemos las razones relacionadas a partir de la derivada con respecto al tiempo de esta función. Con ayuda del primer resultado en (2), vemos que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi\cdot\frac{d}{dt}r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right)$$

es lo mismo que

razones relacionadas
↓ ↓
$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}.$$
■

Debido a que los problemas de esta sección se describen con palabras, usted debe interpretar el planteamiento en términos de símbolos matemáticos. La clave para resolver problemas planteados en lenguaje coloquial consiste en la organización. A continuación se presentan algunas sugerencias.

Directrices para resolver problemas relacionados

i) Lea varias veces con cuidado el problema. Si le es posible, trace un esquema.
ii) Identifique con símbolos todas las cantidades que cambian con el tiempo.
iii) Escriba todas las razones que se **proporcionan**. Use notación de derivadas para escribir la razón que desea **encontrar**.
iv) Escriba una ecuación o una función que relacione todas las variables que haya introducido.
v) Diferencie con respecto al tiempo t la ecuación o la función encontrada en el paso *iv*). Este paso puede requerir el uso de diferenciación implícita. La ecuación resultante después de la diferenciación relaciona las razones de cambio con el tiempo de la variable.

EJEMPLO 2 Otro repaso al ejemplo 1

Un globo esférico se infla con aire a razón de 20 pies^3/min. ¿A qué razón cambia el radio cuando éste es de 3 pies?

Solución Como se muestra en la figura 4.2.1, denotamos el radio del globo con r y su volumen con V. Ahora, las interpretaciones de "Un globo esférico se infla … a razón de 20 pies^3/min" y "¿A qué razón cambia el radio cuando es de 3 pies?" son, respectivamente, la razón que tenemos

$$\textbf{Dado}: \frac{dV}{dt} = 20 \text{ pies}^3/\text{min}$$

y la razón que se busca

$$\textbf{Encontrar}: \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3}.$$

Debido a que por el ejemplo 1 ya sabemos que

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

es posible sustituir la razón constante $dV/dt = 20$; es decir, $20 = 4\pi r^2(dr/dt)$. Al despejar dr/dt en la última ecuación obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{20}{4\pi r^2} = \frac{5}{\pi r^2}.$$

Por tanto,
$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3} = \frac{5}{9\pi} \text{ pies/min} \approx 0.18 \text{ pies/min}$$ ■

EJEMPLO 3 Uso del teorema de Pitágoras

Una mujer que corre a razón constante de 10 km/h cruza un punto P en dirección al norte. Diez minutos después, un hombre que corre a razón constante de 9 km/h cruza por el mismo punto P en dirección al este. ¿Cuán rápido cambia la distancia entre los corredores 20 minutos después de que el hombre cruza por el punto P?

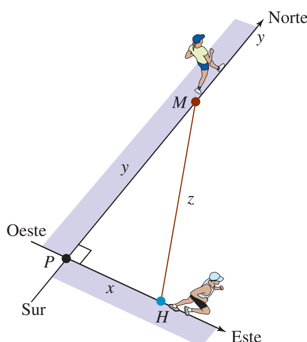


FIGURA 4.2.3 Corredores en el ejemplo 3

Solución Sea el tiempo t medido en horas desde el instante en que el hombre cruza el punto P. Como se muestra en la FIGURA 4.2.3, a $t > 0$ sean el hombre H y la mujer M que están en x y y km, respectivamente, a partir del punto P. Sea z la distancia correspondiente entre los dos corredores. Así, dos razones son

$$\textbf{Dado}: \frac{dx}{dt} = 9 \text{ km/h} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 10 \text{ km/h} \tag{3}$$

y se busca

$$\textbf{Encontrar}: \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} \quad \leftarrow 20 \text{ min} = \tfrac{1}{3}\text{h}$$

En la figura 4.2.3 vemos que el triángulo HPM es un triángulo rectángulo, así que por el teorema de Pitágoras, las variables x, y y z están relacionadas por

$$z^2 = x^2 + y^2. \tag{4}$$

Al diferenciar (4) con respecto a t,

$$\frac{d}{dt}z^2 = \frac{d}{dt}x^2 + \frac{d}{dt}y^2 \quad \text{proporciona} \quad 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}. \tag{5}$$

Al usar las dos razones proporcionadas en (3), entonces con la última ecuación de (5) obtenemos

$$z\frac{dz}{dt} = 9x + 10y.$$

Cuando $t = \frac{1}{3}$h usamos *distancia* = *razón* × *tiempo* para obtener la distancia que ha corrido el hombre: $x = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 3$ km. Debido a que la mujer ha corrido $\frac{1}{6}$h (10 min) más, la distancia que ella ha recorrido es $y = 10 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 5$ km. En $t = \frac{1}{3}$ h, se concluye que $z = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ km. Por último,

$$\sqrt{34}\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} = 9 \cdot 3 + 10 \cdot 5 \quad \text{o bien,} \quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} = \frac{77}{\sqrt{34}} \approx 13.21 \text{ km/h}.$$ ■

EJEMPLO 4 Uso de trigonometría

Un faro está situado en una isla pequeña a 2 mi de la costa. La baliza del faro gira a razón constante de 6 grados/s. ¿Cuán rápido se mueve el haz del faro a lo largo de la costa en un punto a 3 mi del punto sobre la costa que es el más próximo al faro?

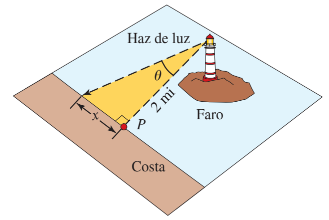


FIGURA 4.2.4 Faro en el ejemplo 4

Solución Primero se introducen las variables θ y x como se muestra en la FIGURA 4.2.4. Además, se cambia la información sobre θ a radianes al recordar que 1° es equivalente a $\pi/180$ radianes. Así,

$$\textbf{Dado}: \frac{d\theta}{dt} = 6 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{30} \text{ rad/s} \qquad \textbf{Encontrar}: \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3}.$$

A partir de la trigonometría de un triángulo rectángulo, por la figura vemos que

$$\frac{x}{2} = \tan\theta \qquad \text{o bien,} \qquad x = 2\tan\theta.$$

Al diferenciar la última ecuación con respecto a t y usar la razón dada obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 2\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{15}\sec^2\theta. \quad \leftarrow \text{Regla de la cadena: } \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

En el instante en que $x = 3$, $\tan\theta = \frac{3}{2}$, de modo que por la identidad trigonométrica $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ obtenemos $\sec^2\theta = \frac{13}{4}$. Por tanto,

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3} = \frac{\pi}{15} \cdot \frac{13}{4} = \frac{13\pi}{60} \text{ mi/s.}$$ ■

En el siguiente ejemplo es necesario usar la fórmula para el volumen de un cono circular recto de altura H y radio en la base R:

$$V = \frac{\pi}{3}R^2H. \tag{6}$$

EJEMPLO 5 Uso de triángulos semejantes

Desde la parte superior del reloj de arena que se muestra en la FIGURA 4.2.5 la arena cae a razón constante de 4 cm³/s. Exprese la razón a que crece la altura de la pila inferior en términos de la altura de la arena.

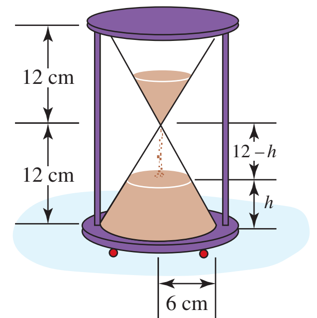


FIGURA 4.2.5 Reloj de arena en el ejemplo 5

Solución Primero, como sugiere la figura 4.2.5, se establece la hipótesis de que la pila de arena en la parte inferior del reloj de arena tiene la forma del *frustrum* de un cono. En el instante $t > 0$, sean V el volumen de la pila de arena, h su altura y r el radio de su superficie plana inferior. Así,

$$\textbf{Dado}: \frac{dV}{dt} = 4 \text{ cm}^3\text{/s} \qquad \textbf{Encontrar}: \frac{dh}{dt}.$$

Necesitamos encontrar el volumen V de la pila de arena en el instante $t > 0$. Esto puede lograrse como se muestra a continuación:

V = volumen de todo el cono inferior – volumen del cono que no es arena.

Al usar la figura 4.2.5 y (6) con $R = 6$ y $H = 12$,

$$V = \frac{1}{3}\pi 6^2(12) - \frac{1}{3}\pi r^2(12 - h)$$

o

$$V = \pi\left(144 - 4r^2 + \frac{1}{3}r^2h\right). \tag{7}$$

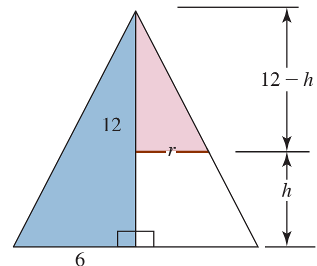


FIGURA 4.2.6 En sección transversal, el cono inferior del reloj de arena en el ejemplo 5 es un triángulo

Podemos eliminar la variable r de la última ecuación al usar triángulos semejantes. Como se muestra en la FIGURA 4.2.6, el triángulo rectángulo rojo claro es semejante al triángulo rectángulo azul, y así las proporciones de lados correspondientes son iguales:

$$\frac{12 - h}{r} = \frac{12}{6} \qquad \text{o bien,} \qquad r = 6 - \frac{h}{2}.$$

La última expresión se sustituye en (7) y se simplifica.

$$V = \pi\left(\frac{1}{12}h^3 - 3h^2 + 36h\right). \tag{8}$$

Al diferenciar (8) con respecto a t obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = \pi\left(\frac{1}{4}h^2\frac{dh}{dt} - 6h\frac{dh}{dt} + 36\frac{dh}{dt}\right) = \pi\left(\frac{1}{4}h^2 - 6h + 36\right)\frac{dh}{dt}.$$

Por último, al usar la razón dada $dV/dt = 4$ es posible despejar dh/dt:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{16}{\pi(h-12)^2}. \tag{9}$$ ■

Observe en (9) del ejemplo 5 que la altura de la pila de arena en el reloj de arena crece más rápido cuando la altura h de la pila está próxima a 12 cm.

Ejercicios 4.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-14.

Fundamentos

En los siguientes problemas, una solución puede requerir una fórmula especial que usted tal vez no conozca. En caso de ser necesario, consulte la lista de fórmulas que se encuentra en las *Páginas de recursos*.

1. Un cubo se expande con el tiempo. ¿Cómo está relacionada la razón a la cual crece el volumen con la razón a la que aumenta la arista?

2. El volumen de una caja rectangular es $V = xyz$. Dado que cada lado se expande a una razón constante de 10 cm/min, encuentre la razón a la cual se expande el volumen cuando $x = 1$ cm, $y = 2$ cm y $z = 3$ cm.

3. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. La longitud de un lado aumenta a razón constante de 2 cm/h. ¿A qué razón crece el área cuando un lado mide 8 cm?

4. En el problema 3, ¿a qué razón crece el área en el instante en que el área es $\sqrt{75}$ cm^2?

5. Un rectángulo se expande con el tiempo. La diagonal del rectángulo aumenta a razón de 1 pulg/h y la longitud crece a razón de $\frac{1}{4}$ pulg/h. ¿Cuán rápido crece el ancho cuando éste mide 6 pulg y la longitud mide 8 pulg?

6. Las longitudes de las aristas de un cubo aumentan a razón de 5 cm/h. ¿A qué razón crece la longitud de la diagonal del cubo?

7. Un velero se dirige hacia el acantilado vertical mostrado en la FIGURA 4.2.7. ¿Cómo están relacionadas las razones a las que cambian x, s y θ?

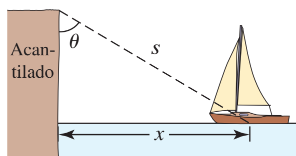


FIGURA 4.2.7 Velero en el problema 7

8. Un escarabajo se mueve a lo largo de la gráfica de $y = x^2 + 4x + 1$, donde x y y se miden en centímetros. Si la coordenada x de la posición del escarabajo (x, y) cambia a razón constante de 3 cm/min, ¿cuán rápido cambia la coordenada y cuando el escarabajo está en el punto (2, 13)? ¿Cuán rápido cambia la coordenada y cuando el escarabajo está 6 cm arriba del eje x?

9. Una partícula se mueve sobre la gráfica de $y^2 = x + 1$ de modo que $dx/dt = 4x + 4$. ¿Cuál es dy/dt cuando $x = 8$?

10. Una partícula en movimiento continuo se mueve sobre la gráfica de $4y = x^2 + x$. Encuentre el punto (x, y) sobre la gráfica en el que la razón de cambio de la coordenada x y la razón de cambio de la coordenada y son iguales.

11. La coordenada x del punto P mostrado en la FIGURA 4.2.8 aumenta a razón de $\frac{1}{3}$ cm/h. ¿Cuán rápido crece el área del triángulo rectángulo OPA cuando las coordenadas de P son (8, 2)?

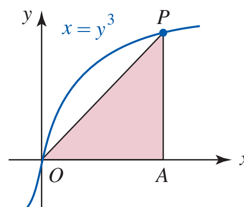


FIGURA 4.2.8 Triángulo en el problema 11

12. Una maleta está sobre la banda transportadora mostrada en la FIGURA 4.2.9 que se mueve a razón de 2 pies/s. ¿Cuán rápido aumenta la distancia vertical de la maleta a partir de la parte inferior de la banda?

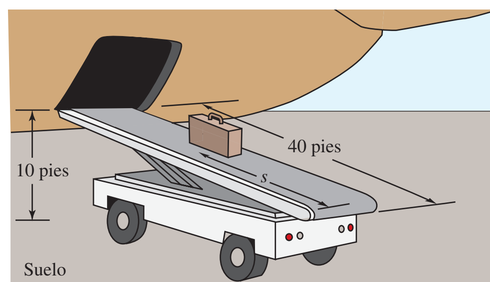


FIGURA 4.2.9 Banda transportadora en el problema 12

13. Una persona de 5 pies de estatura se aleja caminando de un poste de 20 pies de altura a razón constante de 3 pies/s. Vea la FIGURA 4.2.10.

a) ¿A qué razón crece la sombra de la persona?
b) ¿A qué razón se aleja la punta de la sombra desde la base del poste?

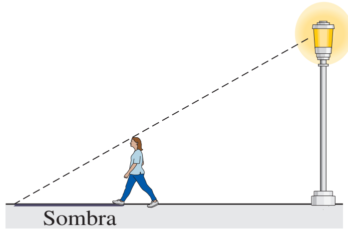


FIGURA 4.2.10 Sombra en el problema 13

14. Una roca arrojada a un estanque tranquilo provoca una onda circular. Suponga que el radio de la onda se expande a razón constante de 2 pies/s.
a) ¿Cuán rápido crece el diámetro de la onda circular?
b) ¿Cuán rápido crece la circunferencia de la onda circular?
c) ¿Cuán rápido se expande el área de la onda circular cuando el radio es de 3 pies?
d) ¿Cuán rápido se expande el área de la onda circular cuando el área es 8π pies^2?

15. Una escalera de 15 pies está apoyada contra el muro de una casa. La parte inferior de la escalera se aleja de la base del muro a razón constante de 2 pies/min. ¿A qué razón desciende la parte superior de la escalera en el instante en que la parte inferior de la escalera está a 5 pies del muro?

16. Una escalera de 20 pies está apoyada contra el muro de una casa. La parte superior de la escalera se desliza hacia abajo sobre el muro a razón constante de $\frac{1}{2}$ pie/min. ¿A qué razón se aleja del muro la parte inferior de la escalera en el instante en que la parte superior de la escalera está a 18 pies por arriba del suelo?

17. Considere la escalera cuya parte inferior se desliza alejándose de la base del muro vertical mostrado en la FIGURA 4.2.11. Demuestre que la razón a la cual crece θ_1 es la misma que la razón a la cual decrece θ_2.

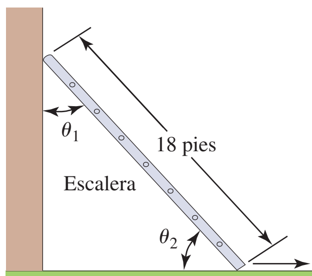


FIGURA 4.2.11 Escalera en el problema 17

18. La cuerda de un cometa se suelta a razón constante de 3 pies/s. Si el viento se lleva al cometa horizontalmente a una altitud de 200 pies, ¿cuán rápido se mueve el cometa cuando se han soltado 400 pies de cuerda?

19. Dos buques tanque zarpan de la misma terminal petrolera. Uno se dirige hacia el este a mediodía a una velocidad de 10 nudos. (1 nudo = 1 milla náutica/h. Una milla náutica mide 6 080 pies o 1.15 milla estándar.) El otro buque se dirige hacia el norte a la 1:00 p.m. a razón de 15 nudos. ¿A qué razón cambia la distancia entre los dos buques a las 2:00 p.m.?

20. A las 8:00 a.m., el barco S_1 está a 20 km dirección norte del barco S_2. El barco S_1 navega hacia el sur a razón de 9 km/h y el barco S_2 se dirige hacia el oeste a razón de 12 km/h. A las 9:20 a.m., ¿a qué razón cambia la distancia entre los dos barcos?

21. Una polea está asegurada a una orilla de un muelle situado a 15 pies por arriba de la superficie del agua. Un bote pequeño es jalado hacia el muelle por medio de una cuerda en la polea. La cuerda está unida a la proa del bote a 3 pies antes de la línea del agua. Vea la FIGURA 4.2.12. Si la cuerda se jala a razón constante de 1 pie/s, ¿cuán rápido se aproxima el bote al muelle cuando se encuentra a 16 pies de éste?

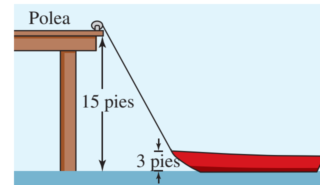


FIGURA 4.2.12 Bote y muelle en el problema 21

22. Un bote se jala hacia un muelle por medio de un cabrestante. El cabrestante está situado al final del muelle y se encuentra a 10 pies por arriba del nivel al que la cuerda de arrastre está atada a la proa del bote. La cuerda se jala a razón constante de 1 pie/s. Use una función trigonométrica inversa para determinar la razón a la cual cambia el ángulo de elevación entre la proa del bote y el final del muelle cuando se han soltado 30 pies de cuerda.

23. Un reflector en un bote patrulla que está a $\frac{1}{2}$ km de la costa sigue un buque de dunas de arena que se mueve en forma paralela al agua a lo largo de una playa recta. El buque se desplaza a razón constante de 15 km/h. Use una función trigonométrica inversa para determinar la razón a la cual gira el reflector cuando el buque está a $\frac{1}{2}$ km del punto sobre la playa más próximo al bote.

24. Un diamante de beisbol es un cuadrado de 90 pies por lado. Vea la FIGURA 4.2.13. Un jugador golpea la pelota y corre hacia la primera base a razón de 20 pies/s. ¿A qué razón cambia la distancia del corredor a segunda base en el instante en que el corredor está a 60 pies de *home*? ¿A qué razón cambia la distancia del corredor a tercera base en ese mismo instante?

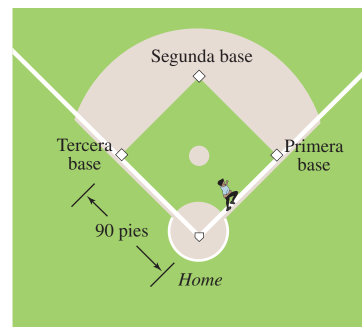


FIGURA 4.2.13 Diamante de beisbol en el problema 24

25. Un avión que se mueve en forma paralela al nivel del suelo a razón constante de 600 mi/h se aproxima a una estación de radar. Si la altitud del avión es de 2 mi, ¿cuán rápido disminuye la distancia entre el avión y la estación de radar cuando la distancia horizontal entre ambos es 1.5 mi? Vea la FIGURA 4.2.14.

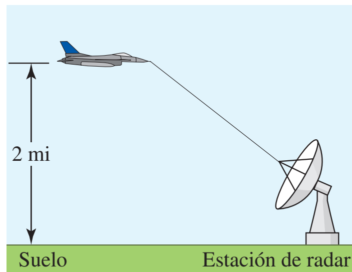


FIGURA 4.2.14 Avión en el problema 25

26. En el problema 25, en el punto directamente por arriba de la estación de radar, el avión asciende formando un ángulo de 30° sin aminorar su velocidad. ¿Cuán rápido aumenta la distancia entre el avión y la estación 1 minuto después? [*Sugerencia*: Use la ley de los cosenos.]

27. Un avión a una altitud de 4 km pasa directamente por arriba de un telescopio de rastreo ubicado en tierra. Cuando el ángulo de elevación es de 60°, se observa que el ángulo decrece a razón de 30 grados/min. ¿Cuán rápido se mueve el avión?

28. Una cámara de rastreo, ubicada a 1 200 pies del punto de lanzamiento, sigue a un globo de aire caliente con ascenso vertical. En el instante en que el ángulo de elevación θ de la cámara es $\pi/6$, el ángulo θ crece a razón de 0.1 rad/min. Vea la FIGURA 4.2.15. ¿A qué razón sube el globo en ese instante?

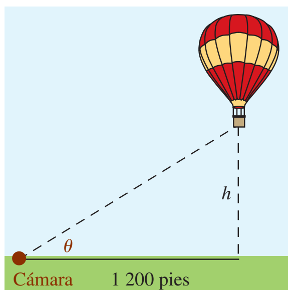


FIGURA 4.2.15 Globo en el problema 28

29. Un cohete se desplaza a razón constante de 1 000 mi/h a un ángulo de 60° con respecto a la horizontal. Vea la FIGURA 4.2.16.

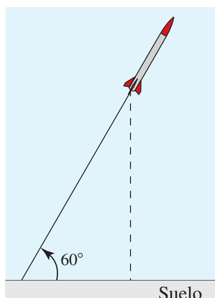


FIGURA 4.2.16 Cohete en el problema 29

a) ¿A qué razón crece su altitud?

b) ¿Cuál es la velocidad del cohete con respecto a tierra?

30. Un tanque de agua en forma de cilindro circular recto de 40 pies de diámetro se drena de modo que el nivel del agua disminuye a razón constante de $\frac{3}{2}$ pies/min. ¿Cuán rápido decrece el volumen del agua?

31. Un tanque de aceite en forma de cilindro circular recto de 8 m de radio se llena a razón constante de 10 m^3/min. ¿Cuán rápido sube el volumen del aceite?

32. Como se muestra en la FIGURA 4.2.17, un tanque rectangular de agua de 5 pies de ancho está dividido en dos tanques por medio de una separación que se mueve en la dirección indicada a razón de 1 pulg/min cuando al tanque frontal se bombea agua a razón de 1 pie^3/min.

a) ¿A qué razón cambia el nivel del agua cuando el volumen de agua en el tanque frontal es de 40 pies^3 y $x = 4$ pies?

b) En ese instante, el nivel del agua ¿sube o baja?

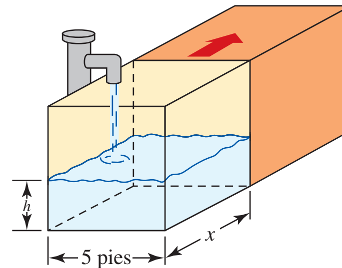


FIGURA 4.2.17 Tanque en el problema 32

33. Por la parte inferior de un tanque cónico se fuga agua a razón de 1 pie^3/min, como se muestra en la FIGURA 4.2.18.

a) ¿A qué razón cambia el nivel del agua cuando el agua tiene 6 pies de profundidad?

b) ¿A qué razón cambia el radio del agua cuando el agua tiene 6 pies de profundidad?

c) Suponga que el tanque estaba lleno en $t = 0$. ¿A qué razón cambia el nivel del agua en $t = 6$ min?

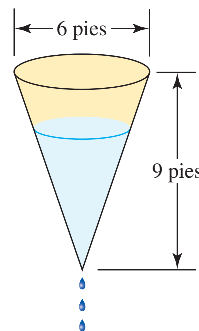


FIGURA 4.2.18 Tanque en el problema 33

34. Un canal de agua con extremos verticales en forma de trapezoides isósceles tiene las dimensiones mostradas en la FIGURA 4.2.19. Si se bombea agua a razón constante de $\frac{1}{2}$ m^3/s, ¿cuán rápido sube el nivel del agua cuando la profundidad del agua es de $\frac{1}{4}$ m?

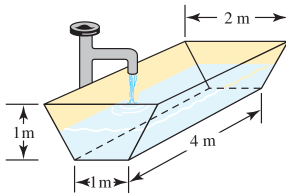


FIGURA 4.2.19 Tanque en el problema 34

35. Cada uno de los extremos verticales de un canal de agua de 20 pies de longitud es un triángulo equilátero con el vértice hacia abajo. Se bombea agua a razón constante de 4 pies^3/min.

a) ¿Cuán rápido sube el nivel h del agua cuando la profundidad del agua es de 1 pie?

b) Si h_0 es la profundidad inicial del agua en el canal, demuestre que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{10}\left(h_0^2 + \frac{\sqrt{3}}{5}t\right)^{-1/2}.$$

[*Sugerencia*: Considere la diferencia de volumen después de t minutos.]

c) Si $h_0 = \frac{1}{2}$ pie y la altura del extremo triangular es 5 pies, determine el instante en el que el canal está lleno. ¿Cuán rápido sube el nivel del agua cuando el canal está lleno?

36. El volumen V entre dos esferas concéntricas está en expansión. El radio de la esfera exterior crece a razón constante de 2 m/h, mientras el radio de la esfera interior disminuye a razón constante $\frac{1}{2}$ m/h. ¿A qué razón cambia V cuando el radio exterior es 3 m y el radio interior es 1 m?

37. Muchos objetos esféricos como las gotas de lluvia, las bolas de nieve y las bolas de naftalina se evaporan a una razón proporcional a su área superficial. En este caso, demuestre cómo el radio del objeto decrece a razón constante.

38. Si la razón a la cual cambia el volumen de una esfera es constante, demuestre que la razón a la cual cambia su área superficial es inversamente proporcional al radio.

39. Suponga que un cubo de hielo se derrite de modo que siempre conserva su forma cúbica. Si el volumen del cubo decrece a razón de $\frac{1}{4}$ pulg^3/min, ¿cuán rápido cambia el área superficial del cubo cuando el área superficial es de 54 pulg^2?

40. La rueda de la fortuna mostrada en la FIGURA 4.2.20 gira una vuelta completa en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj cada 2 minutos. ¿Cuán rápido sube una pasajera en el instante en que está 64 pies por arriba del suelo? ¿Cuán rápido se mueve horizontalmente en el mismo instante?

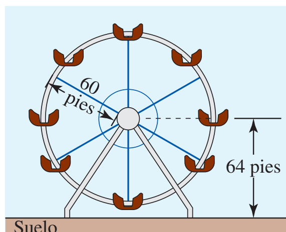


FIGURA 4.2.20 Rueda de la fortuna en el problema 40

41. Suponga que la rueda de la fortuna en el problema 40 está equipada con reflectores de colores fijos situados en varios puntos a lo largo de su circunferencia. Considere el reflector ubicado en el punto P en la FIGURA 4.2.21. Si los haces de luz son tangentes a la rueda en el punto P, ¿a qué razón se aleja el reflector en Q en tierra del punto R en el instante en que $\theta = \pi/4$?

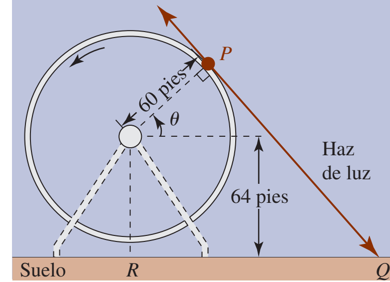


FIGURA 4.2.21 Rueda de la fortuna en el problema 41

42. Un clavadista salta desde una plataforma elevada con velocidad inicial hacia abajo de 1 pie/s hacia el centro de un gran tanque circular de agua. Vea la FIGURA 4.2.22. Por física, la altura del clavadista por arriba del nivel del suelo está dada por $s(t) = -16t^2 - t + 200$, donde $t \geq 0$ es el tiempo medido en segundos.

a) Use una función trigonométrica inversa para expresar θ en términos de s.

b) Encuentre la razón a la cual el ángulo θ subtendido por el tanque circular, según lo ve el clavadista, crece en $t = 3$ s.

c) ¿Cuál es el valor de θ cuando el clavadista golpea el agua?

d) ¿Cuál es la razón de cambio de θ cuando el clavadista golpea el agua?

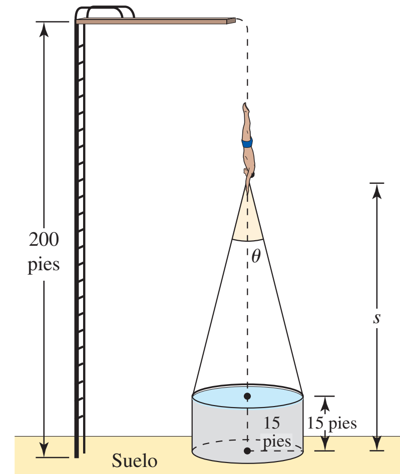


FIGURA 4.2.22 Clavadista en el problema 42

≡ Modelos matemáticos

43. Resistencia La resistencia total R en un circuito paralelo que contiene dos resistores de resistencias R_1 y R_2 está dada por $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$. Si cada resistencia cambia con el tiempo t, entonces ¿cómo están relacionadas dR/dt, dR_1/dt y dR_2/dt?

44. Presión En la expansión adiabática del aire, la presión P y el volumen V están relacionados por $PV^{1.4} = k$, donde k es una constante. En cierto instante, la presión es 100 lb/pulg^2 y el volumen es 32 pulg^3. ¿A qué razón cambia la presión en ese instante si el volumen disminuye a razón de 2 pulg^3/s?

45. Cangrejos de río Un estudio acerca de cangrejos de río (*Orconectes virilis*) indica que el caparazón de longitud C está relacionado con la longitud total T según la fórmula $C = 0.493T - 0.913$, donde C y T se miden en milímetros. Vea la FIGURA 4.2.23.

a) A medida que el cangrejo de río crece, la razón R de la longitud del caparazón a la longitud total, ¿aumenta o disminuye?

b) Si el cangrejo de río crece en longitud a razón de 1 mm por día, ¿a qué razón cambia la relación del caparazón a la longitud total cuando el caparazón es un tercio de la longitud total?

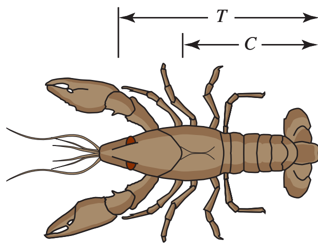


FIGURA 4.2.23 Cangrejo de río en el problema 45

46. Peso del cerebro Según estudios de alometría, el peso del cerebro E en los peces está relacionado con el peso corporal P por $E = 0.007P^{2/3}$, y el peso corporal está relacionado con la longitud del cuerpo por $P = 0.12L^{2.53}$, donde E y P se miden en gramos y L se mide en centímetros. Suponga que la longitud de cierta especie de pez evolucionó a razón constante desde 10 cm hasta 18 cm a lo largo de 20 millones de años. ¿A qué razón, en gramos por millones de años, creció el cerebro de esta especie cuando el pez pesaba la mitad de su peso corporal final?

47. Cantidad de movimiento En física, la cantidad de movimiento p de un cuerpo de masa m que se mueve en línea recta con velocidad v está dada por $p = mv$. Suponga que un avión de masa 10^5 kg vuela en línea recta mientras en los bordes de entrada de sus alas se acumula hielo a razón constante de 30 kg/h. Vea la FIGURA 4.2.24.

a) ¿A qué razón cambia la cantidad de movimiento del avión si vuela a razón constante de 800 km/h?

b) ¿A qué razón cambia la cantidad de movimiento del avión en $t = 1$ h si en ese instante su velocidad es 750 km/h y aumenta a razón de 20 km/h?

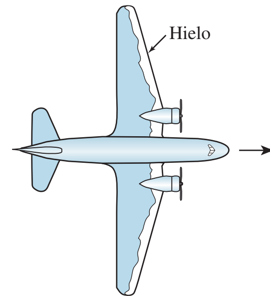


FIGURA 4.2.24 Avión en el problema 47

4.3 Extremos de funciones

Introducción Ahora abordaremos el problema de encontrar los valores máximo y mínimo de una función f sobre un intervalo I. Veremos que al encontrar estos **extremos** de f (en caso de haber alguno) en muchos casos es posible trazar fácilmente su gráfica. Al encontrar los extremos de una función también es posible resolver ciertos tipos de problemas de optimización. En esta sección establecemos algunas definiciones importantes y mostramos cómo puede encontrar los valores máximo y mínimo de una función f que es continua sobre un intervalo cerrado I.

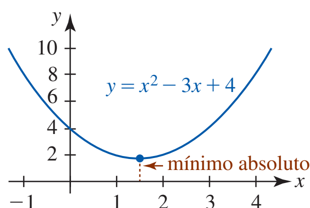


FIGURA 4.3.1 Mínimo absoluto de una función

Extremos absolutos En la FIGURA 4.3.1 se ha ilustrado la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 3x + 4$. A partir de esta gráfica debe resultar evidente que el valor de la función $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}$ es la coordenada y del vértice, y como la parábola se abre hacia arriba, en el rango de f no hay número menor que $\frac{7}{4}$. Decimos que el extremo $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}$ es el mínimo absoluto de f. A continuación se definen los conceptos de máximo absoluto y mínimo absoluto de una función.

Definición 4.3.1 Extremos absolutos

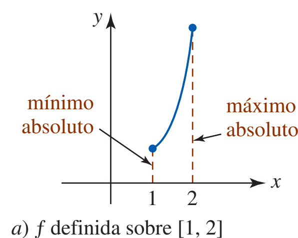
i) Un número $f(c_1)$ es un **máximo absoluto** de una función f si $f(x) \leq f(c_1)$ para toda x en el dominio de f.

ii) Un número $f(c_1)$ es un **mínimo absoluto** de una función f si $f(x) \geq f(c_1)$ para toda x en el dominio de f.

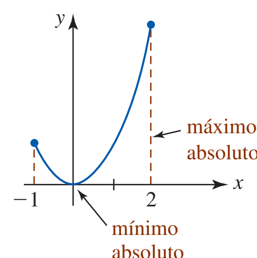
Los extremos absolutos también se denominan **extremos globales**.

A partir de su experiencia al graficar funciones debe serle fácil, en algunos casos, ver cuándo una función posee un máximo o un mínimo absoluto. En general, una función cuadrá-

tica $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo absoluto o un mínimo absoluto. La función $f(x) = 4 - x^2$ tiene el máximo absoluto $f(0) = 4$. Una función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, no tiene extremos absolutos. Las gráficas de las funciones conocidas $y = 1/x$, $y = x^3$, $y = \tan x$, $y = e^x$ y $y = \ln x$ muestran que éstas no tienen extremos absolutos. Las funciones trigonométricas $y = \text{sen}\, x$ y $y = \cos x$ tienen un máximo absoluto y un mínimo absoluto.



a) f definida sobre [1, 2]



b) f definida sobre [−1, 2]

FIGURA 4.3.2 Gráficas de funciones en el ejemplo 2

EJEMPLO 1 Extremos absolutos

Para $f(x) = \text{sen}\, x$, $f(\pi/2) = 1$ es su máximo absoluto y $f(3\pi/2) = -1$ es su mínimo absoluto. Por periodicidad, los valores máximo y mínimo también ocurren en $x = \pi/2 + 2n\pi$ y $x = 3\pi/2 + 2n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, respectivamente. ■

El intervalo sobre el que la función está definida es muy importante en la consideración de extremos.

EJEMPLO 2 Funciones definidas sobre un intervalo cerrado

a) $f(x) = x^2$, definida sólo sobre el intervalo *cerrado* [1, 2], tiene el máximo absoluto $f(2) = 4$ y el mínimo absoluto $f(1) = 1$. Vea la FIGURA 4.3.2*a*).

b) Por otra parte, si $f(x) = x^2$ está definida sobre el intervalo *abierto* (1, 2), entonces f no tiene extremos absolutos. En este caso, $f(1)$ y $f(2)$ no están definidos.

c) $f(x) = x^2$ definida sobre $[-1, 2]$, tiene el máximo absoluto $f(2) = 4$, pero ahora el mínimo absoluto es $f(0) = 0$. Vea la figura 4.3.2*b*).

d) $f(x) = x^2$ definida sobre $(-1, 2)$, tiene un mínimo absoluto $f(0) = 0$, pero no un máximo absoluto. ■

Los incisos *a*) y *c*) del ejemplo 2 ilustran el siguiente resultado general.

Teorema 4.3.1 Teorema del valor extremo

Una función f continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ siempre tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto sobre el intervalo.

En otras palabras, cuando f es continua sobre $[a, b]$, hay números $f(c_1)$ y $f(c_2)$ tales que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para toda x en $[a, b]$. Los valores $f(c_2)$ y $f(c_1)$ son el máximo absoluto y el mínimo absoluto, respectivamente, sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Vea la FIGURA 4.3.3.

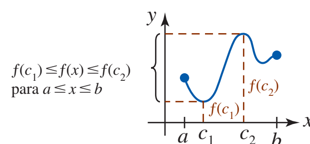
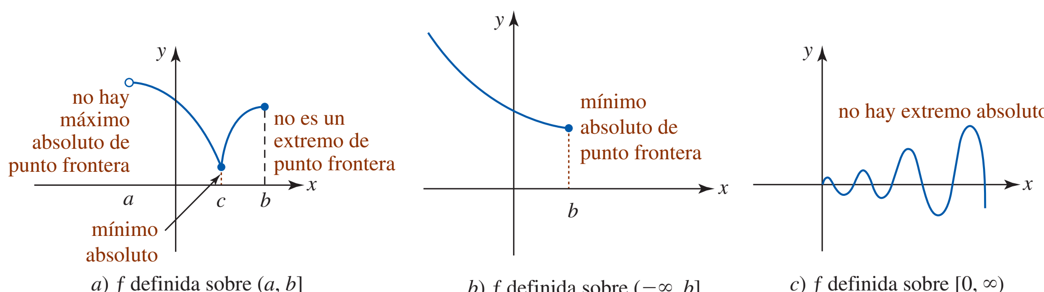


FIGURA 4.3.3 La función f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto

Extremos de un punto frontera Cuando un extremo absoluto de una función ocurre en un punto frontera de un intervalo I, como en los incisos *a*) y *c*) del ejemplo 2, decimos que se trata de un **extremo de un punto frontera**. Cuando I no es un intervalo cerrado; es decir, cuando I es un intervalo como $(a, b]$, $(-\infty, b]$ o $[a, \infty)$, entonces aunque f sea continua no hay garantía de que exista un extremo absoluto. Vea la FIGURA 4.3.4.



a) f definida sobre $(a, b]$ *b)* f definida sobre $(-\infty, b]$ *c)* f definida sobre $[0, \infty)$

FIGURA 4.3.4 Una función f continua sobre un intervalo que no tiene ningún extremo absoluto

Extremos relativos En la FIGURA 4.3.5*a*) se ha ilustrado la gráfica de $f(x) = x^3 - 5x + 8$. Debido a que el comportamiento final de f es el de $y = x^3$, $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$. Con base en esta observación es posible concluir que esta función polinomial no tiene extremos absolutos. No obstante, suponga que centramos la atención

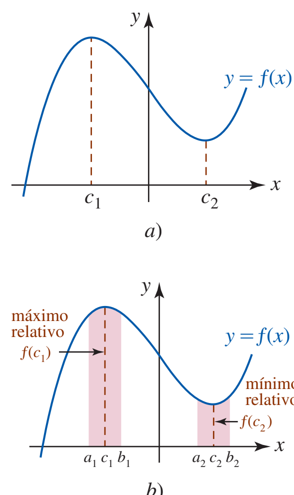


FIGURA 4.3.5 Máximo relativo en c_1 y mínimo relativo en c_2

en valores de x próximos a, o en una *vecindad* de, los números c_1 y c_2. Como se muestra en la figura 4.3.5*b*), $f(c_1)$ es el valor mayor o máximo de la función f cuando se compara con todos los demás valores de la función en el intervalo abierto (a_1, b_1); en forma semejante, $f(c_2)$ es el valor mínimo de f en el intervalo (a_2, b_2). Estos **extremos relativos**, o **locales**, se definen como sigue.

Definición 4.3.2 Extremos relativos

i) Un número $f(c_1)$ es un **máximo relativo** de una función f si $f(x) \leq f(c_1)$ para toda x en algún intervalo abierto que contiene a c_1.
ii) Un número $f(c_1)$ es un **mínimo relativo** de una función f si $f(x) \geq f(c_1)$ para toda x en algún intervalo abierto que contiene a c_1.

Como consecuencia de la definición 4.3.2 podemos concluir que

- Todo extremo absoluto, con excepción de un extremo de un punto frontera, también es un extremo relativo.

Un extremo absoluto de un punto frontera se excluye de ser un extremo relativo con base en el tecnicismo de que alrededor de un punto frontera del intervalo no puede encontrarse un intervalo abierto contenido en el dominio de la función.

Hemos llegado al planteamiento de una pregunta evidente:

- ¿Cómo se encuentran los extremos de una función?

Incluso cuando tenemos gráficas, para la mayor parte de las funciones la coordenada x en que ocurre un extremo no es evidente. Con ayuda de la herramienta para acercar o alejar una página de un dispositivo para graficar, es posible buscar y, por supuesto, aproximar tanto la ubicación como el valor de un extremo. Vea la FIGURA 4.3.6. A pesar de lo anterior, resulta aconsejable poder encontrar la ubicación exacta y el valor exacto de un extremo.

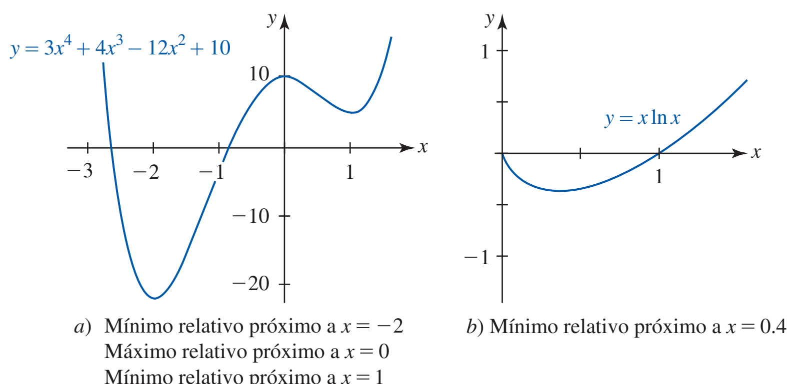


FIGURA 4.3.6 Ubicación aproximada de extremos relativos

En la figura 4.3.6*a*) se plantea que un mínimo relativo ocurre *cerca* de $x = -2$. Con las herramientas de una calculadora o un SAC es posible convencernos de que este mínimo relativo es realmente un mínimo absoluto o global, pero con las herramientas del cálculo es posible demostrar en verdad que éste es el caso.

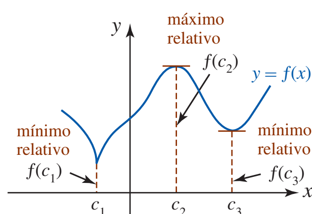


FIGURA 4.3.7 f no es diferenciable en c_1; f' es 0 en c_2 y c_3

Números críticos El análisis de la FIGURA 4.3.7 junto con las figuras 4.3.5 y 4.3.6 sugiere que si c es un número en el que la función f tiene un extremo relativo, entonces la tangente es horizontal en el punto correspondiente a $x = c$ o no es diferenciable en $x = c$. Es decir, una de las dos: $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. Este número c recibe un nombre especial.

Definición 4.3.3 Número crítico

Un **número crítico** de una función f es un número c en su dominio para el cual $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

En algunos textos un número crítico $x = c$ se denomina **punto crítico**.

EJEMPLO 3 Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = x \ln x$.

Solución Por la regla del producto,

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x = 1 + \ln x.$$

La única solución de $f'(x) = 0$ o $\ln x = -1$ es $x = e^{-1}$. Hasta dos cifras decimales, el número crítico de f es $e^{-1} \approx 0.36$. ■

EJEMPLO 4 Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 10$.

Solución Al diferenciar y factorizar se obtiene

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x + 2)(x - 1).$$

Por tanto, observamos que $f'(x) = 0$ para $x = 0$, $x = -2$ y $x = 1$. Los números críticos de f son $0, -2$ y 1. ■

EJEMPLO 5 Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = (x + 4)^{2/3}$.

Solución Por la regla de potencias para funciones,

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x + 4)^{-1/3} = \frac{2}{3(x + 4)^{1/3}}.$$

En este caso observamos que $f'(x)$ no existe cuando $x = -4$. Puesto que -4 está en el dominio de f, concluimos que éste es su número crítico. ■

EJEMPLO 6 Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

Solución Por la regla del cociente, después de simplificar encontramos,

$$f'(x) = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}.$$

Ahora, $f'(x) = 0$ cuando el numerador de f es 0. Al resolver la ecuación $x(x - 2) = 0$ obtenemos $x = 0$ y $x = 2$. Además, cuando se inspecciona el denominador de f se encuentra que $f'(x)$ no existe cuando $x = 1$. No obstante, al analizar f se observa que $x = 1$ no está en su dominio, y así los únicos números críticos son 0 y 2. ■

Teorema 4.3.2 Los extremos relativos ocurren en números críticos

Si una función f tiene un extremo relativo en $x = c$, entonces c es un número crítico.

DEMOSTRACIÓN Suponga que $f(c)$ es un extremo relativo.

i) Si $f'(c)$ no existe, entonces, por la definición 4.3.3, c es un número crítico.

ii) Si $f'(c)$ existe, entonces hay tres posibilidades: $f'(c) > 0$, $f'(c) < 0$ o $f'(c) = 0$. Para ahorrar argumentos, también se supondrá que $f(c)$ es un máximo relativo. Así, por la definición 4.3.2 hay algún intervalo abierto que contiene a c donde

$$f(c + h) \leq f(c) \tag{1}$$

donde el número h es suficientemente pequeño en valor absoluto. Entonces, la desigualdad en (1) implica que

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{para } h > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{para } h < 0. \tag{2}$$

Pero como $\lim_{h\to 0} [f(c+h) - f(c)]/h$ existe y es igual a $f'(c)$, las desigualdades en (2) muestran que $f'(c) \leq 0$ y $f'(c) \geq 0$, respectivamente. La única forma en que esto puede ocurrir es cuando $f'(c) = 0$. El caso en que $f(c)$ es un mínimo relativo se demuestra en forma semejante. ■

Extremos de funciones definidos sobre un intervalo cerrado Se ha visto que una función f que es continua sobre un intervalo *cerrado* tiene tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto. El siguiente teorema indica dónde ocurren estos extremos.

Teorema 4.3.3 Determinación de extremos absolutos

Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces un extremo absoluto ocurre ya sea en un punto frontera del intervalo o en un número crítico c en el intervalo abierto (a, b).

El teorema 4.3.3 se resume como sigue:

Directrices para encontrar extremos sobre un intervalo cerrado

i) Evalúe f en los puntos frontera a y b del intervalo $[a, b]$.
ii) Encuentre todos los números críticos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en el intervalo abierto (a, b).
iii) Evalúe f en todos los números críticos.
iv) Los valores mayor y menor en la lista

$$f(a), f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n), f(b),$$

son el máximo absoluto y el mínimo absoluto, respectivamente, de f sobre el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 7 Determinación de extremos absolutos

Encuentre los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$ sobre el intervalo

a) $[-3, 1]$ ***b***) $[-3, 8]$.

Solución Debido a que f es continua, sólo es necesario evaluar f en los puntos frontera de cada intervalo y en los números críticos dentro de cada intervalo. A partir de la derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x + 2)(x - 4)$$

vemos que los números críticos de la función f son -2 y 4.

a) A partir de los datos que se muestran en la tabla siguiente resulta evidente que el máximo absoluto de f sobre el intervalo $[-3, 1]$ es $f(-2) = 30$, y que el mínimo absoluto es el extremo de un punto frontera $f(1) = -24$.

Sobre $[-3, 1]$			
x	-3	-2	1
$f(x)$	20	30	-24

b) Sobre el intervalo $[-3, 8]$ a partir de la tabla siguiente observamos que $f(4) = -78$ es un mínimo absoluto y que $f(8) = 130$ es un máximo absoluto de un punto frontera.

Sobre $[-3, 8]$				
x	-3	-2	4	8
$f(x)$	20	30	-78	130

■

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Una función puede, por supuesto, asumir sus valores máximo y mínimo más de una vez sobre un intervalo. Usted debe comprobar, con ayuda de un dispositivo para graficar, que la función $f(x) = \text{sen}\, x$ alcanza su valor de función máximo 1 cinco veces y su valor de función mínimo -1 cuatro veces en el intervalo $[0, 9\pi]$.

ii) El converso del teorema 4.3.2 no necesariamente es cierto. En otras palabras:

Un número crítico de una función f no necesita corresponder a un extremo relativo.

Considere $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$. Las derivadas $f'(x) = 3x^2$ y $g'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ muestran que 0 es un número crítico de ambas funciones. Pero a partir de las gráficas de f y g en la FIGURA 4.3.8 vemos que ninguna función posee algún extremo sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

iii) Hemos indicado cómo encontrar los extremos absolutos de una función f que es continua sobre un intervalo cerrado. En las secciones 4.6 y 4.7 usamos la primera y segunda derivada para encontrar los extremos relativos de una función.

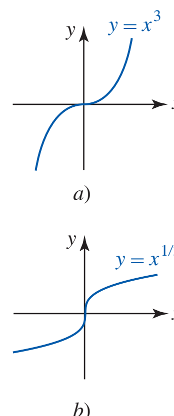


FIGURA 4.3.8 0 es un número crítico para ambas funciones, pero ninguna tiene extremos

Ejercicios 4.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-14.

Fundamentos

En los problemas 1-6, use la gráfica de la función dada como ayuda para determinar cualquier extremo absoluto sobre los intervalos indicados.

1. $f(x) = x - 4$
a) $[-1, 2]$ ***b***) $[3, 7]$ ***c***) $(2, 5)$ ***d***) $[1, 4]$

2. $f(x) = |x - 4|$
a) $[-1, 2]$ ***b***) $[3, 7]$ ***c***) $(2, 5)$ ***d***) $[1, 4]$

3. $f(x) = x^2 - 4x$
a) $[1, 4]$ ***b***) $[1, 3]$ ***c***) $(-1, 3)$ ***d***) $(4, 5]$

4. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
a) $[-3, 3]$ ***b***) $(-3, 3)$ ***c***) $[0, 3)$ ***d***) $[-1, 1]$

5. $f(x) = \tan x$
a) $[-\pi/2, \pi/2]$ ***b***) $[-\pi/4, \pi/4]$
c) $[0, \pi/3]$ ***d***) $[0, \pi]$

6. $f(x) = 2 \cos x$
a) $[-\pi, \pi]$ ***b***) $[-\pi/2, \pi/2]$
c) $[\pi/3, 2\pi/3]$ ***d***) $[-\pi/2, 3\pi/2]$

En los problemas 7-22, encuentre los números críticos de las funciones dadas.

7. $f(x) = 2x^2 - 6x + 8$ **8.** $f(x) = x^3 + x - 2$
9. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x$ **10.** $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$
11. $f(x) = (x - 2)^2(x - 1)$ **12.** $f(x) = x^2(x + 1)^3$
13. $f(x) = \dfrac{1 + x}{\sqrt{x}}$ **14.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2}$
15. $f(x) = (4x - 3)^{1/3}$ **16.** $f(x) = x^{2/3} + x$
17. $f(x) = (x - 1)^2\sqrt[3]{x + 2}$ **18.** $f(x) = \dfrac{x + 4}{\sqrt[3]{x + 1}}$
19. $f(x) = -x + \text{sen}\, x$ **20.** $f(x) = \cos 4x$
21. $f(x) = x^2 - 8 \ln x$ **22.** $f(x) = e^{-x} + 2x$

En los problemas 23-36, encuentre los extremos absolutos de la función dada sobre el intervalo indicado.

23. $f(x) = -x^2 + 6x$; $[1, 4]$ **24.** $f(x) = (x - 1)^2$; $[2, 5]$
25. $f(x) = x^{2/3}$; $[-1, 8]$
26. $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 1)$; $[-1, 1]$
27. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$; $[-3, 2]$
28. $f(x) = -x^3 - x^2 + 5x$; $[-2, 2]$
29. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; $[-4, 3]$
30. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 10$; $[0, 4]$
31. $f(x) = x^4(x - 1)^2$; $[-1, 2]$
32. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$; $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$
33. $f(x) = 2 \cos 2x - \cos 4x$; $[0, 2\pi]$
34. $f(x) = 1 + 5 \,\text{sen}\, 3x$; $[0, \pi/2]$
35. $f(x) = 3 + 2 \,\text{sen}^2\, 24x$; $[0, \pi]$
36. $f(x) = 2x - \tan x$; $[-1, 1.5]$

En los problemas 37 y 38, encuentre todos los números críticos. Distinga entre extremos absolutos, extremos de un punto frontera y extremos relativos.

37. $f(x) = x^2 - 2|x|$; $[-2, 3]$
38. $f(x) = \begin{cases} 4x + 12, & -5 \le x \le -2 \\ x^2, & -2 < x \le 1 \end{cases}$

39. Considere la función f continua definida sobre $[a, b]$ que se muestra en la FIGURA 4.3.9. Dado que de c_1 a c_{10} son números críticos:

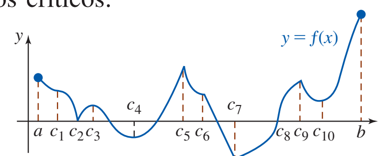


FIGURA 4.3.9 Gráfica para el problema 39

a) Enumere los números críticos en los cuales $f'(x) = 0$.
b) Enumere los números críticos en los cuales $f'(x)$ no está definida.
c) Distinga entre los extremos absolutos y los extremos absolutos de un punto frontera.
d) Distinga entre los máximos relativos y los mínimos relativos.

40. Considere la función $f(x) = x + 1/x$. Demuestre que el mínimo relativo es mayor que el máximo relativo.

Aplicaciones

41. La altura de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo está dada por $s(t) = -16t^2 + 320t$, donde t se mide en segundos y s en pies.

a) $s(t)$ está definida sólo en el intervalo [0, 20]. ¿Por qué?

b) Use los resultados del teorema 4.3.3 para determinar la altura máxima alcanzada por el proyectil.

42. El físico francés **Jean Louis Poiseuille** descubrió que la velocidad $v(r)$ (en cm/s) del flujo sanguíneo que circula por una arteria con sección trasversal de radio R está dada por $v(r) = (P/4\nu l)(R^2 - r^2)$, donde P, ν y l son constantes positivas. Vea la FIGURA 4.3.10.

a) Determine el intervalo cerrado sobre el que está definida v.

b) Determine las velocidades máxima y mínima del flujo sanguíneo.

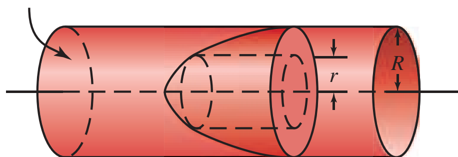


FIGURA 4.3.10 Arteria para el problema 42

Piense en ello

43. Elabore una gráfica de una función continua f que no tenga extremos absolutos pero sí un máximo relativo y un mínimo relativo que tengan el mismo valor.

44. Proporcione un ejemplo de una función continua, definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, para el cual el máximo absoluto es el mismo que el mínimo absoluto.

45. Sea $f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función entero mayor. Demuestre que todo valor de x es un número crítico.

46. Demuestre que $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$ no tiene números críticos cuando $ad - bc \neq 0$. ¿Qué ocurre cuando $ad - bc = 0$?

47. Sea $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Determine los valores de n para los cuales f tiene un extremo relativo.

48. Analice: ¿por qué una función polinomial de grado n puede tener a lo sumo $n - 1$ números críticos?

49. Suponga que f es una función par continua tal que $f(a)$ es un mínimo relativo. ¿Qué puede afirmarse sobre $f(-a)$?

50. Suponga que f es una función impar continua tal que $f(a)$ es un máximo relativo. ¿Qué puede afirmarse sobre $f(-a)$?

51. Suponga que f es una función par continua que es diferenciable en todas partes. Demuestre que $x = 0$ es un número crítico de f.

52. Suponga que f es una función diferenciable que tiene sólo un número crítico c. Si $k \neq 0$, encuentre los números críticos de:

a) $k + f(x)$ *b*) $kf(x)$ *c*) $f(x + k)$ *d*) $f(kx)$

Problemas con calculadora/SAC

53. *a*) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = -2 \cos x + \cos 2x$.

b) Encuentre los números críticos de f en el intervalo $[0, 2\pi]$.

c) Encuentre los extremos absolutos de f en el intervalo $[0, 2\pi]$.

54. En el estudio del crecimiento de los copos de nieve, la fórmula

$$I(t) = \frac{b}{\pi} + \frac{b}{2}\operatorname{sen}\omega t - \frac{2b}{3\pi}\cos 2\omega t$$

es un modelo matemático para la variación diaria en la intensidad de radiación solar que penetra la superficie de la nieve. Aquí t representa el tiempo medido en horas después del amanecer ($t = 0$) y $\omega = 2\pi/24$.

a) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de I sobre el intervalo [0, 24]. Use $b = 1$.

b) Encuentre los números críticos de I en el intervalo [0, 24].

4.4 Teorema del valor medio

Introducción Suponga que una función $y = f(x)$ es continua y diferenciable sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y que $f(a) = f(b) = 0$. Estas condiciones significan que los números a y b son las coordenadas x de las intersecciones x de la gráfica de f. En la FIGURA 4.4.1*a*) se muestra una gráfica típica de una función f que satisface estas condiciones. A partir de la figura 4.4.1*b*) parece válido que debe haber por lo menos un número c en el intervalo abierto (a, b) correspondiente a un punto sobre la gráfica de f donde la tangente es horizontal. Esta observación conduce a un resultado denominado teorema de Rolle. Usaremos este teorema para demostrar el resultado más importante de esta sección: el teorema del valor medio para derivadas.

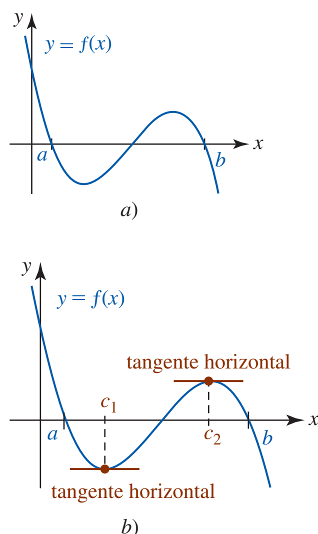


FIGURA 4.4.1 Dos puntos donde la tangente es horizontal

Teorema 4.4.1 Teorema de Rolle

Sea f una función continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b). Si $f(a) = f(b) = 0$, entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Ocurre que f es una función constante sobre el intervalo $[a, b]$ o no lo es. Si f es una función constante sobre $[a, b]$, entonces debe tenerse $f'(c) = 0$ para todo número c en (a, b). Luego, si f no es una función constante sobre $[a, b]$, entonces debe haber un número x

en (a, b) donde $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$. Suponga que $f(x) > 0$. Puesto que f es continua sobre $[a, b]$, por el teorema del valor extremo sabemos que f alcanza un máximo absoluto en algún número c en $[a, b]$. Pero por $f(a) = f(b) = 0$ y $f(x) > 0$ para alguna x en (a, b), concluimos que el número c no puede ser un punto frontera de $[a, b]$. En consecuencia, c está en (a, b). Puesto que f es diferenciable sobre (a, b), es diferenciable en c. Entonces, por el teorema 4.3.2 tenemos $f'(c) = 0$. La demostración para el caso en que $f(x) < 0$ se concluye en forma semejante. ∎

EJEMPLO 1 Comprobación del teorema de Rolle

Considere la función $f(x) = -x^3 + x$ definida sobre $[-1, 1]$. La gráfica de f se muestra en la FIGURA 4.4.2. Puesto que f es una función polinomial, es continua en $[-1, 1]$ y diferenciable sobre $(-1, 1)$. También, $f(-1) = f(1) = 0$. Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle. Concluimos que debe haber por lo menos un número en $(-1, 1)$ para el cual $f'(x) = -3x^2 + 1$ es cero. Para encontrar este número, se resuelve $f'(c) = 0$ o $-3c^2 + 1 = 0$. Esta última conduce a *dos* soluciones en el intervalo: $c_1 = -\sqrt{3}/3 \approx -0.57$ y $c_2 = \sqrt{3}/3 \approx 0.57$. ∎

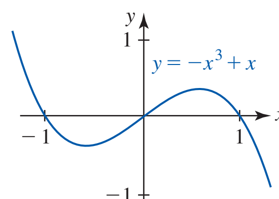


FIGURA 4.4.2 Gráfica de la función en el ejemplo 1

En el ejemplo 1, observe que la función f dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle sobre $[0, 1]$, así como sobre $[-1, 1]$. En el caso del intervalo $[0, 1]$, $f'(c) = -3c^2 + 1 = 0$ produce la única solución $c = \sqrt{3}/3$.

EJEMPLO 2 Comprobación del teorema de Rolle

a) La función $f(x) = x - 4x^{1/3}$, que se muestra en la FIGURA 4.4.3, es continua sobre $[-8, 8]$ y satisface $f(-8) = f(8) = 0$. Pero no es diferenciable sobre $(-8, 8)$, puesto que en el origen hay una tangente vertical. No obstante, como sugiere la figura, hay dos números c_1 y c_2 en $(-8, 8)$ donde $f'(x) = 0$. Usted debe comprobar que $f'(-8\sqrt{3}/9) = 0$ y $f'(8\sqrt{3}/9) = 0$. Tenga en cuenta que las hipótesis del teorema de Rolle son condiciones suficientes pero no necesarias. En otras palabras, si no se cumple una de estas tres hipótesis: continuidad sobre $[a, b]$, diferenciabilidad sobre (a, b) y $f(a) = f(b)=0$, la conclusión de que en (a, b) hay un número c tal que $f'(c) = 0$ puede cumplirse o no.

b) Considere otra función $g(x) = 1 - x^{2/3}$. Esta función es continua sobre $[-1, 1]$ y $f(-1) = f(1) = 0$. Pero como la función f anterior, g no es diferenciable en $x = 0$ y por tanto no es diferenciable sobre el intervalo abierto $(-1, 1)$. En este caso, sin embargo, en $(-1, 1)$ no hay algún c para el cual $f'(c) = 0$. Vea la FIGURA 4.4.4. ∎

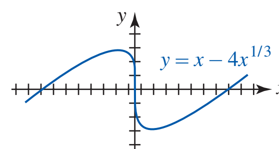


FIGURA 4.4.3 Gráfica de la función f en el ejemplo 2

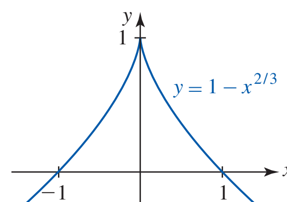


FIGURA 4.4.4 Gráfica de la función g en el ejemplo 2

La conclusión del teorema de Rolle también se cumple cuando la condición $f(a) = f(b) = 0$ se sustituye por $f(a) = f(b)$. La validez de este hecho se ilustra en la FIGURA 4.4.5.

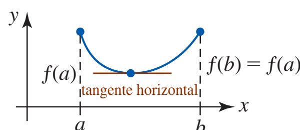


FIGURA 4.4.5 El teorema de Rolle se cumple cuando $f(a) = f(b)$

Teorema del valor medio El teorema de Rolle es de utilidad para demostrar el siguiente resultado importante denominado **teorema del valor medio**. Este teorema establece que cuando una función f es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b), entonces debe haber por lo menos un punto sobre la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. La palabra *medio* se refiere aquí a un promedio; es decir, al valor de la derivada en algún punto es el mismo que la razón de cambio media de la función sobre el intervalo.

Teorema 4.4.2 Teorema del valor medio para derivadas

Sea f una función continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b). Entonces en (a, b) existe un número c tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

DEMOSTRACIÓN Como se muestra en la FIGURA 4.4.6, sea $d(x)$ la distancia vertical entre un punto sobre la gráfica de $y = f(x)$ y la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Puesto que la ecuación de la recta secante es

$$y - f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$$

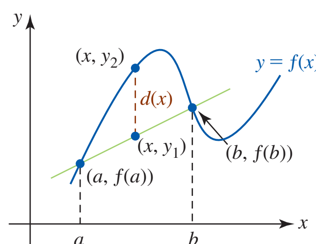


FIGURA 4.4.6 Recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

tenemos, como se muestra en la figura, $d(x) = y_2 - y_1$, o bien,

$$d(x) = f(x) - \left[f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) \right].$$

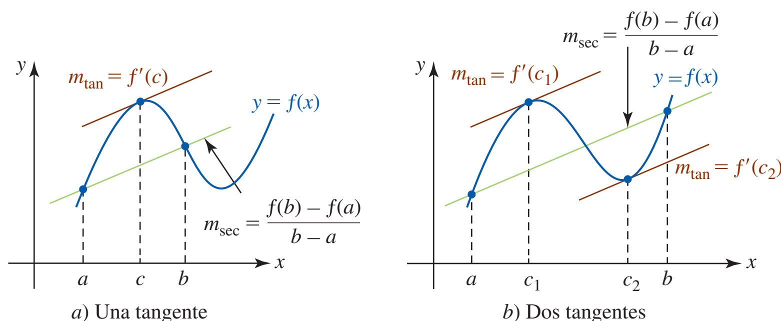
Puesto que $d(a) = d(b) = 0$ y $d(x)$ es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b), el teorema de Rolle implica que en (a, b) existe un número c para el cual $d'(c) = 0$. Entonces,

$$d'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y así $d'(c) = 0$ es lo mismo que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \blacksquare$$

Como se indica en la FIGURA 4.4.7, en (a, b) puede haber más de un número c para el que las rectas tangente y secante son paralelas.



a) Una tangente *b*) Dos tangentes

FIGURA 4.4.7 Las tangentes son paralelas a la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

EJEMPLO 3 Comprobación del teorema del valor medio

Dada la función $f(x) = x^3 - 12x$ definida sobre el intervalo cerrado $[-1, 3]$, ¿existe un número c en el intervalo abierto $(-1, 3)$ que cumple la conclusión del teorema del valor medio?

Solución Puesto que f es una función polinomial, es continua sobre $[-1, 3]$ y diferenciable sobre $(-1, 3)$. Entonces, $f(3) = -9, f(-1) = 11$,

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \qquad \text{y} \qquad f'(c) = 3c^2 - 12.$$

Así, debe tenerse

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-20}{4} = 3c^2 - 12.$$

Por tanto, $3c^2 = 7$. Aunque la última ecuación tiene dos soluciones, la única solución en el intervalo $(-1, 3)$ es $c = \sqrt{7/3} \approx 1.53$. $\blacksquare$

El teorema del valor medio es muy útil para demostrar otros teoremas. Recuerde de la sección 3.2 que si $f(x) = k$ es una función constante, entonces $f'(x) = 0$. El converso de este resultado se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.4.3 Función constante

Si $f'(x) = 0$ para toda x en un intervalo $[a, b]$, entonces $f(x)$ es una constante sobre el intervalo.

DEMOSTRACIÓN Sean x_1 y x_2 dos números arbitrarios en $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio, en el intervalo (x_1, x_2) hay un número c tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Pero por hipótesis, $f'(x) = 0$. Entonces, $f(x_2) - f(x_1) = 0$ o $f(x_1) = f(x_2)$. Puesto que x_1 y x_2 se escogen de manera arbitraria, la función f tiene el mismo valor en todos los puntos en el intervalo. Así, f es constante. $\blacksquare$

Funciones crecientes y decrecientes Suponga que una función $y = f(x)$ está definida sobre un intervalo I y que x_1 y x_2 son dos números cualesquiera en el intervalo tales que $x_1 < x_2$. En la sección 1.3 vimos que f es **creciente** sobre I si $f(x_1) < f(x_2)$, y **decreciente** sobre I si $f(x_1) > f(x_2)$. Vea la figura 1.3.4. Intuitivamente, la gráfica de una función creciente *sube* cuando x crece (es decir, la gráfica asciende cuando se lee de izquierda a derecha) y la gráfica de una función decreciente *baja* cuando x crece. Por ejemplo, $y = e^x$ crece sobre $(-\infty, \infty)$ y $y = e^{-x}$ decrece sobre $(-\infty, \infty)$. Por supuesto, una función f puede ser creciente sobre ciertos intervalos y decreciente sobre intervalos diferentes. Por ejemplo, $y = \operatorname{sen} x$ crece sobre $[-\pi/2, \pi/2]$ y decrece sobre $[\pi/2, 3\pi/2]$.

La gráfica en la FIGURA 4.4.8 ilustra una función f que es creciente sobre los intervalos $[b, c]$ y $[d, e]$ y decreciente sobre $[a, b]$, $[c, d]$ y $[e, h]$.

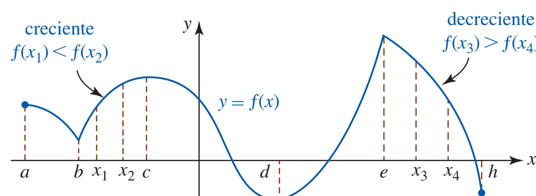


FIGURA 4.4.8 Una función puede crecer sobre algunos intervalos y decrecer en otros

El siguiente teorema es una prueba de la derivada para crecimiento/decrecimiento.

Teorema 4.4.4 Prueba para crecimiento/decrecimiento

Sea f una función continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b).

i) Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces f es creciente sobre $[a, b]$.
ii) Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a, b), entonces f es decreciente sobre $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN *i*) Sean x_1 y x_2 dos números arbitrarios en $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio, en el intervalo (x_1, x_2) hay un número c tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Pero $f'(c) > 0$ por hipótesis. Entonces, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ o $f(x_1) < f(x_2)$. Puesto que x_1 y x_2 se escogen de manera arbitraria, concluimos que f es creciente sobre $[a, b]$.

ii) Si $f'(c) < 0$, entonces $f(x_2) - f(x_1) < 0$ o $f(x_1) > f(x_2)$. Puesto que x_1 y x_2 se escogen de manera arbitraria, concluimos que f es decreciente sobre $[a, b]$. ■

EJEMPLO 4 Prueba de la derivada para crecimiento/decrecimiento

Determine los intervalos sobre los cuales $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$ es creciente y los intervalos sobre los cuales f es decreciente.

Solución La derivada es

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x + 2)(x - 4).$$

Para determinar cuándo $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ es necesario resolver

$$(x + 2)(x - 4) > 0 \qquad \text{y} \qquad (x + 2)(x - 4) < 0,$$

respectivamente. Una manera de resolver estas desigualdades es analizar los signos algebraicos de los factores $(x + 2)$ y $(x - 4)$ sobre los intervalos de la recta numérica determinada por los puntos críticos -2 y 4: $(-\infty, -2]$, $[-2, 4]$, $[4, \infty)$. Vea la FIGURA 4.4.9.

En precálculo, este procedimiento para resolver desigualdades no lineales se denomina *método de la tabla de signos*.

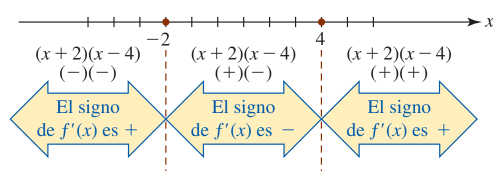


FIGURA 4.4.9 Signos de $f(x)$ en tres intervalos en el ejemplo 4

La información obtenida a partir de la figura 4.4.9 se resume en la tabla siguiente.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	$y = f(x)$
$(-\infty, -2)$	$+$	creciente sobre $(-\infty, -2]$
$(-2, 4)$	$-$	decreciente sobre $[-2, 4]$
$(4, \infty)$	$+$	creciente sobre $[4, \infty)$

■

EJEMPLO 5 Prueba de la derivada para creciente/decreciente

Determine los intervalos sobre los cuales $f(x) = \sqrt{x}e^{-x/2}$ es creciente y los intervalos sobre los cuales f es decreciente.

Solución Primero observe que el dominio de f está definido por $x \geq 0$. Luego, la derivada

$$f'(x) = x^{1/2}e^{-x/2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}x^{-1/2}e^{-x/2} = \frac{e^{-x/2}}{2\sqrt{x}}(1 - x)$$

es cero en 1 y está indefinida en 0. Puesto que 0 está en el dominio de f y ya que $f'(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$, concluimos que la gráfica de f tiene una tangente vertical (el eje y) en (0, 0). Además, debido a que $e^{-x/2}/2\sqrt{x} > 0$ para $x > 0$, sólo es necesario resolver

$$1 - x > 0 \qquad \text{y} \qquad 1 - x < 0$$

para determinar dónde $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$, respectivamente. Los resultados se muestran en la tabla siguiente.

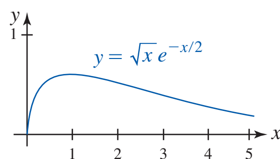


FIGURA 4.4.10 Gráfica de la función en el ejemplo 5

Intervalo	Signo de $f'(x)$	$y = f(x)$
$(0, 1)$	$+$	creciente sobre $[0, 1]$
$(1, \infty)$	$-$	decreciente sobre $[1, \infty)$

Con ayuda de un dispositivo para graficar obtenemos la gráfica de f que se observa en la FIGURA 4.4.10. ■

Si una función f es discontinua en uno o en ambos puntos extremos de $[a, b]$, entonces $f'(x) > 0$ (o $f'(x) < 0$) sobre (a, b) implica que f es creciente (o decreciente) sobre el intervalo abierto (a, b).

Posdata: Un poco de historia **Michel Rolle** (1652-1719), francés, maestro de escuela elemental, estaba profundamente interesado en las matemáticas, y a pesar de que su educación fue bastante deficiente resolvió varios teoremas de importancia. Pero, curiosamente, Rolle no demostró el teorema que lleva su nombre. De hecho, fue uno de los primeros críticos rotundos del, entonces, nuevo cálculo. A Rolle también se le acredita la invención del simbolismo $\sqrt[n]{x}$ para denotar la raíz n-ésima de un número x.

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Como ya se mencionó, las hipótesis planteadas en el teorema de Rolle, así como las hipótesis del teorema del valor medio, son condiciones suficientes pero no necesarias. En el teorema de Rolle, por ejemplo, si una o más de las hipótesis: continuidad sobre $[a, b]$, diferenciabilidad sobre (a, b) y $f(a) = f(b) = 0$ no se cumple, entonces la conclusión de que en el intervalo abierto (a, b) existe un número c tal que $f'(c) = 0$ puede cumplirse o no.

ii) El converso de los incisos *i*) y *ii*) del teorema 4.4.4 no necesariamente son ciertos. En otras palabras, cuando f es una función creciente (o decreciente) sobre un intervalo, no se concluye que $f'(x) > 0$ (o $f'(x) < 0$) sobre el intervalo. Una función puede ser creciente sobre un intervalo e incluso no ser diferenciable sobre ese intervalo.

Ejercicios 4.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-14.

Fundamentos

En los problemas 1-10, determine si la función dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, encuentre todos los valores de c que satisfacen la conclusión del teorema.

1. $f(x) = x^2 - 4; \quad [-2, 2]$

2. $f(x) = x^2 - 6x + 5; \quad [1, 5]$

3. $f(x) = x^3 + 27; \quad [-3, -2]$

4. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x; \quad [0, 4]$

5. $f(x) = x^3 + x^2; \quad [-1, 0]$

6. $f(x) = x(x - 1)^2; \quad [0, 1]$

7. $f(x) = \operatorname{sen} x; \quad [-\pi, 2\pi]$

8. $f(x) = \tan x; \quad [0, \pi]$

9. $f(x) = x^{2/3} - 1; \quad [-1, 1]$

10. $f(x) = x^{2/3} - 3x^{1/3} + 2; \quad [1, 8]$

En los problemas 11 y 12, establezca por qué la función f cuya gráfica se proporciona no satisface las hipótesis del teorema de Rolle sobre $[a, b]$.

11.

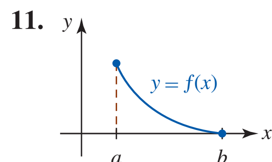


FIGURA 4.4.11 Gráfica para el problema 11

12.

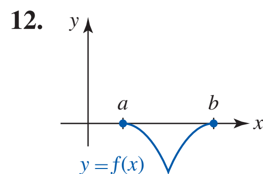


FIGURA 4.4.12 Gráfica para el problema 12

En los problemas 13-22, determine si la función dada satisface las hipótesis del teorema del valor medio sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, encuentre todos los valores de c que satisfacen la conclusión del teorema.

13. $f(x) = x^2; \quad [-1, 7]$

14. $f(x) = -x^2 + 8x - 6; \quad [2, 3]$

15. $f(x) = x^3 + x + 2; \quad [2, 5]$

16. $f(x) = x^4 - 2x^2; \quad [-3, 3]$

17. $f(x) = 1/x; \quad [-10, 10]$

18. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}; \quad [1, 5]$

19. $f(x) = 1 + \sqrt{x}; \quad [0, 9]$

20. $f(x) = \sqrt{4x + 1}; \quad [2, 6]$

21. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}; \quad [-2, -1]$

22. $f(x) = x^{1/3} - x; \quad [-8, 1]$

En los problemas 23 y 24, establezca por qué la función f cuya gráfica se proporciona no satisface las hipótesis del teorema del valor medio sobre $[a, b]$.

23.

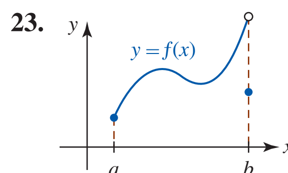


FIGURA 4.4.13 Gráfica para el problema 23

24.

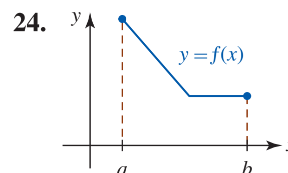


FIGURA 4.4.14 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25-46, determine los intervalos sobre los cuales la función dada f es creciente y los intervalos sobre los cuales es decreciente.

25. $f(x) = x^2 + 5$

26. $f(x) = x^3$

27. $f(x) = x^2 + 6x - 1$

28. $f(x) = -x^2 + 10x + 3$

29. $f(x) = x^3 - 3x^2$

30. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 1$

31. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9$

32. $f(x) = 4x^5 - 10x^4 + 2$

33. $f(x) = 1 - x^{1/3}$

34. $f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$

35. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

36. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

37. $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

38. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

39. $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 1}$

40. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

41. $f(x) = x(x - 3)^2$

42. $f(x) = (x^2 - 1)^3$

43. $f(x) = \operatorname{sen} x$

44. $f(x) = -x + \tan x$

45. $f(x) = x + e^{-x}$

46. $f(x) = x^2 e^{-x}$

En los problemas 47 y 48, demuestre, sin graficar, que la función dada no tiene extremos relativos.

47. $f(x) = 4x^3 + x$

48. $f(x) = -x + \sqrt{2 - x}$

Aplicaciones

49. Un motociclista entra a una carretera de peaje y en el comprobante de pago la hora indicada es 1:15 p.m. Luego de 70 millas, cuando el motociclista paga en la caseta de peaje a las 2:15 p.m., también recibe un comprobante de pago. Explique esto por medio del teorema del valor medio. Suponga que la velocidad límite es 65 mi/h.

50. En el análisis matemático de la tos humana se supone que la tráquea o tubo respiratorio es un tubo cilíndrico. Un modelo matemático para el volumen de aire (en cm^3/s) que fluye a través de la tráquea durante su contracción es

$$V(r) = kr^4(r_0 - r), \quad r_0/2 \le r \le r_0,$$

donde k es una constante positiva y r_0 es su radio cuando no hay diferencia de presión en los extremos del tubo respiratorio. Determine un intervalo para el cual V sea creciente y un intervalo para el cual V sea decreciente. ¿Con qué radio obtiene el volumen máximo de flujo de aire?

Piense en ello

51. Considere la función $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$. Use esta función y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación $4x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ tiene por lo menos una raíz en $[-1, 1]$.

52. Suponga que las funciones f y g son continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre (a, b) de modo que $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ para toda x en (a, b). Demuestre que $f + g$ es una función creciente sobre $[a, b]$.

53. Suponga que las funciones f y g son continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre (a, b) de modo que $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ para toda x en (a, b). Proporcione una condición sobre $f(x)$ y $g(x)$ que garantice que el producto fg es creciente sobre $[a, b]$.

54. Demuestre que la ecuación $ax^3 + bx + c = 0$, $a > 0$, $b > 0$, no puede tener dos raíces reales. [*Sugerencia*: Considere la función $f(x) = ax^3 + bx + c$. Suponga que hay dos números r_1 y r_2 tales que $f(r_1) = f(r_2) = 0$.]

55. Demuestre que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene a lo sumo una raíz real. [*Sugerencia*: Considere la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. Suponga que hay tres números distintos r_1, r_2 y r_3 tales que $f(r_1) = f(r_2) = f(r_3) = 0$.]

56. Para una función polinomial cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ demuestre que el valor de x_3 que satisface la conclusión del teorema del valor medio sobre cualquier intervalo $[x_1, x_2]$ es $x_3 = (x_1 + x_2)/2$.

57. Suponga que la gráfica de una función polinomial f tiene cuatro intersecciones x distintas. Analice: ¿cuál es el número mínimo de puntos en los cuales una recta tangente a la gráfica de f es horizontal?

58. Como se mencionó después del ejemplo 2, la hipótesis $f(a) = f(b) = 0$ en el teorema de Rolle puede sustituirse por la hipótesis $f(a) = f(b)$.

a) Encuentre una función explícita f definida sobre un intervalo $[a, b]$ tal que f sea continua sobre el intervalo, diferenciable sobre (a, b) y $f(a) = f(b)$.

b) Encuentre un número c para el que $f'(c) = 0$.

59. Considere la función $f(x) = x$ sen x. Use f y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación $\cot x = -1/x$ tiene una solución sobre el intervalo $(0, \pi)$.

≡ Problemas con calculadora/SAC

60. ***a)*** Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = x - 4x^{1/3}$.

b) Compruebe que todas las hipótesis, excepto una del teorema de Rolle, se cumplen en el intervalo $[-8, 8]$.

c) Determine si en $(-8, 8)$ existe un número c para el cual $f'(c) = 0$.

En los problemas 61 y 62, use una calculadora para encontrar un valor de c que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio.

61. $f(x) = \cos 2x$; $[0, \pi/4]$

62. $f(x) = 1 + \text{sen}\, x$; $[\pi/4, \pi/2]$

4.5 Otro repaso a los límites: regla de L'Hôpital

Introducción En los capítulos 2 y 3 vimos cómo el concepto de límite conduce a la idea de derivada de una función. En esta sección se invierte la situación. Vemos cómo la derivada puede usarse para calcular ciertos límites con formas indeterminadas.

Terminología Recuerde que en el capítulo 2 se consideraron límites de cocientes como

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{3x^2 + 1}. \tag{1}$$

El primer límite en (1) tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = 1$, mientras que el segundo tiene la forma indeterminada ∞/∞. En general, decimos que el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene la **forma indeterminada 0/0** en $x = a$ si

$$f(x) \to 0 \quad \text{y} \quad g(x) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad x \to a$$

y la **forma indeterminada ∞/∞** en $x = a$ si

$$|f(x)| \to \infty \quad \text{y} \quad |g(x)| \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a.$$

Los signos de valor absoluto aquí significan que cuando x tiende a a es posible tener, por ejemplo,

$$f(x) \to \infty, \quad g(x) \to -\infty; \text{ o bien,}$$
$$f(x) \to -\infty, \quad g(x) \to \infty; \text{ o bien,}$$
$$f(x) \to -\infty, \quad g(x) \to -\infty,$$

y así sucesivamente. Un límite también puede tener una forma indeterminada como

$$x \to a^-, \quad x \to a^+, \quad x \to -\infty, \quad \text{o bien,} \quad x \to \infty.$$

Límites de la forma

$$\frac{0}{k}, \quad \frac{k}{0}, \quad \frac{\infty}{k} \quad \text{y} \quad \frac{k}{\infty},$$

Nota

donde k es una constante *diferente de cero*, *no* son formas indeterminadas. Merece la pena recordar que:

- El valor de un límite cuya forma es $0/k$ o k/∞ es 0. (2)
- Un límite cuya forma es $k/0$ o ∞/k no existe. (3)

Al establecer si límites de cocientes como los que se muestran en (1) existen, usamos manipulaciones algebraicas de factorización, cancelación y división. No obstante, recuerde que en la demostración de $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x = 1$ se usó un razonamiento geométrico elaborado. Sin embargo, la intuición algebraica y geométrica fracasan lamentablemente cuando intentan abordar un problema del tipo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}},$$

que tiene una forma indeterminada $0/0$. El siguiente teorema es de utilidad cuando se demuestra una regla de suma importancia en la evaluación de muchos límites que tienen una forma indeterminada.

Teorema 4.5.1 Teorema del valor medio ampliado

Sean f y g continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre (a, b) y $g'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b). Entonces en (a, b) existe un número c tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Observe que el teorema 4.5.1 se reduce al teorema del valor medio cuando $g(x) = x$. Aquí no se proporciona ninguna demostración de este teorema, que evoca la demostración del teorema 4.4.2.

La siguiente regla se denomina así en honor del matemático francés G.F.A. L'Hôpital.

Teorema 4.5.2 Regla de L'Hôpital

Suponga que f y g son diferenciables sobre un intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente en a mismo, y que $g'(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo salvo posiblemente en a. Si $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ es una forma indeterminada, y $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = L$ o $\pm\infty$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN DEL CASO 0/0 Sea (r, s) el intervalo abierto. Como se supone que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

también puede asumirse que $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$. Concluimos que f y g son continuas en a. Además, puesto que f y g son diferenciables, éstas son continuas sobre los intervalos abiertos (r, a) y (a, s). En consecuencia, f y g son continuas en el intervalo (r, s). Luego, para cualquier $x \neq a$ en el intervalo, el teorema 4.5.1 es aplicable a $[x, a]$ o $[a, x]$. En cualquier caso, entre x y a existe un número c tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Al hacer $x \to a$ implica $c \to a$, y entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$ ■

EJEMPLO 1 Forma indeterminada 0/0

Evalúe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Solución Puesto que el límite dado tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = 0$, por (4) es posible escribir

La letra *h* en cursiva roja arriba de la primera desigualdad indica que los dos límites son iguales como resultado de aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \overset{h}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x}{\frac{d}{dx}x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1. \qquad ■$$

EJEMPLO 2 Forma indeterminada 0/0

Evalúe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}}$.

Solución Puesto que el límite dado tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = 0$, se aplica (4):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}} \overset{h}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x}{\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \qquad ■$$

El resultado proporcionado en (4) sigue siendo válido cuando $x \to a$ se sustituye por límites por un lado o por $x \to \infty$, $x \to -\infty$. La demostración para el caso $x \to \infty$ puede obtenerse al usar la sustitución $x = 1/t$ en $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ y al observar que $x \to \infty$ es equivalente a $t \to 0^+$.

EJEMPLO 3 Forma indeterminada ∞/∞

Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$.

Solución Puesto que el límite dado tiene la forma indeterminada ∞/∞. Así, por la regla de L'Hôpital tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x}.$$

En este último límite, $xe^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$, mientras 1 permanece constante. En consecuencia, por (2),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x} = 0 \qquad ■$$

Al resolver un problema puede ser necesario aplicar varias veces la regla de L'Hôpital.

EJEMPLO 4 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2 + 5x + 7}{4x^2 + 2x}$.

Solución Resulta evidente que la forma indeterminada es ∞/∞, de modo que por (4),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2 + 5x + 7}{4x^2 + 2x} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{12x + 5}{8x + 2}.$$

Puesto que el nuevo límite sigue teniendo la forma indeterminada ∞/∞, aplicamos (4) por segunda vez:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{12x + 5}{8x + 2} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Hemos demostrado que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x+7}{4x^2+2x}=\frac{3}{2}.$$ ■

EJEMPLO 5 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^2}$.

Solución El límite dado y el límite obtenido después de una aplicación de la regla de L'Hôpital tienen la forma indeterminada ∞/∞:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^2}\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}}{2x}\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}}{2}.$$

Después de la segunda aplicación de (4), observamos que $e^{3x}\to\infty$ mientras el denominador permanece constante. A partir de ello concluimos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^2}=\infty.$$

En otras palabras, el límite no existe. ■

EJEMPLO 6 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{e^{2x}}$.

Solución Aplicamos (4) cuatro veces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^{2x}}&\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{2e^{2x}}\quad(\infty/\infty)\\&\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{4e^{2x}}\quad(\infty/\infty)\\&\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2e^{2x}}\quad(\infty/\infty)\\&\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{6}{4e^{2x}}=0.\end{aligned}$$ ■

En aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital, algunas veces es posible cambiar un límite de una forma indeterminada a otra; por ejemplo, ∞/∞ a $0/0$.

EJEMPLO 7 Forma indeterminada ∞/∞

Evalúe $\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{\tan t}{\tan 3t}$.

Solución Se observa que $\tan t\to-\infty$ y $\tan 3t\to-\infty$ cuando $t\to\pi/2^+$. Entonces, por (4),

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{\tan t}{\tan 3t}&\overset{h}{=}\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{\sec^2 t}{3\sec^2 3t}\quad(\infty/\infty)\\&=\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{\cos^2 3t}{3\cos^2 t}\quad(0/0)\\&\overset{h}{=}\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{2\cos 3t(-3\,\text{sen}\,3t)}{6\cos t(-\text{sen}\,t)}\\&=\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{2\,\text{sen}\,3t\cos 3t}{2\,\text{sen}\,t\cos t}\\&=\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{\text{sen}\,6t}{\text{sen}\,2t}\quad(0/0)\\&\overset{h}{=}\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{6\cos 6t}{2\cos 2t}=\frac{-6}{-2}=3.\end{aligned}$$ ■

← se vuelve a escribir usando $\sec t = 1/\cos t$

← se vuelve a escribir usando la fórmula del ángulo doble en el numerador y en el denominador

EJEMPLO 8 Límite por un lado

Evalúe $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$.

Solución El límite dado tiene la forma indeterminada 0/0 en $x = 1$. Así, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}} \overset{h}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{1/x}{\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2\sqrt{x-1}}{x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Otras formas indeterminadas Hay cinco formas indeterminadas adicionales:

$$\infty - \infty, \quad 0\cdot\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0 \quad \text{y} \quad 1^\infty. \tag{5}$$

Por medio de una combinación de álgebra y un poco de astucia a menudo es posible convertir una de estas nuevas formas de límites ya sea a 0/0 o a ∞/∞.

La forma $\infty - \infty$ El siguiente ejemplo ilustra un límite que tiene la forma indeterminada $\infty - \infty$. Este ejemplo debe anular cualquier convicción garantizada de que $\infty - \infty = 0$.

EJEMPLO 9 Forma indeterminada $\infty - \infty$

Evalúe $\lim_{x\to 0^+} \left[\dfrac{3x+1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}\right]$.

Solución Se observa que $(3x+1)/\operatorname{sen} x \to \infty$ y $1/x \to \infty$ cuando $x \to 0^+$. No obstante, después de escribir la diferencia como una fracción simple, se identifica la forma 0/0:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \left[\frac{3x+1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right] &= \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2 + x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \quad \leftarrow \text{común denominador}\\
&\overset{h}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{6x + 1 - \cos x}{x\cos x + \operatorname{sen} x}\\
&\overset{h}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{6 + \operatorname{sen} x}{-x \operatorname{sen} x + 2\cos x}\\
&= \frac{6+0}{0+2} = 3.
\end{aligned}$$

La forma $0\cdot\infty$ Si

$$f(x) \to 0 \quad \text{y} \quad |g(x)| \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a,$$

entonces $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ tiene la forma indeterminada $0\cdot\infty$. Un límite que tiene este forma puede cambiarse a uno con la forma 0/0 o ∞/∞ al escribir, a su vez,

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \quad \text{o bien,} \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

EJEMPLO 10 Forma indeterminada $0\cdot\infty$

Evalúe $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.

Solución Puesto que $1/x \to 0$, tenemos $\operatorname{sen}(1/x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Por tanto, el límite tiene la forma indeterminada $0\cdot\infty$. Al escribir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x}$$

ahora tenemos la forma 0/0. Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} &\overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(-x^{-2})\cos(1/x)}{(-x^{-2})}\\
&= \lim_{x\to\infty} \cos\frac{1}{x} = 1.
\end{aligned}$$

En la última línea se usó el hecho de que $1/x \to 0$ cuando $x \to \infty$ y $\cos 0 = 1$.

Las formas 0^0, ∞^0 y 1^∞ Suponga que $y = f(x)^{g(x)}$ tiende a 0^0, ∞^0 o 1^∞ cuando $x \to a$. Al tomar el logaritmo natural de y:

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$$

observamos que el miembro derecho de

$$\lim_{x \to a} \ln y = \lim_{x \to a} g(x)\ln f(x)$$

tiene la forma $0 \cdot \infty$. Si se supone que $\lim_{x \to a} \ln y = \ln(\lim_{x \to a} y) = L$, entonces

$$\lim_{x \to a} y = e^L \qquad \text{o bien,} \qquad \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^L.$$

Por supuesto, el procedimiento que acaba de presentarse es aplicable a límites que implican

$$x \to a^-, \quad x \to a^+, \quad x \to \infty \quad \text{o bien,} \quad x \to -\infty.$$

EJEMPLO 11 Forma indeterminada 0^0

Evalúe $\lim_{x \to 0^+} x^{1/\ln x}$.

Solución Ya que $\ln x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$, por (2) concluimos que $1/\ln x \to 0$. Así, el límite dado tiene la forma indeterminada 0^0. Luego, si se hace $y = x^{1/\ln x}$, entonces

$$\ln y = \frac{1}{\ln x}\ln x = 1.$$

Observe que en este caso no es necesaria la regla de L'Hôpital, ya que

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \qquad \text{o bien,} \qquad \ln\left(\lim_{x \to 0^+} y\right) = 1.$$

Por tanto, $\lim_{x \to 0^+} y = e^1$ o de manera equivalente, $\lim_{x \to 0^+} x^{1/\ln x} = e$. ■

EJEMPLO 12 Forma indeterminada 1^∞

Evalúe $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x}$.

Solución Ya que $1 - 3/x \to 1$ cuando $x \to \infty$, la forma indeterminada es 1^∞. Si

$$y = \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x} \quad \text{entonces} \quad \ln y = 2x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right).$$

Observe que la forma de $\lim_{x \to \infty} 2x \ln(1 - 3/x)$ es $\infty \cdot 0$, mientras la forma de

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

es $0/0$. Al aplicar (4) al último límite y simplificar obtenemos

$$\lim_{x \to \infty} 2\frac{\ln(1 - 3/x)}{1/x} \stackrel{h}{=} \lim_{x \to \infty} 2\frac{\frac{3/x^2}{(1 - 3/x)}}{-1/x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{-6}{(1 - 3/x)} = -6.$$

A partir de $\lim_{x \to \infty} \ln y = \ln(\lim_{x \to \infty} y) = -6$ concluimos que $\lim_{x \to \infty} y = e^{-6}$ o

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x} = e^{-6}.$$

■


L'Hôpital

Posdata: Un poco de historia Es cuestionable si el matemático francés **Marquis Guillaume François Antoine de L'Hôpital** (1661-1704) descubrió la regla que lleva su nombre. El resultado se debe probablemente a Johann Bernoulli. Sin embargo, L'Hôpital fue el primero en publicar la regla en su texto *Analyse des Infiniment Petits*. Este libro fue publicado en 1696 y es considerado como el primer libro de texto de cálculo.

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

i) En la aplicación de la regla de L'Hôpital, los estudiantes a veces interpretan mal

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{cuando} \quad \lim_{x\to a}\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Recuerde que en la regla de L'Hôpital se utiliza el *cociente de derivadas* y no la *derivada del cociente*.

ii) Analice un problema antes de saltar a su solución. El límite $\lim_{x\to 0}(\cos x)/x$ es de la forma $1/0$ y, en consecuencia, no existe. La falta de previsión matemática al escribir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{1} = 0$$

es una aplicación incorrecta de la regla de L'Hôpital. Por supuesto, la "respuesta" carece de significado.

iii) La regla de L'Hôpital no es un remedio para todas las formas indeterminadas. Por ejemplo, $\lim_{x\to\infty} e^x/e^{x^2}$ es ciertamente de la forma ∞/∞, pero

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2xe^{x^2}}$$

no es de ayuda práctica.

Ejercicios 4.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-14.

Fundamentos

En los problemas 1-40, use la regla de L'Hôpital donde sea idóneo para encontrar el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x}$
2. $\lim_{t\to 3}\dfrac{t^3 - 27}{t - 3}$
3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x - 2}{\ln x}$
4. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln 2x}{\ln 3x}$
5. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x} - 1}{3x + x^2}$
6. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2x}$
7. $\lim_{t\to \pi}\dfrac{5\operatorname{sen}^2 t}{1 + \cos t}$
8. $\lim_{\theta\to 1}\dfrac{\theta^2 - 1}{e^{\theta^2} - e}$
9. $\lim_{x\to 0}\dfrac{6 + 6x + 3x^2 - 6e^x}{x - \operatorname{sen} x}$
10. $\lim_{x\to \infty}\dfrac{3x^2 - 4x^3}{5x + 7x^3}$
11. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\cot 2x}{\cot x}$
12. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arcsen}(x/6)}{\arctan(x/2)}$
13. $\lim_{t\to 2}\dfrac{t^2 + 3t - 10}{t^3 - 2t^2 + t - 2}$
14. $\lim_{r\to -1}\dfrac{r^3 - r^2 - 5r - 3}{(r + 1)^2}$
15. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$
16. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$
17. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x}{x^2}$
18. $\lim_{x\to \infty}\dfrac{2e^{4x} + x}{e^{4x} + 3x}$
19. $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{\ln\sqrt{x}}{x - 1}$
20. $\lim_{x\to \infty}\dfrac{\ln(3x^2 + 5)}{\ln(5x^2 + 1)}$
21. $\lim_{x\to 2}\dfrac{e^{x^2} - e^{2x}}{x - 2}$
22. $\lim_{x\to 0}\dfrac{4^x - 3^x}{x}$
23. $\lim_{x\to \infty}\dfrac{x\ln x}{x^2 + 1}$
24. $\lim_{t\to 0}\dfrac{1 - \cosh t}{t^2}$
25. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x - \tan^{-1} x}{x^3}$
26. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(\operatorname{sen} 2x)^2}{x^2}$
27. $\lim_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x^4}$
28. $\lim_{x\to \infty}\dfrac{e^{1/x}}{\operatorname{sen}(1/x)}$
29. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x - \tan^{-1} x}{x - \operatorname{sen}^{-1} x}$
30. $\lim_{t\to 1}\dfrac{t^{1/3} - t^{1/2}}{t - 1}$
31. $\lim_{u\to \pi/2}\dfrac{\ln(\operatorname{sen} u)}{(2u - \pi)^2}$
32. $\lim_{\theta\to \pi/2}\dfrac{\tan\theta}{\ln(\cos\theta)}$
33. $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$
34. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x - x - 1}{2x^2}$
35. $\lim_{r\to 0}\dfrac{r - \cos r}{r - \operatorname{sen} r}$
36. $\lim_{t\to \pi}\dfrac{\csc 7t}{\csc 2t}$
37. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{\ln^2(1 + 3x)}$
38. $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{\ln x - \ln 3}{x - 3}\right)^2$
39. $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x^2 + e^x - e^{-x} - 2\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}$
40. $\lim_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x + 1} - 3}{x^2 - 64}$

En los problemas 41-74, identifique el límite dado como una de las formas indeterminadas proporcionadas en (5). Use la regla de L'Hôpital donde sea idóneo para encontrar el límite dado, o concluya que no existe.

41. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$

42. $\lim_{x\to 0^+}(\cot x-\csc x)$

43. $\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1)$

44. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

45. $\lim_{x\to 0^+} x^x$

46. $\lim_{x\to 1^-} x^{1/(1-x)}$

47. $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right]$

48. $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos 3x}{x^2}\right]$

49. $\lim_{t\to 3}\left[\dfrac{\sqrt{t+1}}{t^2-9}-\dfrac{2}{t^2-9}\right]$

50. $\lim_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(x+1)}\right]$

51. $\lim_{\theta\to 0}\theta\csc 4\theta$

52. $\lim_{x\to\pi/2^-}(\operatorname{sen}^2 x)^{\tan x}$

53. $\lim_{x\to\infty}(2+e^x)^{e^{-x}}$

54. $\lim_{x\to 0^-}(1-e^x)^{x^2}$

55. $\lim_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{t}\right)^t$

56. $\lim_{h\to 0}(1+2h)^{4/h}$

57. $\lim_{x\to 0} x^{(1-\cos x)}$

58. $\lim_{\theta\to 0}(\cos 2\theta)^{1/\theta^2}$

59. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2\operatorname{sen}^2(2/x)}$

60. $\lim_{x\to 1}(x^2-1)^{x^2}$

61. $\lim_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{5}{x^2+3x-4}\right]$

62. $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right]$

63. $\lim_{x\to\infty} x^5e^{-x}$

64. $\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^{2/x}$

65. $\lim_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

66. $\lim_{t\to\pi/4}\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan 2t$

67. $\lim_{x\to\infty} x\tan\left(\dfrac{5}{x}\right)$

68. $\lim_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen} x)$

69. $\lim_{x\to -\infty}\left[\dfrac{1}{e^x}-x^2\right]$

70. $\lim_{x\to 0}(1+5\operatorname{sen} x)^{\cot x}$

71. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+1}\right)^x$

72. $\lim_{\theta\to\pi/2^-}(\sec^3\theta-\tan^3\theta)$

73. $\lim_{x\to 0}(\operatorname{senh} x)^{\tan x}$

74. $\lim_{x\to 0^+} x^{(\ln x)^2}$

En los problemas 75 y 76, identifique el límite dado.

75. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$

76. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 77 y 78, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada para el valor de n sobre el intervalo indicado. En cada caso, conjeture el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

77. $f(x)=\dfrac{e^x}{x^n}$; $n=3$ sobre $[0, 15]$; $n=4$ sobre $[0, 20]$; $n=5$ sobre $[0, 25]$

78. $f(x)=\dfrac{x^n}{e^x}$; $n=3$ sobre $[0, 15]$; $n=4$ sobre $[0, 15]$; $n=5$ sobre $[0, 20]$

En los problemas 79 y 80, use $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$,

$$\frac{d^n}{dx^n}x^n = n!,$$

donde n es un entero positivo, y la regla de L'Hôpital para encontrar el límite.

79. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$

80. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^n}$

≡ Aplicaciones

81. Considere el círculo que se muestra en la FIGURA 4.5.1.

a) Si el arco ABC mide 5 pulg de longitud, exprese el área A de la región sombreada como una función del ángulo indicado θ. [*Sugerencia*: El área de un sector circular es $\frac{1}{2}r^2\theta$ y la longitud del arco de un círculo es $r\theta$, donde θ se mide en radianes.]

b) Evalúe $\lim_{\theta\to 0} A(\theta)$

c) Evalúe $\lim_{\theta\to 0} dA/d\theta$

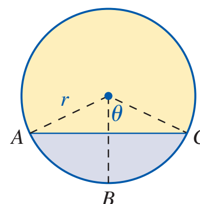


FIGURA 4.5.1 Círculo en el problema 81

82. En ausencia de fuerzas de amortiguamiento, un modelo matemático para el desplazamiento $x(t)$ de una masa en un resorte (vea el problema 60 en los ejercicios 3.5) cuando el sistema es activado sinusoidalmente por una fuerza externa de amplitud F_0 y frecuencia $\gamma/2\pi$ es

$$x(t)=\frac{F_0}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}(-\gamma\operatorname{sen}\omega t+\omega\operatorname{sen}\gamma t),\quad \gamma\neq\omega,$$

donde $\omega/2\pi$ es la frecuencia de las vibraciones libres (no excitadas) del sistema.

a) Cuando $\gamma=\omega$, se dice que el sistema masa-resorte está en **resonancia pura**, y el desplazamiento de la masa se define por

$$x(t)=\lim_{\gamma\to\omega}\frac{F_0}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}(-\gamma\operatorname{sen}\omega t+\omega\operatorname{sen}\gamma t).$$

Determine $x(t)$ al encontrar este límite.

b) Use un dispositivo para graficar y analice la gráfica de $x(t)$ encontrada en el inciso *a)* en el caso en que $F_0=2$, $\gamma=\omega=1$. Describa el comportamiento del sistema masa-resorte en resonancia pura cuando $t\to\infty$.

83. Cuando un gas ideal se expande a partir de la presión p_1 y volumen v_1 hasta la presión p_2 y volumen v_2 tal que $pv^\gamma=k$ (constante) durante toda la expansión, si $\gamma\neq 1$, entonces el trabajo realizado está dado por

$$W=\frac{p_2v_2-p_1v_1}{1-\gamma}.$$

a) Demuestre que

$$W = p_1 v_1\left[\frac{(v_2/v_1)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}\right].$$

b) Encuentre el trabajo realizado en el caso en que $pv = k$ (constante) durante toda la expansión al hacer $\gamma \to 1$ en la expresión en el inciso *a*).

84. La retina es más sensible a fotones que penetran al ojo cerca del centro de la pupila y menos sensible a la luz que entra cerca del borde de la pupila. (Este fenómeno se denomina **efecto Stiles-Crawford** del primer tipo.) El porcentaje σ de fotones que llegan a los fotopigmentos está relacionado con el radio de la pupila p (medido en radianes) por el modelo matemático

$$\sigma = \frac{1 - 10^{-0.05p^2}}{0.115p^2} \times 100.$$

Vea la FIGURA 4.5.2.

a) ¿Qué porcentaje de fotones llega a los fotopigmentos cuando $p = 2$ mm?

b) Según la fórmula, ¿cuál es el porcentaje limitante cuando el radio de la pupila tiende a cero? ¿Puede explicar por qué parece ser más de 100%?

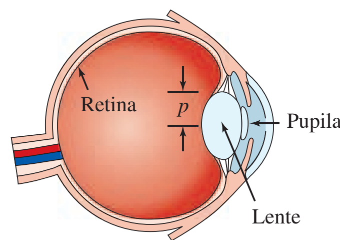


FIGURA 4.5.2 Ojo en el problema 84

Piense en ello

85. Suponga que una función f tiene segunda derivada. Evalúe

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

86. *a*) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de

$$f(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}.$$

b) A partir de la gráfica en el inciso *a*), conjeture el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

c) Explique por qué la regla de L'Hôpital no es válida para $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

4.6 Gráficas y la primera derivada

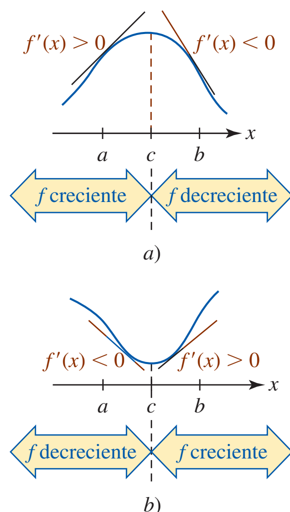


FIGURA 4.6.1 Máximo relativo en *a*); mínimo relativo en *b*)

Introducción Saber que una función tiene, o no, extremos relativos es de gran ayuda al trazar su gráfica. En la sección 4.3 (teorema 4.3.2) vimos que cuando una función tiene un extremo relativo debe ocurrir en un número crítico. Al encontrar los números críticos de una función, tenemos una *lista de candidatos* para las coordenadas x de los puntos que corresponden a extremos relativos. A continuación se combinarán las ideas de las primeras secciones de este capítulo para establecer dos pruebas para determinar cuándo un número crítico es en realidad la coordenada x de un extremo relativo.

Prueba de la primera derivada Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable sobre un intervalo abierto (a, b), excepto tal vez en un número crítico c dentro del intervalo. Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) < 0$ para toda x en (c, b), entonces la gráfica de f sobre el intervalo (a, b) puede ser como se muestra en la FIGURA 4.6.1*a*); es decir, $f(c)$ es un máximo relativo. Por otra parte, cuando $f'(x) < 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) > 0$ para toda x en (c, b), entonces, como se muestra en la figura 4.6.1*b*), $f(c)$ es un mínimo relativo. Se han demostrado dos casos especiales del siguiente teorema.

Teorema 4.6.1 Prueba de la primera derivada

Sea f continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) excepto tal vez en el número crítico c.

i) Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.
ii) Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.
iii) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo algebraico a cada lado de c, entonces $f(c)$ no es un extremo.

Las conclusiones del teorema 4.6.1 pueden resumirse en una frase:

- Una función f tiene un extremo relativo en un número crítico c donde $f'(x)$ cambia de signo.

En la FIGURA 4.6.2 se ilustra cuál sería el caso cuando $f'(c)$ *no* cambia de signo en un número crítico c. En las figuras 4.6.2*a*) y 4.6.2*b*) se muestra una tangente horizontal en $(c, f(c))$ y

$f'(c) = 0$ pero $f(c)$ no es ni máximo ni mínimo relativo. En la figura 4.6.2c) se muestra una tangente vertical en $(c, f(c))$ y así $f'(c)$ no existe, pero de nuevo $f(c)$ no es un extremo relativo porque $f'(c)$ no cambia de signo en el número crítico c.

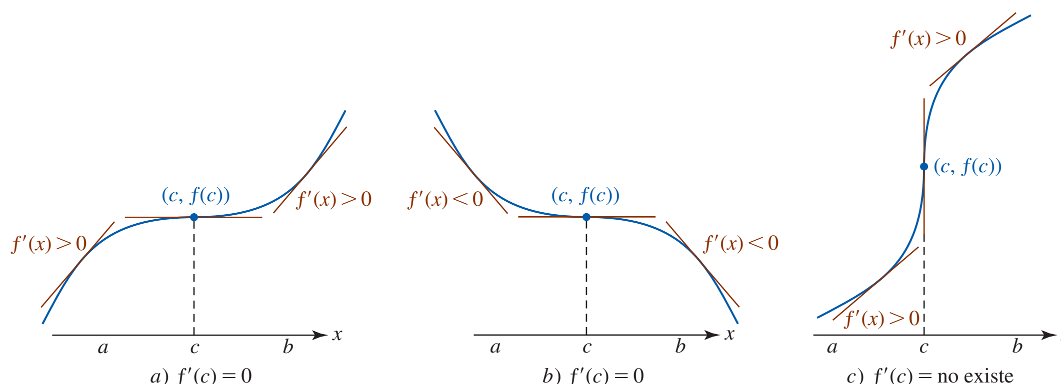


FIGURA 4.6.2 No hay extremo porque $f'(x)$ no cambia de signo en el número crítico c

En los cinco ejemplos siguientes se ilustra la utilidad del teorema 4.6.1 para trazar a mano la gráfica de una función f. Además del cálculo:

- Encuentre la derivada de f y factorice f' tanto como sea posible.
- Encuentre los números críticos de f.
- Aplique la prueba de la primera derivada a cada número crítico.

También resulta útil preguntar:

- ¿Cuál es el dominio de f?
- La gráfica de f, ¿tiene alguna intersección? ← intersecciones x: resuelva para $f(x) = 0$; intersección y: encuentre $f(0)$
- La gráfica de f, ¿tiene alguna simetría? ← determine si $f(-x) = f(x)$ o bien, $f(-x) = -f(x)$
- La gráfica de f, ¿tiene alguna asíntota?

Las funciones consideradas en los ejemplos 1 y 2 son polinomiales. Observe que estas funciones constan de potencias pares e impares de x; esto es suficiente para concluir que las gráficas de estas funciones no son simétricas con respecto al eje y o al origen.

EJEMPLO 1 Función polinomial de grado 3

Grafique $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

Solución La primera derivada

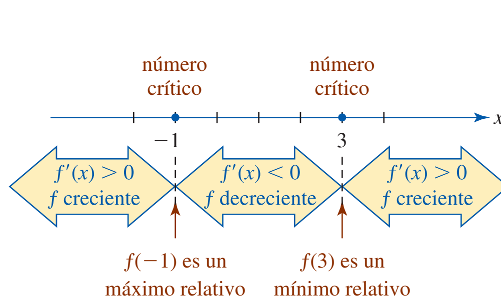
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3) \tag{1}$$

produce los números críticos -1 y 3. Luego, la prueba de la primera derivada es esencialmente el procedimiento que se usó para encontrar los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente. En la FIGURA 4.6.3a) vemos que $f'(x) > 0$ para $-\infty < x < -1$ y $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 3$. En otras palabras, $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en -1 y así por el inciso i) del teorema 4.6.1 concluimos que $f(-1) = 7$ es un máximo relativo. En forma semejante, $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 3$ y $f'(x) > 0$ para $3 < x < \infty$. Debido a que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en 3, el inciso ii) del teorema 4.6.1 indica que $f(3) = -25$ es un mínimo relativo. Luego, como $f(0) = 2$, el punto $(0, 2)$ es la intersección y para la gráfica de f. Además, al buscar si la ecuación $x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = 0$ tiene raíces positivas se encuentra que $x = -2$ es una raíz real. Luego, al dividir entre el factor $x + 2$ obtenemos $(x + 2)(x^2 - 5x + 1) = 0$. Cuando la fórmula cuadrática se aplica al factor cuadrático se encuentran dos raíces reales adicionales:

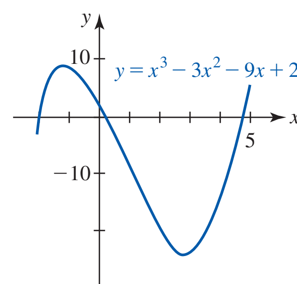
Vea las *MRS* para un breve repaso de cómo encontrar las raíces de ecuaciones polinomiales.

$$\frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{21}\right) \approx 0.21 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{21}\right) \approx 4.79.$$

Entonces, las intersecciones x son $(-2, 0)$, $\left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}, 0\right)$. Al reunir toda esta información se llega a la gráfica mostrada en la figura 4.6.3b):



a) Prueba de la primera derivada



b) Observe las intersecciones x y y

FIGURA 4.6.3 Gráfica de la función en el ejemplo 1 ■

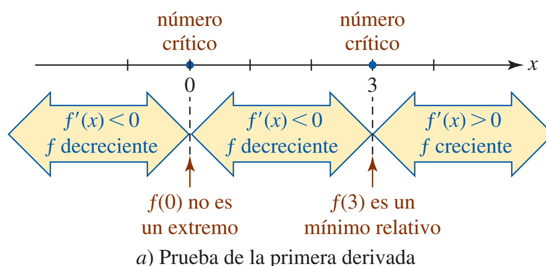
EJEMPLO 2 Función polinomial de grado 4

Grafique $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

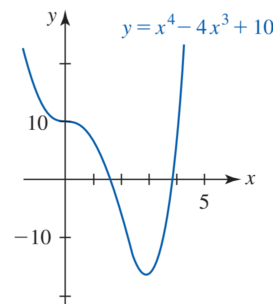
Solución La derivada

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

muestra que los números críticos son 0 y 3. Luego, como se observa en la FIGURA 4.6.4*a*), f' tiene el mismo signo algebraico negativo en los intervalos adyacentes $(-\infty, 0)$ y $(0, 3)$. Entonces $f(0) = 10$ *no* es un extremo. En este caso $f'(0) = 0$ significa que en la intersección y $(0, f(0)) = (0, 10)$ hay una sola tangente horizontal. Sin embargo, por la prueba de la primera derivada resulta evidente que $f(3) = -17$ es un mínimo relativo. En efecto, la información de que f es decreciente por el lado izquierdo y creciente por el lado derecho del número crítico 3 (la gráfica de f no puede retroceder) permite concluir que $f(3) = -17$ también es un *mínimo absoluto*. Por último, vemos que la gráfica de f tiene dos intersecciones x. Con ayuda de una calculadora o un SAC se encuentra que las intersecciones x son aproximadamente (1.61, 0) y (3.82, 0).



a) Prueba de la primera derivada



b) $f'(0) = 0$ pero $f(0) = 10$ no es un extremo

FIGURA 4.6.4 Gráfica de la función en el ejemplo 2 ■

EJEMPLO 3 Gráfica de una función racional

Grafique $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$.

Solución La lista que se muestra a continuación resume algunos hechos que es posible descubrir sobre la gráfica de esta función racional f antes de graficarla realmente.

intersección y: $f(0) = -3$; en consecuencia, la intersección y es $(0, -3)$.
intersecciones x: $f(x) = 0$ cuando $x^2 - 3 = 0$. Por tanto, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$. Las intersecciones x son $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$.
Simetría: Con respecto al eje y, puesto que $f(-x) = f(x)$.
Asíntotas verticales: Ninguna, puesto que $x^2 + 1 \neq 0$ para todos los números reales.
Asíntotas horizontales: Puesto que el límite en el infinito es la forma indeterminada ∞/∞, podemos aplicar la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1,$$

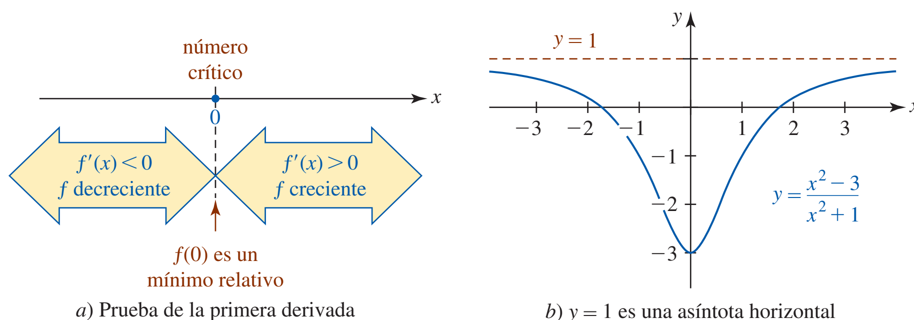
y así la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Derivada: Con la regla del cociente obtenemos $f'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$.

Números críticos: $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. En consecuencia, 0 es el único número crítico.

Prueba de la primera derivada: Vea la FIGURA 4.6.5*a*); $f(0) = -3$ es un mínimo relativo.

Grafique: Vea la figura 4.6.5*b*).



a) Prueba de la primera derivada *b*) $y = 1$ es una asíntota horizontal

FIGURA 4.6.5 Gráfica de la función en el ejemplo 3 ■

EJEMPLO 4 Gráfica con una asíntota vertical

Grafique $f(x) = x^2 + x - \ln|x|$.

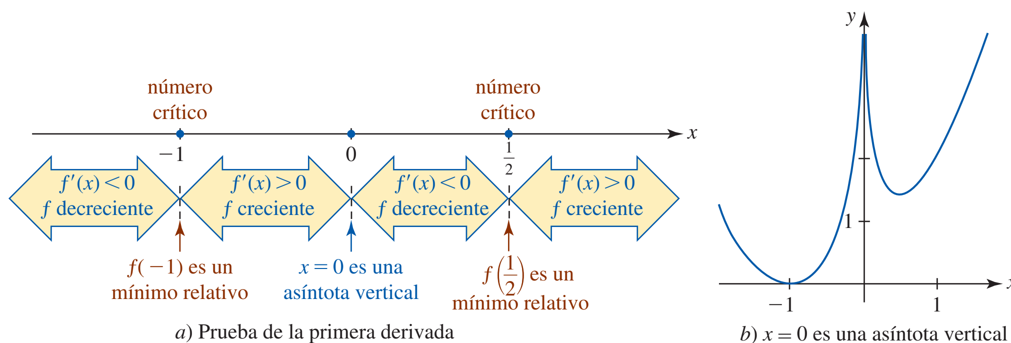
Solución Primero observe que el dominio de f es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Luego, al igualar a cero el denominador de la derivada

$$f'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + x - 1}{x} = \frac{(2x-1)(x+1)}{x}$$

se observa que -1 y $\frac{1}{2}$ son números críticos. Aunque f no es diferenciable en $x = 0$, 0 no es un número crítico puesto que 0 no está en el dominio de f. De hecho, $x = 0$ es una asíntota vertical para $\ln|x|$ y también es una asíntota vertical para la gráfica de f. Los números críticos y 0 se escriben en la recta numérica porque el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha de 0 indica el comportamiento de f. Como se observa en la FIGURA 4.6.6*a*), $f'(x) < 0$ para $-\infty < x < -1$ y $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$. Concluimos que $f(-1) = 0$ es un mínimo relativo (al mismo tiempo, $f(-1) = 0$ muestra que $x = -1$ es la coordenada x de una intersección x). Al continuar, $f'(x) < 0$ para $0 < x < \frac{1}{2}$ y $f'(x) > 0$ para $\frac{1}{2} < x < \infty$ muestra que $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \ln\frac{1}{2} \approx 1.44$ es otro mínimo relativo.

Como se observó, f no está definida en $x = 0$, de modo que no hay intersección y. Por último, no hay simetría con respecto al eje y o con respecto al origen. La gráfica de la función f se muestra en la figura 4.6.6*b*).

◀ Verifique que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$.



a) Prueba de la primera derivada *b*) $x = 0$ es una asíntota vertical

FIGURA 4.6.6 Gráfica de la función en el ejemplo 4 ■

EJEMPLO 5 Gráfica con una cúspide

Grafique $f(x) = -x^{5/3} + 5x^{2/3}$.

Solución La derivada es

$$f'(x) = -\frac{5}{3}x^{2/3} + \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{5}{3}\frac{(-x+2)}{x^{1/3}}.$$

Observe que f' no existe en 0 pero 0 está en el dominio de la función puesto que $f(0) = 0$. Los números críticos son 0 y 2. La prueba de la primera derivada, ilustrada en la FIGURA 4.6.7*a*), muestra que $f(0) = 0$ es un mínimo relativo y que $f(2) = -(2)^{5/3} + 5(2)^{2/3} \approx 4.76$ es un máximo relativo. Además, puesto que $f'(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$ y $f'(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$ en (0, 0) hay una cúspide. Por último, al escribir $f(x) = x^{2/3}(-x + 5)$, vemos que $f(x) = 0$ y que $x = 5$. Las intersecciones x son los puntos (0, 0) y (5, 0). La gráfica de f se muestra en la figura 4.6.7*b*).

Revise la definición de *cúspide* en la sección 3.2

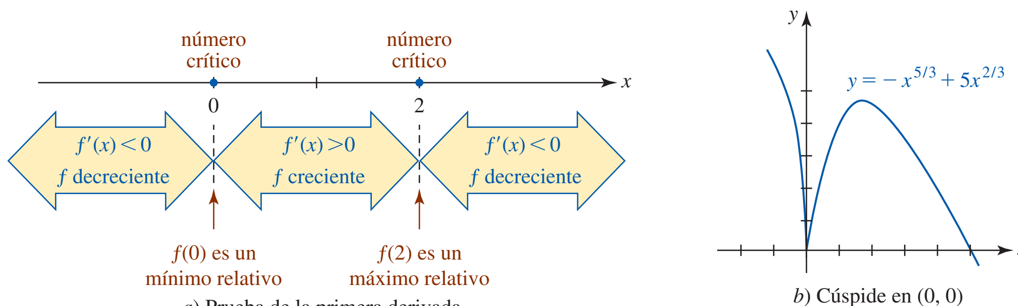


FIGURA 4.6.7 Gráfica de la función en el ejemplo 5 ■

Algunas veces resulta conveniente saber antes de graficar, e incluso antes de molestarse en graficar, si un extremo relativo $f(c)$ es un extremo *absoluto*. El siguiente teorema es algo útil. Usted debe trazar algunas gráficas y convencerse sobre la validez del teorema.

Teorema 4.6.2 Prueba del único número crítico

Suponga que c es el único número crítico de una función f dentro de un intervalo I. Si se demuestra que $f(c)$ es un extremo relativo, entonces $f(c)$ es un extremo absoluto.

En el ejemplo 3, mediante la prueba de la primera derivada se demostró que $f(0) = 0$ es un mínimo relativo. También se hubiera podido concluir de inmediato que este valor de la función es un mínimo absoluto. Este hecho se concluye por el teorema 4.6.2 porque 0 es el único número crítico en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Ejercicios 4.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-15.

Fundamentos

En los problemas 1-32, use la prueba de la primera derivada para encontrar los extremos relativos de la función dada. Grafique. Encuentre las intersecciones cuando sea posible.

1. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

2. $f(x) = (x - 1)(x + 3)$

3. $f(x) = x^3 - 3x$

4. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

5. $f(x) = x(x - 2)^2$

6. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$

7. $f(x) = x^3 + x - 3$

8. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 3$

9. $f(x) = x^4 + 4x$

10. $f(x) = (x^2 - 1)^2$

11. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$

12. $f(x) = 2x^4 - 16x^2 + 3$

13. $f(x) = -x^2(x - 3)^2$

14. $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 2$

15. $f(x) = 4x^5 - 5x^4$

16. $f(x) = (x - 2)^2(x + 3)^3$

17. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$

18. $f(x) = x + \dfrac{25}{x}$

19. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

21. $f(x) = \dfrac{10}{x^2 + 1}$

22. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

23. $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$

24. $f(x) = (x^2 - 1)^{1/3}$

25. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

26. $f(x) = x(x^2 - 5)^{1/3}$

27. $f(x) = x - 12x^{1/3}$

28. $f(x) = x^{4/3} + 32x^{1/3}$

29. $f(x) = x^3 - 24 \ln|x|$

30. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

31. $f(x) = (x + 3)^2 e^{-x}$

32. $f(x) = 8x^2 e^{-x^2}$

En los problemas 33-36, trace una gráfica de la función f cuya derivada f' tiene la gráfica dada.

33.

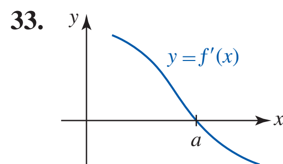


FIGURA 4.6.8 Gráfica para el problema 33

34.

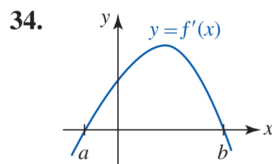


FIGURA 4.6.9 Gráfica para el problema 34

35.

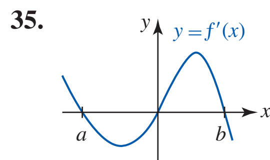


FIGURA 4.6.10 Gráfica para el problema 35

36.

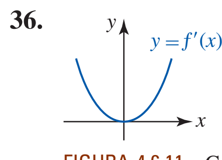


FIGURA 4.6.11 Gráfica para el problema 36

En los problemas 37 y 38, trace la gráfica de f' a partir de la gráfica de f.

37.

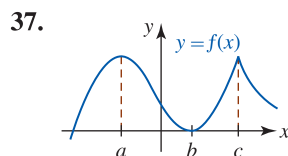


FIGURA 4.6.12 Gráfica para el problema 37

38.

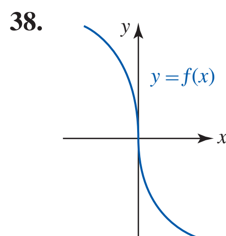


FIGURA 4.6.13 Gráfica para el problema 38

En los problemas 39-42, trace una gráfica de una función f que tenga las propiedades dadas.

39. $f(-1) = 0, f(0) = 1$
$f'(3)$ no existe, $f'(5) = 0$
$f'(x) > 0, x < 3$ y $x > 5$
$f'(x) < 0, 3 < x < 5$

40. $f(0) = 0$
$f'(-1) = 0, f'(0) = 0, f'(1) = 0$
$f'(x) < 0, x < -1, -1 < x < 0$
$f'(x) > 0, 0 < x < 1, x > 1$

41. $f(-x) = f(x)$
$f(2) = 3$
$f'(x) < 0, 0 < x < 2$
$f'(x) > 0, x > 2$

42. $f(1) = -2, f(0) = -1$
$\lim_{x\to 3} f(x) = \infty, f'(4) = 0$
$f'(x) < 0, x < 1$
$f'(x) < 0, x > 4$

En los problemas 43 y 44, determine dónde la pendiente de la tangente a la gráfica de la función dada tiene un máximo relativo o un mínimo relativo.

43. $f(x) = x^3 + 6x^2 - x$

44. $f(x) = x^4 - 6x^2$

45. ***a***) A partir de la gráfica de $g(x) = \operatorname{sen} 2x$ determine los intervalos para los cuales $g(x) > 0$ y los intervalos para los cuales $g(x) < 0$.

b) Encuentre los números críticos de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$. Use la prueba de la primera derivada y la información en el inciso *a*) para encontrar los extremos relativos de f.

c) Trace la gráfica de la función f en el inciso *b*).

46. ***a***) Encuentre los números críticos de $f(x) = x - \operatorname{sen} x$.

b) Demuestre que f no tiene extremos relativos.

c) Trace la gráfica de f.

☰ Aplicaciones

47. La **media aritmética**, o **promedio**, de n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ está dada por

$$\bar{x} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

a) Demuestre que $\bar{x}$ es un número crítico de la función

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2.$$

b) Demuestre que $f(\bar{x})$ es un mínimo relativo.

48. Cuando el sonido pasa de un medio a otro, puede perder algo de su energía debido a una diferencia en las resistencias acústicas de los dos medios. (La resistencia acústica es el producto de la densidad y la elasticidad.) La fracción de la energía transmitida está dada por

$$T(r) = \frac{4r}{(r + 1)^2},$$

donde r es la razón de las resistencias acústicas de los dos medios.

a) Demuestre que $T(r) = T(1/r)$. Explique el significado físico de esta expresión.

b) Use la prueba de la primera derivada para encontrar los extremos relativos de T.

c) Trace la gráfica de la función T para $r \geq 0$.

☰ Piense en ello

49. Encuentre valores de a, b y c tales que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo 6 en $x = 2$ y la gráfica de f tenga intersección y igual a 4.

50. Encuentre valores de a, b, c y d tales que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo -3 en $x = 0$ y un máximo relativo 4 en $x = 1$.

51. Suponga que f es una función diferenciable cuya gráfica es simétrica con respecto al eje y. Demuestre que $f'(0) = 0$. ¿Tiene f necesariamente un extremo relativo en $x = 0$?

52. Sean m y n enteros positivos. Demuestre que $f(x) = x^m(x - 1)^n$ siempre tiene un mínimo relativo.

53. Suponga que f y g son diferenciables y que tienen máximos relativos en el mismo número crítico c.

a) Demuestre que c es un número crítico para las $f + g$, $f - g$ y fg.

b) ¿Se concluye que las $f + g$, $f - g$ y fg tienen máximos relativos en c? Demuestre sus aseveraciones o dé un contraejemplo.

4.7 Gráficas y la segunda derivada

Introducción En el siguiente análisis el objetivo es relacionar el concepto de concavidad con la segunda derivada de una función. Así, la segunda derivada constituye otra manera para probar si un extremo relativo de una función f ocurre en un número crítico.



a) "Contiene agua"



b) "Derrama agua"

FIGURA 4.7.1 Concavidad

Concavidad Tal vez usted tiene una idea *intuitiva* del significado de concavidad. En las FIGURAS 4.7.1*a*) y 4.7.1*b*) se ilustran formas geométricas **cóncavas hacia arriba** y **cóncavas hacia abajo**, respectivamente. Por ejemplo, el Arco de San Luis Missouri es cóncavo hacia abajo; los cables entre los soportes verticales del puente Golden Gate son cóncavos hacia arriba. A menudo decimos que una forma cóncava hacia arriba "contiene agua", mientras una forma cóncava hacia abajo "derrama agua". No obstante, la definición precisa de concavidad se proporciona en términos de la derivada.

Definición 4.7.1 Concavidad

Sea f una función diferenciable sobre un intervalo (a, b).

i) Si f' es una función creciente sobre (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava **hacia arriba** sobre el intervalo.
ii) Si f' es una función decreciente sobre (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava **hacia abajo** sobre el intervalo.

En otras palabras, si las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de f crecen (decrecen) cuando x crece sobre (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba (abajo) sobre el intervalo. Si las pendientes crecen (decrecen) cuando x crece, entonces esto significa que las rectas tangentes giran en sentido contrario al de las manecillas del reloj sobre el intervalo. La validez de la definición 4.7.1 se ilustra en la FIGURA 4.7.2. Una manera equivalente de considerar la concavidad también resulta evidente a partir de la figura 4.7.2. La gráfica de una función f es cóncava hacia arriba (hacia abajo) sobre un intervalo si la gráfica en cualquier punto se encuentra por arriba (abajo) de las rectas tangentes.

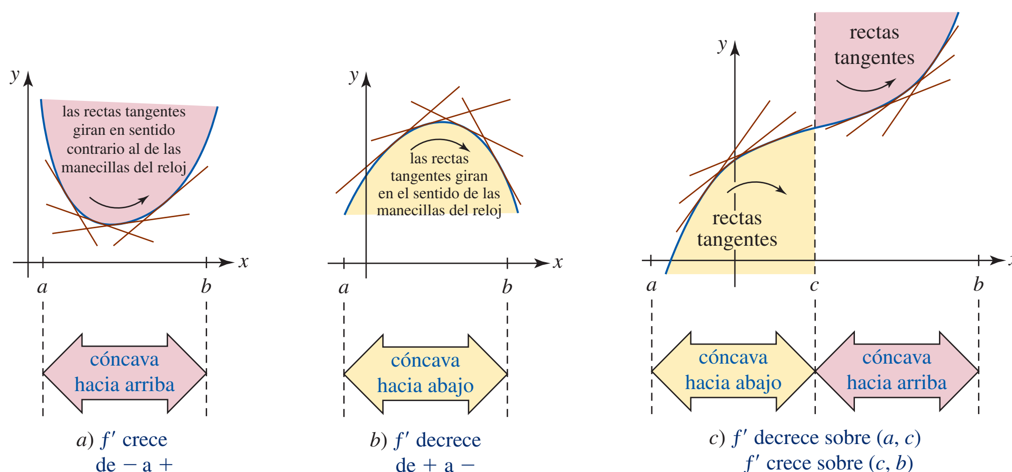


FIGURA 4.7.2 Concavidad sobre intervalos

Concavidad y la segunda derivada En el teorema 4.4.4 de la sección 4.4 vimos que el signo algebraico de la derivada de una función indica cuándo la función es creciente o decreciente sobre un intervalo. En específico, si la función referida en la oración precedente es la derivada f', entonces podemos concluir que el signo algebraico de la derivada de f', es decir, f'', indica cuándo f' es creciente o decreciente sobre un intervalo. Por ejemplo, si $f''(x) > 0$ sobre (a, b), entonces f' es creciente sobre (a, b). Debido a la definición 4.7.1, si f' es creciente sobre (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre el intervalo. En consecuencia, se llega a la siguiente prueba para concavidad.

Teorema 4.7.1 Prueba para concavidad

Sea f una función para la cual f'' existe sobre (a, b).

i) Si $f''(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre (a, b).
ii) Si $f''(x) < 0$ para toda x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre (a, b).

EJEMPLO 1 Prueba para concavidad

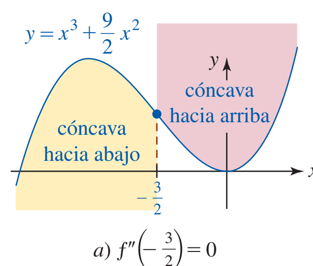
Determine los intervalos sobre los cuales la gráfica de $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2$ es cóncava hacia arriba y los intervalos sobre los cuales la gráfica es cóncava hacia abajo.

Solución A partir de $f'(x) = 3x^2 + 9x$ obtenemos

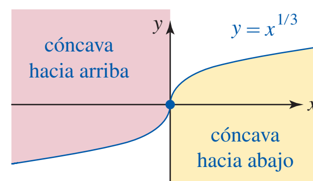
$$f''(x) = 6x + 9 = 6\left(x + \tfrac{3}{2}\right).$$

Se observa que $f''(x) < 0$ cuando $6\left(x + \frac{3}{2}\right) < 0$ o $x < -\frac{3}{2}$ y que $f''(x) > 0$ cuando $6\left(x + \frac{3}{2}\right) > 0$ o $x > -\frac{3}{2}$. Por el teorema 4.7.1 concluimos que la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba sobre el intervalo $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$. ■

Punto de inflexión La gráfica de la función en el ejemplo 1 cambia de concavidad en el punto que corresponde a $x = -\frac{3}{2}$. Cuando x crece a través de $-\frac{3}{2}$, la gráfica de f cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en el punto $\left(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$. Un punto sobre la gráfica de una función donde la concavidad cambia de arriba abajo o viceversa tiene un nombre especial.



a) $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$



b) $f''(x)$ no existe en 0

FIGURA 4.7.3 Puntos de inflexión

Definición 4.7.2 Punto de inflexión

Sea f continua sobre un intervalo (a, b) que contiene al número c. Un punto $(c, f(c))$ es un **punto de inflexión** de la gráfica de f si en $(c, f(c))$ hay una recta tangente y la gráfica cambia de concavidad en este punto.

Al volver a examinar el ejemplo 1 se observa que $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2$ es continua en $-\frac{3}{2}$, tiene una recta tangente en $\left(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$ y cambia de concavidad en este punto. Por tanto, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$ es un punto de inflexión. También observe que $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$. Vea la FIGURA 4.7.3*a*). También sabemos que la función $f(x) = x^{1/3}$ es continua en 0 y tiene una tangente vertical en (0, 0) (vea el ejemplo 10 de la sección 3.1). A partir de $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ se observa que $f''(x) > 0$ para $x < 0$ y que $f''(x) < 0$ para $x > 0$. Por tanto, (0, 0) es un punto de inflexión. Observe que en este caso $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ no está definida en $x = 0$. Vea la figura 4.7.3*b*). Estos dos casos se ilustran en el siguiente teorema.

Teorema 4.7.2 Punto de inflexión

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión para la gráfica de una función f, entonces $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe.

Prueba de la segunda derivada Si c es un número crítico de una función $y = f(x)$ y, por ejemplo, $f''(c) > 0$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre algún intervalo abierto (a, b) que contiene a c. Entonces, necesariamente $f(c)$ es un mínimo relativo. En forma semejante, $f''(c) < 0$ en un valor crítico c implica que $f(c)$ es un máximo relativo. Este teorema se denomina **prueba de la segunda derivada** y se ilustra en la FIGURA 4.7.4.

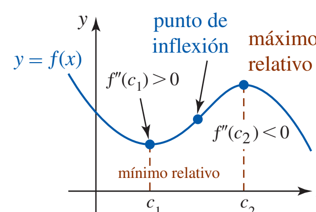


FIGURA 4.7.4 Prueba de la segunda derivada

Teorema 4.7.3 Prueba de la segunda derivada

Sea f una función para la cual f'' existe sobre un intervalo (a, b) que contiene al número crítico c.

i) Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.
ii) Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.
iii) Si $f''(c) = 0$, entonces la prueba falla y $f(c)$ puede ser o no un extremo relativo. En este caso se usa la prueba de la primera derivada.

En este punto podría plantearse la pregunta: ¿por qué se requiere otra prueba para extremos relativos cuando ya se cuenta con la prueba de la primera derivada? Si la función f en consideración es un polinomio, es muy sencillo calcular la segunda derivada. Al usar el teorema 4.7.3 sólo necesitamos determinar el signo algebraico de $f''(x)$ *en* el número crítico. Compare esto con el teorema 4.6.1, donde es necesario determinar el signo de $f'(x)$ en los números a la derecha y a la izquierda del número crítico. Si no es fácil factorizar f', el último procedimiento puede ser algo difícil. Por otra parte, puede resultar igualmente tedioso usar el teorema 4.7.3 en el caso de algunas funciones que impliquen productos, cocientes, potencias, etcétera. Por tanto, los teoremas 4.6.1 y 4.7.3 pueden tener ventajas y desventajas,

EJEMPLO 2 Prueba de la segunda derivada

Grafique $f(x) = 4x^4 - 4x^2$.

Solución A partir de $f(x) = 4x^2(x^2 - 1) = 4x^2(x + 1)(x - 1)$ se observa que la gráfica de f tiene las intersecciones $(-1, 0)$, $(0, 0)$ y $(1, 0)$. Además, puesto que f es un polinomio que sólo tiene potencias pares, concluimos que su gráfica es simétrica con respecto al eje y (función par). Así, las derivadas primera y segunda son

$$f'(x) = 16x^3 - 8x = 8x(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)$$
$$f''(x) = 48x^2 - 8 = 8(\sqrt{6}x + 1)(\sqrt{6}x - 1).$$

A partir de f' vemos que los números críticos de f son $0, -\sqrt{2}/2$ y $\sqrt{2}/2$. La prueba de la segunda derivada se resume en la tabla siguiente.

x	Signo de $f''(x)$	$f(x)$	Conclusión
0	$-$	0	máximo relativo
$\sqrt{2}/2$	$+$	-1	mínimo relativo
$-\sqrt{2}/2$	$+$	-1	mínimo relativo

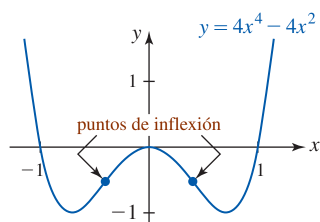


FIGURA 4.7.5 Gráfica de la función en el ejemplo 2

Por último, a partir de la forma factorizada de f'' observamos que $f''(x)$ cambia de signo en $x = -\sqrt{6}/6$ y en $x = \sqrt{6}/6$. Por tanto, la gráfica de f tiene dos puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{6}/6, -\frac{5}{9}\right)$ y $\left(\sqrt{6}/6, -\frac{5}{9}\right)$. Vea la FIGURA 4.7.5. ■

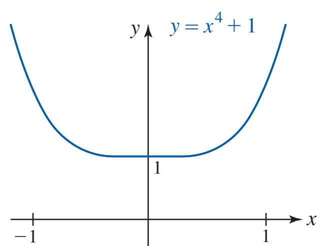


FIGURA 4.7.6 Gráfica de la función en el ejemplo 3

EJEMPLO 3 Fracaso de la prueba de la segunda derivada

Considere la función simple $f(x) = x^4 + 1$. A partir de $f'(x) = 4x^3$ vemos que 0 es un número crítico. Pero por la segunda derivada $f''(x) = 12x^2$ obtenemos $f''(0) = 0$. Por tanto, la prueba de la segunda derivada no conduce a ninguna conclusión. No obstante, a partir de la primera derivada $f'(x) = 4x^3$ vemos lo siguiente:

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x < 0 \qquad \text{y} \qquad f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.$$

La prueba de la primera derivada indica que $f(0) = 1$ es un mínimo relativo. La FIGURA 4.7.6 muestra que $f(0) = 1$ es realmente un mínimo absoluto. ■

EJEMPLO 4 Prueba de la segunda derivada

Grafique $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$.

Solución Debido a que $\cos x$ y $\cos 2x$ son pares, la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y. También, $f(0) = 1$ produce la intersección $(0, 1)$. Así, las derivadas primera y segunda son

$$f'(x) = -2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x \qquad \text{y} \qquad f''(x) = -2\cos x + 4\cos 2x.$$

Al usar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ es posible simplificar la ecuación $f'(x) = 0$ a $\operatorname{sen} x(1 - 2\cos x) = 0$. Las soluciones de $\operatorname{sen} x = 0$ son $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ y las soluciones de $\cos x = \frac{1}{2}$ son $\pm\pi/3, \pm 5\pi/3, \ldots$ Pero como el periodo de f es 2π (¡demuéstrelo!), es suficiente considerar sólo los números críticos en $[0, 2\pi]$, a saber, $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$ y 2π. En la tabla siguiente se resume la aplicación de la prueba de la segunda derivada a estos valores.

x	Signo de $f''(x)$	$f(x)$	Conclusión
0	+	1	mínimo relativo
$\pi/3$	−	$\frac{3}{2}$	máximo relativo
π	+	−3	mínimo relativo
$5\pi/3$	−	$\frac{3}{2}$	máximo relativo
2π	+	1	mínimo relativo

La gráfica de f es la extensión con periodo 2π de la porción azul que se muestra en la FIGURA 4.7.7 sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. ■

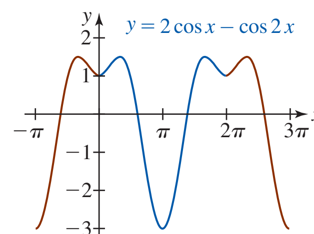


FIGURA 4.7.7 Gráfica de la función en el ejemplo 4

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión, entonces $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe. El converso de esta afirmación no necesariamente es verdadero. No es posible concluir, simplemente a partir del hecho de que cuando $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe, que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión. En este sentido, en el ejemplo 3 vimos que $f''(0) = 0$ para $f(x) = x^4 + 1$. Pero a partir de la figura 4.7.6 resulta evidente que $(0, f(0))$ no es un punto de inflexión. También, para $f(x) = 1/x$, vemos que $f''(x) = 2/x^3$ está indefinida en $x = 0$ y que la gráfica de f cambia de concavidad en $x = 0$:

$$f''(x) < 0 \quad \text{para} \quad x < 0 \qquad \text{y} \qquad f''(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.$$

No obstante, $x = 0$ no es la coordenada x de un punto de inflexión porque f no es continua en 0.

ii) Usted no debe pensar que la gráfica de una función *debe tener* concavidad. Hay funciones perfectamente bien diferenciables cuyas gráficas no poseen concavidad. Vea el problema 60 en los ejercicios 4.7.

iii) Usted debe estar al tanto de que los libros de texto no coinciden respecto a la definición precisa de punto de inflexión. Esto no es algo por lo cual deba preocuparse, pero si usted tiene interés, vea el problema 65 en los ejercicios 4.7.

Ejercicios 4.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-16.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-12, use la segunda derivada para determinar los intervalos sobre los cuales la gráfica de la función dada es cóncava hacia arriba y los intervalos sobre los cuales es cóncava hacia abajo. Grafique.

1. $f(x) = -x^2 + 7x$

2. $f(x) = -(x + 2)^2 + 8$

3. $f(x) = -x^3 + 6x^2 + x - 1$

4. $f(x) = (x + 5)^3$

5. $f(x) = x(x - 4)^3$

6. $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 3$

7. $f(x) = x^{1/3} + 2x$

8. $f(x) = x^{8/3} - 20x^{2/3}$

9. $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$

10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 10}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$

12. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 2}$

En los problemas 13-16, a partir de la gráfica de la función dada f calcule los intervalos sobre los cuales f' es creciente y los intervalos sobre los cuales f' es decreciente.

13.

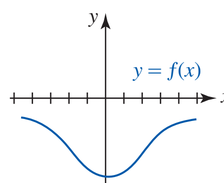


FIGURA 4.7.8 Gráfica para el problema 13

14.

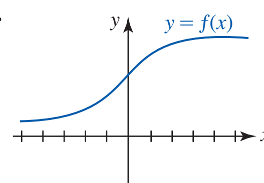


FIGURA 4.7.9 Gráfica para el problema 14

15.

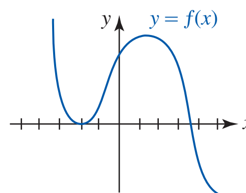


FIGURA 4.7.10 Gráfica para el problema 15

16.

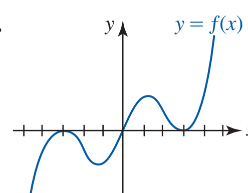


FIGURA 4.7.11 Gráfica para el problema 16

17. Demuestre que la gráfica de $f(x) = \sec x$ es cóncava hacia arriba sobre los intervalos donde $\cos x > 0$ y cóncava hacia abajo sobre los intervalos donde $\cos x < 0$.

18. Demuestre que la gráfica de $f(x) = \csc x$ es cóncava hacia arriba sobre los intervalos donde $\operatorname{sen} x > 0$ y cóncava hacia abajo sobre los intervalos donde $\operatorname{sen} x < 0$.

En los problemas 19-26, use la segunda derivada para localizar todos los puntos de inflexión.

19. $f(x) = x^4 - 12x^2 + x - 1$
20. $f(x) = x^{5/3} + 4x$
21. $f(x) = \operatorname{sen} x$
22. $f(x) = \cos x$
23. $f(x) = x - \operatorname{sen} x$
24. $f(x) = \tan x$
25. $f(x) = x + xe^{-x}$
26. $f(x) = xe^{-x^2}$

En los problemas 27-44, use la prueba de la segunda derivada, cuando sea pertinente aplicarla, para encontrar los extremos relativos de la función dada. Grafique y encuentre todos los puntos de inflexión cuando sea posible.

27. $f(x) = -(2x - 5)^2$
28. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x$
29. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
30. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$
31. $f(x) = 6x^5 - 10x^3$
32. $f(x) = x^3(x + 1)^2$
33. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$
34. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$
35. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
36. $f(x) = x\sqrt{x - 6}$
37. $f(x) = x^{1/3}(x + 1)$
38. $f(x) = x^{1/2} - \frac{1}{4}x$
39. $f(x) = \cos 3x$, $[0, 2\pi]$
40. $f(x) = 2 + \operatorname{sen} 2x$, $[0, 2\pi]$
41. $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$, $[0, 2\pi]$
42. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$, $[0, 2\pi]$
43. $f(x) = 2x - x \ln x$
44. $f(x) = \ln(x^2 + 2)$

En los problemas 45-48, determine si la función dada tiene un extremo relativo en el número crítico indicado.

45. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$; $\pi/4$
46. $f(x) = x \operatorname{sen} x$; 0
47. $f(x) = \tan^2 x$; π
48. $f(x) = (1 + \operatorname{sen} 4x)^3$; $\pi/8$

En los problemas 49-52, trace una gráfica de una función que tenga las propiedades dadas.

49. $f(-2) = 0, f(4) = 0$
$f'(3) = 0, f''(1) = 0, f''(2) = 0$
$f''(x) < 0, x < 1, x > 2$
$f''(x) > 0, 1 < x < 2$

50. $f(0) = 5, f(2) = 0$
$f'(2) = 0$, $f''(3)$ no existe
$f''(x) > 0, x < 3$
$f''(x) < 0, x > 3$

51. $f(0) = -1, f(\pi/2) > 0$
$f'(x) \geq 0$ para toda x
$f''(x) > 0, (2n - 1)\frac{\pi}{2} < x < (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, n par
$f''(x) < 0, (2n - 1)\frac{\pi}{2} < x < (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, n impar

52. $f(-x) = -f(x)$
asíntota vertical $x = 2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
$f''(x) < 0, 0 < x < 2$
$f''(x) > 0, x > 2$

≡ Piense en ello

53. Encuentre valores de a, b y c tales que la gráfica de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ pase por $(-1, 0)$ y tenga un punto de inflexión en $(1, 1)$.

54. Encuentre valores de a, b y c tales que la gráfica de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tenga una tangente horizontal en el punto de inflexión en $(1, 1)$.

55. Use la prueba de la segunda derivada como ayuda para graficar $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Observe que f es discontinua en $x = 0$.

56. Demuestre que la gráfica de una función polinomial general

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \; a_n \neq 0$$

puede tener cuando mucho $n - 2$ puntos de inflexión.

57. Sea $f(x) = (x - x_0)^n$, donde n es un entero positivo.

a) Demuestre que $(x_0, 0)$ es un punto de inflexión de la gráfica de f si n es un entero impar.

b) Demuestre que $(x_0, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f, sino que corresponde a un mínimo relativo cuando n es un entero par.

58. Demuestre que la gráfica de una función polinomial cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es cóncava hacia arriba sobre el eje x cuando $a > 0$ y cóncava hacia abajo sobre el eje x cuando $a < 0$.

59. Sea f una función para la cual f'' existe sobre un intervalo (a, b) que contiene al número c. Si $f''(c) = 0$ y $f'''(c) \neq 0$, ¿qué puede afirmarse sobre $(c, f(c))$?

60. Proporcione un ejemplo de una función diferenciable cuya gráfica no tenga concavidad. No piense demasiado.

61. Demuestre o refute lo siguiente. Un punto de inflexión para una función f debe ocurrir en un valor crítico de f'.

62. Sin graficar, explique por qué la gráfica de $f(x) = 10x^2 - x - 40 + e^x$ no puede tener un punto de inflexión.

63. Demuestre o refute lo siguiente. La función

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - x, & x \leq 0 \\ -x^3, & x > 0 \end{cases}$$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

64. Suponga que f es una función polinomial de grado 3 y que c_1 y c_2 son números críticos distintos.

a) $f(c_1)$ y $f(c_2)$, ¿son necesariamente extremos relativos de la función? Demuestre su respuesta.

b) ¿Cuál considera que es la coordenada x del punto de inflexión para la gráfica de f? Demuestre su respuesta.

≡ Proyecto

65. Puntos de inflexión Encuentre otros libros de texto de cálculo y anote cómo definen el punto de inflexión. Luego, investigue en internet acerca de la definición de punto de inflexión. Escriba un breve artículo en que compare estas definiciones. Ilustre su artículo con gráficas idóneas.

4.8 Optimización

Introducción En ciencia, ingeniería y negocios a menudo tenemos interés en los valores máximo y mínimo de una función; por ejemplo, una empresa tiene interés natural en maximizar sus ganancias a la vez que minimiza los costos. La próxima vez que vaya al supermercado, observe que todas las latas que contienen, por ejemplo, 15 oz de alimento (0.01566569 pies^3) tienen el mismo aspecto físico. El hecho de que todas las latas de un volumen específico tengan la misma forma (mismos radio y altura) no es coincidencia, puesto que hay dimensiones específicas que minimizan la cantidad de metal usado y, entonces, reducen los costos de construcción de la lata a una empresa. En el mismo tenor, muchos de los denominados automóviles económicos comparten muchas características extraordinariamente semejantes. Esto no es tan simple como el que una empresa copie el éxito de otra empresa, sino, en vez de ello, que un gran número de ingenieros buscan el diseño que minimice la cantidad de material usado.

Jugar con algunos números Se empezará con un problema simple:

> Encontrar dos números no negativos cuya suma sea 5 tales que el producto de uno y el cuadrado del otro sea el más grande posible. (1)

En este punto se recomienda bastante repasar la sección 1.7.

En el ejemplo 1 de la sección 1.7 presentamos el problema:

> La suma de dos números no negativos es 5. Exprese el producto de uno y el cuadrado del otro como una función de uno de los números. (2)

Al comparar (1) y (2) se observa que (2), donde simplemente se pide establecer una función, está contenido en el problema de cálculo (1). La parte de cálculo de (1) requiere encontrar números no negativos de modo que su producto sea máximo. Al revisar los ejemplos 1 y 2 de la sección 1.7 se indica que el producto descrito en (1) es

$$P = x(5 - x)^2 \quad \text{o bien,} \quad P(x) = 25x - 10x^2 + x^3. \tag{3}$$

El dominio de la función $P(x)$ en (3) es el intervalo [0, 5]. Este hecho proviene de la combinación de las dos desigualdades $x \geq 0$ y $y = 5 - x \geq 0$ o del reconocimiento de que si se permite que x fuese más grande que 5, entonces y sería negativo, contradiciendo la hipótesis inicial. Hay una cantidad infinita de pares de números reales no negativos (racionales e irracionales) cuya suma es 5. ¡Observe que no dijimos *enteros* no negativos! Por ejemplo

Números: x, y	Producto: $P = xy^2$
1, 4	$P = 1 \cdot 4^2 = 16$
2, 3	$P = 2 \cdot 3^2 = 18$
$\frac{1}{2}, \frac{9}{2}$	$P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 10.125$
$\pi, 5 - \pi$	$P = \pi \cdot (5 - \pi)^2 \approx 10.85$

Pares de números como -1 y 6, cuya suma es 5, se rechazan porque ambos números deben ser no negativos. ¿Cómo saber cuándo se han descubierto los números x y y que proporcionan el valor más grande; es decir, el máximo óptimo, de P? La respuesta reside en darse cuenta que el dominio de la función $P(x)$ es el intervalo cerrado [0, 5]. Por el teorema 4.3.3 sabemos que la función continua $P(x)$ tiene un extremo absoluto ya sea en el punto frontera del intervalo o en un número crítico en el intervalo abierto (0, 5). Por (3) vemos que $P'(x) = 25 - 20x + 3x^2 = (3x - 5)(x - 5)$ de modo que el único número crítico en el intervalo abierto (0, 5) es $\frac{5}{3}$. Resulta evidente que los valores de la función $P(0) = 0$ y $P(5) = 0$ representan el producto mínimo, de modo que el producto máximo absoluto es $P(\frac{5}{3}) = \frac{5}{3}(5) - (\frac{5}{3})^2 = \frac{500}{27} \approx 18.52$. En otras palabras, los dos números son $x = \frac{5}{3}$ y $y = 5 - \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$.

Terminología En general, la función que describe la cantidad que se quiere optimizar, al encontrar su valor máximo o mínimo, se denomina **función objetivo**. La función en (3) es la función objetivo para el problema dado en (1). Una relación entre las variables en un problema

de optimización, como la ecuación $x + y = 5$ entre los números x y y en el análisis anterior, se denomina **restricción**. La restricción permite eliminar una de las variables en la construcción de la función objetivo, como $P(x)$ en (3), así como impone una limitación sobre la forma en que variables como x y y pueden variar en realidad. Vimos que las limitaciones $x \geq 0$ y $y = 5 - x \geq 0$ fueron de utilidad para inferir que el dominio de la función $P(x)$ en (3) era el intervalo $[0, 5]$. Usted debe considerar que el tipo de problemas coloquiales en esta sección *pueden* o *pueden no* tener una restricción.

Sugerencias En los ejemplos y problemas siguientes se proporciona una función objetivo y es necesario traducir el lenguaje coloquial a símbolos matemáticos y construir una función objetivo. Éstos son los tipos de problemas coloquiales que muestran el poder del cálculo y constituyen una de muchas respuestas posibles a la vieja pregunta: ¿para qué es bueno? Mientras no se garantice nada, hay algunas sugerencias que es necesario tomar en cuenta al resolver un problema de optimización. Primero y lo más importante:

Desarrolle una actitud positiva y analítica. Trate de ser claro y organizado.

Directrices para resolver problemas de optimización

i) Lea el problema con atención; luego léalo de nuevo.
ii) Elabore un dibujo cuando sea posible; hágalo sencillo.
iii) Introduzca variables (en su dibujo, en caso de haber alguna) y observe cualquier restricción entre las variables.
iv) Use todas las variables necesarias para establecer la función objetivo. Si usa más de una variable, aplique la restricción para reducir la función a una variable.
v) Note el intervalo en que está definida la función. Determine todos los números críticos.
vi) Si la función objetivo es continua y está definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces compruebe los extremos en puntos frontera. Si el extremo deseado no ocurre en un punto frontera, debe ocurrir en un número crítico en el intervalo abierto (a, b).
vii) Si la función objetivo está definida sobre un intervalo que no es cerrado, entonces es necesario aplicar una prueba de la derivada en cada número crítico en ese intervalo.

En el primer ejemplo se analiza un modelo matemático que proviene de física.

EJEMPLO 1 Alcance máximo

Cuando se ignora la resistencia del aire, el alcance horizontal R de un proyectil está dado por

$$R(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta, \qquad (4)$$

donde v_0 es la velocidad inicial constante, g es la aceleración de la gravedad y θ es el ángulo de elevación o salida. Encuentre el alcance máximo del proyectil.

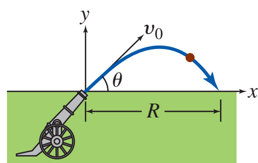


FIGURA 4.8.1 Bala de cañón en el ejemplo 1

Solución Como modelo físico del problema puede imaginarse que el proyectil es una bala de cañón. Vea la FIGURA 4.8.1. Para ángulos θ mayores que $\pi/2$, la bala de cañón mostrada en la figura debe salir hacia atrás. Por tanto, tiene sentido físico restringir la función en (4) al intervalo cerrado $[0, \pi/2]$. A partir de

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g} 2 \cos 2\theta$$

se observa que $dR/d\theta = 0$ cuando $\cos 2\theta = 0$ o $2\theta = \pi/2$, de modo que el único número crítico en el intervalo abierto $(0, \pi/2)$ es $\pi/4$. Al evaluar la función en los puntos finales y el número crítico obtenemos

$$R(0) = 0, \quad R(\pi/4) = \frac{v_0^2}{g}, \quad R(\pi/2) = 0.$$

Puesto que $R(\theta)$ es continua sobre el intervalo cerrado $[0, \pi/2]$, estos valores indican que el alcance mínimo es $R(0) = R(\pi/2) = 0$ y que el alcance máximo es $R(\pi/4) = v_0^2/g$. En otras palabras, para lograr la distancia máxima, el proyectil debe ser lanzado a un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. ■

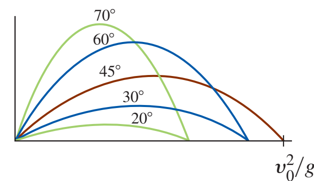


FIGURA 4.8.2 Mismo alcance para ángulos complementarios

Si las balas de cañón en el ejemplo 1 se disparan con la velocidad inicial v_0 pero con ángulos de elevación variables θ diferentes de 45°, entonces sus alcances horizontales son menores que $R_{máx} = v_0^2/g$. Al analizar la función en (4) se observa que obtenemos el mismo alcance horizontal para ángulos complementarios como 20° y 70°, y 30° y 60°. Vea la FIGURA 4.8.2. Si se toma en cuenta la resistencia del aire, el alcance de todos los proyectiles es más corto que v_0^2/g, aunque se hayan disparado a un ángulo de elevación de 45°.

EJEMPLO 2 Volumen máximo

Un canalón para agua de 20 pies de longitud tiene extremos en forma de triángulos isósceles cuyos lados miden 4 pies de longitud. Determine la dimensión a través del extremo triangular de modo que el volumen del canalón sea máximo. Encuentre el volumen máximo.

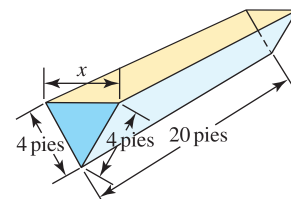


FIGURA 4.8.3 Canalón de agua en el ejemplo 2

Solución El canalón con la dimensión desconocida x se muestra en la FIGURA 4.8.3. El volumen V del canalón es

$$V = (\text{área del extremo triangular}) \times (\text{longitud}).$$

Por la FIGURA 4.8.4 y el teorema de Pitágoras, el área del extremo triangular como una función de x es $\frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2/4}$. En consecuencia, el volumen del canalón como una función de x, la función objetivo, es

$$V(x) = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}x\sqrt{16 - \frac{1}{4}x^2}\right) = 5x\sqrt{64 - x^2}.$$

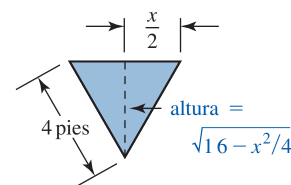


FIGURA 4.8.4 Extremo triangular del canalón en el ejemplo 2

La función $V(x)$ sólo tiene sentido sobre el intervalo cerrado [0, 8]. (¿Por qué?)

Al tomar la derivada y simplificar se obtiene

$$V'(x) = -10\frac{x^2 - 32}{\sqrt{64 - x^2}}.$$

Aunque $V'(x) = 0$ para $x = \pm 4\sqrt{2}$, el único número crítico en el intervalo abierto (0, 8) es $4\sqrt{2}$. Puesto que la función $V(x)$ es continua sobre [0, 8], sabemos por el teorema 4.3.3 que $V(0) = V(8) = 0$ debe ser su mínimo absoluto. Entonces, el máximo absoluto de $V(x)$ debe ocurrir cuando el ancho a través de la parte superior del canalón es $4\sqrt{2} \approx 5.66$ pies. El volumen máximo es $V(4\sqrt{2}) = 160$ pies^3. ■

Nota: A menudo un problema puede resolverse en más de una forma. En retrospectiva, usted debe comprobar que la solución del ejemplo 2 es ligeramente "más limpia" si la dimensión a través de la parte superior del extremo del canalón se identifica como $2x$ en vez de como x. En efecto, como se muestra en el siguiente ejemplo, el ejemplo 2 puede resolverse usando una variable completamente distinta.

EJEMPLO 3 Solución alterna del ejemplo 2

Como se muestra en la FIGURA 4.8.5, θ denota el ángulo entre la vertical y uno de los lados. A partir de trigonometría de triángulos rectángulos, la altura y la base del extremo triangular son $4 \cos \theta$ y $8 \operatorname{sen} \theta$, respectivamente. Cuando V se expresa como una función de θ obtenemos $(\frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}) \times (\text{longitud})$, o bien,

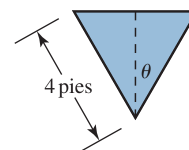


FIGURA 4.8.5 Extremo triangular del canalón en el ejemplo 3

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \tfrac{1}{2}(4 \cos \theta)(8 \operatorname{sen} \theta) \cdot 20 \\ &= 320 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ &= 160(2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \\ &= 160 \operatorname{sen} 2\theta, \qquad \leftarrow \text{fórmula de doble ángulo} \end{aligned}$$

donde $0 \le \theta \le \pi/2$. Al proceder como en el ejemplo 1, encontramos que el valor máximo $V = 160$ pies^3 ocurre en $\theta = \pi/4$. La dimensión a través de la parte superior del canalón, o la base del triángulo isósceles, es $8 \operatorname{sen}(\pi/4) = 4\sqrt{2}$ pies. ■

Problemas con restricciones A menudo es más conveniente plantear una función en términos de dos variables en lugar de una. En este caso es necesario encontrar una relación entre

estas variables que pueden usarse para eliminar una de las variables de la función en consideración. Como se analizó junto con (1), esta relación suele ser una ecuación denominada **restricción**. Este concepto lo ilustran los dos siguientes ejemplos.

EJEMPLO 4 Punto más próximo

Encuentre el punto en el primer cuadrante sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ más próximo a (2, 4).

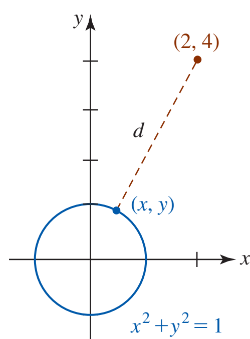


FIGURA 4.8.6 Círculo y punto en el ejemplo 4

Solución Sea (x, y), $x > 0$, $y > 0$ el punto sobre el círculo más próximo al punto (2, 4). Vea la FIGURA 4.8.6.

Como se muestra en la figura, la distancia d entre (x, y) y (2, 4) es

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} \qquad \text{o bien,} \qquad d^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2.$$

Luego, el punto que minimiza el cuadrado de la distancia d^2 también minimiza la distancia d. Se escribirá $D = d^2$. Al desarrollar $(x-2)^2$ y $(y-4)^2$ y usar la restricción $x^2 + y^2 = 1$ en la forma $y = \sqrt{1 - x^2}$, encontramos

$$\begin{aligned} D(x) &= x^2 - 4x + 4 + \overbrace{(1 - x^2)}^{y^2} - 8\overbrace{\sqrt{1 - x^2}}^{y} + 16 \\ &= -4x - 8\sqrt{1 - x^2} + 21. \end{aligned}$$

Debido a que se ha supuesto que x y y son positivos, el dominio de la función anterior es el intervalo abierto (0, 1). No obstante, la solución del problema no es afectada de ninguna manera si se supone que el dominio es el intervalo cerrado [0, 1].

Al diferenciar obtenemos

$$D'(x) = -4 - 4(1 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-4\sqrt{1 - x^2} + 8x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Luego, $D'(x) = 0$ sólo si $-4\sqrt{1 - x^2} + 8x = 0$ o $2x = \sqrt{1 - x^2}$. Después de elevar al cuadrado ambos miembros y simplificar, encontramos que $\sqrt{5}/5$ es el único número crítico en el intervalo (0, 1). Debido a que $D(x)$ es continua sobre [0, 1], a partir de los valores de la función

$$D(0) = 13, \qquad D\left(\sqrt{5}/5\right) = 21 - 4\sqrt{5} \approx 12.06 \qquad \text{y} \qquad D(1) = 17$$

concluimos que D y, por consiguiente, la distancia d son mínimos cuando $x = \sqrt{5}/5$. Al usar la restricción $x^2 + y^2 = 1$, de manera correspondiente encontramos que $y = 2\sqrt{5}/5$. Esto significa que $(\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)$ es el punto sobre el círculo más próximo a (2, 4). ■

EJEMPLO 5 Cerca mínima

Un granjero intenta delimitar un terreno rectangular que tenga un área de 1 500 m^2. El terreno estará cercado y dividido en dos partes iguales por medio de una cerca adicional paralela a dos lados. Encuentre las dimensiones del terreno que requiere la menor cantidad de cerca.

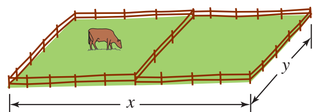


FIGURA 4.8.7 Terreno rectangular en el ejemplo 5

Solución Como se muestra en la FIGURA 4.8.7, x y y denotan las dimensiones del terreno cercado. La función que queremos minimizar es la cantidad total de cerca; es decir, la suma de las longitudes de las cinco porciones de cerca. Si esta suma se denota por el símbolo L, tenemos

$$L = 2x + 3y. \tag{5}$$

Debido a que el área del terreno cercado debe ser de 1 500 m^2, x y y deben estar relacionados por el requisito de que $xy = 1\,500$. Usamos esta restricción en la forma $y = 1\,500/x$ para eliminar y en (5) y escribir la función objetivo L como una función de x:

$$L(x) = 2x + \frac{4\,500}{x} \tag{6}$$

Puesto que x representa una dimensión física que satisface $xy = 1\,500$, concluimos que es positiva. Pero aparte de esta restricción, sobre x no hay ninguna otra restricción. Por tanto,

a diferencia de los ejemplos anteriores, la función en consideración no está definida sobre un intervalo cerrado; $L(x)$ está definida sobre el intervalo no acotado $(0, \infty)$.

Al igualar a cero la derivada

$$L'(x) = 2 - \frac{4\,500}{x^2}$$

y despejar x, encontramos que el único número crítico es $15\sqrt{10}$. Puesto que es fácil calcular la segunda derivada, usamos la prueba de la segunda derivada. A partir de

$$L''(x) = \frac{9\,000}{x^3}$$

observamos que $L''(15\sqrt{10}) > 0$. Por el teorema 4.7.3 concluimos que $L(15\sqrt{10}) = 2(15\sqrt{10}) + 4\,500/(15\sqrt{10}) = 60\sqrt{10}$ m es la cantidad mínima requerida de cerca. Volviendo a la restricción $y = 1\,500/x$, encontramos que el valor correspondiente de y es $10\sqrt{10}$. En consecuencia, las dimensiones del terreno deben ser $15\sqrt{10}$ m $\times$ $10\sqrt{10}$ m. ■

Si un objeto se mueve a razón constante, entonces la distancia, la razón y el tiempo están relacionados por *distancia* = *razón* × *tiempo*. Este resultado se usará en el último ejemplo en la forma

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{razón}}. \tag{7}$$

EJEMPLO 6 Tiempo mínimo

Una mujer en el punto P sobre una isla desea llegar a una población situada en el punto S sobre una playa recta en tierra firme. El punto P está a 9 millas del punto más próximo Q sobre la playa y la población en el punto S está a 15 millas de Q. Vea la FIGURA 4.8.8. Si la mujer rema un bote a razón de 3 mi/h hacia un punto R en tierra, luego camina el resto del camino hacia S a razón de 5 mi/h, determine dónde debe desembarcar en la playa a fin de minimizar el tiempo total de viaje.

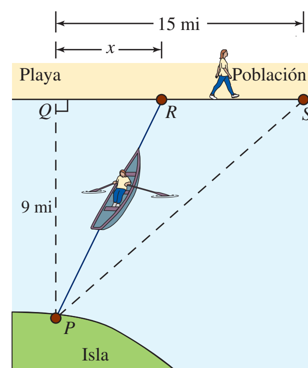


FIGURA 4.8.8 Mujer que se desplaza en el ejemplo 6

Solución Como se muestra en la figura, si x denota la distancia del punto Q en la playa al punto R donde la mujer desembarca en la playa, entonces por el teorema de Pitágoras, la distancia que ella rema es $\sqrt{81 + x^2}$. La distancia que camina es $15 - x$. Por (7), el tiempo total del viaje desde P hasta S es

$$T = \text{tiempo de remado} + \text{tiempo caminando}, \quad \text{o bien,} \quad T(x) = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{3} + \frac{15 - x}{5}.$$

Puesto que $0 \le x \le 15$, la función $T(x)$ está definida sobre el intervalo cerrado $[0, 15]$.

La derivada de T es

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{6}(81 + x^2)^{-1/2}(2x) - \frac{1}{5} = \frac{x}{3\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{5}.$$

Igualamos esta derivada a cero y despejamos x:

$$\begin{aligned} \frac{x}{3\sqrt{81 + x^2}} &= \frac{1}{5} \\ \frac{x^2}{81 + x^2} &= \frac{9}{25} \\ 16x^2 &= 729 \\ x &= \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Es decir, $\frac{27}{4}$ es el único número crítico en $[0, 15]$. Puesto que $T(x)$ es continua sobre el intervalo, a partir de los tres valores de la función

$$T(0) = 6 \text{ h}, \quad T\left(\tfrac{27}{4}\right) = 5.4 \text{ h} \qquad \text{y} \qquad T(15) \approx 5.83 \text{ h}$$

el tiempo de viaje mínimo ocurre cuando $x = \frac{27}{4} = 6.75$. En otras palabras, la mujer desembarca en el punto R, a 6.75 millas del punto Q, y luego camina las 8.25 millas restantes hacia el punto S. ■

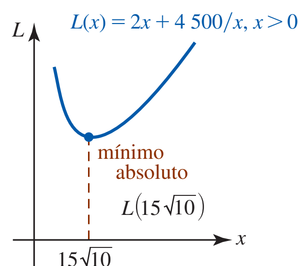


FIGURA 4.8.9 Gráfica de la función objetivo en el ejemplo 5

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

Un lector perspicaz podría cuestionar por lo menos dos aspectos del ejemplo 5.

i) En la solución, ¿dónde entra la hipótesis de que el terreno sea dividido en dos partes iguales? De hecho, no lo hace. Lo importante es que la cerca divisoria sea paralela a los dos extremos. Pregúntese cuál sería $L(x)$ si éste *no* fuera el caso. No obstante, la ubicación real de la cerca divisoria entre los extremos es irrelevante en tanto sea paralela a éstos.

ii) En un problema aplicado, por supuesto que tenemos interés sólo en los extremos absolutos. En consecuencia, otra pregunta podría ser: puesto que la función L en (6) no está definida sobre un intervalo cerrado y como la prueba de la segunda derivada no garantiza extremos absolutos, ¿cómo puede tenerse la certeza de que $L(15\sqrt{10})$ es un mínimo absoluto? Cuando se tengan dudas, siempre es posible trazar una gráfica. La FIGURA 4.8.9 responde la pregunta para $L(x)$. También, observe de nuevo el teorema 4.6.2 en la sección 4.6. Debido a que $15\sqrt{10}$ es el *único* número crítico en el intervalo que $(0, \infty)$ y ya que se demostró que $L(15\sqrt{10})$ es un mínimo relativo, el teorema 4.6.2 garantiza que el valor de la función $L(15\sqrt{10}) = 60\sqrt{10}$ es un mínimo absoluto.

Ejercicios 4.8

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-17.

Fundamentos

1. Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 60 y cuyo producto sea máximo.
2. Encuentre dos números no negativos cuyo producto sea 50 y cuya suma sea mínima.
3. Encuentre un número que exceda su cuadrado por la mayor cantidad.
4. Sean m y n enteros positivos. Encuentre dos números no negativos cuya suma sea S de modo que el producto de la m-ésima potencia de uno y la n-ésima potencia del otro sea máximo.
5. Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 1 de modo que la suma del cuadrado de uno y el doble del cuadrado del otro sea mínima.
6. Encuentre el valor mínimo de la suma de un número no negativo y su recíproco.
7. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $y^2 = 6x$ más próximo(s) a (5, 0), más próximo(s) a (3, 0).
8. Encuentre el punto sobre la gráfica de $x + y = 1$ más próximo a (2, 3).
9. Determine el punto sobre la gráfica de $y = x^3 - 4x^2$ en que la recta tangente tiene pendiente mínima.
10. Determine el punto sobre la gráfica de $y = 8x^2 + 1/x$ en que la recta tangente tiene pendiente máxima.

En los problemas 11 y 12, encuentre las dimensiones de la región sombreada de modo que su área sea máxima.

11.

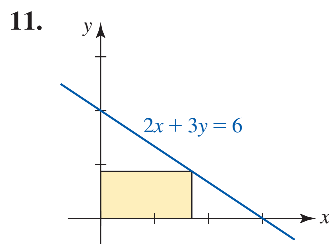


FIGURA 4.8.10 Gráfica para el problema 11

12.

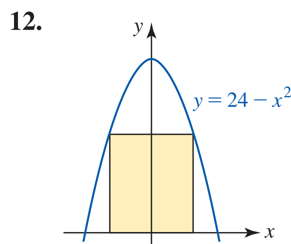


FIGURA 4.8.11 Gráfica para el problema 12

13. Encuentre los vértices $(x, 0)$ y $(0, y)$ de la región triangular sombreada en la FIGURA 4.8.12 tal que su área sea mínima.

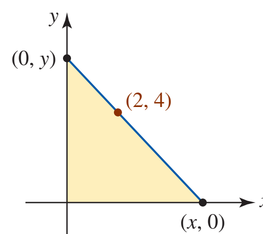


FIGURA 4.8.12 Gráfica para el problema 13

14. Encuentre la distancia vertical máxima d entre las gráficas de $y = x^2 - 1$ y $y = 1 - x$ para $-2 \leq x \leq 1$. Vea la FIGURA 4.8.13.

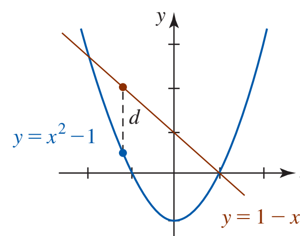


FIGURA 4.8.13 Gráfica para el problema 14

15. Un granjero tiene 3 000 pies de cerca a la mano. Determine las dimensiones de un corral rectangular que contenga el área máxima.
16. Un terreno rectangular ha de cercarse en tres porciones iguales al dividir cercas paralelas a dos lados. Vea la FIGURA 4.8.14. Si el área a encerrar es de 4 000 m^2, encuentre las dimensiones de terreno que requiere la cantidad mínima de cerca.

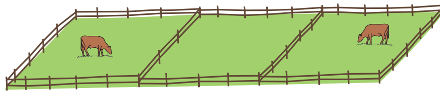


FIGURA 4.8.14 Terreno rectangular en el problema 16

17. Si la cantidad total de cerca usada es 8 000 m, encuentre las dimensiones de terreno encerrado en la figura 4.8.14 que tenga el área máxima.

18. Se piensa cercar un patio rectangular sujetando la cerca a una casa de 40 pies de ancho. Vea la FIGURA 4.8.15. La cantidad de cerca es 160 pies. Describa cómo debe usar la cerca de modo que se abarque la mayor área.

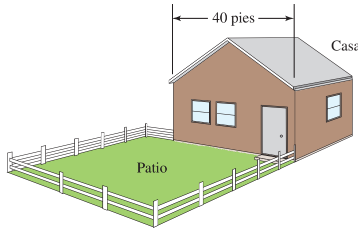


FIGURA 4.8.15 Casa y patio en el problema 18

19. Resuelva el problema 18 si la cantidad de cerca a usar mide 80 pies.

20. Un granjero desea construir un corral rectangular de 128 000 pies^2 con un lado a lo largo de un acantilado vertical. El cercado a lo largo del acantilado cuesta $1.50 por pie, mientras que a lo largo de los otros tres lados cuesta $2.50 por pie. Encuentre las dimensiones del corral, de modo que el costo del cercado sea mínimo.

21. Se desea construir una caja rectangular cerrada con base cuadrada y volumen de 32 000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que requiera la menor cantidad de material.

22. En el problema 21, encuentre las dimensiones de una caja cerrada que requiera la menor cantidad de material.

23. Se producirá una caja, abierta por la parte superior, de una pieza cuadrada de cartón cortando un cuadrado de cada esquina y doblando los lados. En la FIGURA 4.8.16, los cuadrados blancos se han cortado y el cartón se ha doblado a lo largo de las líneas discontinuas. Dado que la pieza de cartón mide 40 cm por lado, encuentre las dimensiones de la caja con que se obtiene el volumen máximo. ¿Cuál es el volumen máximo?

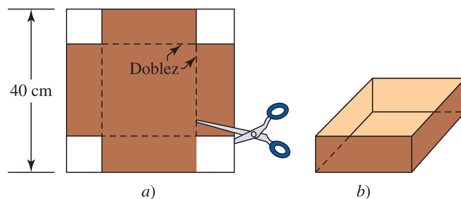


FIGURA 4.8.16 Caja abierta en el problema 23

24. Se producirá una caja, abierta por la parte superior, de una pieza rectangular de cartón que mide 30 pulg de largo por 20 pulg de ancho. La caja puede cerrarse al cortar un cuadrado en cada esquina, al cortar sobre las líneas sólidas interiores y doblar luego el cartón por las líneas discontinuas. Vea la FIGURA 4.8.17. Exprese el volumen de la caja como una función de la variable indicada x. Encuentre las dimensiones de la caja con que se obtiene el volumen máximo. ¿Cuál es el volumen máximo?

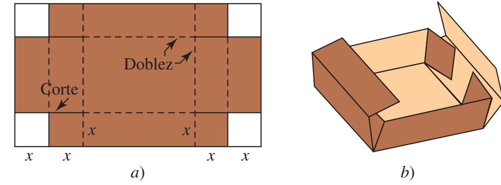


FIGURA 4.8.17 Caja abierta en el problema 24

25. Se producirá un canalón con sección transversal rectangular al doblar cantidades iguales de los extremos de una plancha de aluminio de 30 cm de ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la sección transversal de modo que el volumen sea máximo?

26. Se producirá un canalón cuya sección transversal es un trapezoide isósceles con dimensiones indicadas en la FIGURA 4.8.18. Determine el valor de θ tal que maximice el volumen.

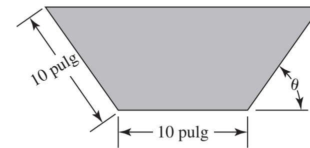


FIGURA 4.8.18 Canalón en el problema 26

27. Dos astabanderas están aseguradas con cables sujetos a un solo punto entre las astas. Vea la FIGURA 4.8.19. ¿Dónde debe ubicarse el punto a fin de minimizar la cantidad de cable usado?

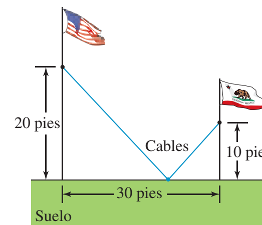


FIGURA 4.8.19 Astabanderas en el problema 27

28. La pista de carreras que se muestra en la FIGURA 4.8.20 debe constar de dos partes rectas paralelas y dos partes semicirculares. La longitud de la pista debe medir 2 km. Encuentre el diseño de la pista de modo que el terreno rectangular encerrado por la pista sea máximo.

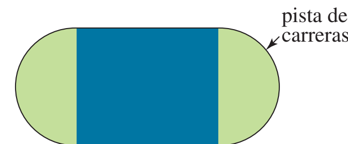


FIGURA 4.8.20 Pista de carreras en el problema 28

29. Una ventana normanda es un rectángulo con un semicírculo arriba de éste. Encuentre las dimensiones de la ventana con mayor área si su perímetro mide 10 m. Vea la FIGURA 4.8.21.

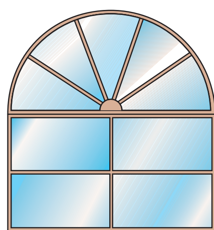


FIGURA 4.8.21 Ventana normanda en el problema 29

30. Vuelva a trabajar el problema 29 dado que el rectángulo está arriba de un triángulo equilátero.

31. Un muro de 10 pies de altura está a 5 pies de un edificio, como se muestra en la FIGURA 4.8.22. Encuentre la longitud L de la escalera más corta, apoyada en el muro, que llega desde el suelo hasta el edificio.

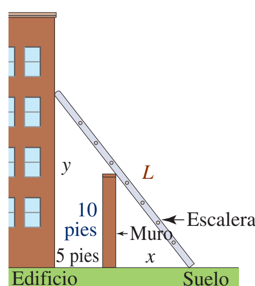


FIGURA 4.8.22 Escalera en el problema 31

32. Las regulaciones del servicio postal estadounidense establecen que una caja rectangular enviada por servicio de cuarta clase debe satisfacer el requerimiento de que su longitud más su circunferencia (perímetro de un extremo) no debe exceder 108 pulg. Dado que se elaborará una caja con base cuadrada, encuentre las dimensiones de la caja que tenga volumen máximo. Vea la FIGURA 4.8.23.

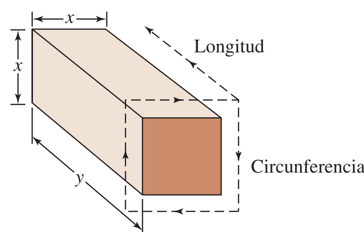


FIGURA 4.8.23 Caja en el problema 32

33. Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto con volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto de 8 pulg de radio y 12 pulg de altura. Vea la FIGURA 4.8.24.

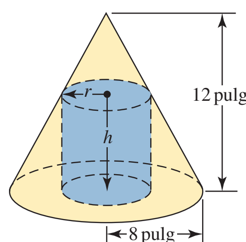


FIGURA 4.8.24 Cilindro inscrito en el problema 33

34. Encuentre la longitud máxima L de una lámina delgada que puede transportarse horizontalmente alrededor de una esquina en ángulo recto mostrada en la FIGURA 4.8.25. [*Sugerencia*: Utilice triángulos similares.]

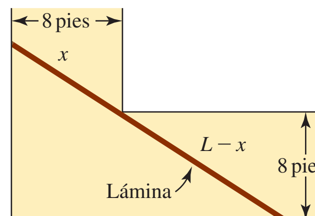


FIGURA 4.8.25 Lámina en el problema 34

35. Se producirá una lata para jugo en forma de cilindro circular recto con volumen de 32 pulg^3. Vea la FIGURA 4.8.26. Encuentre las dimensiones de la lata de modo que para hacerla se use la menor cantidad de material. [*Sugerencia*: Material = área superficial total de la lata = área de la parte superior + área de la parte inferior + área de lado lateral. Si las partes circulares superior e inferior se retiran y el cilindro se corta en forma recta por el lado y se aplana, el resultado es el rectángulo mostrado en la figura 4.8.26*c*).]

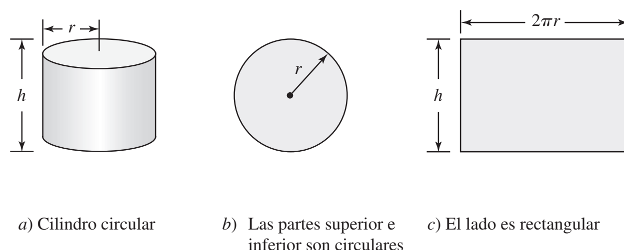


FIGURA 4.8.26 Lata de jugo en el problema 35

36. En el problema 35, suponga que las partes circulares superior e inferior se cortan de láminas metálicas cuadradas como se muestra en la FIGURA 4.8.27. Si se desperdicia el metal cortado de las esquinas de la lámina cuadrada, encuentre las dimensiones de la lata de modo que para elaborarla se use la menor cantidad de material (incluyendo el desperdicio).

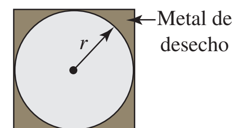


FIGURA 4.8.27 Partes superior e inferior de la lata en el problema 36

37. Algunas aves vuelan más lentamente sobre agua que sobre tierra. Un ave vuela a razones constantes de 6 km/h sobre agua y 10 km/h sobre tierra. Use la información de la FIGURA 4.8.28 para encontrar la trayectoria a la cual el ave debe seguir para minimizar el tiempo total de vuelo entre la costa de una isla y su nido ubicado en la costa de otra isla. [*Sugerencia*: Use *distancia* = *razón* × *tiempo*.]

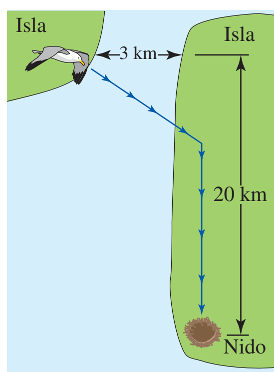


FIGURA 4.8.28 Ave en el problema 37

38. Se va a construir una tubería desde una refinería a través de un pantano hasta tanques de almacenamiento. Vea la FIGURA 4.8.29. El costo de construcción es $25 000 por milla sobre el pantano y $20 000 por milla sobre tierra. ¿Cómo debe construirse la tubería para que el costo de producción sea mínimo?

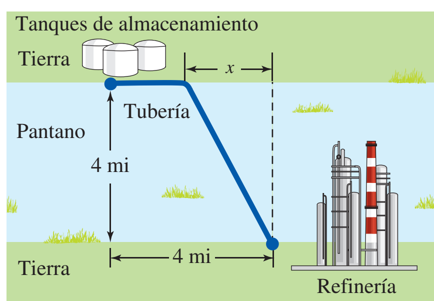


FIGURA 4.8.29 Tubería en el problema 38

39. Vuelva a trabajar el problema 38 dado que el costo por milla a través del pantano es el doble del costo por milla sobre tierra.

40. A medianoche, el barco *A* está a 50 km al norte del barco *B*. El barco *A* se dirige hacia el sur a 20 km/h y el barco *B* se dirige al oeste a 10 km/h. ¿En qué instante es mínima la distancia entre los barcos?

41. Un contenedor que transporta desechos peligrosos se fabrica de plástico pesado y se forma al unir dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto como se muestra en la FIGURA 4.8.30. El volumen total del contenedor es de 30π pie^3. El costo por pie cuadrado para los extremos es una vez y media el costo por pie cuadrado del plástico usado en la parte cilíndrica. Encuentre las dimensiones del contenedor de modo que su costo de producción sea mínimo. [*Sugerencia*: El volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y su área superficial es $4\pi r^2$.]

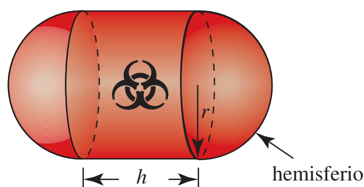


FIGURA 4.8.30 Contenedor en el problema 41

42. Una página impresa debe tener márgenes izquierdo y derecho de 2 pulg de espacio en blanco y márgenes superior e inferior de 1 pulg de espacio en blanco. Vea la FIGURA 4.8.31. El área de la porción impresa es 32 pulg^2. Determine las dimensiones de la página de modo que se use la menor cantidad de papel.

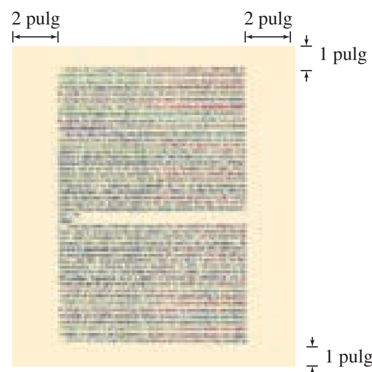


FIGURA 4.8.31 Página impresa en el problema 42

43. Una esquina de una hoja de papel de 8.5 pulg × 11 pulg se dobla sobre el otro borde del papel como se muestra en la FIGURA 4.8.32. Encuentre el ancho *x* del doblez de modo que la longitud *L* del pliegue sea mínima.

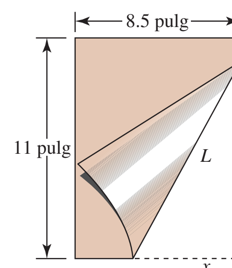


FIGURA 4.8.32 Pieza de papel en el problema 43

44. El marco de una cometa consta de seis partes de plástico ligero. Como se muestra en la FIGURA 4.8.33, el marco exterior de la cometa consta de cuatro piezas precortadas, dos piezas de 2 pies de longitud y dos piezas de 3 pies de longitud. Las partes restantes en forma de cruz, identificadas por *x* en la figura, deben cortarse de longitudes tales que la cometa sea lo más grande posible. Encuentre estas longitudes.

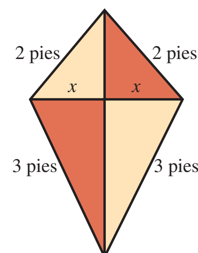


FIGURA 4.8.33 Cometa en el problema 44

45. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede circunscribirse alrededor de un rectángulo de longitud *a* y ancho *b*. Vea el rectángulo rojo en la FIGURA 4.8.34.

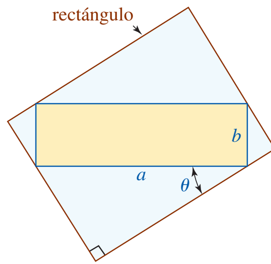


FIGURA 4.8.34 Rectángulo en el problema 45

46. Una estatua se coloca sobre un pedestal como se muestra en la FIGURA 4.8.35. ¿A qué distancia del pedestal debe pararse una persona para maximizar el ángulo de visión θ? [*Sugerencia*: Revise la identidad trigonométrica para $\tan(\theta_2 - \theta_1)$. También es suficiente maximizar $\tan\theta$ más que θ. ¿Por qué?]

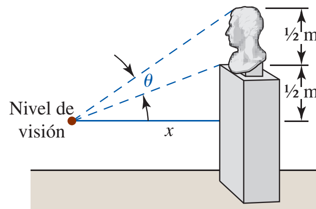


FIGURA 4.8.35 Estatua en el problema 46

47. La sección transversal de una viga de madera cortada de un tronco circular de diámetro d mide x de ancho y y de profundidad. Vea la FIGURA 4.8.36. La resistencia de la viga varía directamente con el producto del ancho y el cuadrado de la profundidad. Encuentre las dimensiones de la sección transversal de máxima resistencia.

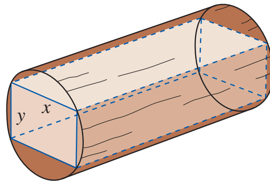


FIGURA 4.8.36 Tronco en el problema 47

48. El contenedor que se muestra en la FIGURA 4.8.37 se construirá al unir un cono invertido (abierto en la parte superior) con la parte inferior de un cilindro circular recto (abierto en sus partes superior e inferior) de radio 5 pies. El contenedor debe tener un volumen de 100 pies^3. Encuentre el valor del ángulo indicado de modo que el área superficial total del contenedor sea mínima. ¿Cuál es el área superficial mínima? [*Sugerencia*: Vea el problema 38 en la parte C de la revisión del capítulo 1.]

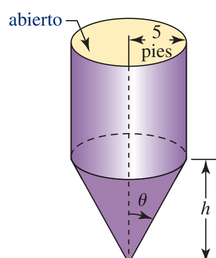


FIGURA 4.8.37 Contenedor en el problema 48

Modelos matemáticos

49. La iluminancia E debida a una fuente de luz o intensidad I a una distancia r de la fuente está dada por $E = I/r^2$. La iluminancia total proveniente de dos focos de intensidades $I_1 = 125$ e $I_2 = 216$ es la suma de las iluminancias. Encuentre el punto P entre los dos focos a 10 m de distancia de éstos en que la iluminancia total es mínima. Vea la FIGURA 4.8.38.

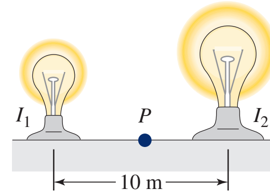


FIGURA 4.8.38 Focos en el problema 49

50. La iluminancia E en cualquier punto P sobre el borde de una mesa redonda originada por una luz colocada directamente arriba del centro de la mesa está dada por $E = (i\cos\theta)/r^2$. Vea la FIGURA 4.8.39. Dado que el radio de la mesa es 1 m y que $I = 100$, encuentre la altura en que debe colocarse la luz de modo que E sea máxima.

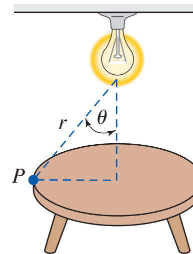


FIGURA 4.8.39 Luz y mesa en el problema 50

51. El **principio de Fermat** en óptica establece que la luz se desplaza del punto A (en el plano xy) en un medio hasta el punto B en otro medio siguiendo una trayectoria que requiere tiempo mínimo. Si c_1 es la rapidez de la luz en el medio que contiene al punto A y c_2 es la rapidez de la luz en el medio que contiene al punto B, demuestre que el tiempo de recorrido de A a B es mínimo cuando los ángulos θ_1 y θ_2, que se muestran en la FIGURA 4.8.40, cumplen la **ley de Snell**:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{c_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{c_2}.$$

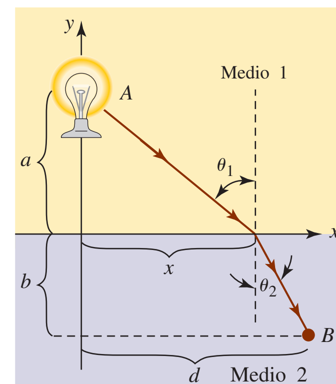


FIGURA 4.8.40 Dos medios en el problema 51

52. La sangre es transportada por el cuerpo mediante el tejido vascular, que consta de vasos capilares, venas, arteriolas y arterias. Una consideración de los problemas de minimización de la energía utilizada para mover la sangre a través de varios órganos consiste en encontrar un ángulo óptimo θ para la *ramificación vascular* de modo que sea mínima la resistencia total de la sangre a lo largo de una trayectoria de un vaso capilar más grande a un vaso capilar más pequeño. Vea la FIGURA 4.8.41. Use la **ley de Poiseuille**, que establece que la resistencia R de un vaso capilar de longitud l y radio r es $R = kl/r^4$, donde k es una constante, para demostrar que la resistencia total

$$R = k\left(\frac{x}{r_1^4}\right) + k\left(\frac{y}{r_2^4}\right)$$

a lo largo de la trayectoria $P_1P_2P_3$ es mínima cuando $\cos\theta = r_2^4/r_1^4$. [*Sugerencia*: Exprese x y y en términos de θ y a.]

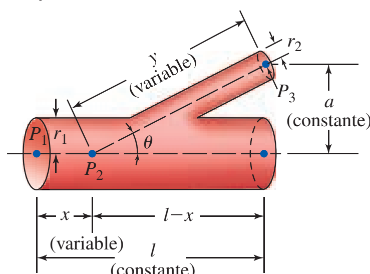


FIGURA 4.8.41 Ramificación vascular en el problema 52

53. La energía potencial entre dos átomos en una molécula diatómica está dada por $U(x) = 2/x^{12} - 1/x^6$. Encuentre la energía potencial mínima entre los dos átomos.

54. La altitud de un proyectil lanzado con una velocidad inicial constante v_0 a un ángulo de elevación θ_0 está dada por $y = (\tan\theta_0)x - \left(\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)x^2$, donde x es su desplazamiento horizontal medido desde el punto de lanzamiento. Demuestre que la altitud máxima alcanzada por el proyectil es $h = (v_0^2/2g)\,\text{sen}^2\,\theta_0$.

55. Una viga de longitud L se incrusta en muros de concreto como se muestra en la FIGURA 4.8.42. Cuando una carga constante w_0 se distribuye uniformemente a lo largo de su longitud, la curva de desviación $y(x)$ para la viga está dada por

$$y(x) = \frac{w_0L^2}{24EI}x^2 - \frac{w_0L}{12EI}x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4,$$

donde E e I son constantes (E es el **módulo de elasticidad de Young** e I es el momento de inercia de una sección transversal de la viga). La curva de desviación aproxima la forma de la viga.

a) Determine la deflexión máxima de la viga.
b) Trace la gráfica de $y(x)$.

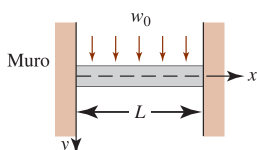


FIGURA 4.8.42 Viga en el problema 55

56. La relación entre la altura h y el diámetro d de un árbol puede aproximarse por la expresión cuadrática $h = 137 + ad - bd^2$, donde h y d se miden en centímetros, y a y b son parámetros positivos que dependen del tipo de árbol. Vea la FIGURA 4.8.43.

a) Suponga que el árbol alcanza una altura máxima de H centímetros a un diámetro de D centímetros. Demuestre que

$$h = 137 + 2\frac{H - 137}{D}d - \frac{H - 137}{D^2}d^2.$$

b) Suponga que cierto árbol alcanza su altura máxima posible (según la fórmula) de 15 m a un diámetro de 0.8 m. ¿Cuál es el diámetro del árbol cuando mide 10 m de alto?

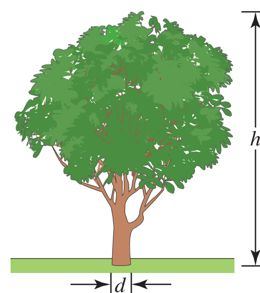


FIGURA 4.8.43 Árbol en el problema 56

57. Los huesos largos en los mamíferos pueden representarse como tubos cilíndricos huecos, llenos con médula, de radio exterior R y radio interior r. Se piensa fabricar huesos ligeros pero capaces de soportar ciertos momentos de flexión. Para resistir un momento de flexión M, puede demostrarse que la masa m por longitud unitaria del hueso y médula está dada por

$$m = \pi\rho\left[\frac{M}{K(1 - x^4)}\right]^{2/3}\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right),$$

donde ρ es la densidad del hueso y K es una constante positiva. Si $x = r/R$, demuestre que m es mínima cuando $r = 0.63R$ (aproximadamente).

58. La razón P (en mg de carbono/m^3/h) a la cual se lleva a cabo la fotosíntesis para ciertas especies de fitoplancton está relacionada con la intensidad de la luz I (en 10^3 pies-candela) por la función

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}.$$

¿A qué intensidad de la luz se cumple que P es máxima?

≡ Piense en ello

59. Un clásico matemático Una persona desea cortar una pieza de 1 m de longitud de alambre en dos partes. Una parte debe doblarse en forma de círculo y la otra en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que la suma de las áreas sea máxima?

60. En el problema 59, suponga que una parte del alambre se dobla en forma de círculo y que la otra se dobla en forma de triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que la suma de las áreas sea mínima? ¿Y máxima?

61. Un vaso cónico se elabora a partir de una pieza circular de papel de radio R al cortar un sector circular y luego unir los bordes sombreados como se muestra en la FIGURA 4.8.44.

***a*)** Determine el valor de r indicado en la figura 4.8.44*b*) de modo que el volumen del vaso sea máximo.

***b*)** ¿Cuál es el volumen máximo del vaso?

***c*)** Encuentre el ángulo central θ del sector circular de modo que el volumen del vaso cónico sea máximo.

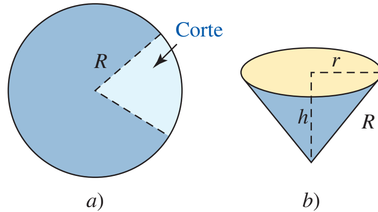
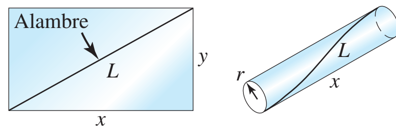


FIGURA 4.8.44 Vaso cónico en el problema 61

62. Se piensa elaborar la cara lateral de un cilindro a partir de un rectángulo de lámina de plástico ligero. Debido a que el material plástico no puede sostenerse por sí mismo, en el material se incrusta un delgado alambre rígido, como se muestra en la FIGURA 4.8.45*a*). Encuentre las dimensiones del cilindro de volumen máximo que puede elaborarse si el alambre tiene una longitud fija L. [*Sugerencia*: En este problema hay dos restricciones. En la figura 4.8.45*b*), la circunferencia de un extremo circular del cilindro es y.]



a) Lámina rectangular de plástico *b*) Lado del cilindro

FIGURA 4.8.45 Cilindro en el problema 62

63. En el problema 27, demuestre que cuando se usa la cantidad óptima de alambre (la cantidad mínima) entonces el ángulo θ_1 que el alambre del asta bandera izquierda forma con el suelo es el mismo que el ángulo θ_2 que el alambre del asta bandera derecha forma con el suelo. Vea la figura 4.8.19.

64. Encuentre una ecuación de la recta tangente L a la gráfica de $y = 1 - x^2$ en $P(x_0, y_0)$ tal que el triángulo en el primer cuadrante acotado por los ejes coordenados y L tenga área mínima. Vea la FIGURA 4.8.46.

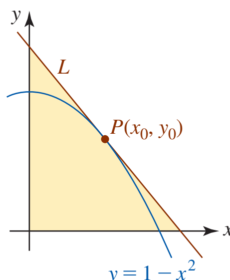


FIGURA 4.8.46 Triángulo en el problema 64

≡ Problemas con calculadora/SAC

65. En una carrera, a una mujer se le solicita que nade desde un muelle flotante A hacia la playa y, sin detenerse, que nade de la playa hacia otro muelle flotante C. Las distancias se muestran en la FIGURA 4.8.47*a*). La mujer calcula que puede nadar del muelle A a la playa y luego al muelle C a razón constante de 3 mi/h y luego del muelle C a la playa a una razón de 2 mi/h. ¿Dónde debe tocar la playa a fin de minimizar el tiempo total de natación de A a C? Introduzca un sistema de coordenadas xy como se muestra en la figura 4.8.47*b*). Use una calculadora o un SAC para encontrar los números críticos.

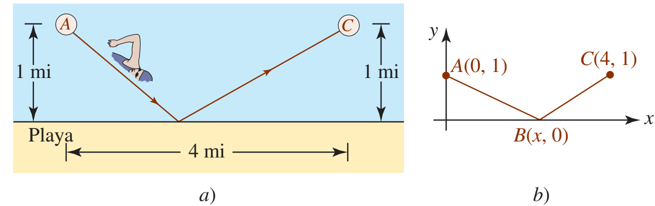


FIGURA 4.8.47 Nadadora en el problema 65

66. Una casa de dos pisos en construcción consta de dos estructuras A y B con secciones transversales rectangulares como se muestra en la FIGURA 4.8.48. Para elaborar el armazón de la estructura B se requieren sostenes temporales de madera desde el nivel del suelo apoyados contra la estructura A como se muestra.

***a*)** Exprese la longitud L del sostén como una función del ángulo θ indicado.

***b*)** Encuentre $L'(\theta)$.

***c*)** Use una calculadora o un SAC para encontrar la gráfica de $L'(\theta)$ sobre el intervalo $(0, \pi/2)$. Use esta gráfica para demostrar que L sólo tiene un número crítico θ_c en $(0, \pi/2)$. Use esta gráfica para determinar el signo algebraico de $L'(\theta)$ para $0 < \theta < \theta_c$, y el signo algebraico de $L'(\theta)$ para $\theta_c < \theta < \pi/2$. ¿Cuál es su conclusión?

***d*)** Encuentre la longitud mínima de un sostén.

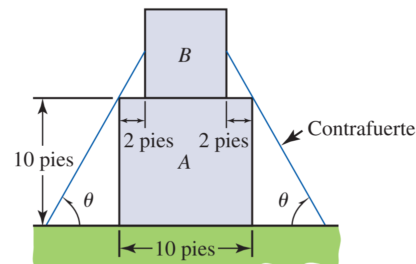


FIGURA 4.8.48 Casa en el problema 66

67. Considere los tres cables mostrados en la FIGURA 4.8.49.

***a*)** Exprese la longitud total L de los tres cables mostrados en la figura 4.8.49*a*) como una función de la longitud L del cable AB.

***b*)** Use una calculadora o un SAC para comprobar que la gráfica de L tiene un mínimo.

***c*)** Exprese la longitud del cable AB de modo que la longitud total L de las longitudes de los tres cables sea mínima.

d) Exprese la longitud total L de los tres cables mostrados en la figura 4.8.49*b*) como una función de la longitud del cable AB.

e) Use una calculadora o un SAC para comprobar que la gráfica de L tiene un mínimo.

f) Use la gráfica obtenida en el inciso *e*) o un SAC como ayuda en la aproximación de la longitud del cable AB que minimiza la función L obtenida en el inciso *d*).

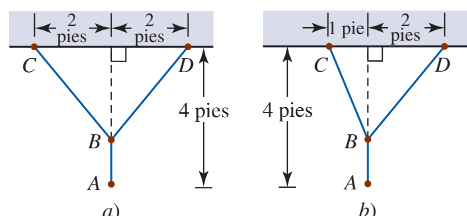


FIGURA 4.8.49 Cables en el problema 67

Proyecto

68. Interferencia de frecuencia Cuando la Administración Federal de Aviación (FAA, por sus siglas en inglés) asigna numerosas frecuencias para un radiotransmisor en un aeropuerto, bastante a menudo los transmisores cercanos usan las mismas frecuencias. Como consecuencia, la FAA intenta minimizar la interferencia entre estos transmisores. En la FIGURA 4.8.50, el punto (x_t, y_t) representa la ubicación de un transmisor cuya jurisdicción radial está indicada por el círculo C de radio con centro en el origen. Un segundo transmisor se encuentra en $(x_i, 0)$ como se muestra en la figura. En este problema, usted desarrolla y analiza una función para encontrar la interferencia entre dos transmisores.

a) La intensidad de la señal de un transmisor a un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambos. Suponga que un punto (x, y) está ubicado sobre la porción superior del círculo C como se muestra en la figura 4.8.50. Exprese la intensidad primaria de la señal en (x, y) desde un transmisor en (x_t, y_t) como una función de x. Exprese la intensidad secundaria en (x, y) desde el transmisor en $(x_i, 0)$ como una función de x. Luego defina una función $R(x)$ como un cociente de la intensidad primaria de la señal entre la intensidad secundaria de la señal. Puede considerarse que $R(x)$ es una *razón señal a ruido*. Para garantizar que la interferencia permanezca pequeña es necesario demostrar que la razón señal a ruido mínima es mayor que el umbral mínimo de la FAA de -0.7.

b) Suponga que $x_t = 760$ m, $y_t = -560$ m, $r = 1.1$ km y $x_i = 12$ km. Use un SAC para simplificar y luego trazar la gráfica de $R(x)$. Use la gráfica para estimar el dominio y el rango de $R(x)$.

c) Use la gráfica en el inciso *b*) para estimar el valor de x donde ocurre la razón mínima R. Estime el valor de R en ese punto. Este valor de R, ¿excede el umbral mínimo de la FAA?

d) Use un SAC para diferenciar $R(x)$. Use un SAC para encontrar la raíz de $R'(x) = 0$ y para calcular el valor correspondiente de $R(x)$. Compare sus respuestas aquí con las estimaciones en el inciso *c*).

e) ¿Cuál es el punto (x, y) sobre el círculo C?

f) Se supuso que el punto (x, y) estaba en el semiplano superior cuando (x_t, y_t) estaba en el semiplano inferior. Explique por qué esta suposición es correcta.

g) Use un SAC para encontrar el valor de x donde ocurre la interferencia mínima en términos de los símbolos x_t, y_t, x_i y r.

h) ¿Dónde está el punto que minimiza la razón señal a ruido cuando el transmisor en (x_t, y_t) está sobre el eje x? Proporcione un argumento convincente y justifique su respuesta.

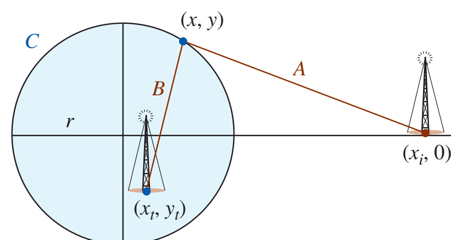


FIGURA 4.8.50 Radiotransmisores en el problema 68

4.9 Linealización y diferenciales

Introducción Empezamos el análisis de la derivada con el problema de encontrar la recta tangente a la gráfica de una función $y = f(x)$ en un punto $(a, f(a))$. Intuitivamente, es de esperar que una recta tangente esté muy próxima a la gráfica de f siempre que x esté cerca del número a. En otras palabras, cuando x está en una pequeña vecindad de a, los valores de la función $f(x)$ están muy próximos al valor de las coordenadas y de la recta tangente. Así, al encontrar una ecuación de la recta tangente en $(a, f(a))$ podemos usar esa ecuación para aproximar $f(x)$.

Una ecuación de la recta tangente mostrada en rojo en la FIGURA 4.9.1 está dada por

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \qquad \text{o bien,} \qquad y = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{1}$$

Al usar notación funcional estándar, la última ecuación en (1) se escribirá como $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Esta función lineal recibe un nombre especial.

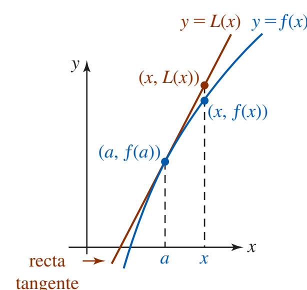


FIGURA 4.9.1 Cuando x está próximo a a, el valor $L(x)$ está cerca de $f(x)$

Definición 4.9.1 Linealización

Si una función $y = f(x)$ es diferenciable en un número a, entonces decimos que la función

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \qquad (2)$$

es una **linealización** de f en a. Para un número x próximo a a, la aproximación

$$f(x) \approx L(x) \qquad (3)$$

se denomina **aproximación lineal local** de f en a.

No es necesario memorizar (2); es simplemente la forma punto-pendiente de una recta tangente en $(a, f(a))$.

EJEMPLO 1 Linealización de sen x

Encuentre una linealización de $f(x) = \text{sen}\, x$ en $a = 0$.

Solución Al usar $f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x$ y $f'(0) = 1$, la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \text{sen}\, x$ en $(0, 0)$ es $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$. En consecuencia, la linealización de $f(x) = \text{sen}\, x$ en $a = 0$ es $L(x) = x$. Como se observa en la FIGURA 4.9.2, la gráfica de $f(x) = \text{sen}\, x$ y su linealización en $a = 0$ son casi indistinguibles cerca del origen. La aproximación lineal local $f(x) \approx L(x)$ de f en $a = 0$ es

$$\text{sen}\, x \approx x. \qquad (4)$$ ■

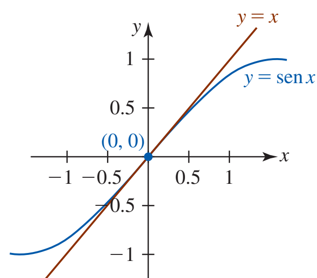


FIGURA 4.9.2 Gráfica de función y linealización en el ejemplo 1

Errores En el ejemplo 1 se recalca algo que usted ya sabe por trigonometría. La aproximación lineal local (4) muestra que el seno de un ángulo pequeño x (medido en radianes) es aproximadamente el mismo que el ángulo. Para efectos de comparación, si se escoge $x = 0.1$, entonces (4) indica que $f(0.1) \approx L(0.1)$ o $\text{sen}(0.1) \approx 0.1$. Para efectos de comparación, con una calculadora se obtiene (redondeado hasta cinco cifras decimales) $f(0.1) = \text{sen}(0.1) = 0.09983$. Luego, un error en el cálculo se define por

$$\textbf{error} = \textbf{valor verdadero} - \textbf{valor aproximado}. \qquad (5)$$

No obstante, en la práctica

$$\textbf{error relativo} = \frac{\textbf{error}}{\textbf{valor verdadero}} \qquad (6)$$

suele ser más importante que el error. Además (error relativo) · 100 se denomina **error porcentual**. Así, con ayuda de una calculadora se encuentra que el error porcentual en la aproximación $f(0.1) \approx L(0.1)$ es sólo alrededor de 0.2%. En la figura 4.9.2 se muestra claramente que cuando x se aleja de 0, la precisión de la aproximación $\text{sen}\, x \approx x$ disminuye. Por ejemplo, para el número 0.9, con una calculadora obtenemos $f(0.9) = \text{sen}(0.9) = 0.78333$, mientras que $L(0.9) = 0.9$. En esta ocasión el error porcentual es aproximadamente 15%.

También hemos visto el resultado del ejemplo 1 presentado de manera ligeramente distinta en la sección 2.4. Si la aproximación lineal local $\text{sen}\, x \approx x$ la dividimos entre x, obtenemos $\dfrac{\text{sen}\, x}{x} \approx 1$ para valores de x próximos a 0. Esto lleva de regreso al límite trigonométrico importante $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} = 1$.

EJEMPLO 2 Linealización y aproximación

a) Encuentre una linealización de $f(x) = \sqrt{x + 1}$ en $a = 3$.
b) Use una aproximación lineal local para aproximar $\sqrt{3.95}$ y $\sqrt{4.01}$.

Solución

a) Por la regla de potencias para funciones, la derivada de f es

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}.$$

Cuando ambas se evalúan en $a = 3$ obtenemos:

$$f(3) = \sqrt{4} = 2 \qquad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (3, 2)$$

$$f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}. \qquad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } (3, 2) \text{ es } \tfrac{1}{4}$$

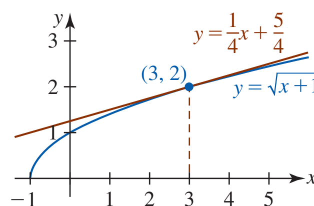


FIGURA 4.9.3 Gráficas de función y linealización en el ejemplo 2

Así, por la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, la linealización de f en $a = 3$ está dada por $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 3)$, o bien

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 3). \tag{7}$$

Las gráficas de f y L se muestran en la FIGURA 4.9.3. Por supuesto, L puede expresarse en la forma punto-pendiente $L(x) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$, pero para efectos de cálculo es más conveniente la forma proporcionada en (7).

***b*)** Al usar (7) del inciso *a*), tenemos la aproximación lineal local $f(x) \approx L(x)$, o bien

$$\sqrt{x + 1} \approx 2 + \frac{1}{4}(x - 3), \tag{8}$$

siempre que x esté cerca de 3. Luego, al hacer $x = 2.95$ y $x = 3.01$ en (8) obtenemos, a su vez, las aproximaciones:

$$\overbrace{\sqrt{3.95}}^{f(2.95)} \approx \overbrace{2 + \frac{1}{4}(2.95 - 3) = 2 - \frac{0.05}{4}}^{L(2.95)} = 1.9875.$$

y $$\overbrace{\sqrt{4.01}}^{f(3.01)} \approx \overbrace{2 + \frac{1}{4}(3.01 - 3) = 2 + \frac{0.01}{4}}^{L(3.01)} = 2.0025.$$ ■

Diferenciales La idea fundamental de linealización de una función originalmente fue expresada en la terminología de *diferenciales*. Suponga que $y = f(x)$ es una función diferenciable en un intervalo abierto que contiene al número a. Si x_1 es un número diferente sobre el eje x, entonces los **incrementos** Δx y Δy son las diferencias

$$\Delta x = x_1 - a \qquad \text{y} \qquad \Delta y = f(x_1) - f(a).$$

Pero ya que $x_1 = a + \Delta x$, el **cambio en la función** es

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Para valores de Δx que están próximos a 0, el cociente diferencial

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es una aproximación del valor de la derivada de f en a:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(a) \qquad \text{o bien,} \qquad \Delta y \approx f'(a)\Delta x.$$

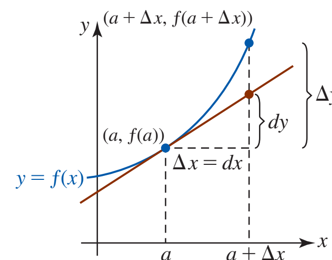


FIGURA 4.9.4 Interpretaciones geométricas de dx, Δy y dy

Las cantidades Δx y $f'(a)\Delta x$ se denominan **diferenciales** y se denotan por los símbolos dx y dy, respectivamente. Es decir,

$$\Delta x = dx \qquad \text{y} \qquad dy = f'(a)\,dx.$$

Como se muestra en la FIGURA 4.9.4, para un cambio dx en x la cantidad $dy = f'(a)dx$ representa el **cambio en la linealización** (el *ascenso* en la recta tangente en $(a, f(a))$).* Y cuando $dx \approx 0$, el cambio en la función Δy es aproximadamente el mismo que el cambio en la linealización dy:

$$\Delta y \approx dy. \tag{9}$$

* Por esta razón, la notación dy/dx de Leibniz para la derivada parece un cociente.

Definición 4.9.2 Diferenciales

La **diferencial de la variable independiente** $\boldsymbol{x}$ es el número diferente de cero Δx y se denota por dx; es decir,

$$dx = \Delta x. \tag{10}$$

Si f es una función diferenciable en x, entonces la **diferencial de la variable dependiente** $\boldsymbol{y}$ se denota por dy; es decir,

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)\,dx. \tag{11}$$

EJEMPLO 3 Diferenciales

a) Encuentre Δy y dy para $f(x) = 5x^2 + 4x + 1$.
b) Compare los valores de Δy y dy para $x = 6$, $\Delta x = dx = 0.02$.

Solución

a)
$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= [5(x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) + 1] - [5x^2 + 4x + 1]\\ &= 10x\Delta x + 4\Delta x + 5(\Delta x)^2.\end{aligned}$$

Luego, puesto que $f'(x) = 10x + 4$, por (11) de la definición 4.9.2 tenemos

$$dy = (10x + 4)\,dx. \tag{12}$$

Al volver a escribir Δy como $\Delta y = (10x + 4)\Delta x + 5(\Delta x)^2$ y usar $dx = \Delta x$, se observa que $dy = (10x + 4)\Delta x$ y $\Delta y = (10x + 4)\Delta x + 5(\Delta x)^2$ difieren por la cantidad $5(\Delta x)^2$.

b) Cuando $x = 6$, $\Delta x = 0.02$:

$$\Delta y = 10(6)(0.02) + 4(0.02) + 5(0.02)^2 = 1.282$$

mientras
$$dy = (10(6) + 4)(0.02) = 1.28.$$

Por supuesto, la diferencia en las respuestas es $5(\Delta x)^2 = 5(0.02)^2 = 0.002$. ■

En el ejemplo 3, el valor $\Delta y = 1.282$ es la cantidad *exacta* por la cual la función $f(x) = 5x^2 + 4x + 1$ cambia cuando x cambia de 6 a 6.02. La diferencial $dy = 1.28$ representa una *aproximación* de la cantidad por la cual cambia la función. Como se muestra en (9), para un cambio o incremento pequeño Δx en la variable independiente, el cambio correspondiente Δy en la variable dependiente puede aproximarse por la diferencial dy.

Otro repaso a la aproximación lineal Las diferenciales pueden usarse para aproximar el valor $f(x + \Delta x)$. A partir de $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, obtenemos

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y.$$

Pero debido a (9), para un cambio pequeño en x puede escribirse como

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy.$$

Con $dy = f'(x)\,dx = f'(x)\Delta x$ la línea precedente es exactamente la misma que

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,dx. \tag{13}$$

La fórmula en (13) ya se ha visto bajo otra forma. Si se hace $x = a$ y $dx = \Delta x = x - a$, entonces (13) se vuelve

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a). \tag{14}$$

El miembro derecho de la desigualdad en (14) se identifica como $L(x)$ y (13) se vuelve $f(x) \approx L(x)$, que es el resultado proporcionado en (3).

EJEMPLO 4 Aproximación por diferenciales

Use (13) para aproximar $(2.01)^3$.

Solución Primero se identifica la función $f(x) = x^3$. Deseamos calcular el valor aproximado de $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$ cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0.01$. Así, por (11),

$$dy = 3x^2 dx = 3x^2 \Delta x.$$

Por tanto, (13) proporciona

$$(x + \Delta x)^3 \approx x^3 + 3x^2 \Delta x.$$

Con $x = 2$ y $\Delta x = 0.01$, la fórmula precedente proporciona la aproximación

$$(2.01)^3 \approx 2^3 + 3(2)^2(0.01) = 8.12.$$ ■

EJEMPLO 5 Aproximación por diferenciales

La arista de un cubo mide 30 cm con un error posible de ± 0.02 cm. ¿Cuál es el máximo error posible aproximado en el volumen del cubo?

Solución El volumen de un cubo es $V = x^3$, donde x es la longitud de la arista. Si Δx representa el error en la longitud de la arista, entonces el error correspondiente en el volumen es

$$\Delta V = (x + \Delta x)^3 - x^3.$$

Para simplificar la situación se utiliza la diferencial $dV = 3x^2 dx = 3x^2 \Delta x$ como una aproximación a ΔV. Así, para $x = 30$ y $\Delta x = \pm 0.02$ el máximo error aproximado es

$$dV = 3(30)^2(\pm 0.02) = \pm 54 \text{ cm}^3.$$ ■

En el ejemplo 5, un error de alrededor de 54 cm^3 en el volumen para un error de 0.02 cm en la longitud de la arista parece considerable. Sin embargo, observe que si el error relativo (6) es $\Delta V/V$, entonces el error relativo *aproximado* es dV/V. Cuando $x = 30$ y $V = (30)^3 = 27\,000$, el error porcentual máximo es $\pm 54/27\,000 = \pm 1/500$, y el error porcentual máximo es aproximadamente de sólo $\pm 0.2\%$.

Reglas para diferenciales Las reglas para diferenciación consideradas en este capítulo pueden volver a plantearse en términos de diferenciales; por ejemplo, si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ y $y = f(x) + g(x)$, entonces $dy/dx = f'(x) + g'(x)$. Por tanto, $dy = [f'(x) + g'(x)]\,dx = f'(x)\,dx + g'(x)\,dx = du + dv$. A continuación se resumen los equivalentes diferenciales de las reglas de la suma, el producto y el cociente:

$$d(u + v) = du + dv \tag{15}$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du \tag{16}$$

$$d(u/v) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \tag{17}$$

Como se muestra en el siguiente ejemplo, casi no es necesario memorizar las expresiones (15), (16) y (17).

EJEMPLO 6 Diferencial de y

Encuentre dy para $y = x^2 \cos 3x$.

Solución Para encontrar la diferencial de una función, simplemente puede multiplicar su derivada por dx. Así, por la regla del producto,

$$\frac{dy}{dx} = x^2(-\operatorname{sen} 3x \cdot 3) + \cos 3x(2x)$$

de modo que

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot dx = (-3x^2 \operatorname{sen} 3x + 2x \cos 3x)\,dx. \tag{18}$$

Solución alterna Al aplicar (16) obtenemos

$$\begin{aligned} dy &= x^2 d(\cos 3x) + \cos 3x\, d(x^2) \\ &= x^2(-\operatorname{sen} 3x \cdot 3\,dx) + \cos 3x(2x\,dx). \end{aligned} \tag{19}$$

Al factorizar dx en (19) obtenemos (18). ■

Ejercicios 4.9

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-17.

Fundamentos

En los problemas 1-8, encuentre una linealización de la función dada en el número indicado.

1. $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 9$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $a = 1$
3. $f(x) = \tan x$; $a = \pi/4$
4. $f(x) = \cos x$; $a = \pi/2$
5. $f(x) = \ln x$; $a = 1$
6. $f(x) = 5x + e^{x-2}$; $a = 2$
7. $f(x) = \sqrt{1 + x}$; $a = 3$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 + x}}$; $a = 6$

En los problemas 9-16, use una linealización en $a = 0$ para establecer la aproximación lineal local dada.

9. $e^x \approx 1 + x$
10. $\tan x \approx x$
11. $(1 + x)^{10} \approx 1 + 10x$
12. $(1 + 2x)^{-3} \approx 1 - 6x$
13. $\sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$
14. $\sqrt{x^2 + x + 4} \approx 2 + \frac{1}{4}x$
15. $\dfrac{1}{3 + x} \approx \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9}x$
16. $\sqrt[3]{1 - 4x} \approx 1 - \frac{4}{3}x$

En los problemas 17-20, use un resultado idóneo de los problemas 1-8 para encontrar una aproximación de la cantidad dada.

17. $(1.01)^{-2}$
18. $\sqrt{9.05}$
19. $10.5 + e^{0.1}$
20. $\ln 0.98$

En los problemas 21-24, use un resultado idóneo de los problemas 9-16 para encontrar una aproximación de la cantidad dada.

21. $\dfrac{1}{(1.1)^3}$
22. $(1.02)^{10}$
23. $(0.88)^{1/3}$
24. $\sqrt{4.11}$

En los problemas 25-32, use una función idónea y una aproximación lineal local para encontrar una aproximación de la cantidad dada.

25. $(1.8)^5$
26. $(7.9)^{2/3}$
27. $\dfrac{(0.9)^4}{(0.9) + 1}$
28. $(1.1)^3 + 6(1.1)^2$
29. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 0.4\right)$
30. sen 1°
31. sen 33°
32. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + 0.1\right)$

En los problemas 33 y 34, encuentre una linealización $L(x)$ de f en el valor dado de a. Use $L(x)$ para aproximar el valor de la función dado.

33. $a = 1$; $f(1.04)$
34. $a = -2$; $f(-1.98)$

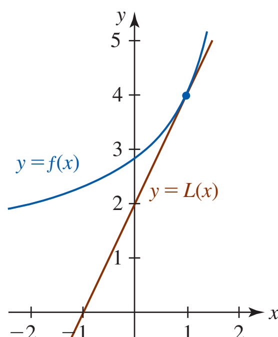


FIGURA 4.9.5 Gráfica para el problema 33

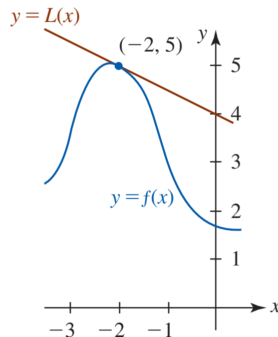


FIGURA 4.9.6 Gráfica para el problema 34

En los problemas 35-42, encuentre Δy y dy.

35. $y = x^2 + 1$
36. $y = 3x^2 - 5x + 6$
37. $y = (x + 1)^2$
38. $y = x^3$
39. $y = \dfrac{3x + 1}{x}$
40. $y = \dfrac{1}{x^2}$
41. $y = \operatorname{sen} x$
42. $y = -4\cos 2x$

En los problemas 43 y 44, complete la tabla siguiente para cada función.

x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
2	1			
2	0.5			
2	0.1			
2	0.01			

43. $y = 5x^2$
44. $y = 1/x$
45. Calcule la cantidad aproximada por la cual la función $f(x) = 4x^2 + 5x + 8$ cambia cuando x cambia de:
    a) 4 a 4.03 ***b)*** 3 a 2.9.
46. ***a)*** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2$ en $x = 1$.
    b) Encuentre la coordenada y del punto sobre la recta tangente en el inciso *a*) que corresponde a $x = 1.02$.
    c) Use (3) para encontrar una aproximación a $f(1.02)$. Compare su respuesta con la del inciso *b*).
47. El área de un círculo con radio r es $A = \pi r^2$.
    a) Dado que el radio de un círculo cambia de 4 cm a 5 cm, encuentre el cambio exacto en el área.
    b) ¿Cuál es el cambio aproximado en área?

Aplicaciones

48. Según Poiseuille, la resistencia R de un vaso capilar de longitud l y radio r es $R = kl/r^4$, donde k es una constante. Dado que l es constante, encuentre el cambio aproximado en R cuando r cambia de 0.2 mm a 0.3 mm.
49. Muchas pelotas de golf constan de una cubierta esférica sobre un núcleo sólido. Encuentre el volumen exacto de la cubierta si su grosor es t y el radio del núcleo es r. [*Sugerencia*: El volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Considere esferas concéntricas cuyos radios son r y $r + \Delta r$.] Use diferenciales para encontrar una aproximación al volumen de la cubierta. Vea la FIGURA 4.9.7. Encuentre una aproximación al volumen de la cubierta si $r = 0.8$ y $t = 0.04$ pulg.

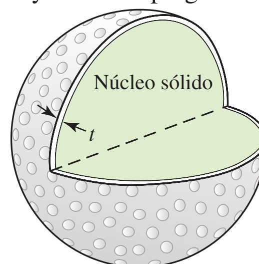


FIGURA 4.9.7 Pelota de golf en el problema 49

50. Un tubo de metal hueco mide 1.5 m de longitud. Encuentre una aproximación al volumen del metal si el radio interior mide 2 cm y el grosor del metal es 0.25 cm. Vea la FIGURA 4.9.8.

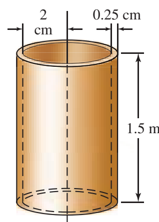


FIGURA 4.9.8 Tubo en el problema 50

51. El lado de un cuadrado mide 10 cm con un error posible de ± 0.3 cm. Use diferenciales para encontrar una aproximación al error máximo en el área. Encuentre el error relativo aproximado y el error porcentual aproximado.

52. Un tanque de almacenamiento de petróleo en forma de cilindro circular mide 5 m de altura. El radio mide 8 m con un error posible de ± 0.25 m. Use diferenciales para estimar el error máximo en el volumen. Encuentre el error relativo aproximado y el error porcentual aproximado.

53. En el estudio de ciertos procesos adiabáticos, la presión P de un gas está relacionada con el volumen V que ocupa por $P = c/V^{\gamma}$, donde c y γ son constantes. Demuestre que el error relativo aproximado en P es proporcional al error relativo aproximado en V.

54. El alcance de un proyectil R con velocidad inicial v_0 y ángulo de elevación θ está dado por $R = (v_0^2/g)\text{sen } 2\theta$, donde g es la aceleración de la gravedad. Si v_0 y θ se mantienen constantes, demuestre entonces que el error porcentual en el alcance es proporcional al error porcentual en g.

55. Use la fórmula en el problema 54 para determinar el alcance de un proyectil cuando la velocidad inicial es 256 pies/s, el ángulo de elevación es 45° y la aceleración de la gravedad es 32 pies/s^2. ¿Cuál es el cambio aproximado en el alcance del proyectil si la velocidad inicial se incrementa a 266 pies/s?

56. La aceleración debida a la gravedad g no es constante, ya que varía con la altitud. Para efectos prácticos, en la superficie terrestre, g se considera igual a 32 pies/s^2, 980 cm/s^2 o 9.8 m/s^2.

a) A partir de la ley de la gravitación universal, la fuerza F entre un cuerpo de masa m_1 y la Tierra de masa m_2 es $F = km_1m_2/r^2$, donde k es una constante y r es la distancia al centro de la Tierra. En forma alterna, la segunda ley de movimiento de Newton implica $F = m_1 g$. Demuestre que $g = km_2/r^2$.

b) Use el resultado del inciso *a*) para demostrar que $dg/g = -2dr/r$.

c) Sea $r = 6\,400$ km en la superficie de la Tierra. Use el inciso *b*) para demostrar que el valor aproximado de g a una altitud de 16 km es 9.75 m/s^2.

57. La aceleración debida la gravedad g también cambia con la latitud. La International Geodesy Association ha definido g (a nivel del mar) como una función de la latitud θ como sigue:

$$g = 978.0318\,(1 + 53.024 \times 10^{-4}\,\text{sen}^2\,\theta - 5.9 \times 10^{-6}\,\text{sen}^2\,2\theta),$$

donde g se mide en cm/s^2.

a) Según este modelo matemático, ¿dónde es mínima g? ¿Dónde es máxima?

b) ¿Cuál es el valor de g a latitud 60° N?

c) ¿Cuál es el cambio aproximado en g cuando θ cambia de 60° N a 61° N? [*Sugerencia*: Recuerde usar medida en radianes.]

58. El periodo (en segundos) de un péndulo simple de longitud L es $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Calcule el cambio exacto en el periodo si L se incrementa de 4 m a 5 m. Luego use diferenciales para encontrar una aproximación al cambio en periodo. Suponga $g = 9.8$ m/s^2.

59. En el problema 58, dado que L es fijo a 4 m, encuentre una aproximación al cambio en el periodo si el péndulo se mueve a una altitud donde $g = 9.75$ m/s^2.

60. Puesto que casi todas las placas de circulación son del mismo tamaño (12 pulg de largo), un detector óptico computarizado montado en la parte frontal del automóvil A puede registrar la distancia D al automóvil B directamente enfrente del automóvil A para medir el ángulo θ subtendido por la placa de circulación del automóvil B. Vea la FIGURA 4.9.9.

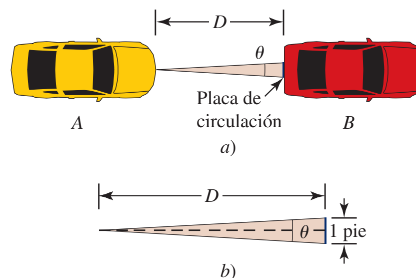


FIGURA 4.9.9 Automóviles en el problema 60

a) Exprese D como una función del ángulo subtendido θ.

b) Encuentre la distancia al automóvil de enfrente si el ángulo subtendido θ es 30 minutos de arco (es decir, $\frac{1}{2}^{\circ}$).

c) Suponga en el inciso *b*) que θ decrece a razón de 2 minutos de arco por segundo, y que el automóvil A se mueve a razón de 30 mi/h. ¿A qué razón se mueve el automóvil B?

d) Demuestre que el error relativo aproximado al medir D está dado por

$$\frac{dD}{D} = -\frac{d\theta}{\text{sen}\,\theta},$$

donde $d\theta$ es el error aproximado (en radianes) al medir θ. ¿Cuál es el error relativo aproximado en D en el inciso *b*) si el ángulo subtendido θ se mide con un error posible de ± 1 minuto de arco?

≡ Piense en ello

61. Suponga que la función $y = f(x)$ es diferenciable en un número a. Si un polinomio $p(x) = c_1x + c_0$ tiene las propiedades de que $p(a) = f(a)$ y $p'(a) = f'(a)$, demuestre entonces que $p(x) = L(x)$, donde L se define en (2).

62. Sin usar trigonometría, explique por qué para valores pequeños de x, $\cos x = 1$.

63. Suponga que una función f y f' son diferenciables en un número a y que $L(x)$ es una linealización de f en a. Analice: Si $f''(x) > 0$ para toda x en algún intervalo abierto que contiene a a, $L(x)$ ¿sobrestima o subestima $f(x)$ para x próximo a a?

64. Suponga que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión para la gráfica de $y = f(x)$ tal que $f''(c) = 0$ y suponga también que $L(x)$ es una linealización de f en c. Describa a qué se parece la gráfica de $y = f(x) - L(x)$ en una vecindad de c.

65. El área de un cuadrado cuyo lado mide x es $A = x^2$. Suponga, como se muestra en la FIGURA 4.9.10, que cada lado del cuadrado se incrementa por una cantidad Δx. En la figura 4.9.10, identifique por color las áreas ΔA, dA y $\Delta A - dA$.

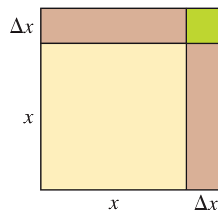


FIGURA 4.9.10 Cuadrado en el problema 65

4.10 Método de Newton

Introducción Encontrar raíces de ciertos tipos de ecuaciones fue un problema que cautivó a los matemáticos durante siglos. Los ceros de una función *polinomial* f de grado 4 o menos (es decir, las raíces de la ecuación $f(x) = 0$) siempre pueden encontrarse por medio de una fórmula algebraica que expresa la incógnita x en términos de los coeficientes de f. Por ejemplo, la ecuación polinomial de grado 2, $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, puede resolverse con la fórmula cuadrática. Uno de los logros más importantes en la historia de las matemáticas fue la demostración en el siglo XIX de que las ecuaciones polinomiales de grado mayor que 4 no pueden resolverse por medio de fórmulas algebraicas; en otras palabras, en términos de radicales. Por tanto, resolver una ecuación algebraica como

$$x^5 - 3x^2 + 4x - 6 = 0 \tag{1}$$

plantea un dilema a menos que el polinomio de quinto grado $x^5 - 3x^2 + 4x - 6$ pueda factorizarse. Además, en análisis científicos, a menudo se pide encontrar las raíces de ecuaciones trascendentes como

$$2x = \tan x. \tag{2}$$

En el caso de problemas como (1) y (2), suele acostumbrarse usar algún método que produzca una aproximación o estimación de las raíces. En esta sección consideraremos una técnica de aproximación que utiliza la derivada de una función f o, con más precisión, una recta tangente a la gráfica de f. Este nuevo método se denomina **método de Newton**, o **método de Newton-Raphson**.

Método de Newton Suponga que f es diferenciable y suponga que c representa alguna raíz real desconocida de $f(x) = 0$; es decir, $f(c) = 0$. Sea x_0 un número que se escoge de manera arbitraria como primera conjetura para c. Si $f(x_0) \neq 0$, calcule $f'(x_0)$ y, como se muestra en la FIGURA 4.10.1*a*), construya una tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$. Si se hace que $(x_1, 0)$ denote la intersección x de la recta tangente $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, entonces las coordenadas $x = x_1$ y $y = 0$ deben satisfacer esta ecuación. Al despejar x_1 de $0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$ obtenemos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

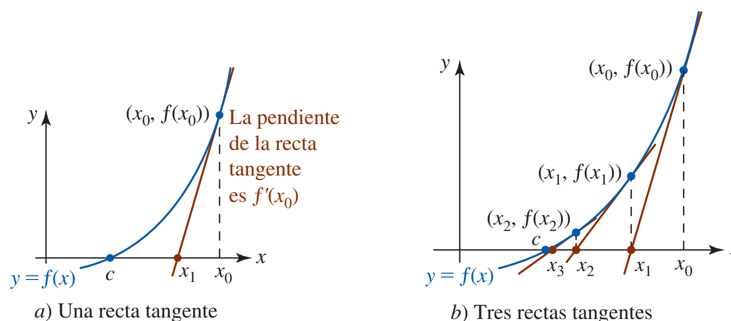


FIGURA 4.10.1 Coordenadas x sucesivas de intersecciones x de rectas tangentes próximas a la raíz c

Repita el procedimiento en $(x_1, f(x_1))$ y sea $(x_2, 0)$ la intersección x de la segunda recta tangente $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$. Por $0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$ encontramos

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Al continuar de esta manera, determinamos x_{n+1} a partir de x_n al usar la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{3}$$

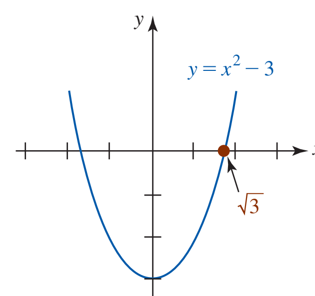
Para $n = 0, 1, 2, \ldots$ la fórmula (3) produce una sucesión de aproximaciones $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a la raíz c. Como se sugiere en la figura 4.10.1*b*), si los términos de la sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$ se aproximan cada vez más a c cuando n crece sin límite, es decir, $x_n \to c$ cuando $n \to \infty$, se escribe $\lim_{x\to\infty} x_n = c$ y se dice que la sucesión **converge** a c.

Análisis gráfico Antes de aplicar (3), una buena idea es determinar la existencia y el número de raíces reales de $f(x) = 0$ por medios gráficos. Por ejemplo, el número irracional $\sqrt{3}$ puede interpretarse como

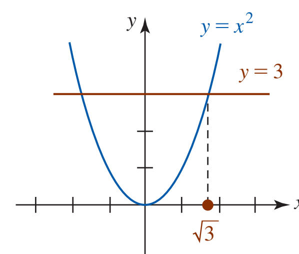
- una raíz de la ecuación cuadrática $x^2 - 3 = 0$ y, por tanto, como un cero de la función continua $f(x) = x^2 - 3$, o
- la coordenada x de un punto de intersección de las gráficas de $y = x^2$ y $y = 3$.

Ambas interpretaciones se ilustran en la FIGURA 4.10.2. Por supuesto, otra razón para una gráfica es permitir la elección de la conjetura inicial x_0 de modo que esté próximo a la raíz c.

Aunque el cálculo verdadero del número $\sqrt{3}$ es trivial en una calculadora, su cálculo sirve muy bien como introducción al uso del método de Newton.



a) coordenada x de intersección x



b) coordenada x del punto de intersección de dos gráficas

FIGURA 4.10.2 Localización gráfica de $\sqrt{3}$

EJEMPLO 1 Uso del método de Newton

Aproxime $\sqrt{3}$ por el método de Newton.

Solución Si definimos $f(x) = x^2 - 3$, entonces $f'(x) = 2x$ y (3) se vuelve

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n} \qquad \text{o bien,} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right). \tag{4}$$

A partir de la figura 4.10.2 parece razonable escoger $x_0 = 1$ como conjetura inicial para el valor de $\sqrt{3}$. Usamos (4) y se muestra cada cálculo hasta ocho cifras decimales:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{3}{x_0}\right) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2 \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{3}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = 1.75 \\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{3}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + \frac{12}{7}\right) \approx 1.73214286 \\
x_4 &= \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{3}{x_3}\right) \approx 1.73205081 \\
x_5 &= \frac{1}{2}\left(x_4 + \frac{3}{x_4}\right) \approx 1.73205081.
\end{aligned}$$

El proceso continúa hasta que obtenemos dos aproximaciones consecutivas x_n y x_{n+1} que coinciden con el número deseado de cifras decimales. Entonces, si estamos satisfechos con una aproximación de ocho decimales a $\sqrt{3}$, es posible detenerse con x_5 y concluir $\sqrt{3} \approx 1.73205081$. ■

EJEMPLO 2 Aproximación a la raíz de una ecuación

Use el método de Newton para aproximar las raíces reales de $x^3 - x + 1 = 0$.

Solución Puesto que la ecuación dada es equivalente a $x^3 = x - 1$, en la FIGURA 4.10.3 se han graficado las funciones $y = x^3$ y $y = x - 1$. La figura debe convencerlo de que la ecuación

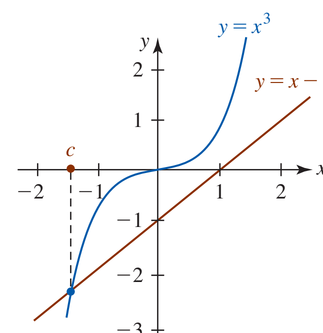


FIGURA 4.10.3 Gráficas de las funciones en el ejemplo 2

original sólo tiene una raíz real c; a saber, la coordenada x del punto de intersección de las dos gráficas. Luego, si $f(x) = x^3 - x + 1$, entonces $f'(x) = 3x^2 - 1$. Por tanto, (3) es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n + 1}{3x_n^2 - 1} \qquad \text{o bien,} \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 - 1}. \tag{5}$$

Si estamos interesados en tres y tal vez cuatro cifras decimales de precisión, usamos (5) para calcular $x_1, x_2, x_3, \ldots$ hasta que dos x_n consecutivas en la sucesión coincidan hasta en cuatro cifras decimales. También, la figura 4.10.3 pide que $x_0 = -1.5$ sea la conjetura inicial. En consecuencia,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2x_0^3 - 1}{3x_0^2 - 1} = \frac{2(-1.5)^3 - 1}{3(-1.5)^2 - 1} \approx -1.3478 \\ x_2 &= \frac{2x_1^3 - 1}{3x_1^2 - 1} \approx -1.3252 \\ x_3 &= \frac{2x_2^3 - 1}{3x_2^2 - 1} \approx -1.3247 \\ x_4 &= \frac{2x_3^3 - 1}{3x_3^2 - 1} \approx -1.3247. \end{aligned}$$

Por tanto, la raíz de la ecuación dada es aproximadamente $c \approx -1.3247$. ■

EJEMPLO 3 Aproximación de una raíz de una ecuación

Aproxime la primera raíz positiva de $2x = \tan x$.

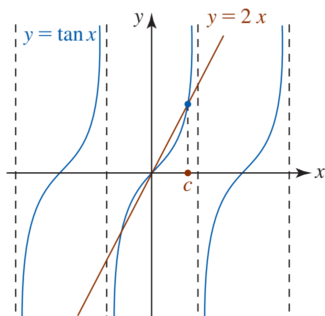


FIGURA 4.10.4 Gráficas de las funciones en el ejemplo 3

Solución En la FIGURA 4.10.4 se muestra que hay una infinidad de puntos de intersección de las gráficas de $y = 2x$ y $y = \tan x$. La primera coordenada x positiva correspondiente a un punto de intersección se indica por la letra c en la figura. Con $f(x) = 2x - \tan x$ y $f'(x) = 2 - \sec^2 x$, (3) se vuelve

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n - \tan x_n}{2 - \sec^2 x_n}.$$

Si en la utilización recursiva de la fórmula precedente usamos una calculadora, resulta mejor expresar la fórmula en términos de sen x y cos x:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n \cos^2 x_n - \operatorname{sen} x_n \cos x_n}{2\cos^2 x_n - 1}. \tag{6}$$

Puesto que la asíntota vertical de $y = \tan x$ a la derecha del eje y es $x = \pi/2 \approx 1.57$, a partir de la figura 4.10.4 se observa que la primera raíz positiva está próxima a $x_0 = 1$. Al usar esta conjetura inicial y colocar la calculadora en modo de radianes, (6) produce entonces

$$\begin{aligned} x_1 &\approx 1.310478 \\ x_2 &\approx 1.223929 \\ x_3 &\approx 1.176051 \\ x_4 &\approx 1.165927 \\ x_5 &\approx 1.165562 \\ x_6 &\approx 1.165561 \\ x_7 &\approx 1.165561. \end{aligned}$$

Concluimos que la primera raíz positiva es aproximadamente $c \approx 1.165561$. ■

El ejemplo 3 ilustra la importancia de la selección del valor inicial x_0. Usted debe comprobar que la elección $x_0 = \frac{1}{2}$ en (6) conduce a una sucesión de valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$ que converge a la única raíz evidente de $2x = \tan x$; a saber, $c = 0$.

Posdata: Un poco de historia El problema de encontrar una fórmula que exprese las raíces de una ecuación *polinomial* general de grado n-ésimo $f(x) = 0$ en términos de sus coeficientes

dejó perplejos a los matemáticos durante siglos. Sabemos que en el caso de una función polinomial de segundo grado, o función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde los coeficientes a, b y c son números reales, las raíces c_1 y c_2 de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ pueden encontrarse usando la fórmula cuadrática.

La solución al problema de encontrar raíces de una ecuación general de tercer grado, o función cúbica, suele atribuirse al matemático italiano **Nicolo Fontana** (1499-1557), también conocido como Tartaglia "el Tartamudo". Alrededor de 1540, el matemático italiano **Lodovico Farrari** (1522-1565) descubrió la fórmula algebraica para encontrar las raíces de la ecuación polinomial general de cuarto grado, o cuártica. Puesto que estas fórmulas son complicadas y difíciles de usar, rara ocasión se analizan en cursos elementales.


Niels Henrik Abel

Durante los siguientes 284 años nadie descubrió ninguna fórmula para encontrar las raíces de ecuaciones polinomiales de grado 5 o mayor. ¡Por una buena razón! En 1824, a la edad de 22 años, el matemático noruego **Niels Henrik Abel** (1802-1829) fue el primero en demostrar que es *imposible* encontrar fórmulas para las raíces de ecuaciones polinomiales generales de grado $n \geq 5$ en términos de sus coeficientes.

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

Hay problemas con el método de Newton.

i) Es necesario calcular $f'(x)$. Aunque no sobra decirlo, la forma de $f'(x)$ podría ser formidable cuando la ecuación $f(x) = 0$ es complicada.

ii) Si la raíz c de $f(x) = 0$ está próxima a un valor para el cual $f'(x) = 0$, entonces el denominador en (3) tiende a cero. Esto demanda el cálculo de $f(x_n)$ y $f'(x_n)$ hasta un grado superior de precisión. Para esto se requiere una computadora.

iii) Es necesario encontrar una ubicación aproximada de una raíz de $f(x) = 0$ antes de escoger a x_0. Concomitante a esto son las dificultades usuales para graficar. Pero, lo que es peor, la iteración de (3) *puede no converger* para una x_0 escogida de manera imprudente o a ciegas. En la FIGURA 4.10.5 se observa que x_2 está indefinida porque $f'(x_1) = 0$.

iv) Ahora, algunas buenas nuevas. A pesar de los problemas que acaban de analizarse, la ventaja más importante del método de Newton es que cuando converge a una raíz c de una ecuación $f(x) = 0$, suele no hacerlo de manera rápida. Puede demostrarse que en ciertas circunstancias, el método de Newton converge cuadráticamente; es decir, el error en cualquier paso en el cálculo no es mayor que un múltiplo constante del cuadrado del error en el paso precedente. En términos generales, esto significa que el número de cifras de precisión puede (aunque no necesariamente) duplicarse en cada paso.

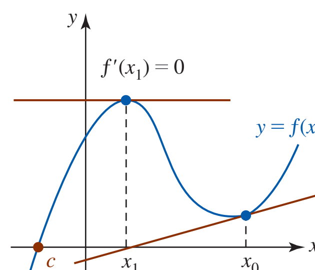


FIGURA 4.10.5 Si $f'(x_1) = 0$, entonces x_2 está indefinido

Ejercicios 4.10

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-17.

Fundamentos

En los problemas 1-6, determine gráficamente si la ecuación dada tiene raíces reales.

1. $x^3 = -2 + \operatorname{sen} x$ **2.** $x^3 - 3x = x^2 - 1$

3. $x^4 + x^2 - 2x + 3 = 0$ **4.** $\cot x = x$

5. $e^{-x} = x + 2$ **6.** $e^{-x} - 2\cos x = 0$

En los problemas 7-10, use el método de Newton para encontrar una aproximación para el número dado.

7. $\sqrt{10}$ **8.** $1 + \sqrt{5}$

9. $\sqrt[3]{4}$ **10.** $\sqrt[5]{2}$

En los problemas 11-16, use el método de Newton, de ser necesario, para encontrar aproximaciones a todas las raíces reales de la ecuación dada.

11. $x^3 = -x + 1$ **12.** $x^3 - x^2 + 1 = 0$

13. $x^4 + x^2 - 3 = 0$ **14.** $x^4 = 2x + 1$

15. $x^2 = \operatorname{sen} x$ **16.** $x + \cos x = 0$

17. Encuentre la intersección x más pequeña de la gráfica de $f(x) = 3\cos x + 4 \operatorname{sen} x$.

18. Considere la función $f(x) = x^5 + x^2$. Use el método de Newton para aproximar el menor número positivo para el cual $f(x) = 4$.

Aplicaciones

19. Una viga voladiza de 20 pies de longitud con una carga de 600 lb en su extremo se desvía por una cantidad $d = (60x^2 - x^3)/16\,000$, donde d se mide en pulgadas y x en pies. Vea la FIGURA 4.10.6. Use el método de Newton para aproximar el valor de x que corresponde a una desviación de 0.01 pulg.

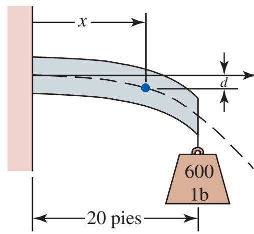


FIGURA 4.10.6 Viga en el problema 19

20. Una columna vertical cilíndrica sólida de radio fijo r que soporta su propio peso termina por flexionarse cuando aumenta su altura. Es posible demostrar que la altura máxima, o crítica, de tal columna es $h_{cr} = kr^{2/3}$, donde k es una constante y r se mide en metros. Use el método de Newton para aproximar el diámetro de una columna para la cual $h_{cr} = 10$ m y $k = 35$.

21. Un haz de luz que se origina en el punto P en el medio A, cuyo índice de refracción es n_1, choca contra la superficie del medio B, cuyo índice de refracción es n_2. Con base en la ley de Snell es posible demostrar que el haz se refracta de manera tangente a la superficie para el ángulo crítico que se determina a partir de sen $\theta_c = n_2/n_1$, $0 < \theta_c < 90°$. Para ángulos de incidencia mayores que el ángulo crítico, toda la luz se refleja internamente al medio A. Vea la FIGURA 4.10.7. Si $n_2 = 1$ para aire y $n_1 = 1.5$ para vidrio, use el método de Newton para aproximar θ_c en radianes.

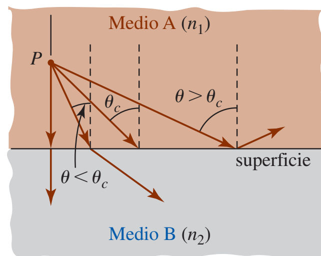


FIGURA 4.10.7 Refracción de la luz en el problema 21

22. Para un puente colgante, la longitud s de un cable entre dos soportes verticales cuya extensión es l (distancia horizontal) está relacionada con la flexión d del cable por

$$s = l + \frac{8d^2}{3l} - \frac{32d^4}{5l^3}.$$

Vea la FIGURA 4.10.8. Si $s = 404$ pies y $l = 400$ pies, use el método de Newton para aproximar la flexión. Redondee su respuesta a una cifra decimal.* [*Sugerencia*: La raíz c satisface $20 < c < 30$.]

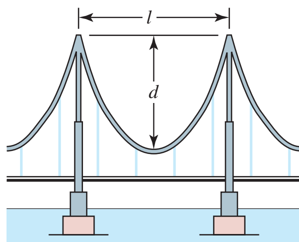


FIGURA 4.10.8 Puente colgante en el problema 22

23. Se vacía un bloque rectangular de acero para formar una tina de grosor uniforme t. Las dimensiones de la tina se muestran en la FIGURA 4.10.9*a*). Para que la tina flote en agua, como se muestra en la figura 4.10.9*b*), el peso del agua desplazada debe ser igual al peso de la tina (principio de Arquímedes). Si el peso específico del agua es 62.4 lb/pies^3 y el peso específico del acero es 490 lb/pies^3, entonces

peso del agua desplazada = 62.4 × (volumen del agua desplazada)

peso de la tina = 490 × (volumen de acero de la tina).

a) Demuestre que t satisface la ecuación

$$t^3 - 7t^2 + \frac{61}{4}t - \frac{1\,638}{1\,225} = 0.$$

b) Use el método de Newton para aproximar la máxima raíz positiva de la ecuación en el inciso *a*).

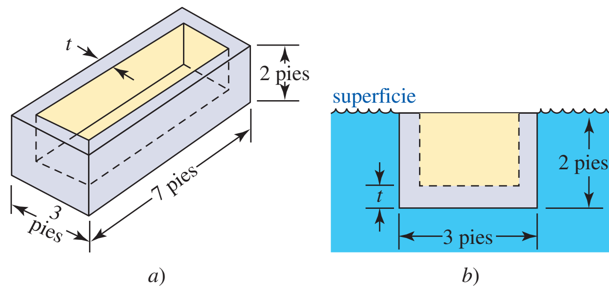


FIGURA 4.10.9 Tina flotante en el problema 23

24. Una banda metálica flexible de 10 m de longitud se dobla en forma de arco circular al asegurar los extremos entre sí por medio de un cable de 8 pies de longitud. Vea la FIGURA 4.10.10. Use el método de Newton para aproximar el radio r del arco circular.

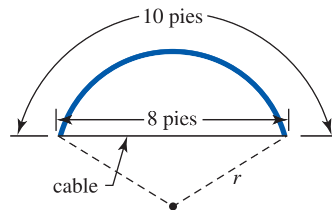


FIGURA 4.10.10 Banda metálica doblada en el problema 24

25. Dos extremos de una vía de ferrocarril de L pies de longitud se empujan ℓ pies a fin de acercarlos entre sí, de modo que la vía se dobla hacia arriba formando un arco de círculo de radio R. Vea la FIGURA 4.10.11. La pregunta es: ¿cuál es la altura h por arriba del nivel del suelo del punto más elevado sobre la vía?

a) Use la figura 4.10.11 para demostrar que

$$h = \frac{L(1 - \ell/L)^2\theta}{2\left(1 + \sqrt{1 - (1 - \ell/L)^2\theta^2}\right)},$$

donde $\theta > 0$ satisface sen $\theta = (1 - \ell/L)\theta$. [*Sugerencia*: En un sector circular, ¿cómo están relacionados la longitud de arco, el radio y el ángulo central?]

b) Si $L = 5\,280$ pies y $\ell = 1$ pie, use el método de Newton para aproximar θ y luego resuelva para el valor correspondiente de h.

* La fórmula para s en sí es sólo una aproximación.

c) Si ℓ/L y θ son muy pequeños, entonces $h \approx L\theta/4$ y sen $\theta \approx \theta - \frac{1}{6}\theta^3$. Use las dos aproximaciones para demostrar que $h \approx \sqrt{3\ell L/8}$. Use esta fórmula con $L = 5\,280$ pies y $\ell = 1$ pie, y luego compare con el resultado en el inciso *b*).

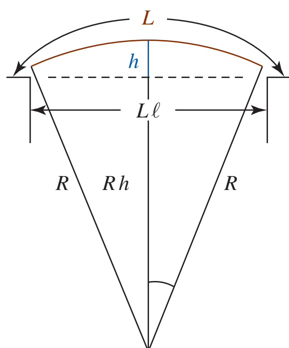


FIGURA 4.10.11 Vía de ferrocarril arqueada en el problema 25

26. En un taller de fundición una esfera metálica de radio 2 pies vuelve a fundirse como barra en forma de cilindro circular recto de 15 pies de longitud en el que se forma un hemisferio en un extremo. El radio r del hemisferio es el mismo que el radio de la base del cilindro. Use el método de Newton para aproximar r.

27. Una rueda redonda pero sin balancear de masa M y radio r está conectada por una cuerda y poleas sin fricción a una masa m, como se muestra en la FIGURA 4.10.12. O es el centro de la rueda y P es su centro de masa. Si la rueda se suelta desde el reposo, es posible demostrar que el ángulo θ al que la rueda se detiene en primera instancia satisface la ecuación

$$Mg\frac{r}{2}\operatorname{sen}\theta - mgr\theta = 0,$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Use el método de Newton para aproximar θ si la masa de la rueda es cuatro veces la masa m.

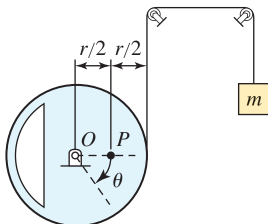


FIGURA 4.10.12 Rueda sin balancear en el problema 27

28. Dos escaleras de longitudes $L_1 = 40$ pies y $L_2 = 30$ pies se colocan contra dos muros verticales como se muestra en la FIGURA 4.10.13. La altura del punto donde las escaleras se cruzan es $h = 10$ pies.

a) Demuestre que la altura indicada x en la figura puede determinarse por medio de la ecuación

$$x^4 - 2hx^3 + (L_1^2 - L_2^2)x^2 - 2h(L_1^2 - L_2^2)x + h^2(L_1^2 - L_2^2) = 0.$$

b) Use el método de Newton para aproximar la solución de la ecuación en el inciso *a*). ¿Por qué tiene sentido escoger $x_0 \geq 10$?

c) Aproxime la distancia z entre los dos muros.

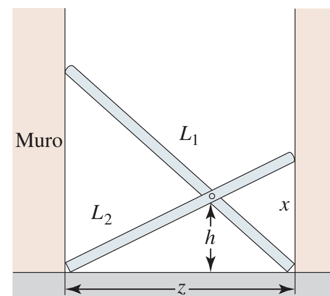


FIGURA 4.10.13 Escaleras en el problema 28

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 29 y 30, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada. Use el método de Newton para aproximar las raíces de $f(x) = 0$ que descubra a partir de la gráfica.

29. $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 8x - 8$

30. $f(x) = 4x^{12} + x^{11} - 4x^8 + 3x^3 + 2x^2 + x - 10$

31. ***a***) Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $f(x) = 0.5x^3 - x$ y $g(x) = \cos x$ en el mismo sistema de coordenadas.

b) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = f(x) - g(x)$, donde f y g se proporcionan en el inciso *a*).

c) Use las gráficas en el inciso *a*) o la gráfica en el inciso *b*) para determinar el número de raíces de la ecuación $0.5x^3 - x = \cos x$.

d) Use el método de Newton para aproximar las raíces de la ecuación en el inciso *c*).

≡ Piense en ello

32. Sea f una función diferenciable. Muestre que si $f(x_0) = -f(x_1)$ y $f'(x_0) = f'(x_1)$, entonces (3) implica $x_2 = x_0$.

33. Para la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{4 - x}, & x < 4 \\ \sqrt{x - 4}, & x \geq 4 \end{cases}$$

observe que $f(4) = 0$. Demuestre que para cualquier elección de x_0, el método de Newton no converge a la raíz. [*Sugerencia*: Vea el problema 32.]

Revisión del capítulo 4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-17.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-20, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. Si f es creciente sobre un intervalo, entonces $f'(x) > 0$ sobre el intervalo. _____

2. Una función f tiene un extremo en c cuando $f'(c) = 0$. _____

3. Una partícula en movimiento rectilíneo desacelera cuando su velocidad $v(t)$ disminuye. _____

4. Si la posición de una partícula en movimiento rectilíneo sobre una recta horizontal es $s(t) = t^2 - 2t$, entonces la partícula acelera para $t > 1$. _____

5. Si $f''(x) < 0$ para toda x en el intervalo (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre el intervalo. _____

6. Si $f''(c) = 0$, entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión. _____

7. Si $f(c)$ es un máximo relativo, entonces $f'(c) = 0$ y $f'(x) > 0$ para $x < c$ y $f'(x) < 0$ para $x > c$. _____

8. Si $f(c)$ es mínimo relativo, entonces $f''(c) > 0$. _____

9. Una función f que es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ tiene tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto sobre el intervalo. _____

10. Todo extremo absoluto también es un extremo relativo. _____

11. Si $c > 0$ es una constante y $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - cx^2$, entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión. _____

12. $x = 1$ es un número crítico de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. _____

13. Si $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ sobre un intervalo I, entonces $f + g$ es creciente sobre I. _____

14. Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo I, entonces $f''(x) > 0$ sobre I. _____

15. Un límite de la forma $\infty - \infty$ siempre tiene valor 0. _____

16. Un límite de la forma 1^∞ siempre es 1. _____

17. Un límite de la forma ∞/∞ es indeterminado. _____

18. Un límite de la forma $0/\infty$ es indeterminado. _____

19. Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ son ambos de la forma ∞/∞, entonces el primer límite no existe. _____

20. Para una forma indeterminada, la regla de L'Hôpital establece que el límite de un cociente es lo mismo que la derivada del cociente. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-10, llene los espacios en blanco.

1. Para una partícula que se mueve rectilíneamente, la aceleración es la primera derivada de __________.

2. La gráfica de un polinomio cúbico puede tener a lo sumo __________ punto(s) de inflexión.

3. Un ejemplo de una función $y = f(x)$ que es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty, 0)$, cóncava hacia abajo sobre $(0, \infty)$ y creciente sobre $(-\infty, \infty)$ es ________.

4. Dos números no negativos cuya suma es 8 tales que la suma de sus cuadrados es máximo son ________.

5. Si f es continua sobre $[a, b]$, diferenciable sobre (a, b) y $f(a) = f(b) = 0$, entonces en (a, b) existe algún c tal que $f'(c) =$ ________.

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} =$ para todo entero n.

7. La suma de un número positivo y su recíproco siempre es mayor que o igual a __________.

8. Si $f(1) = 13$ y $f'(x) = 5^{x^2}$, entonces una linealización de f en $a = 1$ es __________ y $f(1.1) \approx$ __________.

9. Si $y = x^2 - x$, entonces $\Delta y =$ __________.

10. Si $y = x^3 e^{-x}$, entonces $dy =$ __________.

C. Ejercicios

En los problemas 1-4, encuentre los extremos absolutos de la función dada sobre el intervalo indicado.

1. $f(x) = x^3 - 75x + 150; \quad [-3, 4]$

2. $f(x) = 4x^2 - \dfrac{1}{x}; \quad \left[\frac{1}{4}, 1\right]$

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 4}; \quad [-1, 3]$

4. $f(x) = (x^2 - 3x + 5)^{1/2}; \quad [1, 3]$

5. Trace la gráfica de una función continua que tenga las propiedades:

$$f(0) = 1, \quad f(2) = 3$$
$$f'(0) = 0, \quad f'(2) \text{ no existe}$$
$$f'(x) > 0, \quad x < 0$$
$$f'(x) > 0, \quad 0 < x < 2$$
$$f'(x) < 0, \quad x > 2.$$

6. Use las derivadas primera y segunda como ayuda para comparar las gráficas de

$$y = x + \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad y = x + \operatorname{sen} 2x.$$

7. La posición de una partícula que se mueve sobre una línea recta está dada por $s(t) = -t^3 + 6t^2$.

a) Grafique el movimiento sobre el intervalo de tiempo $[-1, 5]$.

b) ¿En qué instante la función velocidad es máxima?

c) ¿Corresponde este instante a la rapidez máxima?

8. La altura por arriba del nivel del suelo alcanzada por un proyectil disparado verticalmente es $s(t) = -4.9t^2 + 14.7t + 49$, donde s se mide en metros y t en segundos.

a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil?

b) ¿A qué velocidad choca el proyectil contra el suelo?

9. Suponga que f es una función polinomial con ceros de multiplicidad 2 en $x = a$ y $x = b$; es decir,

$$f(x) = (x - a)^2(x - b)^2 g(x)$$

donde g es una función polinomial.

a) Demuestre que f' tiene por lo menos tres ceros en el intervalo cerrado $[a, b]$.

b) Si $g(x)$ es constante, encuentre los ceros de f' en $[a, b]$.

10. Demuestre que la función $f(x) = x^{1/3}$ no satisface las hipótesis del teorema del valor medio sobre el intervalo $[-1, 8]$, aunque es posible encontrar un número c en $(-1, 8)$ tal que $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. Explique.

En los problemas 11-14, encuentre los extremos relativos de la función dada f. Grafique.

11. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

12. $f(x) = x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + 2$

13. $f(x) = 4x - 6x^{2/3} + 2$

14. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

En los problemas 15-18, encuentre los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función dada f. No grafique.

15. $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2$

16. $f(x) = x^6 - 3x^4 + 5$

17. $f(x) = 10 - (x - 3)^{1/3}$

18. $f(x) = x(x - 1)^{5/2}$

En los problemas 19-24, relacione cada figura con una o más de las siguientes afirmaciones. Sobre el intervalo correspondiente a la porción de la gráfica de $y = f(x)$ mostrada:

a) f tiene una primera derivada positiva.

b) f tiene una segunda derivada negativa.

c) La gráfica de f tiene un punto de inflexión.

d) f es diferenciable.

e) f tiene un extremo relativo.

f) Las pendientes de las rectas tangentes crecen cuando x crece.

19.

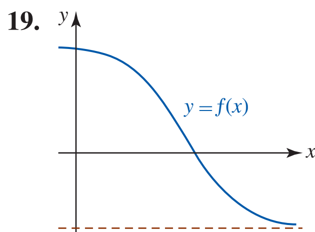


FIGURA 4.R.1 Gráfica para el problema 19

20.

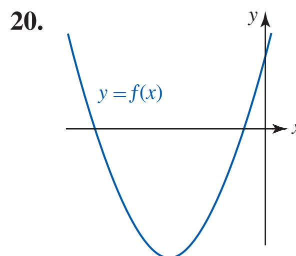


FIGURA 4.R.2 Gráfica para el problema 20

21.

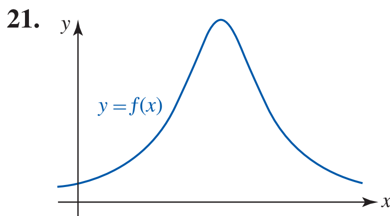


FIGURA 4.R.3 Gráfica para el problema 21

22.

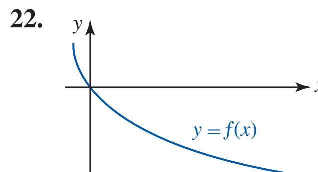


FIGURA 4.R.4 Gráfica para el problema 22

23.

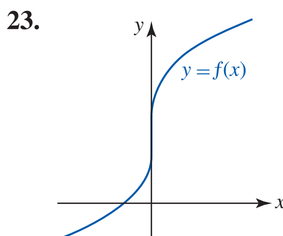


FIGURA 4.R.5 Gráfica para el problema 23

24.

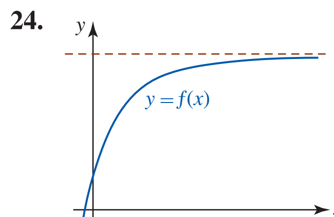


FIGURA 4.R.6 Gráfica para el problema 24

25. Sean a, b y c números reales. Encuentre la coordenada x del punto de inflexión para la gráfica de

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c).$$

26. Un triángulo se expande con el tiempo. El área del triángulo crece a razón de 15 pulg^2/min, mientras la longitud de su base decrece a razón de $\frac{1}{2}$ pulg/min. ¿A qué razón cambia la altura del triángulo cuando la altura mide 8 pulg y la base mide 6 pulg?

27. Un cuadrado está inscrito en un círculo de radio r, como se muestra en la FIGURA 4.R.7. ¿A qué razón cambia el área del cuadrado en el instante en que el radio del círculo mide 2 pulg y crece a razón de 4 pulg/min?

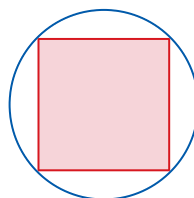


FIGURA 4.R.7 Círculo en el problema 27

28. De un tanque hemisférico de 10 m de radio gotea agua a razón de $\frac{1}{10}$ m^3/min, y ésta sale por un orificio en la parte inferior del tanque a razón de $\frac{1}{5}$ m^3/min. Es posible demostrar que el volumen del agua en el tanque en t es $V = 10\pi h^2 - (\pi/3)h^3$. Vea la FIGURA 4.R.8.

a) La profundidad del agua, ¿aumenta o disminuye?

b) ¿A qué razón cambia la profundidad del agua cuando la profundidad es de 5 m?

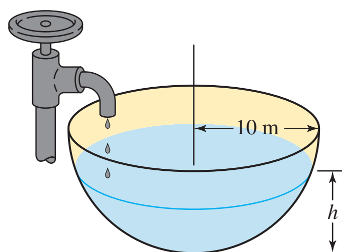


FIGURA 4.R.8 Tanque en el problema 28

29. Dos bobinas que conducen la misma corriente producen en el punto Q sobre el eje x un campo magnético de intensidad

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 r_0^2 I\left\{\left[r_0^2 + \left(x + \frac{1}{2}r_0\right)^2\right]^{-3/2} + \left[r_0^2 + \left(x - \frac{1}{2}r_0\right)^2\right]^{-3/2}\right\},$$

donde μ_0, r_0 e I son constantes. Vea la FIGURA 4.R.9. Demuestre que el valor máximo de B ocurre en $x = 0$.

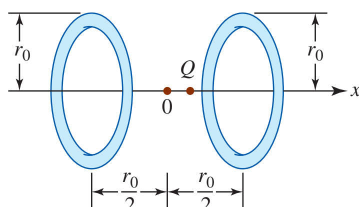


FIGURA 4.R.9 Bobinas en el problema 29

30. Una batería con fem constante E y resistencia interna constante r está conectada en serie con un resistor cuya resistencia es R. Entonces, la corriente en el circuito es $I = E/(r + R)$. Encuentre el valor de R para el que la potencia $P = RI^2$ disipada en la carga externa es máxima. Esto se denomina **comparación de impedancia**.

31. Cuando en el lado de un cilindro lleno de agua se perfora un orificio, la corriente resultante choca contra el piso a una distancia x de la base, donde $x = 2\sqrt{y(h - y)}$. Vea la FIGURA 4.R.10.

a) ¿En qué punto debe hacerse el orificio de modo que la corriente alcance una distancia máxima de la base?

b) ¿Cuál es la distancia máxima?

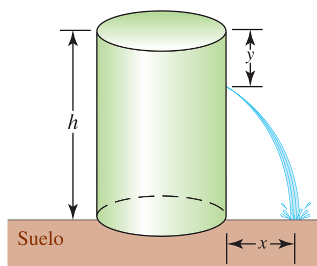


FIGURA 4.R.10 Tanque perforado en el problema 31

32. El área de un sector circular de radio r y longitud de arco s es $A = \frac{1}{2}rs$. Vea la FIGURA 4.R.11. Encuentre el área máxima de un sector limitado por un perímetro de 60 cm.

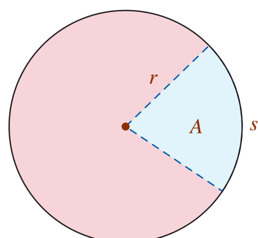


FIGURA 4.R.11 Sector circular en el problema 32

33. Un chiquero, junto a un granero, se delimita usando cerca en dos lados, como se muestra en la FIGURA 4.R.12. La cantidad de cerca que se usará mide 585 pies. Encuentre los valores de x y y indicados en la figura de modo que se delimite la mayor área.

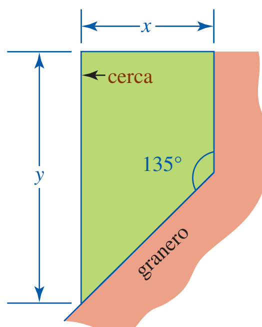


FIGURA 4.R.12 Chiquero en el problema 33

34. Un granjero desea usar 100 m de cerca para construir una valla diagonal que conecte dos muros que se encuentran en ángulo recto. ¿Cómo debe proceder el grajero de modo que el área limitada por los muros y la valla sea máxima?

35. Según el **principio de Fermat**, un rayo de luz que se origina en un punto A y se refleja en una superficie plana hacia el punto B recorre una trayectoria que requiere el menor tiempo. Vea la FIGURA 4.R.13. Suponga que la rapidez de la luz c, así como h_1, h_2 y d, son constantes. Demuestre que el tiempo es mínimo cuando $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$. Puesto que $0 < \theta_1 < \pi/2$ y $0 < \theta_2 < \pi/2$, se concluye que $\theta_1 = \theta_2$. En otras palabras, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. [*Nota*: La figura 4.R.13 es inexacta a propósito.]

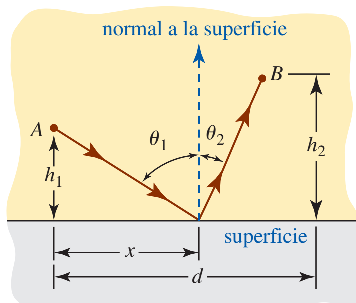


FIGURA 4.R.13 Rayos de luz reflejados en el problema 35

36. Determine las dimensiones de un cono circular recto que tiene volumen mínimo V que circunscribe una esfera de radio r. Vea la FIGURA 4.R.14. [*Sugerencia*: Use triángulos semejantes.]

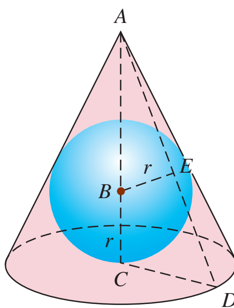


FIGURA 4.R.14 Esfera y cono en el problema 36

37. Un contenedor en forma de cilindro circular recto tiene un volumen de 100 pulg^3. La parte superior del contenedor cuesta tres veces por unidad de área que la parte inferior y los lados. Demuestre que la dimensión con que se obtiene el menor costo de construcción es una altura igual a cuatro veces el radio.

38. Se va a elaborar una caja con cubierta hecha de una pieza rectangular de cartón de 30 pulg de longitud y 15 pulg de ancho al cortar un cuadrado en un extremo del cartón y cortando un rectángulo de cada esquina del otro extremo, como se muestra en la FIGURA 4.R.15. Encuentre las dimensiones de la caja con que se obtiene el volumen máximo. ¿Cuál es el volumen máximo?

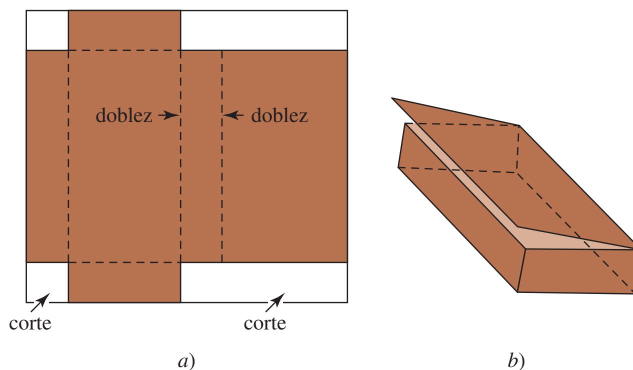


FIGURA 4.R.15 Caja en el problema 38

En los problemas 39-48, use la regla de L'Hôpital para encontrar el límite.

39. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{3} - \tan(\pi/x^2)}{x - \sqrt{3}}$

40. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{10\theta - 5\operatorname{sen} 2\theta}{10\theta - 2\operatorname{sen} 5\theta}$

41. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\cos\dfrac{1}{x} - e^{2/x}\right)$

42. $\lim\limits_{y\to 0}\left[\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{\ln(y+1)}\right]$

43. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(\operatorname{sen} t)^2}{\operatorname{sen} t^2}$

44. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(5x)}{e^{3x/2} - e^{-x/2}}$

45. $\lim\limits_{x\to 0^+} (3x)^{-1/\ln x}$

46. $\lim\limits_{x\to 0} (2x + e^{3x})^{4/x}$

47. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{x + e^{2x}}{1 + e^{4x}}\right)$

48. $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2$

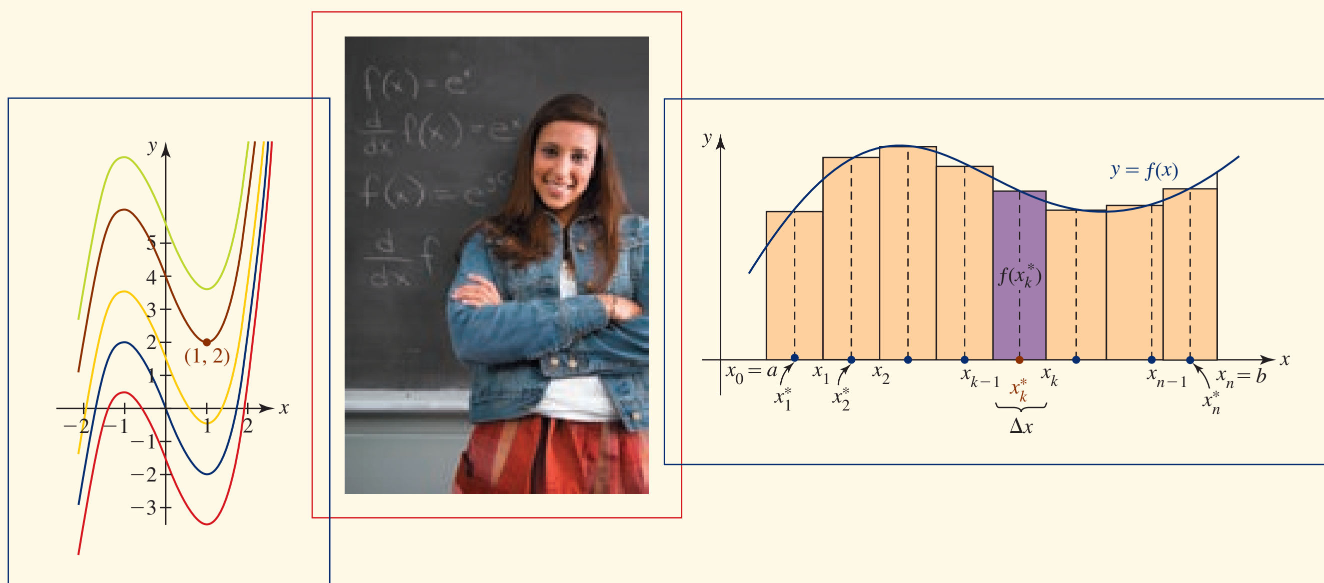
En los problemas 49 y 50, use el método de Newton para encontrar la raíz indicada. Aplique el método hasta que dos aproximaciones sucesivas coincidan hasta cuatro cifras decimales.

49. $x^3 - 4x + 2 = 0$, la raíz positiva más grande.

50. $\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$, la raíz positiva más pequeña.

Capítulo 5

Integrales



En este capítulo En los dos últimos capítulos analizamos las definiciones, propiedades y aplicaciones de la derivada. Ahora pasaremos del cálculo diferencial al cálculo integral. Leibniz denominó *calculus summatorius* a esta segunda de las dos divisiones más importantes del cálculo. En 1696, persuadido por el matemático suizo Johann Bernoulli, Leibniz cambió el nombre a *calculus integralis*. Como sugieren las palabras latinas originales, el concepto de *suma* desempeña un papel importante en el desarrollo completo de la integral.

En el capítulo 2 vimos que el problema de la tangente conduce de manera natural a la derivada de una función. En el problema de área, el problema motivacional del cálculo integral, deseamos encontrar el área acotada por la gráfica de una función y el eje *x*. Este problema lleva al concepto de *integral definida*.

5.1 La integral indefinida

Introducción En los capítulos 3 y 4 sólo abordamos el problema básico:

- Dada una función f, encontrar su derivada f'.

En este capítulo y en los subsecuentes veremos cuán importante es el problema de:

- Dada una función f, encontrar una función F cuya derivada sea f.

En otras palabras, para una función dada f, ahora pensamos en f como una derivada. Deseamos encontrar una función F cuya derivada sea f; es decir, $F'(x) = f(x)$ para toda x en algún intervalo. Planteado en términos generales, es necesario diferenciar en reversa.

Empezamos con una definición.

Definición 5.1.1 Antiderivada

Se dice que un función F es una **antiderivada** de una función f sobre algún intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

EJEMPLO 1 Una antiderivada

Una antiderivada de $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2$, puesto que $F'(x) = 2x$. ■

Una función siempre tiene más de una antiderivada. Así, en el ejemplo anterior, $F_1(x) = x^2 - 1$ y $F_2(x) = x^2 + 10$ también son antiderivadas de $f(x) = 2x$, puesto que $F_1'(x) = F_2'(x) = 2x$.

A continuación demostraremos que cualquier antiderivada de f debe ser de la forma $G(x) = F(x) + C$; es decir, *dos antiderivadas de la misma función pueden diferir a lo más en una constante*. Por tanto, $F(x) + C$ es *la antiderivada más general* de $f(x)$.

Teorema 5.1.1 Las antiderivadas difieren por una constante

Si $G'(x) = F'(x)$ para toda x en algún intervalo $[a, b]$, entonces

$$G(x) = F(x) + C$$

para toda x en el intervalo.

DEMOSTRACIÓN Suponga que se define $g(x) = G(x) - F(x)$. Entonces, puesto que $G'(x) = F'(x)$, se concluye que $g'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$. Si x_1 y x_2 son dos números cualesquiera que satisfacen $a \le x_1 < x_2 \le b$, por el teorema del valor medio (teorema 4.4.2) se concluye que en el intervalo abierto (x_1, x_2) existe un número k para el cual

$$g'(k) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad \text{o} \qquad g(x_2) - g(x_1) = g'(k)(x_2 - x_1).$$

Pero $g'(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$; en particular, $g'(k) = 0$. Por tanto, $g(x_2) - g(x_1) = 0$ o $g(x_2) = g(x_1)$. Luego, por hipótesis, x_1 y x_2 son dos números arbitrarios, pero diferentes, en el intervalo. Puesto que los valores funcionales $g(x_1)$ y $g(x_2)$ son iguales, debe concluirse que la función $g(x)$ es una constante C. Por tanto, $g(x) = C$ implica $G(x) - F(x) = C$ o $G(x) = F(x) + C$. ■

La notación $F(x) + C$ representa una *familia de funciones*; cada miembro tiene una derivada igual a $f(x)$. Volviendo al ejemplo 1, la antiderivada más general de $f(x) = 2x$ es la familia $F(x) = x^2 + C$. Como se ve en la FIGURA 5.1.1, la gráfica de la antiderivada de $f(x) = 2x$ es una traslación vertical de la gráfica de x^2.

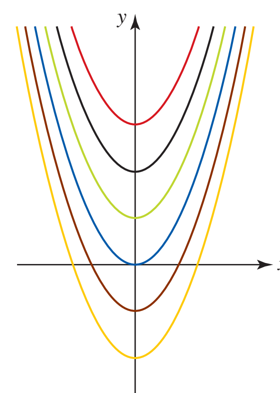


FIGURA 5.1.1 Algunos miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = 2x$

EJEMPLO 2 Antiderivadas más generales

a) Una antiderivada de $f(x) = 2x + 5$ es $F(x) = x^2 + 5x$ puesto que $F'(x) = 2x + 5$. La antiderivada más general de $f(x) = 2x + 5$ es $F(x) = x^2 + 5x + C$.

b) Una antiderivada de $f(x) = \sec^2 x$ es $F(x) = \tan x$ puesto que $F'(x) = \sec^2 x$. La antiderivada más general de $f(x) = \sec^2 x$ es $F(x) = \tan x + C$. ■

Notación de la integral indefinida Por conveniencia, se introducirá la notación para una antiderivada de una función. Si $F'(x) = f(x)$, la antiderivada más general de f se representa por

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

El símbolo $\int$ fue introducido por Leibniz y se denomina **signo integral**. La notación $\int f(x)\, dx$ se denomina **integral indefinida** de $f(x)$ respecto a x. La función $f(x)$ se denomina **integrando**. El proceso de encontrar una antiderivada se denomina **antidiferenciación** o **integración**. El número C se denomina **constante de integración**. Justo como $\frac{d}{dx}(\ )$ denota la operación de diferenciación de ( ) *con respecto a* x, el simbolismo $\int(\ )\, dx$ denota la operación de integración de ( ) *con respecto a* x.

La diferenciación y la integración son fundamentalmente operaciones inversas. Si $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, entonces F es la antiderivada de f; es decir, $F'(x) = f(x)$ y así

$$\int F'(x)\, dx = F(x) + C. \tag{1}$$

Además,
$$\frac{d}{dx}\int f(x)\, dx = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = F'(x) = f(x) \tag{2}$$

En palabras, (1) y (2) son, respectivamente:

- Una antiderivada de la derivada de una función es esa función más una constante.
- La derivada de una antiderivada de una función es esa función.

A partir de lo anterior se concluye que siempre que se obtiene la derivada de una función, al mismo tiempo se obtiene una fórmula de integración. Por ejemplo, debido a (1), si

$$\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1}\, dx = \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

Este primer resultado sólo es válido si $n \neq -1$.

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\ln|x|\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x\, dx = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C,$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\tan^{-1} x\, dx = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \tan^{-1} x + C.$$

De esta manera es posible construir una fórmula de integración a partir de cada fórmula de derivada. En la TABLA 5.1.1 se resumen *algunas* fórmulas de derivadas importantes para las funciones que se han estudiado hasta el momento, así como sus fórmulas de integración análogas.

TABLA 5.1.1

Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración	Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración
1. $\frac{d}{dx}x = 1$	$\int dx = x + C$	**10.** $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}x + C$
2. $\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n (n \neq -1)$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	**11.** $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x + C$
3. $\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	**12.** $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}\lvert x\rvert + C$
4. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	**13.** $\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$, $(b > 0, b \neq 1)$	$\int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$
5. $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	**14.** $\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
6. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	**15.** $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$	$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$
7. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	**16.** $\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$	$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$
8. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x$	$\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + C$		
9. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cot x$	$\int \csc x\cot x\,dx = -\csc x + C$		

Con respecto a la entrada 3 de la tabla 5.1.1, es cierto que las fórmulas de derivadas

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d}{dx}\frac{\log_b x}{\ln b} = \frac{1}{x}$$

significan que *una* antiderivada de $1/x = x^{-1}$ puede tomarse como $\ln x$, $x > 0$, $\ln\lvert x\rvert$, $x \neq 0$, o $\log_b x/\ln b$, $x > 0$. Pero como resultado más general y útil escribimos

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C.$$

Observe también que en la tabla 5.1.1 sólo se proporcionan tres fórmulas que implican funciones trigonométricas inversas. Esto se debe a que, en forma de integral indefinida, las tres fórmulas restantes son redundantes. Por ejemplo, de las derivadas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

observamos que es posible tomar

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}x + C \quad \text{o} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\cos^{-1}x + C.$$

Observaciones semejantes se cumplen para la cotangente inversa y la cosecante inversa.

EJEMPLO 3 Una antiderivada simple pero importante

La fórmula de integración en la entrada 1 en la tabla 5.1.1 se incluye para recalcar:

$$\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C \quad \text{ya que} \quad \frac{d}{dx}(x + C) = 1 + 0 = 1.$$

Este resultado también puede obtenerse a partir de la fórmula de integración 2 de la tabla 5.1.1 con $n = 0$. ■

A menudo es necesario volver a escribir el integrando $f(x)$ antes de realizar la integración.

EJEMPLO 4 Cómo volver a escribir un integrando

Evalúe

a) $\int \frac{1}{x^5}\,dx$ y ***b)*** $\int \sqrt{x}\,dx$.

Solución

a) Al volver a escribir $1/x^5$ como x^{-5} e identificar $n = -5$, por la fórmula de integración 2 de la tabla 5.1.1 tenemos:

$$\int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = -\frac{x^{-4}}{4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C.$$

b) Primero volvemos a escribir el radical $\sqrt{x}$ como $x^{1/2}$ y luego se usa la fórmula de integración 2 de la tabla 5.1.1 con $n = \frac{1}{2}$:

$$\int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C. \quad ■$$

Debe tomarse en cuenta que los *resultados de la integración siempre pueden comprobarse por diferenciación*; por ejemplo, en el inciso *b*) del ejemplo 4:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + C\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{3/2-1} = x^{1/2} = \sqrt{x}.$$

En el siguiente teorema se proporcionan algunas propiedades de la integral indefinida.

Teorema 5.1.2 Propiedades de la integral indefinida

Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Entonces

i) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx = kF(x) + C$, donde k es cualquier constante,

ii) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx = F(x) \pm G(x) + C.$

Estas propiedades se concluyen de inmediato a partir de las propiedades de la derivada. Por ejemplo, *ii*) es una consecuencia del hecho de que la derivada de una suma es la suma de las derivadas.

Observe en el teorema 5.1.2*ii*) que no hay razón para usar dos constantes de integración, puesto que

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2)$$
$$= F(x) \pm G(x) + (C_1 \pm C_2) = F(x) \pm G(x) + C,$$

donde $C_1 \pm C_2$ se ha sustituido por la simple constante C.

Una integral indefinida de cualquier suma infinita de funciones la podemos obtener al integrar cada término.

EJEMPLO 5 Uso del teorema 5.1.2

Evalúe $\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5\,\text{sen}\,x\right)dx.$

Solución Por los incisos *i*) y *ii*) del teorema 5.1.2, esta integral indefinida puede escribirse como tres integrales:

$$\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5\,\text{sen}\,x\right)dx = 4\int x\,dx - 2\int \frac{1}{x}\,dx + 5\int \text{sen}\,x\,dx.$$

Debido a las fórmulas de integración 2, 3 y 5 en la tabla 5.1.1, entonces tenemos

$$\int\left(4x - \frac{2}{x} + 5\,\text{sen}\,x\right)dx = 4\cdot\frac{x^2}{2} - 2\cdot\ln|x| + 5\cdot(-\cos x) + C$$
$$= 2x^2 - 2\ln|x| - 5\cos x + C. \quad ■$$

Uso de la división Escribir un integrando en forma más manejable algunas veces conlleva a una división. La idea se ilustra con los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 6 División término por término

Evalúe $\displaystyle\int \frac{6x^3 - 5}{x}\,dx.$

Si el concepto de común denominador

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

se lee de derecha a izquierda, se está realizando "división término por término".

Solución Por la división término por término, el teorema 5.1.2 y las fórmulas de integración 2 y 3 de la tabla 5.1.1 tenemos:

$$\int \frac{6x^3 - 5}{x}\,dx = \int\left(\frac{6x^3}{x} - \frac{5}{x}\right)dx$$
$$= \int\left(6x^2 - \frac{5}{x}\right)dx = 6\cdot\frac{x^3}{3} - 5\cdot\ln|x| + C = 2x^3 - 5\ln|x| + C. \quad ■$$

Para resolver el problema de evaluar $\int f(x)\,dx$, donde $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional, a continuación se resume una regla práctica que debe tomarse en cuenta en esta subsección y en la subsección subsecuente.

Integración de una función racional

Suponga que $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional. Si el grado de la función polinomial $p(x)$ es mayor que o igual al grado de la función polinomial $q(x)$, use división larga antes de integrar; es decir, escriba

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \text{un polinomio} + \frac{r(x)}{q(x)},$$

donde el grado del polinomio $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$.

EJEMPLO 7 División larga

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2}{1 + x^2}\,dx.$

Solución Puesto que el grado del numerador del integrando es igual al grado del denominador, se efectúa la división larga:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Por *ii*) del teorema 5.1.2 y las fórmulas de integración 1 y 11 en la tabla 5.1.1 obtenemos

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = x - \tan^{-1}x + C. \quad ■$$

Ecuaciones diferenciales En varios conjuntos de ejercicios en el capítulo 3 se pide comprobar que una función dada satisface una **ecuación diferencial**. En términos generales, una ecuación diferencial es una ecuación que implica las derivadas o el diferencial de una función desconocida. Las ecuaciones diferenciales se clasifican según el **orden** de la derivada más alta que

aparece en la ecuación. El objetivo consiste en *resolver* ecuaciones diferenciales. Una **ecuación diferencial de primer orden** de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{3}$$

puede resolverse usando integración indefinida. Por (1) se ve que

$$\int \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = y.$$

Así, la solución de (3) es la antiderivada más general de g; es decir,

$$y = \int g(x)\, dx. \tag{4}$$

EJEMPLO 8 Resolución de una ecuación diferencial

Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica pase por el punto (1, 2) y también satisfaga la ecuación diferencial $dy/dx = 3x^2 - 3$.

Solución Por (3) y (4) se concluye que si

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 \qquad \text{entonces} \qquad y = \int (3x^2 - 3)\, dx.$$

Es decir,

$$y = \int (3x^2 - 3)\, dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot x + C$$

o bien, $y = x^3 - 3x + C$. Así, cuando $x = 1$, $y = 2$, de modo que $2 = 1 - 3 + C$ o $C = 4$. Por tanto, $y = x^3 - 3x + 4$. Entonces, de la familia de antiderivadas de $3x^2 - 3$ que se muestra en la FIGURA 5.1.2, se ve que sólo hay una cuya gráfica (mostrada en rojo) que pasa por (1, 2). ■

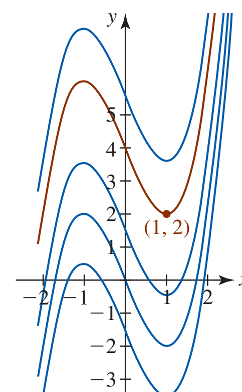


FIGURA 5.1.2 La curva roja es la gráfica de la solución del problema en el ejemplo 8

Al resolver una ecuación diferencial como $dy/dx = 3x^2 - 3$ en el ejemplo 8, la condición lateral especificada de que la gráfica pase por (1, 2), es decir, $f(1) = 2$, se denomina **condición inicial**. Una condición inicial como ésta suele escribirse como $y(1) = 2$. La solución $y = x^3 - 3x + 4$ que fue determinada por la familia de soluciones $y = x^3 - 3x + C$ por la condición inicial se denomina **solución particular**. El problema de resolver (3) sujeto a una condición inicial,

$$\frac{dy}{dx} = g(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

se denomina **problema con valor inicial**.

Observamos que una ecuación diferencial de orden n-ésimo de la forma $d^ny/dx^n = g(x)$ puede resolverse al integrar n veces consecutivas la función $g(x)$. En este caso, la familia de soluciones contiene n constantes de integración.

EJEMPLO 9 Resolución de una ecuación diferencial

Encuentre una función $y = f(x)$ tal que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1.$

Solución La ecuación diferencial dada se integra dos veces consecutivas. Con la primera integración se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2y}{dx^2}\, dx = \int 1 \cdot dx = x + C_1.$$

Con la segunda integración se obtiene $y = f(x)$:

$$y = \int \frac{dy}{dx}\, dx = \int (x + C_1)\, dx = \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$ ■

NOTAS DESDE EL AULA

A menudo, a los estudiantes se les dificulta más calcular antiderivadas que derivadas. Dos palabras de advertencia. Primero, debe tenerse mucho cuidado con el procedimiento algebraico, especialmente con las leyes de los exponentes. La segunda advertencia ya se ha planteado, aunque vale la pena repetirla: tenga en cuenta que *los resultados de la integración indefinida siempre pueden comprobarse*. En un cuestionario o en un examen vale la pena que dedique unos minutos de su valioso tiempo para comprobar su respuesta al tomar la derivada. A veces esto puede hacerse mentalmente. Por ejemplo,

integración

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

compruebe por diferenciación

Ejercicios 5.1 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-18.

Fundamentos

En los problemas 1-30, evalúe la integral indefinida dada.

1. $\int 3\,dx$

2. $\int (\pi^2 - 1)\,dx$

3. $\int x^5\,dx$

4. $\int 5x^{1/4}\,dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

6. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

7. $\int (1 - t^{-0.52})\,dt$

8. $\int 10w\sqrt{w}\,dw$

9. $\int (3x^2 + 2x - 1)\,dx$

10. $\int \left(2\sqrt{t} - t - \frac{9}{t^2}\right) dt$

11. $\int \sqrt{x}(x^2 - 2)\,dx$

12. $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{s^2}} + \frac{2}{\sqrt{s^3}}\right) ds$

13. $\int (4x + 1)^2\,dx$

14. $\int (\sqrt{x} - 1)^2\,dx$

15. $\int (4w - 1)^3\,dw$

16. $\int (5u - 1)(3u^3 + 2)\,du$

17. $\int \frac{r^2 - 10r + 4}{r^3}\,dr$

18. $\int \frac{(x + 1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

19. $\int \frac{x^{-1} - x^{-2} + x^{-3}}{x^2}\,dx$

20. $\int \frac{t^3 - 8t + 1}{(2t)^4}\,dt$

21. $\int (4 \operatorname{sen} x - 1 + 8x^{-5})\,dx$

22. $\int (-3 \cos x + 4 \sec^2 x)\,dx$

23. $\int \csc x(\csc x - \cot x)\,dx$

24. $\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\,dt$

25. $\int \frac{2 + 3 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

26. $\int \left(40 - \frac{2}{\sec \theta}\right) d\theta$

27. $\int (8x + 1 - 9e^x)\,dx$

28. $\int (15x^{-1} - 4 \operatorname{senh} x)\,dx$

29. $\int \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 4}{1 + x^2}\,dx$

30. $\int \frac{x^6}{1 + x^2}\,dx$

En los problemas 31 y 32, use una identidad trigonométrica para evaluar la integral indefinida dada.

31. $\int \tan^2 x\,dx$

32. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$

En los problemas 33-40, use diferenciación y la regla de la cadena para comprobar el resultado de integración dado.

33. $\int \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}\,dx = \sqrt{2x + 1} + C$

34. $\int (2x^2 - 4x)^9(x - 1)\,dx = \frac{1}{40}(2x^2 - 4x)^{10} + C$

35. $\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + C$

36. $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$

37. $\int x \operatorname{sen} x^2\,dx = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

38. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx = -\frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 x} + C$

39. $\int \ln x\,dx = x \ln x - x + C$

40. $\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C$

En los problemas 41 y 42, efectúe las operaciones indicadas.

41. $\frac{d}{dx}\int (x^2 - 4x + 5)\,dx$

42. $\int \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 5)\,dx$

En los problemas 43-48, resuelva la ecuación diferencial dada.

43. $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2 + 9$

44. $\dfrac{dy}{dx} = 10x + 3\sqrt{x}$

45. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2}$

46. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2 + x)^2}{x^5}$

47. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - 2x + \operatorname{sen} x$

48. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

49. Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica pase por el punto (2, 3) y que también satisfaga la ecuación diferencial $dy/dx = 2x - 1$.

50. Encuentre una función $y = f(x)$ de modo quel $dy/dx = 1/\sqrt{x}$ y $f(9) = 1$.

51. Si $f''(x) = 2x$, encuentre $f'(x)$ y $f(x)$.

52. Encuentre una función f tal que $f''(x) = 6$, $f'(-1) = 2$ y $f(-1) = 0$.

53. Encuentre una función f tal que $f''(x) = 12x^2 + 2$ para la cual la pendiente de la recta tangente a su gráfica en (1, 1) es 3.

54. Si $f^{(n)}(x) = 0$, ¿cuál es f?

En los problemas 55 y 56, la gráfica de la función f se muestra en azul. De las gráficas de las funciones F, G y H cuyas gráficas se muestran en negro, verde y rojo, respectivamente, ¿cuál función es la gráfica de una antiderivada de f? Justifique su razonamiento.

55.

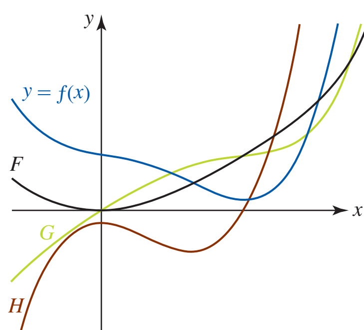


FIGURA 5.1.3 Gráficas para el problema 55

56.

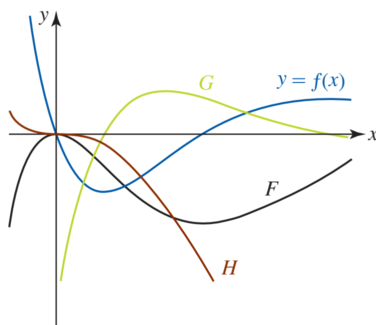


FIGURA 5.1.4 Gráficas para el problema 56

≡ Aplicaciones

57. Un cubo que contiene un líquido gira alrededor de un eje vertical a velocidad angular constante ω. La forma de la sección transversal del líquido giratorio en el plano xy está determinada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g}x.$$

Con ejes de coordenadas como se muestra en la FIGURA 5.1.5, encuentre $y = f(x)$.

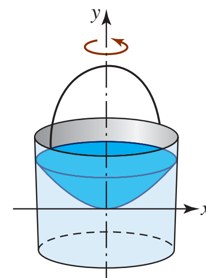


FIGURA 5.1.5 Cubo en el problema 57

58. Los extremos de una viga de longitud L están sobre dos soportes como se muestra en la FIGURA 5.1.6. Con una carga uniforme sobre la viga, su forma (o curva elástica) está determinada a partir de

$$EIy'' = \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2,$$

donde E, I y q son constantes. Encuentre $y = f(x)$ si $f(0) = 0$ y $f'(L/2) = 0$.

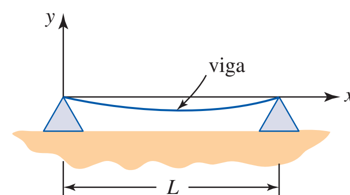


FIGURA 5.1.6 Viga en el problema 58

≡ Piense en ello

En los problemas 59 y 60, determine f.

59. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \ln|\ln x| + C$

60. $\displaystyle\int f(x)\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

61. Encuentre una función f tal que $f'(x) = x^2$ y $y = 4x + 7$ sea una recta tangente a la gráfica de f.

62. Simplifique la expresión $e^{4\int dx/x}$ tanto como sea posible.

63. Determine cuál de los dos resultados siguientes es correcto:

$$\int (x + 1)^3\,dx = \frac{1}{4}(x + 1)^4 + C$$

o

$$\int (x + 1)^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C.$$

64. Dado que $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}\pi x = \pi\cos\pi x$, encuentre una antiderivada F de $\cos\pi x$ que tenga la propiedad de que $F(\tfrac{3}{2}) = 0$.

5.2 Integración por sustitución *u*

Introducción En la última sección se analizó el hecho de que para cada fórmula para la derivada de una función hay una fórmula de antiderivada o integral indefinida correspondiente. Por ejemplo, al interpretar cada una de las funciones

$$x^n \quad (n \neq -1), \qquad x^{-1} \qquad \text{y} \qquad \cos x$$

como una antiderivada, se encuentra que la "reversa de la derivada" correspondiente es una familia de antiderivadas:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C. \tag{1}$$

Revise la sección 4.9

En la siguiente exposición se analiza la "reversa de la regla de la cadena". En este análisis, el concepto de **diferencial** de una función desempeña un papel importante. Recuerde que si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces su diferencial es $du = g'(x)\,dx$.

Se empieza con un ejemplo.

Potencia de una función Si deseamos encontrar una función F tal que

$$\int (5x+1)^{1/2}\,dx = F(x) + C,$$

debemos tener

$$F'(x) = (5x+1)^{1/2}.$$

Al razonar "hacia atrás", podemos argumentar que para obtener $(5x+1)^{1/2}$ necesitamos haber diferenciado $(5x+1)^{3/2}$. Entonces, parecería que es posible proceder como en la primera fórmula en (1); a saber: incrementar la potencia por 1 y dividir entre la nueva potencia:

$$\int (5x+1)^{1/2}\,dx = \frac{(5x+1)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}(5x+1)^{3/2} + C. \tag{2}$$

Lamentablemente, la "respuesta" en (2) no concuerda, puesto que con la regla de la cadena, en la forma de la regla de potencias para funciones, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}(5x+1)^{3/2} + C\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(5x+1)^{1/2}\cdot 5 = 5(5x+1)^{1/2} \neq (5x+1)^{1/2}. \tag{3}$$

Para tomar en cuenta el factor 5 faltante en (2) usamos el teorema 5.1.2*i*) y un poco de perspicacia:

$$\begin{aligned}
\int (5x+1)^{1/2}\,dx &= \int (5x+1)^{1/2}\boxed{\frac{1}{5}\cdot 5}\,dx &&\leftarrow \frac{5}{5} = 1\\
&= \frac{1}{5}\int \boxed{(5x+1)^{1/2}\,5}\,dx &&\leftarrow \text{derivada de } \frac{2}{3}(5x+1)^{3/2}\\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}(5x+1)^{3/2} + C &&\leftarrow \text{por (3)}\\
&= \frac{2}{15}(5x+1)^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

Ahora, usted debe comprobar por diferenciación que la última función es, en efecto, una antiderivada de $(5x+1)^{1/2}$.

La clave para evaluar integrales indefinidas como

$$\int (5x+1)^{1/2}\,dx, \qquad \int \frac{x}{(4x^2+3)^6}\,dx \qquad \text{y} \qquad \int \operatorname{sen} 10x\,dx \tag{4}$$

reside en el *reconocimiento* de que los integrandos en (4),

$$(5x+1)^{1/2}, \qquad \frac{x}{(4x^2+3)^6} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} 10x$$

son resultado de diferenciar una función compuesta por medio de la regla de la cadena. Para hacer este reconocimiento es útil realizar una sustitución en una integral indefinida.

Teorema 5.2.1 Regla de la sustitución u

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I, f es una función continua sobre I y F es una antiderivada de f sobre I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du. \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x)$$

y entonces por la definición de antiderivada tenemos

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Puesto que F es un antiderivada de f, es decir, si $F' = f$, entonces la línea precedente se vuelve

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du = \int f(u)\,du. \tag{6}$$ ■

La interpretación del resultado en (6) y su resumen en (5) es sutil. En la sección 5.1, el símbolo dx se usó simplemente como un indicador de que la integración es con respecto a la variable x. En (6) observamos que es permisible interpretar dx y du como *diferenciales*.

Uso de la sustitución u La idea básica consiste en poder reconocer una integral indefinida en una variable x (como la proporcionada en (4)) que sea la reversa de la regla de la cadena al convertirla en una integral indefinida diferente en la variable u por medio de la sustitución $u = g(x)$. Por conveniencia, a continuación se enumeran algunas directrices para evaluar $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ al efectuar una sustitución u.

Directrices para efectuar una sustitución u

i) En la integral $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ identifique las funciones $g(x)$ y $g'(x)\,dx$.
ii) Exprese la integral *totalmente* en términos del símbolo u al sustituir u y du por $g(x)$ y $g'(x)\,dx$ respectivamente. En su sustitución no debe haber variables x; déjelas en la integral.
iii) Efectúe la integración con respecto a la variable u.
iv) Finalmente, vuelva a sustituir $g(x)$ por el símbolo u.

Integral indefinida de la potencia de una función La derivada de la potencia de una función era un caso especial de la regla de la cadena. Recuerde que si $F(x) = x^{n+1}/(n+1)$, donde n es un número real, $n \neq -1$ y si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$F(g(x)) = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}F(g(x)) = [g(x)]^n g'(x).$$

Entonces, por el teorema 5.2.1 de inmediato se deduce que

$$\int [g(x)]^n g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C. \tag{7}$$

En términos de sustituciones

$$u = g(x) \qquad \text{y} \qquad du = g'(x)\,dx,$$

(7) puede resumirse como sigue:

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1. \tag{8}$$

En el siguiente ejemplo se evalúa la segunda de las tres integrales indefinidas en (4).

EJEMPLO 1 Uso de (8)

Evalúe $\int \frac{x}{(4x^2+3)^6}\,dx$.

Solución La integral vuelve a escribirse como

$$\int (4x^2+3)^{-6}x\,dx$$

y se hace la identificación

$$u = 4x^2+3 \qquad \text{y} \qquad du = 8x\,dx.$$

Luego, para obtener la forma precisa $\int u^{-6}\,du$ es necesario ajustar el integrando al multiplicar y dividir entre 8:

$$\begin{aligned}\int (4x^2+3)^{-6}x\,dx &= \frac{1}{8}\int \overbrace{(4x^2+3)^{-6}}^{u^{-6}}\overbrace{(8x\,dx)}^{du} && \leftarrow \text{sustitución}\\ &= \frac{1}{8}\int u^{-6}\,du && \leftarrow \text{ahora use (8)}\\ &= \frac{1}{8}\cdot\frac{u^{-5}}{-5}+C\\ &= -\frac{1}{40}(4x^2+3)^{-5}+C. && \leftarrow \text{otra sustitución}\end{aligned}$$

Comprobación por diferenciación: Por la regla de potencias para funciones,

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{40}(4x^2+3)^{-5}+C\right] = \left(-\frac{1}{40}\right)(-5)(4x^2+3)^{-6}(8x) = \frac{x}{(4x^2+3)^6}.$$ ■

EJEMPLO 2 Uso de (8)

Evalúe $\int (2x-5)^{11}\,dx$.

Solución Si $u = 2x - 5$, entonces $du = 2\,dx$. La integral se ajusta al multiplicar y dividir entre 2 para obtener la forma correcta de la diferencial du:

$$\begin{aligned}\int (2x-5)^{11}\,dx &= \frac{1}{2}\int \overbrace{(2x-5)^{11}}^{u^{11}}\overbrace{(2\,dx)}^{du} && \leftarrow \text{sustitución}\\ &= \frac{1}{2}\int u^{11}du && \leftarrow \text{ahora use (8)}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{12}}{12}+C\\ &= \frac{1}{24}(2x-5)^{12}+C. && \leftarrow \text{otra sustitución}\end{aligned}$$ ■

En los ejemplos 1 y 2, el integrando se "arregló" o ajustó al multiplicar y dividir por una constante a fin de obtener la du idónea. Este procedimiento funciona bien si de inmediato se reconoce $g(x)$ en $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ y que a $g'(x)\,dx$ simplemente le falta un múltiplo constante idóneo. El siguiente ejemplo ilustra una técnica algo diferente.

EJEMPLO 3 Uso de (8)

Evalúe $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\,dx$.

Solución Para recalcar, volvemos a escribir el integrando como $\int (\cos x)^4 \operatorname{sen} x\,dx$. Una vez que se hace la identificación $u = \cos x$, se obtiene $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. Al despejar el producto $\operatorname{sen} x\,dx$ de la última diferencial obtenemos $\operatorname{sen} x\,dx = -du$. Luego,

$$\int (\cos x)^4 \operatorname{sen} x\, dx = \int \overbrace{(\cos x)^4}^{u^4} \overbrace{(\operatorname{sen} x\, dx)}^{-du} \leftarrow \text{sustitución}$$

$$= -\int u^4\, du \qquad \leftarrow \text{ahora use (8)}$$

$$= -\frac{u^5}{5} + C$$

$$= -\frac{1}{5}\cos^5 x + C. \qquad \leftarrow \text{otra sustitución}$$

De nuevo, se solicita que el lector diferencie el último resultado. ■

En los ejemplos que restan en esta sección se alternará entre los métodos empleados en los ejemplos 1 y 3.

En un nivel práctico no siempre es evidente que se está tratando con una integral de la forma $\int [g(x)]^n g'(x)\, dx$. Cuando trabaje cada vez más problemas, observará que las integrales no siempre son lo que parecen a primera vista. Por ejemplo, usted debe convencerse de que al usar sustituciones en u la integral $\int \cos^2 x\, dx$ *no* es de la forma $\int [g(x)]^n g'(x)\, dx$. En un sentido más general, en $\int f(g(x))g'(x)\, dx$ no siempre es evidente qué funciones deben escogerse como u y du.

Integrales indefinidas de funciones trigonométricas Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces las fórmulas de diferenciación

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dx} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}(-\cos u) = \operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$$

conducen, a su vez, a las fórmulas de integración

$$\int \cos u \frac{du}{dx}\, dx = \operatorname{sen} u + C \tag{9}$$

y

$$\int \operatorname{sen} u \frac{du}{dx}\, dx = -\cos u + C. \tag{10}$$

Puesto que $du = g'(x)\, dx = \dfrac{du}{dx}\, dx$, (9) y (10) son, respectivamente, equivalentes a

$$\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C, \tag{11}$$

$$\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C. \tag{12}$$

EJEMPLO 4 Uso de (11)

Evalúe $\int \cos 2x\, dx$.

Solución Si $u = 2x$, entonces $du = 2\, dx$ y $dx = \frac{1}{2}\, du$. En consecuencia, escribimos

$$\int \cos 2x\, dx = \int \cos \overbrace{2x}^{u} \overbrace{(dx)}^{\frac{1}{2}du} \leftarrow \text{sustitución}$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos u\, du \qquad \leftarrow \text{ahora use (11)}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C. \leftarrow \text{otra sustitución}$$

■

Las fórmulas de integración (8), (11) y (12) son los análogos de la regla de la cadena de las fórmulas de integración 2, 4 y 5 en la tabla 5.1.1. En la tabla 5.2.1 que se muestra a continuación se resumen los análogos de la regla de la cadena de las 16 fórmulas de integración de la tabla 5.1.1.

TABLA 5.2.1

Fórmulas de integración

1. $\int du = u + C$	**2.** $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
3. $\int \frac{1}{u} \, du = \ln\lvert u\rvert + C$	**4.** $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$
5. $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$	**6.** $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$
7. $\int \csc^2 du = -\cot u + C$	**8.** $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$
9. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$	**10.** $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \, du = \operatorname{sen}^{-1} u + C$
11. $\int \frac{1}{1+u^2} \, du = \tan^{-1} u + C$	**12.** $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \, du = \sec^{-1}\lvert u\rvert + C$
13. $\int b^u \, du = \frac{b^u}{\ln b} + C$	**14.** $\int e^u \, du = e^u + C$
15. $\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$	**16.** $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$

En otros libros de texto, fórmulas como 3, 10, 11 y 12 en la tabla 5.2.1 suelen escribirse con el diferencial *du* como numerador:

$$\int \frac{du}{u}, \qquad \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \qquad \int \frac{du}{1+u^2}, \qquad \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}.$$

Pero como a lo largo del tiempo hemos encontrado que estas últimas fórmulas a menudo se malinterpretan en un entorno de aula, aquí se prefieren las formas proporcionadas en la tabla.

EJEMPLO 5 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \sec^2(1-4x)\,dx$.

Solución Reconocemos que la integral indefinida tiene la forma de la fórmula de integración 6 en la tabla 5.2.1. Si $u = 1 - 4x$, entonces $du = -4\,dx$. Ajustar el integrando para obtener la forma correcta de la diferencial requiere multiplicar y dividir entre -4:

$$\begin{aligned}\int \sec^2(1-4x)\,dx &= -\frac{1}{4}\int \sec^2(\overbrace{1-4x}^{u})(\overbrace{-4\,dx}^{du})\\ &= -\frac{1}{4}\int \sec^2 u\,du \quad \leftarrow \text{fórmula 6 en la tabla 5.2.1}\\ &= -\frac{1}{4}\tan u + C\\ &= -\frac{1}{4}\tan(1-4x) + C.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \frac{x^2}{x^3 + 5}\, dx$.

Solución Si $u = x^3 + 5$, entonces $du = 3x^2\, dx$ y $x^2\, dx = \frac{1}{3}\, du$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^3+5}\, dx &= \int \frac{1}{x^3+5}(x^2\, dx)\\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\, du\\ &= \frac{1}{3}\ln|u| + C \qquad \leftarrow \text{fórmula 3 en la tabla 5.2.1}\\ &= \frac{1}{3}\ln|x^3+5| + C.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 7 Vuelta a escribir y uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \frac{1}{1 + e^{-2x}}\, dx$.

Solución La integral dada no se ve como ninguna de las fórmulas de integración en la tabla 5.2.1. No obstante, si el numerador y el denominador se multiplican por e^{2x}, obtenemos

$$\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\, dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\, dx.$$

Si $u = e^{2x} + 1$, entonces $du = 2e^{2x}\, dx$, de modo que por la fórmula 3 de la tabla 5.2.1,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\, dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^{2x}+1}(2e^{2x}\, dx)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\, du\\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C\\ &= \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C.\end{aligned}$$

Observe que el símbolo de valor absoluto puede eliminarse porque $e^{2x} + 1 > 0$ para todos los valores de x. ■

EJEMPLO 8 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int e^{5x}\, dx$.

Solución Sea $u = 5x$ de modo que $du = 5\, dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int e^{5x}\, dx &= \frac{1}{5}\int e^{5x}(5\, dx)\\ &= \frac{1}{5}\int e^{u}\, du \qquad \leftarrow \text{fórmula 14 en la tabla 5.2.1}\\ &= \frac{1}{5}e^{u} + C\\ &= \frac{1}{5}e^{5x} + C.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 9 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \frac{e^{4/x}}{x^2}\, dx$.

Solución Si hacemos $u = 4/x$, entonces $du = (-4/x^2)\, dx$ y $(1/x^2)\, dx = -\frac{1}{4}\, du$.

De nuevo a partir de la fórmula 14 de la tabla 5.2.1 observamos que

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{4/x}}{x^2}\,dx &= \int e^{4/x}\left(\frac{1}{x^2}\,dx\right)\\ &= \int e^u\left(-\frac{1}{4}\,du\right)\\ &= -\frac{1}{4}\int e^u\,du\\ &= -\frac{1}{4}e^u + C\\ &= -\frac{1}{4}e^{4/x} + C.\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 10 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\displaystyle\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\,dx.$

Solución Como en el ejemplo 7, a primera vista la integral dada no se ve como ninguna de las fórmulas en la tabla 5.2.1. Pero si la sustitución u se intenta con $u = \tan^{-1} x$ y $du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$, entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\,dx &= \int \overbrace{(\tan^{-1}x)}^{u}{}^2\; \overbrace{\frac{1}{1+x^2}\,dx}^{du}\\ &= \int u^2\,du \quad \leftarrow \text{fórmula 2 en la tabla 5.2.1}\\ &= \frac{u^3}{3} + C\\ &= \frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3 + C.\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 11 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}\,dx.$

Solución Al factorizar 100 del radical e identificar $u = \frac{1}{10}x$ y $du = \frac{1}{10}\,dx$, el resultado se obtiene a partir de la fórmula 10 de la tabla 5.2.1:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{10}\right)^2}}\left(\frac{1}{10}\,dx\right)\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du\\ &= \operatorname{sen}^{-1} u + C\\ &= \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{10} + C.\end{aligned}$$ ■

Tres fórmulas alternas Por razones de conveniencia, las fórmulas de integración 10, 11 y 12 en la tabla 5.2.1 se extienden como sigue. Para $a > 0$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C. \tag{15}$$

Para adquirir práctica, compruebe estos resultados por diferenciación. Observe que la integral indefinida en el ejemplo 11 puede evaluarse rápidamente al identificar $u = x$ y $a = 10$ en (13).

Integrales trigonométricas especiales Las fórmulas de integración que se proporcionan en seguida, que relacionan algunas funciones trigonométricas con el logaritmo natural, a menudo ocurren en la práctica, por lo que merecen atención especial:

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C \tag{16}$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C \tag{17}$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{18}$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C. \tag{19}$$

En tablas de fórmulas de integrales a menudo observamos (16) escrita como $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$. Por las propiedades de los logaritmos $-\ln|\cos x| = \ln|\cos x|^{-1} = \ln|\sec x|$.

Para encontrar (16) escribimos

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx \tag{20}$$

y se identifica $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$, de modo que

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx &= -\int \frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x\,dx)\\ &= -\int \frac{1}{u}\,du\\ &= -\ln|u| + C\\ &= -\ln|\cos x| + C.\end{aligned}$$

Para obtener (18) escribimos

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx &= \int \sec x\,\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx\\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx.\end{aligned}$$

Si hacemos $u = \sec x + \tan x$, entonces $du = (\sec x\tan x + \sec^2 x)\,dx$ y así,

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx &= \int \frac{1}{\sec x + \tan x}(\sec^2 x + \sec x\tan x)\,dx\\ &= \int \frac{1}{u}\,du\\ &= \ln|u| + C\\ &= \ln|\sec x + \tan x| + C.\end{aligned}$$

También, cada una de las fórmulas (16)-(19) podemos escribirlas en una forma general:

$$\int \tan u\,dx = -\ln|\cos u| + C \tag{21}$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C \tag{22}$$

$$\int \sec u\,dx = \ln|\sec u + \tan u| + C \tag{23}$$

y

$$\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C. \tag{24}$$

Identidades útiles Cuando se trabaja con funciones trigonométricas, a menudo es necesario usar una identidad trigonométrica para resolver un problema. Las fórmulas de la mitad de un ángulo para el coseno y el seno en la forma

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{25}$$

son particularmente útiles en problemas que requieren antiderivadas de $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$.

EJEMPLO 12 Uso de la fórmula de la mitad de un ángulo

Evalúe $\int \cos^2 x\, dx$.

Solución Es necesario comprobar que la integral *no* es de la forma $\int u^2\, du$. Luego, al usar la fórmula de la mitad de un ángulo $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\, dx &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x(2\, dx)\right] \leftarrow \text{vea el ejemplo 4} \\ &= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right] + C \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.\end{aligned}$$

■

Por supuesto, el método ilustrado en el ejemplo 12 funciona igualmente bien para encontrar antiderivadas como $\int \cos^2 5x\, dx$ y $\int \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x\, dx$. Con x sustituida por $5x$ y luego con x sustituida por $\frac{1}{2}x$, las fórmulas en (25) permiten escribir, respectivamente,

$$\int \cos^2 5x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 10x)\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}\operatorname{sen} 10x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos x)\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C.$$

En la sección 7.4 abordaremos antiderivadas de potencias más complicadas de funciones trigonométricas.

NOTAS DESDE EL AULA

El siguiente ejemplo ilustra un procedimiento común, pero *totalmente incorrecto*, para evaluar una integral indefinida. Ya que $2x/2x = 1$,

$$\begin{aligned}\int (4 + x^2)^{1/2}\, dx &= \int (4 + x^2)^{1/2}\frac{2x}{2x}\, dx \\ &= \frac{1}{2x}\int (4 + x^2)^{1/2} 2x\, dx \\ &= \frac{1}{2x}\int u^{1/2}\, du \\ &= \frac{1}{2x}\cdot\frac{2}{3}(4 + x^2)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Usted debe comprobar que la diferenciación de la última función *no* produce $(4 + x^2)^{1/2}$. El error está en la primera línea de la "solución". Las variables, en este caso $2x$, no pueden sacarse del símbolo de la integral. Si $u = x^2 + 4$, entonces al integrando le falta la función $du = 2x\, dx$; de hecho, no hay ninguna forma de arreglar el problema para adecuarse a la forma dada en (8). Con las "herramientas" con que contamos en este momento, simplemente no es posible evaluar la integral $\int (4 + x^2)^{1/2}\, dx$.

Ejercicios 5.2 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-18.

Fundamentos

En los problemas 1-50, evalúe la integral indefinida dada usando una sustitución u idónea.

1. $\int \sqrt{1-4x}\,dx$

2. $\int (8x+2)^{1/3}\,dx$

3. $\int \frac{1}{(5x+1)^3}\,dx$

4. $\int (7-x)^{49}\,dx$

5. $\int x\sqrt{x^2+4}\,dx$

6. $\int \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+9}}\,dt$

7. $\int \operatorname{sen}^5 3x\cos 3x\,dx$

8. $\int \operatorname{sen} 2\theta\cos^4 2\theta\,d\theta$

9. $\int \tan^2 2x\sec^2 2x\,dx$

10. $\int \sqrt{\tan x}\sec^2 x\,dx$

11. $\int \operatorname{sen} 4x\,dx$

12. $\int 5\cos\frac{x}{2}\,dx$

13. $\int \left(\sqrt{2t}-\cos 6t\right)dt$

14. $\int \operatorname{sen}(2-3x)\,dx$

15. $\int x\operatorname{sen} x^2\,dx$

16. $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx$

17. $\int x^2\sec^2 x^3\,dx$

18. $\int \csc^2(0.1x)\,dx$

19. $\int \frac{\csc\sqrt{x}\cot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

20. $\int \tan 5v\sec 5v\,dv$

21. $\int \frac{1}{7x+3}\,dx$

22. $\int (5x+6)^{-1}\,dx$

23. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

24. $\int \frac{x^2}{5x^3+8}\,dx$

25. $\int \frac{x}{x+1}\,dx$

26. $\int \frac{(x+3)^2}{x+2}\,dx$

27. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

28. $\int \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\theta+\cos\theta}\,d\theta$

29. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$

30. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

31. $\int e^{10x}\,dx$

32. $\int \frac{1}{e^{4x}}\,dx$

33. $\int x^2e^{-2x^3}\,dx$

34. $\int \frac{e^{1/x^3}}{x^4}\,dx$

35. $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

36. $\int \sqrt{e^x}\,dx$

37. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

38. $\int e^{3x}\sqrt{1+2e^{3x}}\,dx$

39. $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\,dx$

40. $\int \frac{1}{\sqrt{9-16x^2}}\,dx$

41. $\int \frac{1}{1+25x^2}\,dx$

42. $\int \frac{1}{2+9x^2}\,dx$

43. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

44. $\int \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^4}}\,d\theta$

45. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

46. $\int \frac{x-8}{x^2+2}\,dx$

47. $\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

48. $\int \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{1-x^2}}\,dx$

49. $\int \tan 5x\,dx$

50. $\int e^x\cot e^x\,dx$

En los problemas 51-56, use las identidades en (25) para evaluar la integral indefinida dada.

51. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

52. $\int \cos^2 \pi x\,dx$

53. $\int \cos^2 4x\,dx$

54. $\int \operatorname{sen}^2\frac{3}{2}x\,dx$

55. $\int (3-2\operatorname{sen} x)^2\,dx$

56. $\int (1+\cos 2x)^2\,dx$

En los problemas 57 y 58, resuelva la ecuación diferencial dada.

57. $\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{1-x}$

58. $\frac{dy}{dx}=\frac{(1-\tan x)^5}{\cos^2 x}$

59. Encuentre una función $y=f(x)$ cuya gráfica pase por el punto $(\pi,-1)$ y también satisfaga $dy/dx=1-6\operatorname{sen} 3x$.

60. Encuentre una función f tal que $f''(x)=(1+2x)^5$, $f(0)=0$ y $f'(0)=0$.

61. Demuestre que:

a) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x+C_1$

b) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx=-\frac{1}{2}\cos^2 x+C_2$

c) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_3$.

62. En el problema 61:

a) Compruebe que la derivada de cada respuesta en los incisos *a*), *b*) y *c*) es sen x cos x.

b) Use una identidad trigonométrica para demostrar que el resultado en el inciso *b*) puede obtenerse a partir de la respuesta en el inciso *a*).

c) Sume los resultados de los incisos *a*) y *b*) para obtener el resultado en el inciso *c*).

Aplicaciones

63. Considere el péndulo plano mostrado en la FIGURA 5.2.1, que oscila entre los puntos A y C. Si B es el punto medio entre A y C, es posible demostrar que

$$\frac{dt}{ds}=\sqrt{\frac{L}{g\left(s_C^2-s^2\right)}},$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad.

a) Si $t(0) = 0$, demuestre que el tiempo necesario para que el péndulo vaya de B a P es

$$t(s) = \sqrt{\frac{L}{g}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{s}{s_C}\right).$$

b) Use el resultado del inciso *a*) para determinar el tiempo de recorrido de B a C.

c) Use *b*) para determinar el periodo T del péndulo; es decir, el tiempo para hacer una oscilación de A a C y de regreso a A.

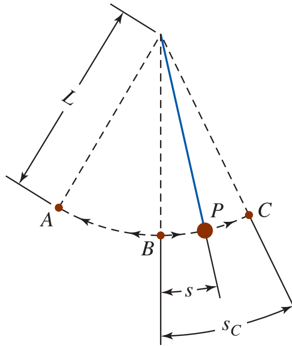


FIGURA 5.2.1 Péndulo en el problema 63

Piense en ello

64. Encuentre una función $y = f(x)$ para la cual $f(\pi/2) = 0$ y $\dfrac{dy}{dx} = \cos^3 x$. [*Sugerencia*: $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x$.]

En los problemas 65 y 66, use las identidades en (25) para evaluar la integral indefinida dada.

65. $\int \cos^4 x\, dx$ **66.** $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$

En los problemas 67 y 68, evalúe la integral indefinida dada.

67. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^4 - 16}}\, dx$ **68.** $\int \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}\, dx$

En los problemas 69 y 70, evalúe la integral indefinida dada.

69. $\int \dfrac{1}{1 - \cos x}\, dx$ **70.** $\int \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} 2x}\, dx$

En los problemas 71-74, evalúe la integral indefinida dada. Suponga que f es una función diferenciable.

71. $\int f'(8x)\, dx$ **72.** $\int xf'(5x^2)\, dx$

73. $\int \sqrt{f(2x)}f'(2x)\, dx$ **74.** $\int \dfrac{f'(3x + 1)}{f(3x + 1)}\, dx$

75. Evalúe $\int f''(4x)\, dx$ si $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$.

76. Evalúe $\int \left\{ \int \sec^2 3x\, dx \right\} dx$.

5.3 El problema de área

Introducción Así como la derivada es motivada por el problema geométrico de construir una tangente a una curva, el problema histórico que conduce a la definición de integral definida es el problema de encontrar un área. En específico, tenemos interés en la siguiente versión de este problema:

- Encontrar el área A de una región acotada por el eje x y la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$ definida sobre un intervalo $[a, b]$.

El área de esta región se denomina **área bajo la gráfica** de f sobre el intervalo $[a, b]$. El requerimiento de que f sea no negativa sobre $[a, b]$ significa que ninguna parte de esta gráfica sobre el intervalo está por abajo del eje x. Vea la FIGURA 5.3.1.

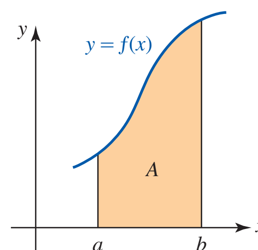


FIGURA 5.3.1 Área bajo la gráfica de f sobre $[a, b]$

Antes de continuar con la solución del problema de área es necesario hacer una breve digresión para analizar una notación útil para una suma de números como

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \qquad \text{y} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Notación sigma Sea a_k un número real que depende de un entero k. La suma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ se denota por el símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$; esto es,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \tag{1}$$

Puesto que $\sum$ es la letra griega mayúscula *sigma*, (1) se denomina **notación sigma** o **notación de suma**. La variable k se denomina **índice de la suma**. Así,

termina con este valor de k

el símbolo Σ indica la suma de a_k → $\sum_{k=1}^{n} a_k$

empieza con el valor indicado de k

es la suma de todos los números de la forma a_k cuando k asume los valores sucesivos $k = 1$, $k = 2, \ldots,$ y termina con $k = n$.

EJEMPLO 1 Uso de la notación sigma

La suma de los diez primeros enteros pares

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 18 + 20$$

puede escribirse de manera abreviada como $\sum_{k=1}^{10} 2k$. La suma de los diez enteros positivos impares

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 17 + 19$$

puede escribirse como $\sum_{k=1}^{10} (2k - 1)$. ■

El índice de la suma no necesita empezar en el valor $k = 1$; por ejemplo,

$$\sum_{k=3}^{5} 2^k = 2^3 + 2^4 + 2^5 \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

Observe que la suma de los diez enteros positivos impares en el ejemplo 1 también puede escribirse como $\sum_{k=0}^{9} (2k + 1)$. Sin embargo, en un análisis general siempre se supone que el índice de la suma empieza en $k = 1$. Esta suposición responde más a razones de conveniencia que de necesidad. El índice de la suma a menudo se denomina **variable ficticia**, puesto que el símbolo en sí carece de importancia; lo que importa son los valores enteros sucesivos del índice y la suma correspondiente. En general,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{m=1}^{n} a_m.$$

Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{10} 4^k = \sum_{i=1}^{10} 4^i = \sum_{j=1}^{10} 4^j = 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{10}.$$

Propiedades A continuación se presenta una lista de algunas propiedades importantes de la notación sigma.

Teorema 5.3.1 Propiedades de la notación sigma

Para enteros positivos m y n,

i) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$, donde c es cualquier constante

ii) $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

iii) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k,\ m < n.$

La demostración de la fórmula *i*) es una consecuencia inmediata de la ley distributiva. Por supuesto, *ii*) del teorema 5.3.1 se cumple para la suma de más de tres términos; por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k + c_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Fórmulas de sumas especiales Para tipos especiales de sumas indicadas, particularmente sumas que implican potencias de enteros positivos del índice de la suma (como sumas de enteros positivos consecutivos, cuadrados sucesivos, cubos sucesivos, etc.) es posible encontrar una fórmula que proporcione el valor numérico verdadero de la suma. Para efectos de esta sección, centraremos la atención en las cuatro fórmulas siguientes.

Teorema 5.3.2 Fórmulas de sumas

Para n un entero positivo y c cualquier constante,

i) $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

ii) $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

iii) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iv) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}.$

Las fórmulas *i*) y *ii*) pueden justificarse fácilmente. Si c es una constante, es decir, independiente del índice de la suma, entonces $\sum_{k=1}^{n} c$ significa $c + c + c + \cdots + c$. Puesto que hay n c, tenemos $\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$, que es *i*) del teorema 5.3.2. Luego, la suma de los n primeros enteros positivos puede escribirse como $\sum_{k=1}^{n} k$. Si esta suma se denota por la letra S, entonces

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n. \tag{2}$$

En forma equivalente,

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1. \tag{3}$$

Si sumamos (2) y (3) con los primeros términos correspondientes, luego los segundos términos, y así sucesivamente, entonces

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ términos de } n+1} = n(n+1).$$

Al despejar S obtenemos $S = n(n+1)/2$, que es *ii*). Usted debe poder obtener las fórmulas *iii*) y *iv)* con las sugerencias que se proporcionan en los problemas 55 y 56 en los ejercicios 5.3.

EJEMPLO 2 Uso de fórmulas de suma

Encuentre el valor numérico de $\sum_{k=1}^{20} (k+5)^2$.

Solución Al desarrollar $(k+5)^2$ y usar *i*) y *ii*) del teorema 5.3.1, podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{20}(k+5)^2 = \sum_{k=1}^{20}(k^2+10k+25) \quad \leftarrow \text{se eleva al cuadrado el binomio}$$

$$= \sum_{k=1}^{20}k^2 + 10\sum_{k=1}^{20}k + \sum_{k=1}^{20}25. \quad \leftarrow i) \text{ y } ii) \text{ del teorema 5.3.1}$$

Con la identificación $n = 20$, por las fórmulas de sumas *iii*), *ii*) y *i*) del teorema 5.3.2, respectivamente, se concluye

$$\sum_{k=1}^{20}(k+5)^2 = \frac{20(21)(41)}{6} + 10\frac{20(21)}{2} + 20 \cdot 25 = 5\,470.$$ ■

La notación sigma y las fórmulas de sumas anteriores se usarán de inmediato en el siguiente análisis.

Área de un triángulo Suponga por el momento que no se conoce ninguna fórmula para calcular el área A del triángulo rectángulo proporcionado en la FIGURA 5.3.2*a*). Al superponer un sistema rectangular de coordenadas sobre el triángulo, como se muestra en la figura 5.3.2*b*), se ve que el problema es el mismo que encontrar el área en el primer cuadrante acotada por las líneas rectas $y = (h/b)x$, $y = 0$ (el eje x) y $x = b$. En otras palabras, deseamos encontrar el área bajo la gráfica de $y = (h/b)x$ sobre el intervalo $[0, b]$.

Al usar rectángulos, la FIGURA 5.3.3 indica tres formas diferentes de *aproximar* el área A. Por conveniencia, seguiremos con mayor detalle el procedimiento sugerido en la figura 5.3.3*b*). Empezamos al dividir el intervalo $[0, b]$ en n subintervalos del mismo ancho $\Delta x = b/n$. Si el punto fronterizo derecho de estos intervalos se denota por x_k^*, entonces

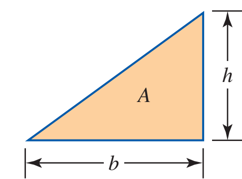
$$x_1^* = \Delta x = \frac{b}{n}$$

$$x_2^* = 2\Delta x = 2\left(\frac{b}{n}\right)$$

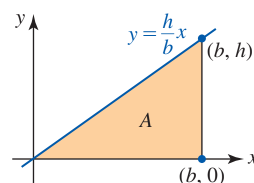
$$x_3^* = 3\Delta x = 3\left(\frac{b}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^* = n\Delta x = n\left(\frac{b}{n}\right) = b.$$

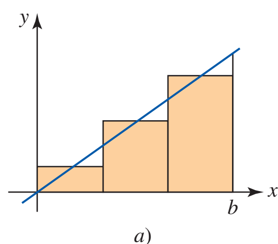


a) Triángulo rectángulo

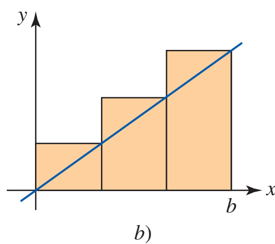


b) Triángulo rectángulo en un sistema de coordenadas

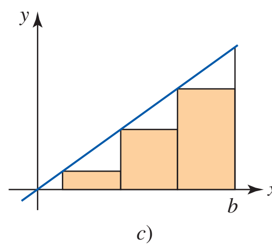
FIGURA 5.3.2 Encuentre el área A del triángulo rectángulo



a)

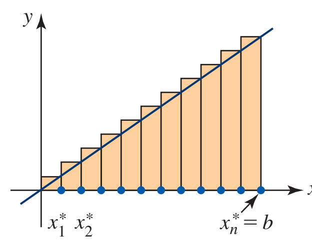


b)

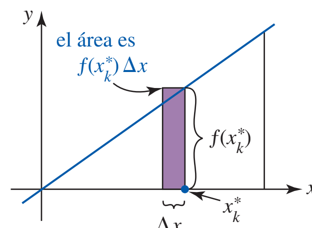


c)

FIGURA 5.3.3 Aproximación del área A usando tres rectángulos



a) n rectángulos



b) Área de un rectángulo general

FIGURA 5.3.4 El área A del triángulo es aproximada por la suma de las áreas de n rectángulos

Como se muestra en la FIGURA 5.3.4*a*), ahora construimos un rectángulo de longitud $f(x_k^*)$ y ancho Δx sobre cada uno de estos n subintervalos. Puesto que el área de un rectángulo es *largo* × *ancho*, el área de cada rectángulo es $f(x_k^*)\Delta x$. Vea la figura 5.3.4*b*). La suma de las áreas de los n rectángulos es una aproximación al número A. Escribimos

$$A \approx f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x,$$

o en notación sigma,

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x. \tag{4}$$

Parece válido que reduzcamos el error introducido por este método de aproximación (el área de cada rectángulo es mayor que el área bajo la gráfica sobre un subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$) al dividir el intervalo $[0, b]$ en subdivisiones más finas. En otras palabras, esperamos que una mejor aproximación a A pueda obtenerse usando más y más rectángulos $(n \to \infty)$ de anchos decrecientes $(\Delta x \to 0)$. Luego,

$$f(x) = \frac{h}{b}x, \quad x_k^* = k\left(\frac{b}{n}\right), \quad f(x_k^*) = \frac{h}{n}\cdot k \quad \text{y} \quad \Delta x = \frac{b}{n},$$

de modo que con ayuda de la fórmula de suma *ii*) del teorema 5.3.2, (4) se vuelve

$$A \approx \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{h}{n}\cdot k\right)\frac{b}{n} = \frac{bh}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{bh}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{bh}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right). \tag{5}$$

Finalmente, al hacer $n \to \infty$ en el miembro derecho de (5), obtenemos la fórmula conocida para el área de un triángulo:

$$A = \frac{1}{2}bh \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}bh.$$

El problema general Ahora pasaremos del ejemplo precedente específico al problema general de encontrar el área A bajo la gráfica de una función $y = f(x)$ que es continua sobre un intervalo $[a, b]$. Como se muestra en la FIGURA 5.3.5*a*), también suponemos que $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo $[a, b]$. Como sugiere la figura 5.3.5*b*), el área A puede aproximarse al sumar las áreas de n rectángulos que se construyen sobre el intervalo. A continuación se resume un procedimiento posible para determinar A:

- Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervaloss $[x_{k-1}, x_k]$, donde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

de modo que cada subintervalo tiene el mismo ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Esta colección de números se denomina **partición regular** del intervalo $[a, b]$.

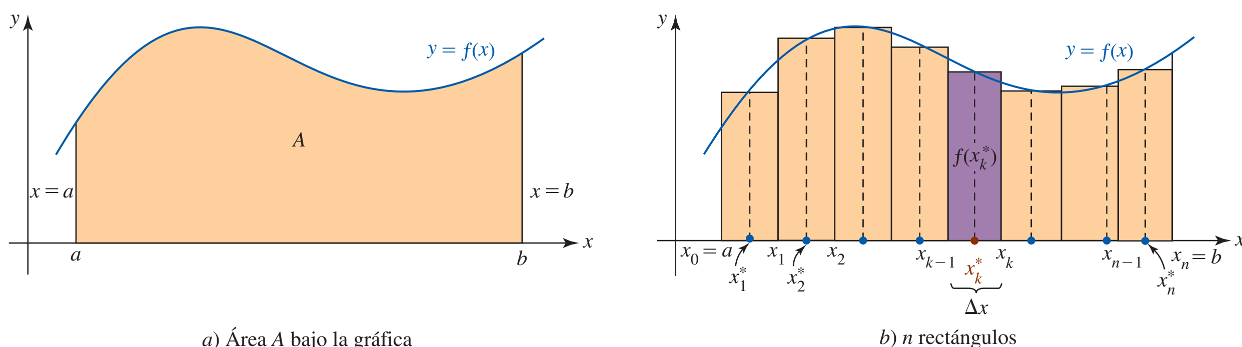
- Escoja un número x_k^* en cada uno de los n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ y forme los n productos $f(x_k^*)\Delta x$. Puesto que el área de un rectángulo es largo $\times$ ancho, $f(x_k^*)\Delta x$ es el área del rectángulo de largo $f(x_k^*)$ y ancho Δx construido sobre el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Los n números $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*$ se denominan **puntos muestra**.

- La suma de las áreas de los n rectángulos

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x,$$

representa una aproximación al valor del área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$.

Con estas notas preliminares, ahora ya es posible definir el concepto de área bajo una gráfica.



a) Área A bajo la gráfica

b) n rectángulos

FIGURA 5.3.5 Encuentre el área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$

Definición 5.3.1 Área bajo una gráfica

Sea f continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. El **área A bajo la gráfica** de f sobre el intervalo se define como

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x. \qquad (6)$$

Es posible demostrar que cuando f es *continua*, el límite en (6) siempre existe sin importar el método usado para dividir $[a, b]$ en subintervalos; es decir, los subintervalos pueden tomarse o no de modo que su ancho sea el mismo, y los puntos x_k^* pueden escogerse en forma arbitraria en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. No obstante, si los subintervalos no tienen el mismo ancho, entonces en (6) es necesario un tipo diferente de límite. Necesitamos sustituir $n \to \infty$ por el requerimiento de que la longitud del subintervalo más ancho tienda a cero.

Una forma práctica de (6) Para usar (6), suponga que escogemos x_k^* como se hizo en el análisis de la figura 5.3.4; a saber: sea x_k^* el **punto fronterizo derecho** de cada subintervalo. Puesto que el ancho de cada uno de los n subintervalos de igual ancho es $\Delta x = (b - a)/n$, tenemos

$$x_k^* = a + k\Delta x = a + k\frac{b-a}{n}.$$

Luego, para $k = 1, 2, \ldots, n$ tenemos

$$\begin{aligned}
x_1^* &= a + \Delta x = a + \frac{b-a}{n}\\
x_2^* &= a + 2\Delta x = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right)\\
x_3^* &= a + 3\Delta x = a + 3\left(\frac{b-a}{n}\right)\\
&\vdots\\
x_n^* &= a + n\Delta x = a + n\left(\frac{b-a}{n}\right) = b.
\end{aligned}$$

Al sustituir $a + k(b - a)/n$ por x_k^* y $(b - a)/n$ por Δx en (6), se concluye que el área A también está dada por

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}. \qquad (7)$$

Observamos que puesto que $\Delta x = (b - a)/n$, $n \to \infty$ implica $\Delta x \to 0$.

EJEMPLO 3 Área usando (7)

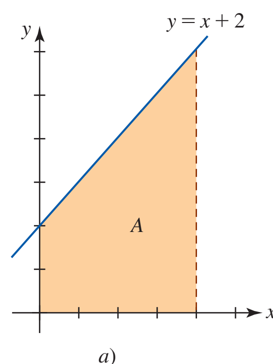
Encuentre el área A bajo la gráfica de $f(x) = x + 2$ sobre el intervalo $[0, 4]$.

Solución El área está acotada por el trapezoide indicado en la FIGURA 5.3.6*a*). Al identificar $a = 0$ y $b = 4$, encontramos

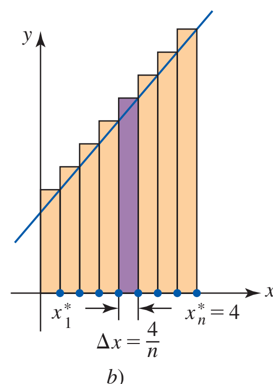
$$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}.$$

Así, (7) se vuelve

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{4}{n}\right)\frac{4}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{4k}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k}{n} + 2\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left[\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1\right]. \quad \leftarrow \text{por las propiedades } i) \text{ y } ii) \text{ del teorema 5.3.1}
\end{aligned}$$



a)



b)

FIGURA 5.3.6 Área bajo la gráfica en el ejemplo 3

Luego, por las fórmulas de suma *i*) y *ii*) del teorema 5.3.2, tenemos

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left[\frac{4}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + 2n\right]$$

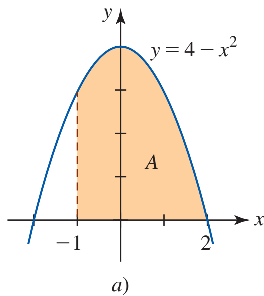
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{16}{2}\frac{n(n+1)}{n^2} + 8\right] \quad \leftarrow \text{se divide entre } n^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[8\left(1+\frac{1}{n}\right) + 8\right]$$

$$= 8\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) + 8\lim_{n\to\infty} 1$$

$$= 8 + 8 = 16 \text{ unidades cuadradas.}$$

■



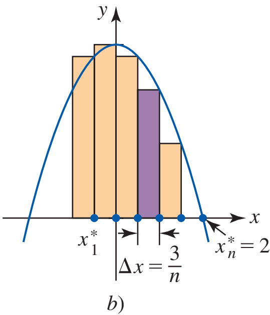


FIGURA 5.3.7 Área bajo la gráfica en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Área usando (7)

Encuentre el área A bajo la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ sobre el intervalo $[-1, 2]$.

Solución El área se indica en la FIGURA 5.3.7*a*). Puesto que $a = -1$ y $b = 2$, se concluye que

$$\Delta x = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}.$$

A continuación se revisarán los pasos que llevan a (7). El ancho de cada rectángulo está dado por $\Delta x = (2-(-1))/n = 3/n$. Luego, empezando en $x = -1$, el punto fronterizo derecho de los n subintervalos es

$$x_1^* = -1 + \frac{3}{n}$$

$$x_2^* = -1 + 2\left(\frac{3}{n}\right) = -1 + \frac{6}{n}$$

$$x_3^* = -1 + 3\left(\frac{3}{n}\right) = -1 + \frac{9}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_n^* = -1 + n\left(\frac{3}{n}\right) = 2.$$

Entonces, la longitud de cada rectángulo es

$$f(x_1^*) = f\left(-1+\frac{3}{n}\right) = 4 - \left[-1+\frac{3}{n}\right]^2$$

$$f(x_2^*) = f\left(-1+\frac{6}{n}\right) = 4 - \left[-1+\frac{6}{n}\right]^2$$

$$f(x_3^*) = f\left(-1+\frac{9}{n}\right) = 4 - \left[-1+\frac{9}{n}\right]^2$$

$$\vdots$$

$$f(x_n^*) = f\left(-1+\frac{3n}{n}\right) = f(2) = 4 - (2)^2 = 0.$$

El área del k-ésimo rectángulo es *largo* × *ancho*:

$$f(x_k^*)\frac{3}{n} = \left(4 - \left[-1 + k\frac{3}{n}\right]^2\right)\frac{3}{n} = \left(3 + 6\frac{k}{n} - 9\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{3}{n}.$$

Al sumar las áreas de los n rectángulos obtenemos una aproximación al área bajo la gráfica sobre el intervalo: $A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(3/n)$. A medida que el número n de rectángulos crece sin límite, obtenemos

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(3 + 6\frac{k}{n} - 9\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(3 + 6\frac{k}{n} - 9\frac{k^2}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \left[\sum_{k=1}^{n} 3 + \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right].$$

Al usar las fórmulas de sumas *i*), *ii*) y *iii*) del teorema 5.3.2 obtenemos

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[3n + \frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[9 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 9 + 9 - 9 = 9 \text{ unidades cuadradas.}$$ ■

Otras elecciones para x_k^* No hay nada en especial si x_k^* se escoge como el punto fronterizo derecho de cada subintervalo. Volvemos a recalcar que x_k^* puede tomarse como cualquier número conveniente en $[x_{k-1}, x_k]$. En caso de que se elija x_k^* como el **punto fronterizo izquierdo** de cada subintervalo, entonces

$$x_k^* = a + (k-1)\Delta x = a + (k-1)\frac{b-a}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

y (7) se volvería

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}. \tag{8}$$

En el ejemplo 4, los rectángulos correspondientes serían como se observa en la FIGURA 5.3.8. En este caso se hubiera tenido $x_k^* = -1 + (k-1)(3/n)$. En los problemas 45 y 46 de los ejercicios 5.3 se le pide resolver el problema de área en el ejemplo 4 escogiendo x_k^* como primer punto fronterizo izquierdo y punto medio de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Al elegir x_k^* como el punto medio de cada $[x_{k-1}, x_k]$, entonces

$$x_k^* = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

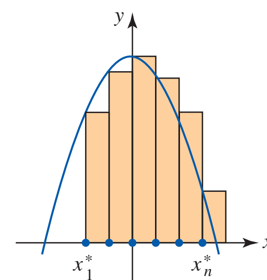


FIGURA 5.3.8 Rectángulos usando los puntos fronterizos izquierdos de los intervalos

Ejercicios 5.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-18.

Fundamentos

En los problemas 1-10, desarrolle la suma indicada.

1. $\sum_{k=1}^{5} 3k$

2. $\sum_{k=1}^{5} (2k-3)$

3. $\sum_{k=1}^{4} \frac{2^k}{k}$

4. $\sum_{k=1}^{4} \left(\frac{3}{10}\right)^k$

5. $\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^k}{2k+5}$

6. $\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$

7. $\sum_{j=2}^{5} (j^2 - 2j)$

8. $\sum_{m=0}^{4} (m+1)^2$

9. $\sum_{k=1}^{5} \cos k\pi$

10. $\sum_{k=1}^{5} \frac{\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k}$

En los problemas 11-20, use notación sigma para escribir la suma dada.

11. $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$

12. $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$

13. $1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 37$

14. $2 + 6 + 10 + 14 + \cdots + 38$

15. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

16. $-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6}$

17. $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$

18. $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} + \cdots + 3$

19. $\cos\frac{\pi}{p}x - \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{p}x + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi}{p}x - \frac{1}{16}\cos\frac{4\pi}{p}x$

20. $f'(1)(x-1) - \frac{f''(1)}{3}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{5}(x-1)^3 - \frac{f^{(4)}(1)}{7}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{9}(x-1)^5$

En los problemas 21-28, encuentre el valor numérico de la suma dada.

21. $\sum_{k=1}^{20} 2k$

22. $\sum_{k=0}^{50} (-3k)$

23. $\sum_{k=1}^{10}(k+1)$

24. $\sum_{k=1}^{1\,000}(2k-1)$

25. $\sum_{k=1}^{6}(k^2+3)$

26. $\sum_{k=1}^{5}(6k^2-k)$

27. $\sum_{p=0}^{10}(p^3+4)$

28. $\sum_{i=1}^{10}(2i^3-5i+3)$

En los problemas 29-42, use (7) y el teorema 5.3.2 para encontrar el área bajo la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado.

29. $f(x)=x,\quad [0,6]$

30. $f(x)=2x,\quad [1,3]$

31. $f(x)=2x+1,\quad [1,5]$

32. $f(x)=3x-6,\quad [2,4]$

33. $f(x)=x^2,\quad [0,2]$

34. $f(x)=x^2,\quad [-2,1]$

35. $f(x)=1-x^2,\quad [-1,1]$

36. $f(x)=2x^2+3,\quad [-3,-1]$

37. $f(x)=x^2+2x,\quad [1,2]$

38. $f(x)=(x-1)^2,\quad [0,2]$

39. $f(x)=x^3,\quad [0,1]$

40. $f(x)=x^3-3x^2+4,\quad [0,2]$

41. $f(x)=\begin{cases}2, & 0\le x<1\\ x+1, & 1\le x\le 4\end{cases}$

42. $f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\le x<1\\ x+2, & 1\le x\le 3\end{cases}$

43. Trace la gráfica de $y=1/x$ sobre el intervalo $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$. Al dividir el intervalo en cuatro subintervalos del mismo ancho, construya rectángulos que aproximen el área A bajo la gráfica sobre el intervalo. Primero use el punto fronterizo derecho de cada subintervalo, y luego use el punto fronterizo izquierdo.

44. Repita el problema 43 para $y=\cos x$ sobre el intervalo $[-\pi/2,\pi/2]$.

45. Vuelva a trabajar el ejemplo 4 escogiendo x_k^* como el punto fronterizo izquierdo de cada subintervalo. Vea (8).

46. Vuelva a trabajar el ejemplo 4 escogiendo x_k^* como el punto medio de cada subintervalo. Vea (9).

En los problemas 47 y 48, dibuje la región cuya área A está dada por la fórmula. No intente evaluar.

47. $A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4-\dfrac{4k^2}{n^2}}\,\dfrac{2}{n}$

48. $A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{sen}\dfrac{k\pi}{n}\right)\dfrac{\pi}{n}$

≡ Piense en ello

En los problemas 49 y 50, escriba el número decimal dado usando notación sigma.

49. 0.11111111

50. 0.3737373737

51. Use la fórmula de suma *iii*) del teorema 5.3.2 para encontrar el valor numérico de $\sum_{k=21}^{60}k^2$.

52. Escriba la suma $8+7+8+9+10+11+12$ usando notación sigma de modo que el índice de la suma empiece con $k=0$. Con $k=1$. Con $k=2$.

53. Despeje $\bar{x}$: $\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2=0$.

54. ***a***) Encuentre el valor de $\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]$. Se dice que una suma de esta forma es **telescópica**.

b) Use el inciso *a*) para encontrar el valor numérico de

$$\sum_{k=1}^{400}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right).$$

55. ***a***) Use el inciso *a*) del problema 54 para demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2-k^2]=-1+(n+1)^2=n^2+2n.$$

b) Use el hecho de que $(k+1)^2-k^2=2k+1$ para demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2-k^2]=n+2\sum_{k=1}^{n}k.$$

c) Compare los resultados de los incisos *a*) y *b*) para obtener la fórmula de suma *iii*) del teorema 5.3.2.

56. Muestre cómo el patrón ilustrado en la FIGURA 5.3.9 puede usarse para inferir la fórmula de suma *iv*) del teorema 5.3.2.

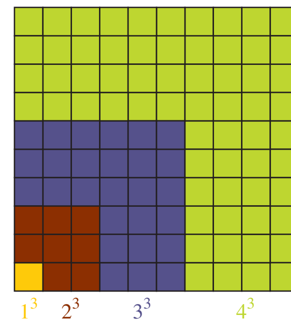


FIGURA 5.3.9 Arreglo para el problema 56

57. Obtenga la fórmula para el área del trapezoide proporcionado en la FIGURA 5.3.10.

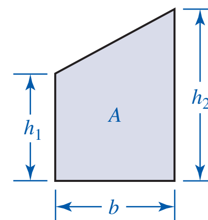


FIGURA 5.3.10 Trapezoide en el problema 57

58. En un supermercado, 136 latas se acomodan en forma triangular como se muestra en la FIGURA 5.3.11. ¿Cuántas latas puede haber en la parte inferior de la pila?

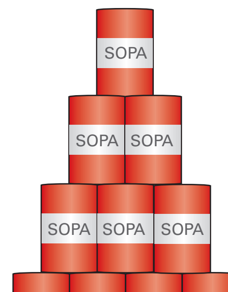


FIGURA 5.3.11 Pila de latas en el problema 58

59. Use (7) y la fórmula de suma

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

para encontrar el área bajo la gráfica de $f(x) = 16 - x^4$ sobre $[-2, 2]$.

60. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \sqrt{x}$ sobre $[0, 1]$ al considerar el área bajo la gráfica de $y = x^2$ sobre $[0, 1]$. Lleve a cabo sus ideas.

61. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ sobre $[0, 8]$ al considerar el área bajo la gráfica de $y = x^3$ sobre $0 \le x \le 2$.

62. ***a***) Suponga que $y = ax^2 + bx + c \ge 0$ sobre el intervalo $[0, x_0]$. Demuestre que el área bajo la gráfica sobre $[0, x_0]$ está dada por

$$A = a\frac{x_0^3}{3} + b\frac{x_0^2}{2} + cx_0.$$

b) Use el resultado en el inciso *a*) para encontrar el área bajo la gráfica de $y = 6x^2 + 2x + 1$ sobre el intervalo $[2, 5]$.

63. Una fórmula de suma para la suma de los n términos de una sucesión geométrica finita $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$ está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right).$$

Use esta fórmula de suma, (8) de esta sección, y la regla de L'Hôpital para encontrar el área bajo la gráfica de $y = e^x$ sobre $[0, 1]$.

64. Un poco de historia En un curso de física para principiantes todo mundo sabe que la distancia de un cuerpo que cae es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido. **Galileo Galilei** (1564-1642) fue el primero en descubrir este hecho. Galileo encontró que la distancia que se mueve una masa hacia abajo en un plano inclinado es proporcional a un entero positivo impar. Por tanto, la distancia total s que una masa se mueve en n segundos, con n un entero positivo, es proporcional a $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$. Demuestre que esto es lo mismo que afirmar que la distancia total que se mueve una masa hacia abajo en un plano inclinado es proporcional al tiempo transcurrido n.

5.4 La integral definida

Introducción En la sección previa vimos que el área bajo la gráfica de una función continua no negativa f sobre un intervalo $[a, b]$ se definía como el límite de una suma. En esta sección verá que el mismo tipo de proceso límite conduce al concepto de **integral definida**.

Sea $y = f(x)$ una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.

Considere los siguientes cuatro pasos:

- Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de anchos $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, donde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{1}$$

  La colección de números (1) se denomina **partición** del intervalo y se denota por P.
- Sea $\|P\|$ el mayor número de los n anchos de los subintervalos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. El número $\|P\|$ se denomina **norma** de la partición P.
- Escoja un número x_k^* en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ como se muestra en la FIGURA 5.4.1. Los n números $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*$ se denominan **puntos muestra** en estos subintervalos.
- Forme la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \tag{2}$$

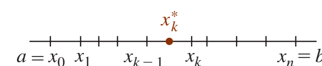


FIGURA 5.4.1 Punto muestra x_k^* en $[x_{k-1}, x_k]$

Sumas del tipo proporcionado en (2) que corresponden a varias particiones de $[a, b]$ se denominan **sumas de Riemann** en honor del famoso matemático alemán **Georg Friedrich Bernhard Riemann**.

Aunque el procedimiento anterior parece muy semejante a los pasos que llevan a la definición de área bajo una gráfica dada en la sección 5.3, hay algunas diferencias importantes. Observe que una suma de Riemann (2) no requiere que f sea continua o no negativa sobre el intervalo $[a, b]$. Así, (2) no necesariamente representa una aproximación al área bajo una gráfica. Tenga en cuenta que "área bajo una gráfica" se refiere *al área acotada entre la gráfica de una función continua no negativa y el eje x*. Como se muestra en la FIGURA 5.4.2, si $f(x) < 0$ para alguna x en $[a, b]$, una suma de Riemann puede contener términos $f(x_k^*)\Delta x_k$, donde $f(x_{k1}^*) < 0$. En este caso, los productos $f(x_k^*)\Delta x_k$ son números que son los negativos de las áreas de rectángulos trazados abajo del eje x.

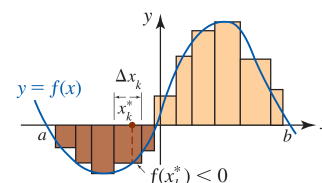


FIGURA 5.4.2 La función f es positiva y negativa sobre el intervalo $[a, b]$

EJEMPLO 1 Una suma de Riemann

Calcule la suma de Riemann para $f(x) = x^2 - 4$ sobre $[-2, 3]$ con cinco subintervalos determinados por $x_0 = -2$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = \frac{7}{4}$, $x_5 = 3$ y $x_1^* = -1$, $x_2^* = -\frac{1}{4}$, $x_3^* = \frac{1}{2}$, $x_4^* = \frac{3}{2}$, $x_5^* = \frac{5}{2}$. Encuentre la norma de la partición.

Solución En la FIGURA 5.4.3 se muestra que los números x_k, $k = 0, 1, \ldots, 5$ determinan cinco subintervalos $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$, $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $[0, 1]$, $\left[1, \frac{7}{4}\right]$ y $\left[\frac{7}{4}, 3\right]$ del intervalo $[-2, 3]$ y un punto muestra x_k^* (en rojo) dentro de cada subintervalo.

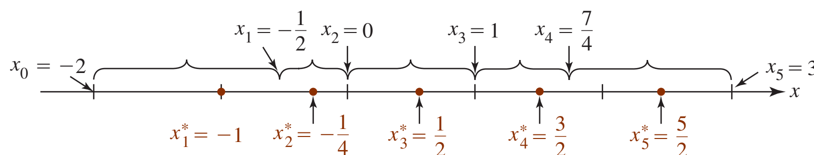


FIGURA 5.4.3 Cinco subintervalos y puntos muestra en el ejemplo 1

Luego, evalúe la función f de cada punto muestra y determine el ancho de cada subintervalo:

$$\begin{aligned}
f(x_1^*) &= f(-1) = -3, & \Delta x_1 &= x_1 - x_0 = - = \frac{1}{2} - (-2) = \frac{3}{2}\\
f(x_2^*) &= f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{63}{16}, & \Delta x_2 &= x_2 - x_1 = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\\
f(x_3^*) &= f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4}, & \Delta x_3 &= x_3 - x_2 = 1 - 0 = 1\\
f(x_4^*) &= f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}, & \Delta x_4 &= x_4 - x_3 = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}\\
f(x_5^*) &= f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}, & \Delta x_5 &= x_5 - x_4 = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

Entonces, la **suma de Riemann** para esta partición y esa elección del punto muestra es

$$\begin{aligned}
&f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + f(x_3^*)\Delta x_3 + f(x_4^*)\Delta x_4 + f(x_5^*)\Delta x_5\\
&\quad = (-3)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{63}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{15}{4}\right)(1) + \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{279}{32} \approx -8.72.
\end{aligned}$$

Al analizar los valores de los cinco Δx_k observamos que la norma de la partición es $\|P\| = \frac{3}{2}$. ■

Para una función f definida sobre un intervalo $[a, b]$, hay un número finito de posibles sumas de Riemann para una partición dada P del intervalo, puesto que los números x_k^* pueden escogerse arbitrariamente en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

EJEMPLO 2 Otra suma de Riemann

Calcule la suma de Riemann para la función del ejemplo 1 si la partición de $[-2, 3]$ es la misma pero los puntos muestra son $x_1^* = -\frac{3}{2}$, $x_2^* = -\frac{1}{8}$, $x_3^* = \frac{3}{4}$, $x_4^* = \frac{3}{2}$ y $x_5^* = 2.1$.

Solución Sólo es necesario calcular f en los nuevos puntos muestra, puesto que los números Δx_k son los mismos que antes:

$$\begin{aligned}
f(x_1^*) &= f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}\\
f(x_2^*) &= f\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{255}{64}\\
f(x_3^*) &= f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{55}{16}\\
f(x_4^*) &= f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}\\
f(x_5^*) &= f(2.1) = 0.41.
\end{aligned}$$

Ahora la suma de Riemann es

$$f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + f(x_3^*)\Delta x_3 + f(x_4^*)\Delta x_4 + f(x_5^*)\Delta x_5$$
$$= \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{255}{64}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{55}{16}\right)(1) + \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + (0.41)\left(\frac{5}{4}\right) \approx -8.85. \blacksquare$$

Tenemos interés en un tipo especial de límite de (2). Si las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ están próximas a un número L para *toda* partición P de $[a, b]$ para la cual la norma $\|P\|$ esté cerca de cero, entonces escribimos

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = L \tag{3}$$

y se dice que L es la **integral definida** de f sobre el intervalo $[a, b]$. En la siguiente definición se introduce un nuevo símbolo para el número L.

Definición 5.4.1 La integral definida

Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la **integral definida de f de a a b**, que se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$, se define como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \tag{4}$$

Si el límite en (4) existe, se dice que la función f es **integrable** sobre el intervalo. Los números a y b en la definición precedente se denominan **límite inferior** y **límite superior de integración**, respectivamente. La función f se denomina **integrando**. El símbolo integral $\int$, según lo usaba Leibniz, es una S alargada que representa la palabra *suma*. También observe que $\|P\| \to 0$ siempre implica que el número de subintervalos n se vuelve infinito ($n \to \infty$). No obstante, como se muestra en la FIGURA 5.4.4, el hecho de que $n \to \infty$ no necesariamente implica $\|P\| \to 0$.

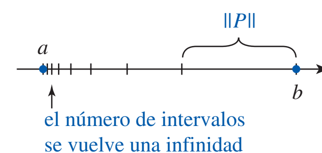


FIGURA 5.4.4 Una infinidad de subintervalos no implica $\|P\| \to 0$.

Integrabilidad En los dos teoremas siguientes se plantean condiciones que son suficientes para que una función f sea integrable sobre un intervalo $[a, b]$. No se proporcionan las demostraciones de estos teoremas.

Teorema 5.4.1 Continuidad implica integrabilidad

Si f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ existe; es decir, f es integrable sobre el intervalo.

Hay funciones definidas para cada valor de x en $[a, b]$ para las cuales el límite en (4) no existe. También, si la función f no está definida para todos los valores de x en el intervalo, la integral definida *puede* no existir; por ejemplo, después se verá por qué una integral como $\int_{-3}^{2}(1/x)dx$ no existe. Observe que $y = 1/x$ es discontinua en $x = 0$ y no está acotada sobre el intervalo. Sin embargo, a partir de este ejemplo no debe concluirse que cuando una función f tiene una discontinuidad en $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ necesariamente no existe. La continuidad de una función sobre $[a, b]$ es condición *suficiente* pero *no necesaria* para garantizar la existencia de $\int_a^b f(x)\,dx$. El conjunto de funciones continuas sobre $[a, b]$ es un subconjunto del conjunto de funciones que son integrables sobre el intervalo.

El siguiente teorema proporciona otra condición suficiente para integrabilidad sobre $[a, b]$.

Teorema 5.4.2 Condiciones suficientes para integrabilidad

Si una función f está acotada sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, es decir, si existe una constante positiva B tal que $-B \le f(x) \le B$ para toda x en el intervalo y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, entonces f es integrable sobre el intervalo.

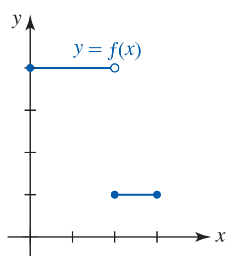


FIGURA 5.4.5 La integral definida de f sobre [0, 3] existe

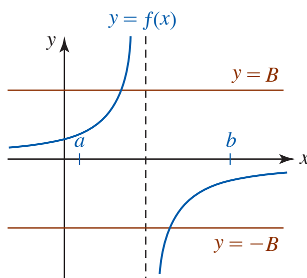


FIGURA 5.4.6 La función f no está acotada sobre $[a, b]$

Cuando una función f está acotada, su gráfica completa debe estar entre dos rectas horizontales, $y = B$ y $y = -B$. En otras palabras, $|f(x)| \leq B$ para toda x en $[a, b]$. La función

$$f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

mostrada en la FIGURA 5.4.5 es discontinua en $x = 2$ pero está acotada sobre [0, 3], puesto que $|f(x)| \leq 4$ para toda x en [0, 3]. (Para el caso, $1 \leq f(x) \leq 4$ para toda x en [0, 3] muestra que f está acotada sobre el intervalo.) Por el teorema 5.4.2 se concluye que $\int_0^3 f(x)\,dx$ existe. La FIGURA 5.4.6 muestra la gráfica de una función f que no está acotada sobre un intervalo $[a, b]$. Sin importar cuán grande sea el número B escogido, la gráfica de f no puede estar confinada a la región entre las rectas horizontales $y = B$ y $y = -B$.

Partición regular Si se sabe que una integral definida existe (por ejemplo, el integrando f es continuo sobre $[a, b]$), entonces:

- El límite en (4) existe para cualquier forma posible de partición $[a, b]$ y para toda forma posible de escoger x_k^* en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.

En particular, al escoger los subintervalos del mismo ancho y los puntos muestra como los puntos fronterizos derechos de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, es decir,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad x_k^* = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

la expresión (4) puede escribirse en forma alterna como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}. \tag{5}$$

Recuerde por la sección 5.3 que una partición P de $[a, b]$ donde los subintervalos tienen el mismo ancho se denomina **partición regular**.

Área Tal vez usted concluya que los planteamientos de $\int_a^b f(x)\,dx$ dados en (4) y (5) son exactamente los mismos que (6) y (7) de la sección 5.3 para el caso general de encontrar el área bajo la curva $y = f(x)$ sobre $[a, b]$. En cierta forma esto es correcto; no obstante, la definición 5.4.1 es un concepto más general puesto que, como ya se observó, no estamos requiriendo que f sea continua sobre $[a, b]$ o que $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo. Por tanto, una *integral definida no necesita ser un área*. Entonces, ¿qué es una integral definida? Por ahora, acepte el hecho de que una integral definida es simplemente un número real. Compare esto con la integral indefinida, que es una función (o una familia de funciones). El área bajo la gráfica de una función continua no negativa, ¿es una integral definida? La respuesta es *sí*.

Teorema 5.4.3 El área como integral definida

Si f es una función continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo, entonces el **área A bajo la gráfica** sobre $[a, b]$ es

$$A = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

EJEMPLO 3 El área como integral definida

Considere la integral definida $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$. El integrando es continuo y no negativo, de modo que la integral definida representa el área bajo la gráfica de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sobre el intervalo $[-1, 1]$. Debido a que la gráfica de la función f es el semicírculo superior de $x^2 + y^2 = 1$, el área bajo la gráfica es la región sombreada en la FIGURA 5.4.7. Por geometría sabemos que el área de un círculo de radio r es πr^2, y así con $r = 1$ el área del semicírculo y, por tanto, el valor de la integral definida, es

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi(1)^2 = \frac{1}{2}\pi. \qquad ■$$

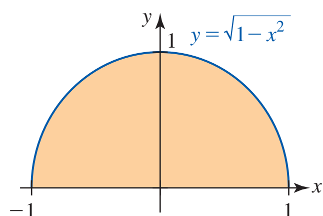


FIGURA 5.4.7 Área en el ejemplo 3

En la sección 6.2 volveremos a la cuestión de encontrar áreas por medio de la integral definida.

EJEMPLO 4 Integral definida usando (5)

Evalúe $\int_{-2}^{1} x^3\,dx$.

Solución Puesto que $f(x) = x^3$ es continua sobre $[-2, 1]$, por el teorema 5.4.1 sabemos que la integral definida existe. Usamos una partición regular y el resultado dado en (5). Al escoger

$$\Delta x = \frac{1-(-2)}{n} = \frac{3}{n} \quad \text{y} \quad x_k^* = -2 + k\cdot\frac{3}{n}$$

tenemos

$$f\left(-2+\frac{3k}{n}\right) = \left(-2+\frac{3k}{n}\right)^3 = -8 + 36\left(\frac{k}{n}\right) - 54\left(\frac{k^2}{n^2}\right) + 27\left(\frac{k^3}{n^3}\right).$$

Luego, por (5) y las fórmulas de suma *i*), *ii*), *iii*) y *iv*) del teorema 5.3.2 se concluye que

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} x^3\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(-2+\frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[-8+36\left(\frac{k}{n}\right)-54\left(\frac{k^2}{n^2}\right)+27\left(\frac{k^3}{n^3}\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left[-8n+\frac{36}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{54}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{27}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[-24+54\left(1+\frac{1}{n}\right)-27\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\\
&= -24+54-27(2)+\frac{81}{4} = -\frac{15}{4}.
\end{aligned}$$

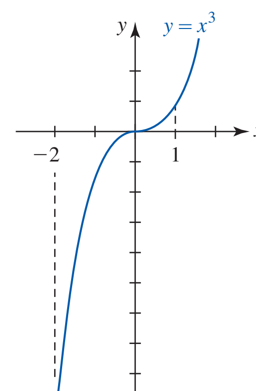


FIGURA 5.4.8 Gráfica de la función en el ejemplo 4

En la FIGURA 5.4.8 se muestra que no se está considerando el área bajo la gráfica sobre $[-2, 1]$. ■

EJEMPLO 5 Integral definida usando (5)

Los valores de las sumas de Riemann en los ejemplos 1 y 2 son aproximaciones al valor de la integral definida $\int_{-2}^{3}(x^2-4)\,dx$. Se deja como ejercicio demostrar que (5) da

$$\int_{-2}^{3}(x^2-4)\,dx = -\frac{25}{3} \approx -8.33.$$

Vea el problema 16 en los ejercicios 5.4. ■

Propiedades de la integral definida A continuación se analizarán algunas propiedades importantes de la integral definida que se definió en (4).

Las dos siguientes definiciones son útiles cuando se trabaja con integrales definidas.

Definición 5.4.2 Límites de integración

i) **Igualdad de límites** Si a está en el dominio de f, entonces

$$\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0. \tag{7}$$

ii) **Inversión de límites** Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_{b}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{8}$$

La definición 5.4.2*i*) puede motivarse por el hecho de que el área bajo la gráfica de f y por arriba de un solo punto a sobre el eje x es cero.

En la definición de $\int_a^b f(x)\,dx$ se supuso que $a < b$, de modo que la dirección de "costumbre" de la integración definida es de izquierda a derecha. El inciso *ii*) de la definición 5.4.2 establece que invertir esta dirección, es decir, intercambiar los límites de integración, resulta en la negativa de la integral.

EJEMPLO 6 Definición 5.4.2

Por el inciso *i*) de la definición 5.4.2,

los límites de integración →
son los mismos →
$$\int_1^1 (x^3 + 3x)\,dx = 0.$$
■

EJEMPLO 7 Otro repaso al ejemplo 4

En el ejemplo 4 vimos que $\int_{-2}^{1} x^3\,dx = -\frac{15}{4}$. Por el inciso *ii*) de la definición 5.4.2 se concluye que

$$\int_1^{-2} x^3\,dx = -\int_{-2}^{1} x^3\,dx = -\left(-\frac{15}{4}\right) = \frac{15}{4}.$$
■

En el siguiente teorema se enumeran algunas de las propiedades básicas de la integral definida. Estas propiedades son análogas a las propiedades de la notación sigma proporcionadas en el teorema 5.3.1, así como a las propiedades de la integral indefinida que se analizaron en la sección 5.1.

Teorema 5.4.4 Propiedades de la integral definida

Si f y g son funciones integrables sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

i) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, donde k es cualquier constante

ii) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$

El teorema 5.4.4*ii*) se extiende a cualquier suma finita de funciones integrables sobre el intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

La variable independiente x en una integral definida se denomina **variable ficticia** de integración. El valor de la integral no depende del símbolo usado. En otras palabras,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(r)\,dr = \int_a^b f(s)\,ds = \int_a^b f(t)\,dt \qquad (9)$$

y así sucesivamente.

EJEMPLO 8 Otro repaso al ejemplo 4

Por (9), no importa qué símbolo se use como la variable de integración:

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \int_{-2}^{1} r^3\,dr = \int_{-2}^{1} s^3\,ds = \int_{-2}^{1} t^3\,dt = -\frac{15}{4}.$$
■

Teorema 5.4.5 Propiedad aditiva del intervalo

Si f es una función integrable sobre un intervalo cerrado que contiene a los números a, b y c, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (10)$$

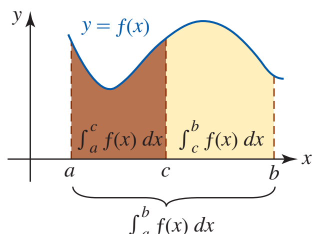


FIGURA 5.4.9 Las áreas son aditivas

Resulta fácil interpretar la propiedad aditiva del intervalo dada en el teorema 5.4.5 en el caso especial en que f es continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. Como se ve en la FIGURA 5.4.9, el área bajo la gráfica de f sobre $[a, c]$ más el área bajo la gráfica del intervalo adyacente $[c, b]$ es la misma que el área bajo la gráfica de f sobre todo el intervalo $[a, b]$.

Nota: La conclusión del teorema 5.4.5 se cumple cuando a, b y c son tres números *cualesquiera* en un intervalo cerrado. En otras palabras, no es necesario tener el orden $a < c < b$ como se muestra en la figura 5.4.9. Además, el resultado en (10) se extiende a cualquier número finito de números $a, b, c_1, c_2, \ldots, c_n$ en el intervalo. Por ejemplo, para un intervalo cerrado que contiene a los números a, b, c_1 y c_2,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx.$$

Para una partición P dada de un intervalo $[a, b]$, tiene sentido afirmar que

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a, \tag{11}$$

en otras palabras, el límite $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$ es simplemente el ancho del intervalo. Como una consecuencia de (11), tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.4.6 Integral definida de una constante

Para cualquier constante k,

$$\int_a^b k\,dx = k\int_a^b dx = k(b - a).$$

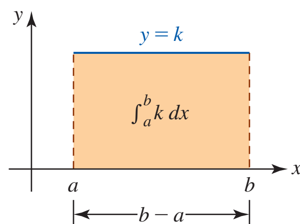


FIGURA 5.4.10 Si $k > 0$, el área bajo la gráfica es $k(b - a)$

Si $k > 0$, entonces el teorema 5.4.6 implica que $\int_a^b k\,dx$ es simplemente el área de un rectángulo de ancho $b - a$ y altura k. Vea la FIGURA 5.4.10.

EJEMPLO 9 Integral definida de una constante

Por el teorema 5.4.6,

$$\int_2^8 5\,dx = 5\int_2^8 dx = 5(8 - 2) = 30.$$ ■

EJEMPLO 10 Uso de los ejemplos 4 y 9

Evalúe $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^3 + 5)\,dx$.

Solución Por el teorema 5.4.4*ii*) podemos escribir la integral dada como dos integrales:

$$\int_{-2}^{1} (x^3 + 5)\,dx = \int_{-2}^{1} x^3\,dx + \int_{-2}^{1} 5\,dx.$$

Luego, por el ejemplo 4 sabemos que $\int_{-2}^{1} x^3 dx = -\frac{15}{4}$, y con ayuda del teorema 5.4.6 vemos que $\int_{-2}^{1} 5\,dx = 5[1 - (-2)] = 15$. En consecuencia,

$$\int_{-2}^{1} (x^3 + 5)\,dx = \left(-\frac{15}{4}\right) + 15 = \frac{45}{4}.$$ ■

Por último, los siguientes resultados no son sorprendentes si la integral se interpreta como un área.

Teorema 5.4.7 Propiedades de comparación

Sean f y g funciones integrables sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.

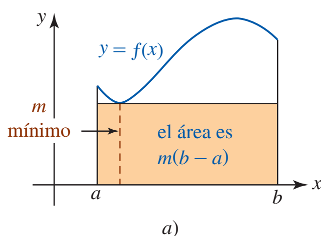
i) Si $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

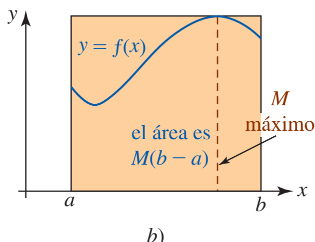
ii) Si $m \leq f(x) \leq M$ para toda x en el intervalo, entonces

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a).$$

Las propiedades *i*) y *ii*) del teorema 5.4.7 se entienden fácilmente en términos de área. Para *i*), si se supone $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces sobre el intervalo el área A_1 bajo la gráfica de f es mayor que o igual al área A_2 bajo la gráfica de g. En forma semejante, para *ii*) si se supone que f es continua y positiva sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces por el teorema



a)



b)

FIGURA 5.4.11 Motivación para el inciso *ii*) del teorema 5.4.7

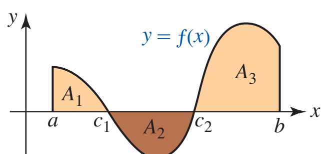


FIGURA 5.4.12 La integral definida de f sobre $[a, b]$ proporciona el área neta con signo

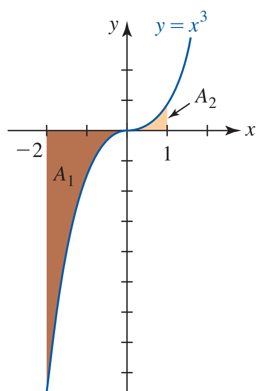


FIGURA 5.4.13 Área neta con signo en el ejemplo 11

del valor extremo, f tiene un mínimo absoluto $m > 0$ y un máximo absoluto $M > 0$ en el intervalo. Entonces, el área bajo la gráfica $\int_a^b f(x)\,dx$ sobre el intervalo es mayor que o igual al área $m(b - a)$ del rectángulo más pequeño mostrado en la FIGURA 5.4.11*a*) y menor que o igual al área $M(b - a)$ del rectángulo más grande mostrado en la figura 5.4.11*b*).

Si en *i*) del teorema 5.4.7 se hace $g(x) = 0$ y se usa el hecho de que $\int_a^b 0\,dx = 0$, se concluye lo siguiente:

- Si $f(x) \geq 0$ sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. (12)

En forma semejante, al escoger $f(x) = 0$ en *i*), se concluye que:

- Si $g(x) \leq 0$ sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b g(x)\,dx \leq 0$. (13)

Área neta con signo Debido a que la función f en la FIGURA 5.4.12 asume valores tanto positivos como negativos sobre $[a, b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ no representa área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. Por el teorema 5.4.5, la propiedad aditiva del intervalo,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^b f(x)\,dx. \tag{14}$$

Debido a que $f(x) \geq 0$ sobre $[a, c_1]$ y $[c_2, b]$ tenemos

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx = A_1 \quad \text{y} \quad \int_{c_2}^b f(x)\,dx = A_3,$$

donde A_1 y A_3 denotan las áreas bajo la gráfica de f sobre los intervalos $[a, c_1]$ y $[c_2, b]$, respectivamente. Pero puesto que $f(x) \leq 0$ sobre $[c_1, c_2]$ en virtud de (13), tenemos $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \leq 0$ y así $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx$ no representa área. No obstante, el valor de $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx$ es el negativo del área verdadera A_2 acotada entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[c_1, c_2]$. Es decir, $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx = -A_2$. Por tanto, (14) es

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 + (-A_2) + A_3 = A_1 - A_2 + A_3.$$

Vemos que la integral definida proporciona el **área neta con signo** entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 11 Área neta con signo

El resultado $\int_{-2}^{1} x^3\,dx = -\frac{15}{4}$ obtenido en el ejemplo 4 puede interpretarse como el área neta con signo entre la gráfica de $f(x) = x^3$ y el eje x sobre $[-2, 1]$. Aunque la observación de que

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \int_{-2}^{0} x^3\,dx + \int_0^1 x^3\,dx = -A_1 + A_2 = -\frac{15}{4}$$

no proporciona los valores de A_1 y A_2, el valor negativo es consistente con la FIGURA 5.4.13 donde resulta evidente que el área A_1 es mayor que A_2. ■

La teoría Sea f una función definida sobre $[a, b]$ y sea L un número real. El concepto intuitivo de que las sumas de Riemann están próximas a L siempre que la norma $\|P\|$ de una partición P esté cerca de cero puede expresarse en forma precisa usando los símbolos ε-δ introducidos en la sección 2.6. Al afirmar que f es integrable sobre $[a, b]$, se está diciendo que para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k - L \right| < \varepsilon, \tag{15}$$

siempre que P sea una partición de $[a, b]$ para la cual $\|P\| < \delta$ y el x_k^* son los números en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. En otras palabras,

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

existe y es igual al número L.

Posdata: Un poco de historia **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826-1866) nació en Hanover, Alemania, en 1826. Fue hijo de un ministro luterano. Aunque era cristiano devoto, Riemann no se inclinó por seguir la vocación de su padre y abandonó el estudio de teología en la Universidad de Gotinga para seguir una carrera de estudios en los que su genio era evidente: matemáticas. Es probable que el concepto de sumas de Riemann haya sido resultado de un curso sobre integral definida que tomó en la universidad; este concepto refleja su intento por asignar un significado matemático preciso a la integral definida de Newton y Leibniz. Después de presentar su examen doctoral sobre los fundamentos de las funciones de una variable compleja al comité examinador en la Universidad de Gotinga, Karl Friedrich Gauss, el "príncipe de las matemáticas", dedicó a Riemann un elogio bastante singular: "La disertación ofrece pruebas concluyentes. . . de una mente creativa, activa, verdaderamente matemática. . . de fértil originalidad". Riemann, como muchos otros estudiantes promisorios de la época, era de constitución frágil. Falleció a los 39 años de edad, de pleuresía. Sus originales contribuciones a la geometría diferencial, topología, geometría no euclidiana y sus intrépidas investigaciones concernientes a la naturaleza del espacio, la electricidad y el magnetismo anunciaron el trabajo de Einstein en el siglo siguiente.


Riemann

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

El procedimiento bosquejado en (5) tenía una utilidad limitada como medio práctico para calcular una integral definida. En la siguiente sección se introducirá un teorema que permite encontrar el número $\int_a^b f(x)\,dx$ de manera mucho más fácil. Este importante teorema constituye el puente entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Ejercicios 5.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-19.

Fundamentos

En los problemas 1-6, calcule la suma de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ para la partición dada. Especifique $\|P\|$.

1. $f(x) = 3x + 1$, $[0, 3]$, cuatro subintervalos; $x_0 = 0, x_0 = 1, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = \frac{7}{3}, x_4 = 3; x_1^* = \frac{1}{2}, x_2^* = \frac{4}{3}, x_3^* = 2, x_4^* = \frac{8}{3}$

2. $f(x) = x - 4$, $[-2, 5]$, cinco subintervalos; $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5$; $x_1^* = -\frac{3}{2}$, $x_2^* = -\frac{1}{2}$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 2$, $x_5^* = 4$

3. $f(x) = x^2$, $[-1, 1]$ cuatro subintervalos: $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$; $x_1^* = -\frac{3}{4}$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = \frac{1}{2}$, $x_4^* = \frac{7}{8}$

4. $f(x) = x^2 + 1$, $[1, 3]$, tres subintervalos; $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 3$; $x_1^* = \frac{5}{4}$, $x_2^* = \frac{7}{4}$, $x_3^* = 3$

5. $f(x) = \text{sen}\, x$, $[0, 2\pi]$, tres subintervalos; $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$, $x_2 = 3\pi/2$, $x_3 = 2\pi$; $x_1^* = \pi/2$, $x_2^* = 7\pi/6$, $x_3^* = 7\pi/4$

6. $f(x) = \cos x$, $[-\pi/2, \pi/2]$, cuatro subintervalos; $x_0 = -\pi/2$, $x_1 = -\pi/4$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi/3$, $x_4 = \pi/2$; $x_1^* = -\pi/3$, $x_2^* = -\pi/6$, $x_3^* = \pi/4$, $x_4^* = \pi/3$

7. Dada $f(x) = x - 2$ sobre $[0, 5]$, calcule la suma de Riemann usando una partición con cinco subintervalos de la misma longitud. Sea x_k^*, $k = 1, 2, \ldots, 5$, el punto fronterizo derecho de cada subintervalo.

8. Dada $f(x) = x^2 - x + 1$ sobre $[0, 1]$, calcule la suma de Riemann usando una partición con tres subintervalos de la misma longitud. Sea x_k^*, $k = 1, 2, 3$, el punto fronterizo izquierdo de cada subintervalo.

En los problemas 9 y 10, sea P una partición del intervalo indicado y x_k^* un número en el k-ésimo subintervalo. Escriba las sumas dadas como una integral definida sobre el intervalo indicado.

9. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{9 + (x_k^*)^2}\,\Delta x_k$; $[-2, 4]$

10. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\tan x_k^*)\Delta x_k$; $[0, \pi/4]$

En los problemas 11 y 12, sean P una partición regular del intervalo indicado y x_k^* el punto fronterizo de cada subintervalo. Escriba la suma dada como una integral definida.

11. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$; $[0, 2]$

12. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{3k}{n}\right)^3 \frac{3}{n}$; $[1, 4]$

En los problemas 13-18, use (5) y las fórmulas de suma en el teorema 5.3.2 para evaluar la integral definida dada.

13. $\int_{-3}^{1} x\,dx$

14. $\int_{0}^{3} x\,dx$

15. $\int_{1}^{2} (x^2 - x)\,dx$

16. $\int_{-2}^{3} (x^2 - 4)\,dx$

17. $\int_0^1 (x^3 - 1)\, dx$ **18.** $\int_0^2 (3 - x^3)\, dx$

En los problemas 19 y 20, proceda como en los problemas 13-18 para obtener el resultado dado.

19. $\int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ **20.** $\int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$

21. Use el problema 19 para evaluar $\int_{-1}^3 x\, dx$.

22. Use el problema 20 para evaluar $\int_{-1}^3 x^2\, dx$.

En los problemas 23 y 24, use el teorema 5.4.6 para evaluar la integral definida dada.

23. $\int_3^6 4\, dx$ **24.** $\int_{-2}^5 (-2)\, dx$

En los problemas 25-38, use la definición del teorema 5.4.2 y los teoremas 5.4.4, 5.4.5 y 5.4.6 para evaluar la integral definida dada. Donde sea idóneo, use los resultados obtenidos en los problemas 21 y 22.

25. $\int_4^{-2} \frac{1}{2}\, dx$ **26.** $\int_5^5 10x^4\, dx$

27. $-\int_3^{-1} 10x\, dx$ **28.** $\int_{-1}^3 (3x + 1)\, dx$

29. $\int_3^{-1} t^2\, dt$ **30.** $\int_{-1}^3 (3x^2 - 5)\, dx$

31. $\int_{-1}^3 (-3x^2 + 4x - 5)\, dx$ **32.** $\int_{-1}^3 6x(x - 1)\, dx$

33. $\int_{-1}^0 x^2\, dx + \int_0^3 x^2\, dx$ **34.** $\int_{-1}^{1.2} 2t\, dt - \int_3^{1.2} 2t\, dt$

35. $\int_0^4 x\, dx + \int_0^4 (9 - x)\, dx$

36. $\int_{-1}^0 t^2\, dt + \int_0^2 x^2\, dx + \int_2^3 u^2\, du$

37. $\int_0^3 x^3\, dx + \int_3^0 t^3\, dt$

38. $\int_{-1}^{-1} 5x\, dx - \int_3^{-1} (x - 4)\, dx$

En los problemas 39-42, evalúe la integral definida usando la información dada.

39. $\int_2^5 f(x)\, dx$ si $\int_0^2 f(x)\, dx = 6$ y $\int_0^5 f(x)\, dx = 8.5$

40. $\int_1^3 f(x)\, dx$ si $\int_1^4 f(x)\, dx = 2.4$ y $\int_3^4 f(x)\, dx = -1.7$

41. $\int_{-1}^2 [2f(x) + g(x)]\, dx$ si

$\int_{-1}^2 f(x)\, dx = 3.4$ y $\int_{-1}^2 3g(x)\, dx = 12.6$

42. $\int_{-2}^2 g(x)\, dx$ si

$\int_2^{-2} f(x)\, dx = 14$ y $\int_{-2}^2 [f(x) - 5g(x)]\, dx = 24$

En los problemas 43 y 44, evalúe las integrales definidas

a) $\int_a^b f(x)\, dx$ ***b***) $\int_b^c f(x)\, dx$ ***c***) $\int_c^d f(x)\, dx$

d) $\int_a^c f(x)\, dx$ ***e***) $\int_b^d f(x)\, dx$ ***f***) $\int_a^d f(x)\, dx$

usando la información en la figura dada.

43.

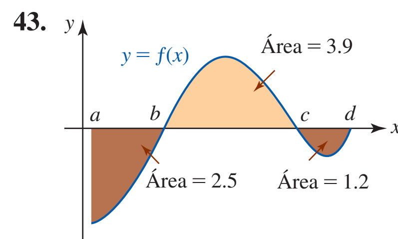


FIGURA 5.4.14 Gráfica para el problema 43

44.

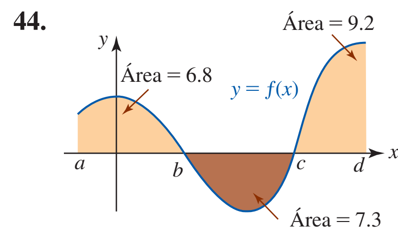


FIGURA 5.4.15 Gráfica para el problema 44

En los problemas 45-48, la integral dada representa el área bajo una gráfica sobre un intervalo dado. Trace esta región.

45. $\int_{-1}^1 (2x + 3)\, dx$ **46.** $\int_0^4 (-x^2 + 4x)\, dx$

47. $\int_{2\pi}^{3\pi} \operatorname{sen} x\, dx$ **48.** $\int_{-2}^0 \sqrt{x + 2}\, dx$

En los problemas 49-52, la integral dada representa el área bajo una gráfica sobre un intervalo dado. Use fórmulas idóneas de geometría para encontrar el área.

49. $\int_{-2}^4 (x + 2)\, dx$ **50.** $\int_0^3 |x - 1|\, dx$

51. $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ **52.** $\int_{-3}^3 \left(2 + \sqrt{9 - x^2}\right) dx$

En los problemas 53-56, la integral dada representa la siguiente área con signo entre una gráfica y el eje x sobre un intervalo. Trace esta región.

53. $\int_0^5 (-2x + 6)\, dx$ **54.** $\int_{-1}^2 (1 - x^2)\, dx$

55. $\int_{-1/2}^3 \frac{4x}{x + 1}\, dx$ **56.** $\int_0^{5\pi/2} \cos x\, dx$

En los problemas 57-60, la integral dada representa el área con signo entre una gráfica y el eje x sobre un intervalo. Use fórmulas idóneas de geometría para encontrar el área neta con signo.

57. $\int_{-1}^{4} 2x\,dx$

58. $\int_{0}^{8} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) dx$

59. $\int_{-1}^{1} \left(x - \sqrt{1 - x^2}\right) dx$

60. $\int_{-1}^{2} (1 - |x|)\,dx$

En los problemas 61-64, la función f se define como

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 3 \\ 3, & x > 3. \end{cases}$$

Use fórmulas idóneas de geometría para encontrar la integral definida dada.

61. $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$

62. $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

63. $\int_{-4}^{5} f(x)\,dx$

64. $\int_{0}^{10} f(x)\,dx$

En los problemas 65-68, use el teorema 5.4.7 para establecer la desigualdad dada.

65. $\int_{-1}^{0} e^x\,dx \leq \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx$

66. $\int_{0}^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx \geq 0$

67. $1 \leq \int_{0}^{1} (x^3 + 1)^{1/2}\,dx \leq 1.42$

68. $-2 \leq \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx \leq 0$

En los problemas 69 y 70, compare las dos integrales dadas por medio de un símbolo de desigualdad $\leq$ o $\geq$.

69. $\int_{0}^{1} x^2\,dx, \quad \int_{0}^{1} x^3\,dx$

70. $\int_{0}^{1} \sqrt{4 + x^2}\,dx, \quad \int_{0}^{1} \sqrt{4 + x}\,dx$

≡ Piense en ello

71. Si f es integrable sobre el intervalo $[a, b]$, entonces también lo es f^2. Explique por qué $\int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$.

72. Considere la función definida para toda x en el intervalo $[-1, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional}. \end{cases}$$

Demuestre que f no es integrable sobre $[-1, 1]$, es decir, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ no existe. [*Sugerencia*: El resultado en (11) puede ser útil.]

73. Evalúe la integral definida $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ usando una partición de $[0, 1]$ donde los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ están definidos por $[(k-1)^2/n^2, k^2/n^2]$ y escogiendo x_k^* como el punto fronterizo derecho de cada subintervalo.

74. Evalúe la integral definida $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ usando una partición regular de $[0, \pi/2]$ y escogiendo x_k^* como el punto medio de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Use los resultados conocidos

i) $\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta = \dfrac{\operatorname{sen} 2n\theta}{2\operatorname{sen}\theta}$

ii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\operatorname{sen}(\pi/4n)} = \dfrac{4}{\pi}$.

5.5 Teorema fundamental del cálculo

Introducción Al final de la sección 5.4 se indicó que hay una forma más sencilla para evaluar una integral definida que calculando el límite dé una suma. Esta “manera más sencilla” se logra por medio del **teorema fundamental del cálculo**. En esta sección verá que hay dos formas de este importante teorema: la primera forma, que se presenta a continuación, permite evaluar muchas integrales definidas.

Teorema fundamental del cálculo: primera forma En el siguiente teorema se ve que el concepto de antiderivada de una función continua constituye el puente entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Teorema 5.5.1 Teorema fundamental del cálculo: forma de antiderivada

Si f es una función continua sobre un intervalo $[a, b]$ y F es una antiderivada de f sobre el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Se presentarán dos demostraciones del teorema 5.5.1. En la demostración que se proporciona se usa la premisa básica de que una integral definida es un límite de una suma. Después que se demuestre la segunda forma del teorema fundamental del cálculo, se volverá al teorema 5.5.1 y se presentará una demostración alterna.

DEMOSTRACIÓN Si F es una antiderivada de f, entonces por definición $F'(x) = f(x)$. Puesto que F es diferenciable sobre (a, b), el teorema del valor medio (teorema 4.4.2) garantiza que existe un x_k^* en cada subintervalo (x_{k-1}, x_k) de la partición P:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{o} \quad F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

Luego, para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ con el último resultado obtenemos

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(a) &= f(x_1^*)\,\Delta x_1 \\ F(x_2) - F(x_1) &= f(x_2^*)\,\Delta x_2 \\ F(x_3) - F(x_2) &= f(x_3^*)\,\Delta x_3 \\ &\vdots \\ F(b) - F(x_{n-1}) &= f(x_n^*)\,\Delta x_n. \end{aligned}$$

Si sumamos las columnas precedentes,

$$[F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + [F(b) - F(x_{n-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

vemos que la suma de todos los términos, menos los dos sin color en el miembro izquierdo de la igualdad, es igual a 0, con lo cual tenemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k. \tag{2}$$

Pero $\lim_{\|P\| \to 0} [F(b) - F(a)] = F(b) - F(a)$, de modo que el límite de (2) cuando $\|P\| \to 0$ es

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k. \tag{3}$$

Por la definición 5.4.1, el miembro derecho de (3) es $\int_a^b f(x)\,dx$. ■

La diferencia $F(b) - F(a)$ en (1) suele representarse por el símbolo $F(x)\big]_a^b$, es decir,

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{integral definida}} = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{integral indefinida}}\Bigg]_a^b = F(x)\Bigg]_a^b.$$

Puesto que el teorema 5.5.1 indica que F es *cualquier* antiderivada de f, siempre es posible escoger la constante de integración C como igual a cero. Observe que si $C \neq 0$, entonces

$$(F(x) + C)\Bigg]_a^b = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = F(x)\Bigg]_a^b.$$

EJEMPLO 1 Uso de (1)

En el ejemplo 4 de la sección 5.4 se apeló a la definición más bien larga de integral definida para demostrar que $\int_{-2}^{1} x^3\,dx = -\frac{15}{4}$. Puesto que $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ es una antiderivada de $f(x) = x^3$, a partir de (1) obtenemos inmediatamente

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Bigg]_{-2}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-2)^4 = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$$ ■

EJEMPLO 2 Uso de (1)

Evalúe $\displaystyle\int_1^3 x\,dx$.

Solución Una antiderivada de $f(x) = x$ es $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. En consecuencia, (1) del teorema 5.5.1 proporciona

$$\int_1^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$$ ■

EJEMPLO 3 Uso de (1)

Evalúe $\int_{-2}^{2}(3x^2 - x + 1)\,dx$.

Solución Aplicamos *ii*) del teorema 5.1.2 y la fórmula de integración 2 de la tabla 5.1.1 a cada término del integrando, y luego usamos el teorema fundamental:

$$\int_{-2}^{2}(3x^2 - x + 1)\,dx = \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big]_{-2}^{2}$$
$$= (8 - 2 + 2) - (-8 - 2 - 2) = 20.$$ ■

EJEMPLO 4 Uso de (1)

Evalúe $\int_{\pi/6}^{\pi}\cos x\,dx$.

Solución Una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$. En consecuencia,

$$\int_{\pi/6}^{\pi}\cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/6}^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$ ■

Teorema fundamental del cálculo: segunda forma Suponga que f es continua sobre un intervalo $[a, b]$, por lo que se sabe que la integral $\int_a^b f(t)\,dt$ existe. Para toda x en el intervalo $[a, b]$, la integral definida

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{4}$$

Tenga en cuenta que una integral definida no depende de la variable de integración t.

representa un solo número. De esta forma, se ve que (4) es una función con dominio $[a, b]$. En la FIGURA 5.5.1 se muestra que f es una función positiva sobre $[a, b]$, y así cuando x varía a través del intervalo es posible interpretar $g(x)$ como un área bajo la gráfica sobre el intervalo $[a, x]$. En la segunda forma del teorema fundamental del cálculo se demostrará que $g(x)$ definida en (4) es una función diferenciable.

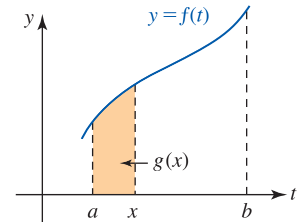


FIGURA 5.5.1 $g(x)$ como área

Teorema 5.5.2 Teorema fundamental del cálculo: forma de derivada

Sea f continua sobre $[a, b]$ y sea x cualquier número en el intervalo. Entonces $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) y

$$g'(x) = f(x). \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN PARA $h > 0$ Sean x y $x + h$ en (a, b), donde $h > 0$. Por la definición de derivada,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x + h) - g(x)}{h}. \tag{6}$$

Al usar las propiedades de la integral definida, la diferencia $g(x + h) - g(x)$ puede escribirse como

$$g(x + h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$
$$= \int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt \quad \leftarrow \text{por (8) de la sección 5.4}$$
$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt. \quad \leftarrow \text{por (10) de la sección 5.4}$$

Por tanto, (6) se vuelve

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt. \tag{7}$$

Puesto que f es continua sobre el intervalo cerrado $[x, x + h]$, por el teorema del valor extremo (teorema 4.3.1) se sabe que f alcanza un valor mínimo m y un valor máximo M sobre el intervalo. Puesto que m y M son constantes con respecto a la integración sobre la variable t, por el teorema 5.4.7*ii*) se concluye que

$$\int_x^{x+h} m\,dt \le \int_x^{x+h} f(t)\,dt \le \int_x^{x+h} M\,dt. \tag{8}$$

Con ayuda del teorema 5.5.1,

$$\int_x^{x+h} m\,dt = mt\Big]_x^{x+h} = m(x + h - x) = mh$$

y
$$\int_x^{x+h} M\,dt = Mt\Big]_x^{x+h} = M(x + h - x) = Mh.$$

Por tanto, la desigualdad en (8) se vuelve

$$mh \le \int_x^{x+h} f(t)\,dt \le Mh \qquad \text{o} \qquad m \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \le M. \tag{9}$$

Puesto que f es continua sobre $[x, x + h]$ tiene sentido afirmar que $\lim_{h\to 0^+} m = \lim_{h\to 0^+} M = f(x)$. Al tomar el límite de la segunda expresión en (9) cuando $h \to 0^+$ obtenemos

$$f(x) \le \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \le f(x).$$

Esto demuestra que $g'(x)$ existe y por $f(x) \le g'(x) \le f(x)$ concluimos que $g'(x) = f(x)$. Puesto que g es diferenciable, necesariamente es continua. Un razonamiento semejante se cumple para $h < 0$. ■

Otra forma más tradicional de expresar el resultado en (5) es

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{10}$$

EJEMPLO 5 Uso de (10)

Por (10),

a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-2}^x t^3\,dt = x^3$ ***b***) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \sqrt{t^2 + 1}\,dt = \sqrt{x^2 + 1}.$ ■

EJEMPLO 6 Regla de la cadena

Encuentre $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_\pi^{x^3} \cos t\,dt.$

Solución Si identificamos $g(x) = \int_\pi^x \cos t\,dt$, entonces la integral dada es la composición $g(x^3)$. Realizamos la diferenciación al aplicar la regla de la cadena con $u = x^3$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_\pi^{x^3} \cos t\,dt &= \frac{d}{du}\left(\int_\pi^u \cos t\,dt\right)\frac{du}{dx}\\ &= \cos u \cdot \frac{du}{dx} = \cos x^3 \cdot 3x^2\\ &= 3x^2 \cos x^3.\end{aligned}$$ ■

Demostración alterna del teorema 5.5.1 Vale la pena examinar otra demostración del teorema 5.5.1 usando el teorema 5.5.2. Para una función f continua sobre $[a, b]$, la declaración $g'(x) = f(x)$ para $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ significa que $g(x)$ es una antiderivada del integrando f. Si F es cualquier antiderivada de f, por el teorema 5.1.1 sabemos que $g(x) - F(x) = C$ o $g(x) = F(x) + C$,

donde C es una constante arbitraria. Puesto que $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, para cualquier x en $[a, b]$ se concluye que

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C. \tag{11}$$

Si en (11) sustituimos $x = a$, entonces

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$$

implica $C = -F(a)$, puesto que $\int_a^a f(t)\,dt = 0$. Así, (11) se vuelve

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Puesto que la última ecuación es válida en $x = b$, encontramos

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$ ■

Funciones continuas por partes Se dice que una función f es **continua por partes** sobre un intervalo $[a, b]$ si existe a lo más un número finito de puntos c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, $(c_{k-1} < c_k)$ en los que f tiene una discontinuidad finita, o salto, sobre cada subintervalo abierto (c_{k-1}, c_k). Vea la FIGURA 5.5.2. Si una función f es continua por partes sobre $[a, b]$, está acotada sobre el intervalo, y entonces por el teorema 5.4.2, f es integrable sobre $[a, b]$. Una integral definida de una función continua por partes sobre $[a, b]$ puede evaluarse con ayuda del teorema 5.4.5:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_n}^b f(x)\,dx$$

y al tratar a los integrandos de las integrales definidas en el miembro derecho de la ecuación anterior simplemente como si fuesen continuos sobre los intervalos cerrados $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, . . . , $[c_n, b]$.

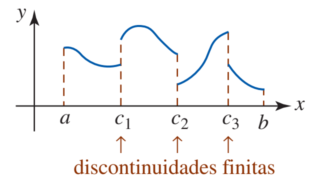


FIGURA 5.5.2 Función continua por partes

EJEMPLO 7 Integración de una función continua por partes

Evalúe $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ donde

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 2 \\ 3, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

Solución La gráfica de una función f continua por partes se muestra en la FIGURA 5.5.3. Luego, por el análisis precedente y la definición de f:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{0} (x+1)\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx + \int_{2}^{4} 3\,dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Bigg]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}x^2\Bigg]_{0}^{2} + 3x\Bigg]_{2}^{4} = \frac{17}{2}. \end{aligned}$$ ■

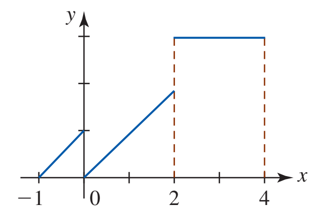


FIGURA 5.5.3 Gráfica de la función en el ejemplo 7

EJEMPLO 8 Integración de una función continua por partes

Evalúe $\int_0^3 |x - 2|\,dx$.

Solución Por la definición de valor absoluto,

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x - 2 \ge 0 \\ -(x - 2) & \text{si } x - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \ge 2 \\ -x + 2 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

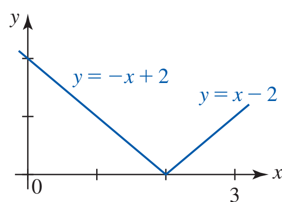


FIGURA 5.5.4 Gráfica de la función en el ejemplo 8

En la FIGURA 5.5.4 se muestra la gráfica de $f(x) = |x - 2|$. Luego, debido a (10) del teorema 5.4.5, podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x-2|\,dx &= \int_0^2 |x-2|\,dx + \int_2^3 |x-2|\,dx\\ &= \int_0^2 (-x+2)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx\\ &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big]_0^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big]_2^3\\ &= (-2+4) + \left(\frac{9}{2} - 6\right) - (2-4) = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Sustitución en una integral definida Recuerde por la sección 5.2 que algunas veces usamos una sustitución como ayuda para evaluar una integral indefinida de la forma $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. Es necesario tener cuidado al usar una sustitución en una integral definida $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$, puesto que es posible proceder *de dos formas*.

Directrices para sustituir una integral definida

- Evalúe la integral indefinida $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ por medio de la sustitución $u = g(x)$. Vuelva a sustituir $u = g(x)$ en la antiderivada y luego aplique el teorema fundamental del cálculo usando los límites de integración originales $x = a$ y $x = b$.
- En forma alterna, la segunda sustitución puede evitarse al cambiar los límites de integración de modo que correspondan al valor de u en $x = a$ y u en $x = b$. El último método, que suele ser más rápido, se resume en el siguiente teorema.

Teorema 5.5.3 Sustitución en una integral definida

Sea $u = g(x)$ una función cuya derivada es continua sobre el intervalo $[a, b]$, y sea f una función continua sobre el rango de g. Si $F'(u) = f(u)$ y $c = g(a)$, $d = g(b)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(d) - F(c). \tag{12}$$

DEMOSTRACIÓN Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$. En consecuencia,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int_c^d f(u)\,du = F(u)\Big]_c^d = F(d) - F(c).$$

EJEMPLO 9 Sustitución en una integral definida

Evalúe $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}\,x\,dx$.

Solución Primero se ilustrarán los dos procedimientos presentados en las directrices que preceden al teorema 5.5.3.

a) Para evaluar la integral indefinida $\int \sqrt{2x^2+1}\,x\,dx$ usamos $u = 2x^2 + 1$ y $du = 4x\,dx$. Así,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x^2+1}\,x\,dx &= \frac{1}{4}\int \sqrt{2x^2+1}\,(4x\,dx) && \leftarrow \text{sustitución}\\ &= \frac{1}{4}\int u^{1/2}\,du\\ &= \frac{1}{4}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C\\ &= \frac{1}{6}(2x^2+1)^{3/2} + C. && \leftarrow \text{otra sustitución}\end{aligned}$$

En consecuencia, por el teorema 5.5.1,

$$\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}\,x\,dx = \frac{1}{6}(2x^2+1)^{3/2}\Big]_0^2$$
$$= \frac{1}{6}\left[9^{3/2} - 1^{3/2}\right]$$
$$= \frac{1}{6}[27-1] = \frac{13}{3}.$$

b) Si $u = 2x^2 + 1$, entonces $x = 0$ implica $u = 1$, mientras que con $x = 2$ obtenemos $u = 9$. Así, por el teorema 5.5.3,

$$\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}\,x\,dx = \frac{1}{4}\int_1^9 u^{1/2}\,du \quad \leftarrow \text{integración con respecto a } u \quad (u \text{ límites} \downarrow)$$
$$= \frac{1}{4}\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big]_1^9$$
$$= \frac{1}{6}\left[9^{3/2} - 1^{3/2}\right] = \frac{13}{3}. \qquad ■$$

Cuando la gráfica de una función $y = f(x)$ es simétrica con respecto al eje y (función par) o al origen (función impar), entonces la integral definida de f sobre un intervalo simétrico $[-a, a]$, es decir, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, puede evaluarse por medio de un "atajo".

Teorema 5.5.4 Regla de la función par

Si f es una función par integrable sobre $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx. \tag{13}$$

Se demostrará el siguiente teorema, pero la demostración del teorema 5.5.4 se deja como ejercicio.

Teorema 5.5.5 Regla de la función impar

Si f es una función impar integrable sobre $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \tag{14}$$

DEMOSTRACIÓN Suponga que f es una función impar. Por la propiedad aditiva del intervalo, teorema 5.4.5, tenemos

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

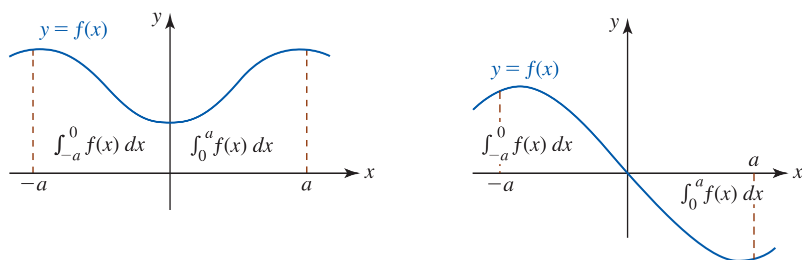
En la primera integral en el miembro izquierdo, sea $x = -t$, de modo que $dx = -dt$, y cuando $x = -a$ y $x = 0$, entonces $t = a$ y $t = 0$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) + \int_0^a f(x)\,dx \quad \leftarrow f(-t) = -f(t),\ f \text{ una función impar}$$
$$= \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx$$
$$= -\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx \quad \leftarrow \text{por (8) de la sección 5.4}$$

$$= -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \quad \leftarrow t \text{ era una variable de integración “ficticia”}$$
$$= 0.$$ ■

La cuestión importante en el teorema 5.5.5 es ésta: cuando una función integrable impar f se integra sobre un intervalo simétrico $[-a, a]$, no es necesario encontrar una antiderivada de f; el valor de la integral siempre es cero.

En la FIGURA 5.5.5 se muestran motivaciones geométricas para los resultados en los teoremas 5.5.4 y 5.5.5.



a) Función par: el valor de la integral definida sobre $[-a, 0]$ es el mismo que el valor sobre $[0, a]$

b) Función impar: el valor de la integral definida sobre $[-a, 0]$ es el opuesto que el valor sobre $[0, a]$

FIGURA 5.5.5 Regla de la función par en *a*); regla de la función impar en *b*)

EJEMPLO 10 Uso de la regla de la función par

Evalúe $\int_{-1}^{1} (x^4 + x^2)\,dx$.

Solución El integrando $f(x) = x^4 + x^2$ es una función polinomial cuyas potencias son todas pares, de modo que f necesariamente es una función par. Puesto que el intervalo de integración es el intervalo simétrico $[-1, 1]$, por el teorema 5.5.4 se concluye que es posible integrar sobre $[0, 1]$ y multiplicar el resultado por 2:

$$\int_{-1}^{1} (x^4 + x^2)\,dx = 2\int_{0}^{1} (x^4 + x^2)\,dx$$
$$= 2\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big]_0^1$$
$$= 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{15}.$$ ■

EJEMPLO 11 Uso de la regla de la función impar

Evalúe $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$.

Solución En este caso $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función impar sobre el intervalo simétrico $[-\pi/2, \pi/2]$. Así, por el teorema 5.5.5 de inmediato tenemos

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = 0.$$ ■

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

La forma de antiderivada del teorema fundamental del cálculo constituye una herramienta extremadamente importante y poderosa para evaluar integrales definidas. ¿Por qué molestarse con un burdo límite de una suma cuando el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ puede encontrarse al calcular $\int f(x)\,dx$ en los dos números a y b? Esto es cierto hasta cierto punto; no obstante, ya es hora de aprender otro hecho de las matemáticas. Hay funciones continuas para las cuales la

antiderivada $\int f(x)\,dx$ *no* puede expresarse en términos de *funciones elementales*: sumas, productos, cocientes y potencias de funciones polinomiales, trigonométricas, trigonométricas inversas, logarítmicas y exponenciales. La simple función continua $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ no tiene antiderivada que sea una función elemental. Sin embargo, aunque por el teorema 5.4.1 es posible afirmar que la integral definida $\int_0^1 \sqrt{x^3 + 1}\,dx$ existe, el teorema 5.5.1 no es de ninguna ayuda para encontrar su valor. La integral $\int_0^1 \sqrt{x^3 + 1}\,dx$ se denomina **no elemental**. Las integrales no elementales son importantes y aparecen en muchas aplicaciones como teoría de probabilidad y óptica. A continuación se presentan algunas integrales no elementales:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx, \quad \int \operatorname{sen} x^2\,dx, \quad \int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \text{y} \quad \int \frac{e^x}{x}\,dx.$$

Vea los problemas 71 y 72 en los ejercicios 5.5.

Ejercicios 5.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-19.

Fundamentos

En los problemas 1-42, use el teorema fundamental del cálculo proporcionado en el teorema 5.5.1 para evaluar la integral definida dada.

1. $\int_3^7 dx$

2. $\int_2^{10} (-4)\,dx$

3. $\int_{-1}^2 (2x + 3)\,dx$

4. $\int_{-5}^4 t^2\,dt$

5. $\int_1^3 (6x^2 - 4x + 5)\,dx$

6. $\int_{-2}^1 (12x^5 - 36)\,dx$

7. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

8. $\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta$

9. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 3t\,dt$

10. $\int_{1/2}^1 \operatorname{sen} 2\pi x\,dx$

11. $\int_{1/2}^{3/4} \frac{1}{u^2}\,du$

12. $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x}\,dx$

13. $\int_{-1}^1 e^x\,dx$

14. $\int_0^2 (2x - 3e^x)\,dx$

15. $\int_0^2 x(1 - x)\,dx$

16. $\int_3^2 x(x - 2)(x + 2)\,dx$

17. $\int_{-1}^1 (7x^3 - 2x^2 + 5x - 4)\,dx$

18. $\int_{-3}^{-1} (x^2 - 4x + 8)\,dx$

19. $\int_1^4 \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\,dx$

20. $\int_2^4 \frac{x^2 + 8}{x^2}\,dx$

21. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + x^2}\,dx$

22. $\int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx$

23. $\int_{-4}^{12} \sqrt{z + 4}\,dz$

24. $\int_0^{7/2} (2x + 1)^{-1/3}\,dx$

25. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}\,dx$

26. $\int_{-2}^1 \frac{t}{(t^2 + 1)^2}\,dt$

27. $\int_{1/2}^1 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{x^2}\,dx$

28. $\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{1 + 4\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

29. $\int_0^1 \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}\,dx$

30. $\int_{-1}^1 \frac{u^3 + u}{(u^4 + 2u^2 + 1)^5}\,du$

31. $\int_0^{\pi/8} \sec^2 2x\,dx$

32. $\int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{\pi/2}} x \csc x^2 \cot x^2\,dx$

33. $\int_{-1/2}^{3/2} (x - \cos \pi x)\,dx$

34. $\int_1^4 \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$

35. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$

36. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

37. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 + \cos\theta}{(\theta + \operatorname{sen}\theta)^2}\,d\theta$

38. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec x + \tan x)^2\,dx$

39. $\int_0^{3/4} \operatorname{sen}^2 \pi x\,dx$

40. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$

41. $\int_1^5 \frac{1}{1 + 2x}\,dx$

42. $\int_{-1}^1 \tan x\,dx$

En los problemas 43-48, use el teorema fundamental del cálculo proporcionado en el teorema 5.5.2 para encontrar la derivada indicada.

43. $\frac{d}{dx}\int_0^x te^t\,dt$

44. $\frac{d}{dx}\int_1^x \ln t\,dt$

45. $\frac{d}{dt}\int_2^t (3x^2 - 2x)^6\,dx$

46. $\frac{d}{dx}\int_x^9 \sqrt[3]{u^2 + 2}\,du$

47. $\frac{d}{dx}\int_3^{6x-1} \sqrt{4t + 9}\,dt$

48. $\frac{d}{dx}\int_\pi^{\sqrt{x}} \operatorname{sen} t^2\,dt$

En los problemas 49 y 50, use el teorema fundamental del cálculo proporcionado en el teorema 5.5.2 para encontrar $F'(x)$. [*Sugerencia*: Use dos integrales.]

49. $F(x) = \int_{3x}^{x^2} \frac{1}{t^3 + 1}\,dt$

50. $F(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{5x} \sqrt{t^2 + 1}\,dt$

En los problemas 51 y 52, compruebe el resultado dado al evaluar primero la integral definida y luego diferenciando.

51. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x (6t^2 - 8t + 5)\,dt = 6x^2 - 8x + 5$

52. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\pi^t \operatorname{sen}\frac{x}{3}\,dx = \operatorname{sen}\frac{t}{3}$

53. Considere la función $f(x) = \int_1^x \ln(2t + 1)\,dt$. Encuentre el valor funcional indicado.

a) $f(1)$ ***b)*** $f'(1)$
c) $f''(1)$ ***d)*** $f'''(1)$

54. Suponga que $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ y $G'(x) = f(x)$. Encuentre la expresión dada.

a) $G(x^2)$ ***b)*** $\dfrac{d}{dx}G(x^2)$

c) $G(x^3 + 2x)$ ***d)*** $\dfrac{d}{dx}G(x^3 + 2x)$

En los problemas 55 y 56, evalúe $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$ para la función f dada.

55. $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

56. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3, & x > 0 \end{cases}$

En los problemas 57-60, evalúe la integral definida de la función f continua por partes.

57. $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$, donde $f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

58. $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,dx$, donde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & 0 \leq x < \pi/2 \\ \cos x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

59. $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)\,dx$, donde $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < -1 \\ 4, & -1 \leq x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

60. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, donde $f(x) = \lfloor x \rfloor$ es la función entero mayor

En los problemas 61-66, proceda como en el ejemplo 8 para evaluar la integral definida dada.

61. $\displaystyle\int_{-3}^1 |x|\,dx$ **62.** $\displaystyle\int_0^4 |2x - 6|\,dx$

63. $\displaystyle\int_{-8}^3 \sqrt{|x| + 1}\,dx$ **64.** $\displaystyle\int_0^2 |x^2 - 1|\,dx$

65. $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi |\operatorname{sen} x|\,dx$ **66.** $\displaystyle\int_0^\pi |\cos x|\,dx$

En los problemas 67-70, proceda como en el inciso *b*) del ejemplo 9 y evalúe la integral definida dada usando la sustitución u indicada.

67. $\displaystyle\int_{1/2}^e \frac{(\ln 2t)^5}{t}\,dt; \quad u = \ln 2t$

68. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1}{(\tan^{-1} x)(1 + x^2)}\,dx; \quad u = \tan^{-1} x$

69. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-2x}}{e^{-2x} + 1}\,dx; \quad u = e^{-2x} + 1$

70. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx; \quad u = x^2$

≡ Aplicaciones

71. En matemáticas aplicadas, algunas funciones importantes se definen en términos de integrales no elementales. Una de estas funciones especiales se denomina **función error**, que se define como

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

a) Demuestre que $\operatorname{erf}(x)$ es una función creciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.
b) Demuestre que la función $y = e^{x^2}[1 + \sqrt{\pi}\operatorname{erf}(x)]$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 2,$$

y que $y(0) = 1$.

72. Otra función especial definida por una integral no elemental es la **función integral seno**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

La función $\operatorname{Si}(x)$ tiene una infinidad de puntos fronterizos relativos.

a) Encuentre los cuatro primeros números críticos para $x > 0$. Use la prueba de la segunda derivada para determinar si estos números críticos corresponden a un máximo o a un mínimo relativo.
b) Use un SAC para obtener la gráfica de $\operatorname{Si}(x)$. [*Sugerencia*: En *Mathematica*, la función integral seno se denota por SinIntegral[x].]

≡ Piense en ello

En los problemas 73 y 74, sean P una partición del intervalo indicado y x_k^* un número en el k-ésimo subintervalo. Determine el valor del límite dado.

73. $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^n (2x_k^* + 5)\,\Delta x_k; \quad [-1, 3]$

74. $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^n \cos\frac{x_k^*}{4}\,\Delta x_k; \quad [0, 2\pi]$

En los problemas 75 y 76, sean P una partición regular del intervalo indicado y x_k^* un número en el k-ésimo subintervalo. Establezca el resultado dado.

75. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \operatorname{sen} x_k^* = 2; \quad [0, \pi]$

76. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^n x_k^* = 0; \quad [-1, 1]$

En los problemas 77 y 78, evalúe la integral definida dada.

77. $\int_{-1}^{2}\left\{\int_{1}^{x} 12t^2\,dt\right\}dx$ **78.** $\int_{0}^{\pi/2}\left\{\int_{0}^{t} \operatorname{sen} x\,dx\right\}dt$

79. Demuestre la prueba de la función par, teorema 5.5.4.

80. Suponga que f es una función impar definida sobre un intervalo $[-4, 4]$. Además, suponga que f es diferenciable sobre el intervalo, $f(-2) = 3.5$, que f tiene ceros en -3 y 3 y números críticos -2 y 2.

a) ¿Cuál es $f(0)$?

b) Trace la gráfica aproximada de f.

c) Suponga que F es una función definida sobre $[-4, 4]$ por $F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt$. Encuentre $F(-3)$ y $F(3)$.

d) Trace una gráfica aproximada de F.

e) Encuentre los números críticos y los puntos de inflexión de F.

81. Determine si el siguiente razonamiento es correcto:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\,dt = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t\,dt)$$

$$= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\operatorname{sen} t\,dt) \leftarrow \begin{cases} u = \cos t \\ du = -\operatorname{sen} t\,dt \end{cases}$$

$$= -\int_{0}^{0} \sqrt{1-u^2}\,du = 0. \leftarrow \begin{cases} \text{Teorema 5.5.3} \\ \text{Definición 5.4.2}i) \end{cases}$$

82. Calcule las derivadas.

a) $\dfrac{d}{dx}\, x\int_{1}^{2x} \sqrt{t^3+7}\,dt$ *b*) $\dfrac{d}{dx}\, x\int_{1}^{4} \sqrt{t^3+7}\,dt$

≡ Problemas con calculadora/SAC

83. *a*) Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $f(x) = \cos^3 x$ y $g(x) = \operatorname{sen}^3 x$.

b) Con base en su interpretación de área neta con signo, use las gráficas del inciso *a*) para conjeturar los valores de $\int_0^{2\pi} \cos^3 x\,dx$ y $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 x\,dx$.

≡ Proyectos

84. Integración por dardos En este problema se ilustra un método para aproximar el área bajo una gráfica al "lanzar dardos". Suponga que deseamos encontrar el área A bajo la gráfica de $f(x) = \cos^3(\pi x/2)$ sobre el intervalo $[0, 1]$; es decir, se quiere aproximar $A = \int_0^1 \cos^3(\pi x/2)\,dx$.

Si se lanza, sin ningún intento particular de ser experto, un gran número de dardos, por ejemplo N, hacia el blanco cuadrado de 1×1 mostrado en la FIGURA 5.5.6 y n dardos se insertan en la región roja bajo la gráfica de $f(x) = \cos^3(\pi x/2)$, entonces es posible demostrar que la probabilidad de que un dardo se inserte en la región está dada por la relación de dos áreas:

$$\frac{\text{área de la región}}{\text{área del cuadrado}} = \frac{A}{1}.$$

Además, esta probabilidad teórica es aproximadamente la misma que la probabilidad empírica n/N:

$$\frac{A}{1} \approx \frac{n}{N} \quad \text{o} \quad A \approx \frac{n}{N}.$$

Para simular el lanzamiento de dardos hacia el blanco, use un SAC como *Mathematica* y su función de números aleatorios para generar una tabla de N pares ordenados (x, y), $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

a) Sea $N = 50$. Trace los puntos y la gráfica de f sobre el mismo conjunto de ejes coordenados. Use la figura para contar el número de éxitos n. Construya por lo menos 10 tablas diferentes de puntos aleatorios y gráficas. Para cada gráfica calcule la razón n/N.

b) Repita el inciso *a*) para $N = 100$.

c) Use el SAC para encontrar el valor exacto del área A y compare este valor con las aproximaciones obtenidas en los incisos *a*) y *b*).

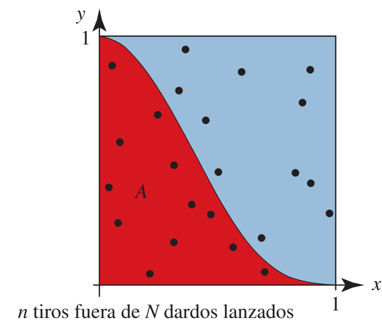


FIGURA 5.5.6 Blanco en el problema 84

85. Derrame de petróleo en expansión Un modelo matemático que puede usarse para determinar el tiempo t necesario para que un derrame de petróleo se evapore está dado por la fórmula

$$\frac{RT}{Pv} = \int_0^t \frac{KA(u)}{V_0}\,du,$$

donde $A(u)$ es el área del derrame en el instante u, RT/Pv es un término termodinámico adimensional, K es un coeficiente de transferencia de masa y V_0 es el volumen inicial del derrame.

a) Suponga que el derrame de petróleo se expande en forma circular cuyo radio inicial es r_0. Vea la FIGURA 5.5.7. Si el radio r del derrame crece a razón $dr/dt = C$ (en metros por segundo), resuelva para t en términos de los otros símbolos.

b) Valores típicos para RT/Pv y K son 1.9×10^6 (para el tridecano) y 0.01 mm/s, respectivamente. Si $C = 0.01$ m/s^2, $r_0 = 100$ m y $V_0 = 10\,000$ m^3, determine en cuánto tiempo se evapora el petróleo.

c) Use el resultado en el inciso *b*) para determinar al área final del derrame de petróleo.

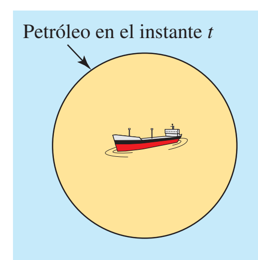
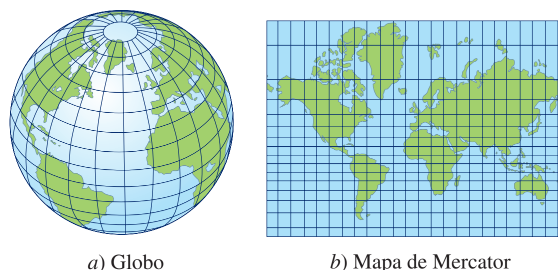


FIGURA 5.5.7 Derrame circular del petróleo en el problema 85

86. Proyección de Mercator y la integral de sec x En términos generales, una mapa de Mercator es una representación de un mapa global tridimensional sobre una superficie tridimensional. Vea la FIGURA 5.5.8. Encuentre y estudie el artículo "Mercator's World Map and the Calculus", Phillip M. Tuchinsky, UMAP, Unit 206, Newton, MA, 1978. Escriba un informe breve que resuma el artículo y por qué **Gerhardus Mercator** (c. 1569) necesitaba el valor de la integral definida $\int_0^{\theta_0} \sec x\, dx$ para llevar a cabo sus construcciones.



a) Globo *b*) Mapa de Mercator

FIGURA 5.5.8 Globo y proyección de Mercator en el problema 86

Revisión del capítulo 5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-19.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-16, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. Si $f'(x) = 3x^2 + 2x$, entonces $f(x) = x^3 + x^2$. _____
2. $\sum_{k=2}^{6} (2k - 3) = \sum_{j=0}^{4} (2j + 1)$ _____
3. $\sum_{k=1}^{40} 5 = \sum_{k=1}^{20} 10$ _____
4. $\int_1^3 \sqrt{t^2 + 7}\, dt = -\int_3^1 \sqrt{t^2 + 7}\, dt$ _____
5. Si f es continua, entonces $\int_0^1 f(t)\, dt + \int_1^0 f(x) dx = 0$. _____
6. Si f es integrable, entonces f es continua. _____
7. $\int_0^1 (x - x^3)\, dx$ es el área bajo la gráfica de $y = x - x^3$ sobre el intervalo $[0, 1]$. _____
8. Si $\int_a^b f(x)\, dx > 0$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx$ es el área bajo la gráfica de f sobre $[a, b]$. _____
9. Si P es una partición de $[a, b]$ en n subintervalos, entonces $n \to \infty$ implica $\|P\| \to 0$. _____
10. Si $F'(x) = 0$ para toda x, entonces $F(x) = C$ para toda x. _____
11. Si f es una función impar integrable sobre $[-\pi, \pi]$, entonces $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0$. _____
12. $\int_{-1}^1 |x|\, dx = 2\int_0^1 x\, dx$ _____
13. $\int \text{sen}\, x\, dx = \cos x + C$ _____
14. $\int x \cos x\, dx = x\, \text{sen}\, x + \cos x + C$ _____
15. $\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)$ _____
16. La función $F(x) = \int_{-5}^{2x} (t + 4)e^{-t}\, dt$ es creciente sobre el intervalo $[-2, \infty)$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-16, llene los espacios en blanco.

1. Si G es una antiderivada de una función f, entonces $G'(x) =$ __________.

2. $\displaystyle\int \frac{d}{dx}x^2\,dx =$ __________.

3. Si $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$, entonces $f(x) =$ __________.

4. El valor de $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_3^x \sqrt{t^2+5}\,dt$ en $x = 1$ es __________.

5. Si g es diferenciable, entonces $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^b f(t)\,dt =$ __________.

6. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{5x}^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt =$ __________.

7. Al usar notación sigma, la suma $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \frac{5}{11}$ puede expresarse como __________.

8. El valor numérico de $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}(3k^2 - 2k)$ es __________.

9. Si $u = t^2 + 1$, entonces la integral definida $\displaystyle\int_2^4 t(t^2+1)^{1/3}\,dt$ se vuelve $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{__}^{__} u^{1/3}\,du$.

10. El área bajo la gráfica de $f(x) = 2x$ sobre el intervalo $[0, 2]$ es __________, y el área neta con signo entre la gráfica de $f(x) = 2x$ y el eje x sobre $[-1, 2]$ es __________.

11. Si el intervalo [1, 6] se parte en cuatro subintervalos determinados por $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 5$ y $x_4 = 6$, la norma de la partición es __________.

12. Una partición de un intervalo $[a, b]$ donde todos los subintervalos tienen el mismo ancho se denomina partición __________ .

13. Si P es una partición de [0, 4] y x_k^* es un número en el k-ésimo subintervalo, entonces $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k^*}\,\Delta x_k$ es la definición de la integral definida __________. Por el teorema fundamental del cálculo, el valor de esta integral definida es __________.

14. Si $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx = 11$ y $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = 15$, entonces $\displaystyle\int_4^6 f(x)\,dx =$ ____________.

15. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left\{\int_0^x e^{-t}\,dt\right\}dx =$ __________ y $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left\{\int_0^x e^{-t}\,dt\right\}dx =$ __________.

16. Para $t > 0$, el área neta con signo $\displaystyle\int_0^t (x^3 - x^2)\,dx = 0$ cuando $t =$ ____________.

C. Ejercicios

En los problemas 1-20, evalúe la integral dada.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(4x^3 - 6x^2 + 2x - 1)\,dx$

2. $\displaystyle\int_1^9 \frac{6}{\sqrt{x}}\,dx$

3. $\displaystyle\int (5t+1)^{100}\,dt$

4. $\displaystyle\int w^2\sqrt{3w^3+1}\,dw$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}(\operatorname{sen} 2x - 5\cos 4x)\,dx$

6. $\displaystyle\int_{\pi^2/9}^{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\,dz$

7. $\displaystyle\int_4^4(-2x^2 + x^{1/2})\,dx$

8. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\tan^2 x\,dx$

9. $\int \cot^6 8x \csc^2 8x\, dx$

10. $\int \csc 3x \cot 3x\, dx$

11. $\int (4x^2 - 16x + 7)^4(x - 2)\, dx$

12. $\int (x^2 + 2x - 10)^{2/3}(5x + 5)\, dx$

13. $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x - 16}}\, dx$

14. $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x - 16}\, dx$

15. $\int_0^4 \frac{x}{16 + x^2}\, dx$

16. $\int_0^4 \frac{1}{16 + x^2}\, dx$

17. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx$

18. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx$

19. $\int \tan 10x\, dx$

20. $\int \cot 10x\, dx$

21. Suponga que $\int_0^5 f(x)\, dx = -3$ y $\int_0^7 f(x)\, dx = 2$. Evalúe $\int_5^7 f(x)\, dx$.

22. Suponga que $\int_1^4 f(x)\, dx = 2$ y $\int_4^9 f(x)\, dx = -8$. Evalúe $\int_1^9 f(x)\, dx$.

En los problemas 23-28, evalúe la integral dada.

23. $\int_0^3 (1 + |x - 1|)\, dx$

24. $\int_0^1 \frac{d}{dt}\left[\frac{10t^4}{(2t^3 + 6t + 1)^2}\right] dt$

25. $\int_{\pi/2}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^{10} t}{16t^7 + 1}\, dt$

26. $\int_{-1}^1 t^5 \operatorname{sen} t^2\, dt$

27. $\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + 3x^2}\, dx$

28. $\int_{-2}^2 f(x)\, dx$, donde $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$

En los problemas 29 y 30, encuentre el límite dado.

29. $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}$

30. $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$

31. En la FIGURA 5.R.1 se muestra un cubo con las dimensiones dadas (en pies) que se llena a razón constante de $dV/dt = \frac{1}{4}$ pies^3/min. Cuando $t = 0$, en la balanza se lee 31.2 lb. Si el agua pesa 62.4 lb/pie^3, ¿cuál es la lectura de la balanza luego de 8 minutos? ¿Y cuando el cubo está lleno? [*Sugerencia*: Vea la página FM-2 para la fórmula para el volumen del tronco de un cono. También ignore el peso del cubo.]

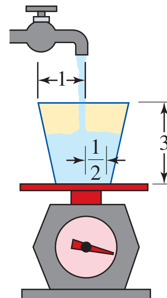


FIGURA 5.R.1 Cubo y balanza en el problema 31

32. La **torre de Hanoi** es una pila de discos circulares, cada uno de los cuales es más grande que el de arriba, colocados en un mástil. Vea la FIGURA 5.R.2. Una vez, un antiguo rey ordenó que esta torre debía construirse con discos de oro con las siguientes especificaciones: el ancho de cada disco debía ser un dedo más grande que el del disco de arriba. El hueco por los centros de los discos debía medir un dedo de ancho de diámetro, y el disco superior debía medir dos dedos de diámetro. Suponga que el ancho de un dedo es 1.5 cm, que el oro pesa 19.3 g/cm^3 y que su valor es \$14 por gramo.

a) Encuentre una fórmula para el valor del oro en la torre de Hanoi del rey si la torre tiene *n* discos.

b) El número normal de discos de oro en la torre de Hanoi es 64. ¿Cuál es el valor del oro en la torre?

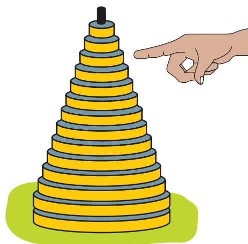


FIGURA 5.R.2 Torre de Hanoi en el problema 32

33. Considere la función uno a uno $f(x) = x^3 + x$ sobre el intervalo $[1, 2]$. Vea la FIGURA 5.R.3. Sin encontrar f^{-1}, determine el valor de

$$\int_{f(1)}^{f(2)} f^{-1}(x)\,dx.$$

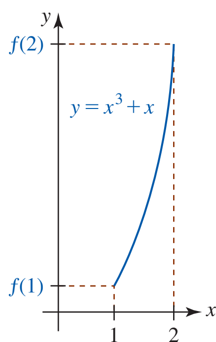
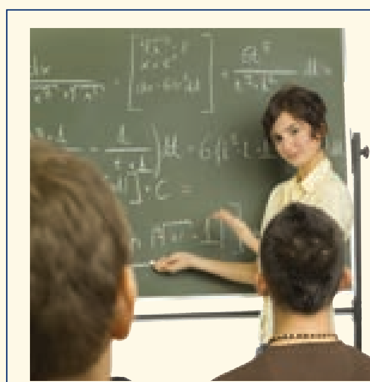


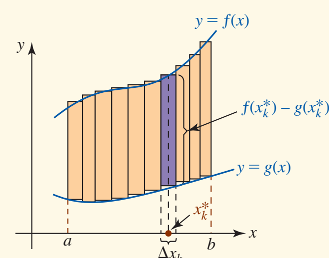
FIGURA 5.R.3 Gráfica para el problema 33

Capítulo 6

Aplicaciones de la integral







En este capítulo Aunque en la sección 6.2 se volverá al problema de encontrar áreas por integración definida, en las secciones posteriores de este capítulo veremos que la integral definida tiene muchas otras interpretaciones, además del área.

El capítulo empieza con una aplicación de la integral indefinida.

6.1 Otro repaso al movimiento rectilíneo

Introducción El capítulo 4, *Aplicaciones de la derivada*, empezó con el concepto de movimiento rectilíneo. Si $s = f(t)$ es la función de posición de un objeto que se mueve en línea recta, entonces sabemos que

$$\text{velocidad} = v(t) = \frac{ds}{dt} \quad \text{y} \quad \text{aceleración} = a(t) = \frac{dv}{dt}.$$

Como una consecuencia inmediata de la definición de la antiderivada, las cantidades s y v pueden escribirse como integrales indefinidas

$$s(t) = \int v(t)\, dt \quad \text{y} \quad v(t) = \int a(t)\, dt. \tag{1}$$

Si se conocen la **posición inicial** $s(0)$ y la **velocidad inicial** $v(0)$, es posible encontrar valores específicos de las constantes de integración usadas en (1).

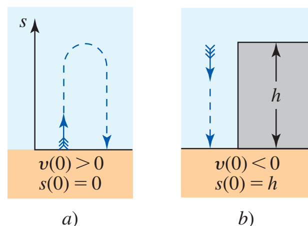


FIGURA 6.1.1 Condiciones iniciales

Recuerde que cuando el cuerpo se mueve horizontalmente sobre una recta, la dirección positiva es hacia la derecha. Para movimiento en una recta vertical, tomamos la dirección positiva hacia arriba. Como se muestra en la FIGURA 6.1.1, si una flecha se dispara hacia arriba desde el nivel del suelo, entonces las **condiciones iniciales** son $s(0) = 0$, $v(0) > 0$, mientras que si la flecha se dispara hacia abajo desde una altura inicial, por ejemplo h metros del suelo, entonces las condiciones iniciales son $s(0) = h$, $v(0) < 0$. Sobre un cuerpo que se mueve en una recta vertical cerca de la superficie terrestre, como la flecha disparada hacia arriba, actúa la fuerza de gravedad. Esta fuerza provoca la aceleración de los cuerpos. Cerca de la superficie de la Tierra se supone que la aceleración debida a la gravedad, $a(t) = -g$, es una constante. La magnitud g de esta aceleración es aproximadamente

$$32 \text{ pies/s}^2, \quad 9.8 \text{ m/s}^2 \quad \text{o bien,} \quad 980 \text{ cm/s}^2.$$

EJEMPLO 1 Movimiento de un proyectil

Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 49 m/s. ¿Cuál es la velocidad en $t = 2$ s? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil? ¿Cuánto tiempo permanece en el aire el proyectil? ¿Cuál es la velocidad de impacto?

Solución Si se empieza con $a(t) = -9.8$, por integración indefinida obtenemos

$$v(t) = \int (-9.8)\, dt = -9.8t + C_1. \tag{2}$$

A partir de la condición inicial dada $v(0) = 49$, vemos que (2) implica $C_1 = 49$. Por tanto,

$$v(t) = -9.8t + 49,$$

y así $v(2) = -9.8(2) + 49 = 29.4$ m/s. Observe que $v(2) > 0$ implica que el proyectil se desplaza hacia arriba.

Luego, la altitud del proyectil, medida a partir del nivel del suelo, es la integral indefinida de la función velocidad,

$$s(t) = \int v(t)\, dt = \int (-9.8t + 49)\, dt = -4.9t^2 + 49t + C_2. \tag{3}$$

Puesto que el proyectil inicia su movimiento a partir del nivel del suelo, $s(0) = 0$ y (3) proporcionan $C_2 = 0$. Por tanto,

$$s(t) = -4.9t^2 + 49t. \tag{4}$$

Cuando el proyectil alcanza su altura máxima, $v(t) = 0$. Luego, al resolver $-9.8t + 49 = 0$ obtenemos $t = 5$. Por (4) encontramos que la altura correspondiente es $s(5) = 122.5$ m.

Finalmente, para encontrar el instante en que el proyectil choca contra el suelo, resolvemos $s(t) = 0$ o $-4.9t^2 + 49t = 0$. Cuando la última ecuación se escribe como $-4.9t(t - 10) = 0$, vemos que el proyectil permanece en el aire 10 s. La velocidad de impacto es $v(10) = -49$ m/s. ■

Cuando se ignora la resistencia del aire, la magnitud de la velocidad de impacto (rapidez) es la misma que la velocidad inicial hacia arriba desde el nivel del suelo. Vea el problema 32 en los ejercicios 6.1. Esto no es cierto cuando tomamos en consideración la resistencia del aire.

EJEMPLO 2 Movimiento de un proyectil

Una pelota de tenis se lanza verticalmente hacia abajo desde una altura de 54 pies con una velocidad inicial de 8 pies/s. ¿Cuál es la velocidad de impacto si la pelota golpea en la cabeza a una persona de 6 pies de estatura? Vea la FIGURA 6.1.2.

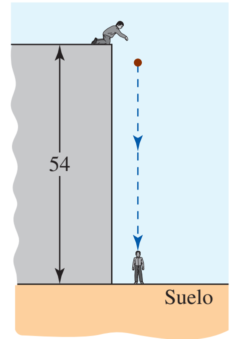


FIGURA 6.1.2 Lanzamiento de la pelota en el ejemplo 2

Solución En este caso $a(t) = -32$, $s(0) = 54$ y, puesto que la pelota se lanza hacia abajo, $v(0) = -8$. Luego,

$$v(t) = \int (-32)\,dt = -32t + C_1.$$

Al usar la velocidad inicial $v(0) = -8$ encontramos $C_1 = -8$. En consecuencia,

$$v(t) = -32t - 8.$$

Al continuar encontramos

$$s(t) = \int (-32t - 8)\,dt = -16t^2 - 8t + C_2.$$

Cuando $t = 0$, sabemos que $s = 54$ y así la última ecuación implica $C_2 = 54$. Entonces

$$s(t) = -16t^2 - 8t + 54.$$

Para determinar el instante que corresponde a $s = 6$, resolvemos

$$-16t^2 - 8t + 54 = 6.$$

Al simplificar obtenemos $-8(2t - 3)(t + 2) = 0$ y $t = \frac{3}{2}$. Entonces, la velocidad de la pelota cuando golpea a la persona es $v\left(\frac{3}{2}\right) = -56$ pies/s. ■

Distancia La **distancia total** que un objeto recorre rectilíneamente en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ está dada por la integral definida

$$\text{distancia total} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt. \tag{5}$$

En (5) se requiere el valor absoluto porque el objeto puede moverse a la izquierda, de modo que durante algún tiempo tiene velocidad negativa.

EJEMPLO 3 Distancia recorrida

La función de posición de un objeto que se mueve sobre una recta de coordenadas es $s(t) = t^2 - 6t$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la distancia recorrida en el intervalo de tiempo [0, 9].

Solución La función velocidad $v(t) = ds/dt = 2t - 6 = 2(t - 3)$ muestra que el movimiento es como se indica en la FIGURA 6.1.3; a saber: $v < 0$ para $0 \le t < 3$ (movimiento a la izquierda) y $v \ge 0$ para $3 \le t \le 9$ (movimiento a la derecha). Entonces, por (5) la distancia recorrida es

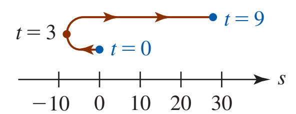


FIGURA 6.1.3 Representación del movimiento del objeto en el ejemplo 3

$$\begin{aligned}\int_0^9 |2t - 6|\,dt &= \int_0^3 |2t - 6|\,dt + \int_3^9 |2t - 6|\,dt \\ &= \int_0^3 -(2t - 6)\,dt + \int_3^9 (2t - 6)\,dt \\ &= (-t^2 + 6t)\Big]_0^3 + (t^2 - 6t)\Big]_3^9 = 45 \text{ cm.}\end{aligned}$$

Por supuesto, el último resultado debe ser consistente con la cifra obtenida al simplemente contar las unidades en la figura 6.1.3 entre $s(0)$ y $s(3)$, y entre $s(3)$ y $s(9)$. ■

Ejercicios 6.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

Fundamentos

En los problemas 1-6, un cuerpo se mueve en línea recta con velocidad $v(t)$. Encuentre la función posición $s(t)$.

1. $v(t) = 6$; $s = 5$ cuando $t = 2$
2. $v(t) = 2t + 1$; $s = 0$ cuando $t = 1$
3. $v(t) = t^2 - 4t$; $s = 6$ cuando $t = 3$
4. $v(t) = \sqrt{4t + 5}$; $s = 2$ cuando $t = 1$

5. $v(t) = -10\cos(4t + \pi/6)$; $s = \frac{5}{4}$ cuando $t = 0$

6. $v(t) = 2$ sen $3t$; $s = 0$ cuando $t = \pi$

En los problemas 7-12, un cuerpo se mueve en línea recta con aceleración $a(t)$. Encuentre $v(t)$ y $s(t)$.

7. $a(t) = -5$; $v = 4$ y $s = 2$ cuando $t = 1$

8. $a(t) = 6t$; $v = 0$ y $s = -5$ cuando $t = 2$

9. $a(t) = 3t^2 - 4t + 5$; $v = -3$ y $s = 10$ cuando $t = 0$

10. $a(t) = (t-1)^2$; $v = 4$ y $s = 6$ cuando $t = 1$

11. $a(t) = 7t^{1/3} - 1$; $v = 50$ y $s = 0$ cuando $t = 8$

12. $a(t) = 100\cos 5t$; $v = -20$ y $s = 15$ cuando $t = \pi/2$

En los problemas 13-18, un objeto se mueve en línea recta según la función posición dada. Si s se mide en centímetros, encuentre la distancia total recorrida por el objeto en el instante de tiempo indicado.

13. $s(t) = t^2 - 2t$; $[0, 5]$

14. $s(t) = -t^2 + 4t + 7$; $[0, 6]$

15. $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$; $[0, 4]$

16. $s(t) = t^4 - 32t^2$; $[1, 5]$

17. $s(t) = 6$ sen πt; $[1, 3]$

18. $s(t) = (t-3)^2$; $[2, 7]$

Aplicaciones

19. El conductor de un automóvil que se desplaza en línea recta a velocidad constante de 60 mi/h aparta por 2 s la vista de la carretera. ¿Cuántos pies recorre el automóvil en este instante?

20. Una pelota se deja caer (a partir del reposo) desde una altura de 144 pies. ¿En cuánto tiempo la pelota llega al suelo? ¿A qué velocidad choca contra el suelo?

21. Un huevo se suelta desde la parte superior de un edificio y choca contra el suelo después de 4 s desde que fue soltado. ¿Cuál es la altura del edificio?

22. Una piedra se deja caer en un pozo y el choque de ésta con el agua se escucha 2 s después. Si la velocidad del sonido en el aire es 1 080 pies/s, encuentre la profundidad del pozo.

23. Una flecha se proyecta verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 24.5 m/s. ¿A qué altura llega?

24. ¿Cuán alto llegaría la flecha en el problema 23 en el planeta Marte, donde $g = 3.6$ m/s?

25. Una pelota de golf se lanza verticalmente hacia arriba desde el borde del techo de un edificio de 384 pies de altura con una velocidad inicial de 32 pies/s. ¿En qué instante golpea la pelota el suelo?

26. En el problema 25, ¿cuál es la velocidad de la pelota de golf cuando pasa frente a un observador situado en una ventana situada a 256 pies del suelo?

27. Una persona arroja un malvavisco hacia abajo con una velocidad inicial de 16 pies/s desde una ventana que está a 102 pies del nivel del suelo. Si el malvavisco golpea la cabeza de una persona de 6 pies de estatura, ¿cuál es la velocidad de impacto?

28. La persona cuya cabeza fue golpeada en el problema 27 sube hasta la parte superior de una escalera de 22 pies de altura y arroja una roca verticalmente con una velocidad inicial de 96 pies/s. Si la roca choca contra el culpable en el piso a 102 pies, ¿cuál es la velocidad de impacto?

Piense en ello

29. En marzo de 1979, la sonda espacial *Voyager 1* fotografió la erupción de un volcán activo en Io, una de las lunas de Júpiter. Encuentre la velocidad de lanzamiento de una roca desde el volcán Loki si la roca alcanza una altitud de 200 km por arriba de la cima del volcán. En Io, la aceleración debida a la gravedad es $g = 1.8$ m/s^2.

30. Como se muestra en la FIGURA 6.1.4, desde un punto a 30 pies de un poste de 25 pies de altura se arroja verticalmente hacia abajo una pelota desde una altura de 25 pies con una velocidad inicial de 2 pies/s.

a) Encuentre la razón en que la sombra de la pelota se mueve hacia la base del poste.

b) Encuentre la razón en que la sombra de la pelota se mueve hacia la base del poste en $t = \frac{1}{2}$.

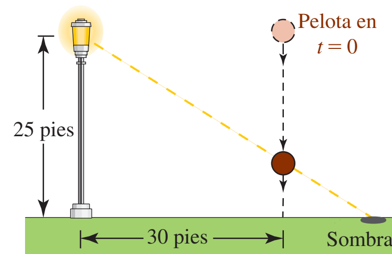


FIGURA 6.1.4 Poste en el problema 30

31. Si un cuerpo se mueve rectilíneamente con aceleración constante a y $v = v_0$ cuando $s = 0$, demuestre que

$$v^2 = v_0^2 + 2as. \quad \left[\textit{Sugerencia: } \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v.\right]$$

32. Demuestre que, cuando se ignora la resistencia del aire, un proyectil disparado verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo choca de nuevo contra el suelo con una velocidad igual a la velocidad inicial v_0.

33. Suponga que la aceleración debida a la gravedad en un planeta es igual a la mitad de la aceleración en la Tierra. Demuestre que una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde la superficie del planeta alcanza una altura máxima que es igual al doble de la altura en la Tierra cuando se aplica la misma velocidad inicial.

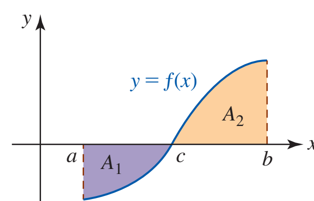
34. En el problema 33, suponga que la velocidad inicial de la pelota sobre el planeta es v_0 y que la velocidad inicial de la pelota sobre la Tierra es $2v_0$. Compare las alturas máximas alcanzadas. Determine la velocidad inicial de la pelota sobre la Tierra (en términos de v_0) de modo que la máxima altura alcanzada sea la misma que sobre el planeta.

6.2 Otro repaso al área

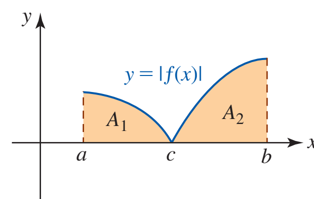
Introducción Si f es una función que asume valores tanto positivos como negativos sobre $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ no representa el área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. Como vio en la sección 5.4, el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse como al *área neta con signo* entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[a, b]$. En esta sección investigamos dos problemas de área:

- Encontrar el **área total** de una región acotada por la gráfica de f y el eje x sobre un intervalo $[a, b]$.
- Encontrar el **área de la región** acotada entre dos gráficas sobre un intervalo $[a, b]$.

Veremos que el primer problema es justo un caso especial del segundo problema.



a) La integral definida de f sobre $[a, b]$ no es área



b) La integral definida de $|f|$ sobre $[a, b]$ es área

FIGURA 6.2.1 El área total es $A = A_1 + A_2$

Área total Suponga que la función $y = f(x)$ es continua sobre el intervalo $[a, b]$ y que $f(x) < 0$ sobre $[a, c)$ y que $f(x) \geq 0$ sobre $[c, b]$. El **área total** es el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Para encontrar esta área se emplea el valor absoluto de la función $y = |f(x)|$, que es no negativa para toda x en $[a, b]$. Recuerde que $|f(x)|$ está definida por partes. Para la función f que se muestra en la FIGURA 6.2.1*a*), $f(x) < 0$ sobre el intervalo $[a, c)$ y $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo $[c, b]$. Por tanto,

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{para } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{para } f(x) \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Como se muestra en la figura 6.2.1*b*), la gráfica de $y = |f(x)|$ sobre el intervalo $[a, c)$ se obtiene al reflejar esa porción de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x. Sobre el intervalo $[c, b]$, donde $f(x) \geq 0$, las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$ son las mismas. Para encontrar el área total $A = A_1 + A_2$ mostradas en la figura 6.2.1*b*) usamos la propiedad aditiva del intervalo de la integral definida junto con (1):

◀ Vea el teorema 5.4.5.

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|\,dx &= \int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^b |f(x)|\,dx \\ &= \int_a^c (-f(x))\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Las ideas del análisis precedente se resumen en la siguiente definición.

Definición 6.2.1 Área total

Si $y = f(x)$ es continua sobre $[a, b]$, entonces el **área total** A acotada por su gráfica y el eje x sobre el intervalo está dada por

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Área total

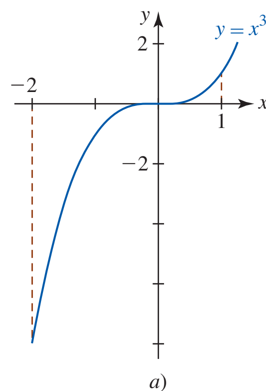
Encuentre el área total acotada por la gráfica de $y = x^3$ y el eje x sobre $[-2, 1]$.

Solución Por (2) se tiene

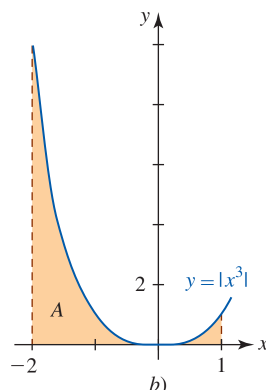
$$A = \int_{-2}^{1} |x^3|\,dx.$$

En la FIGURA 6.2.2 comparamos la gráfica de $y = x^3$ y la gráfica de $y = |x^3|$. Puesto que $x^3 < 0$ para $x < 0$, se tiene sobre $[-2, 1]$,

$$|f(x)| = \begin{cases} -x^3, & -2 \leq x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$



a)



b)

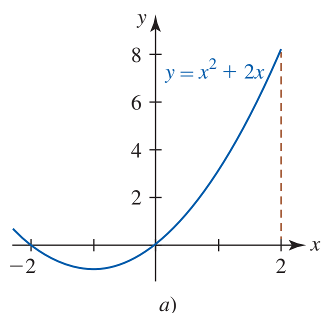
FIGURA 6.2.2 Gráfica de la función y área en el ejemplo 1

Entonces, por (2) de la definición 6.2.1, el área que se busca es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} |x^3|\, dx \\ &= \int_{-2}^{0} |x^3|\, dx + \int_{0}^{1} |x^3|\, dx \\ &= \int_{-2}^{0} (-x^3)\, dx + \int_{0}^{1} x^3\, dx \\ &= -\frac{1}{4}x^4\Big]_{-2}^{0} + \frac{1}{4}x^4\Big]_{0}^{1} \\ &= 0 - \left(-\frac{16}{4}\right) + \frac{1}{4} - 0 = \frac{17}{4}. \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 2 Área total

Encuentre el área total acotada por la gráfica de $y = x^2 + 2x$ y el eje x sobre $[-2, 2]$.



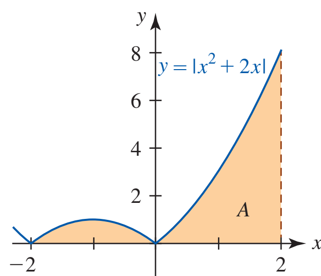


FIGURA 6.2.3 Gráfica y área en el ejemplo 2

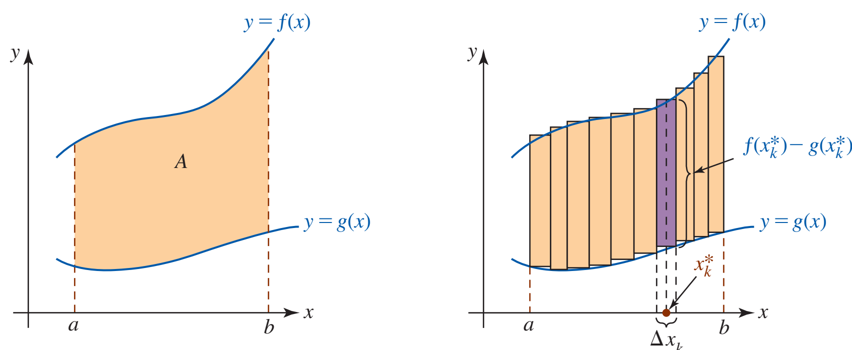
Solución Las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$ se muestran en la FIGURA 6.2.3. Luego, por la figura 6.2.3*a*), vemos que sobre $[-2, 2]$,

$$|f(x)| = \begin{cases} -(x^2 + 2x), & -2 \le x < 0 \\ x^2 + 2x, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

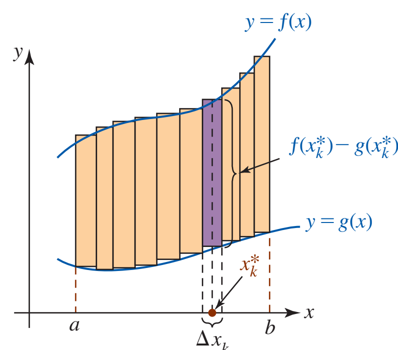
En consecuencia, el área total acotada por la gráfica de f sobre el intervalo $[-2, 2]$ y el eje x es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} |x^2 + 2x|\, dx \\ &= \int_{-2}^{0} |x^2 + 2x|\, dx + \int_{0}^{2} |x^2 + 2x|\, dx \\ &= \int_{-2}^{0} -(x^2 + 2x)\, dx + \int_{0}^{2} (x^2 + 2x)\, dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big]_{-2}^{0} + \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big]_{0}^{2} \\ &= 0 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) + \left(\frac{8}{3} + 4\right) - 0 = 8. \end{aligned}$$ ■

Área acotada por dos gráficas El análisis anterior es un caso especial del problema más general de encontrar el **área de la región acotada** entre la gráfica de dos funciones f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Vea la FIGURA 6.2.4*a*). El área *bajo* la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ puede interpretarse como el área de la región



a) $f(x) \ge g(x)$ sobre $[a, b]$



b) Construcción de n rectángulos entre dos gráficas

FIGURA 6.2.4 Área A acotada entre dos gráficas

acotada por la gráfica de f y la gráfica de la función $y = 0$ (el eje x) y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Construcción de una integral Suponga que $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son continuas sobre $[a, b]$ y que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo. Sea P una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. Si escogemos un punto muestra x_k^* en cada subintervalo, es posible construir n rectángulos correspondientes que tengan el área

La hipótesis de que $f(x) \geq g(x)$ sobre el intervalo significa que las gráficas de f y g pueden tocarse pero no cruzarse mutuamente.

$$A_k = [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\,\Delta x_k.$$

Vea la figura 6.2.4*b*). El área A de la región acotada por las dos gráficas sobre el intervalo $[a, b]$ es aproximada por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\,\Delta x_k,$$

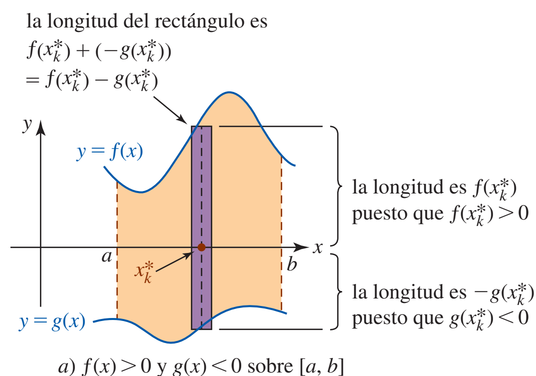
lo cual a su vez sugiere que el área es

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\,\Delta x_k.$$

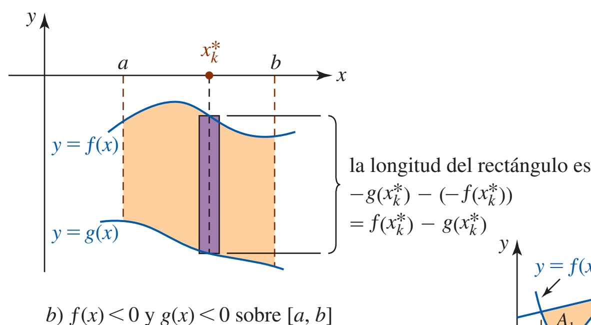
Puesto que f y g son continuas, también lo es $f - g$. Entonces, el límite anterior existe y, por definición, la integral definida

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx. \qquad (3)$$

También (3) es válida para las regiones en que una o ambas funciones f y g tienen valores negativos. Vea la FIGURA 6.2.5. Sin embargo, (3) *no* es válida sobre un intervalo $[a, b]$ donde las gráficas de f y g se cruzan en el intervalo. Observe en la FIGURA 6.2.6 que g es la gráfica superior sobre los intervalos (a, c_1) y (c_2, b), mientras que f es la gráfica superior sobre el intervalo (c_1, c_2). En el caso más general, tenemos la siguiente definición.



a) $f(x) > 0$ y $g(x) < 0$ sobre $[a, b]$



b) $f(x) < 0$ y $g(x) < 0$ sobre $[a, b]$

FIGURA 6.2.5 Las gráficas de f y g pueden estar por abajo del eje x

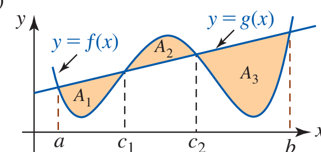


FIGURA 6.2.6 Las gráficas de f y g se cortan entre sí sobre $[a, b]$

Definición 6.2.2 Área acotada por dos gráficas

Si f y g son funciones continuas sobre un intervalo $[a, b]$, entonces el **área A de la región** acotada por sus gráficas sobre el intervalo está dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx. \qquad (4)$$

Observe que (4) se reduce a (2) cuando $g(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$. Antes de usar las fórmulas (3) o (4), se le pide trazar las gráficas necesarias. Si las curvas se cruzan sobre el interva-

lo, entonces como hemos visto en la figura 6.2.6, la posición relativa de las curvas cambia. En cualquier caso, sobre cualquier subintervalo de $[a, b]$, el integrando idóneo siempre es

(gráfica superior) − (gráfica inferior).

Así como en (1), el valor absoluto del integrando está dado por

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} -(f(x) - g(x)), & \text{para } f(x) - g(x) < 0 \\ f(x) - g(x), & \text{para } f(x) - g(x) \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Una manera más práctica de interpretar (5) consiste en trazar las gráficas de f y g con precisión y determinar visualmente que:

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} g(x) - f(x), & \text{siempre que } g \text{ es la gráfica superior} \\ f(x) - g(x), & \text{siempre que } f \text{ es la gráfica superior} \end{cases}$$

En la figura 6.2.6, el área A acotada por las gráficas de f y g sobre $[a, b]$ es

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= \int_a^{c_1} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{c_1}^{c_2} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{c_2}^{b} |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= \int_a^{c_1} \underset{\uparrow\ g \text{ es la gráfica superior}}{[g(x) - f(x)]}\, dx + \int_{c_1}^{c_2} \underset{\uparrow\ f \text{ es la gráfica superior}}{[f(x) - g(x)]}\, dx + \int_{c_2}^{b} \underset{\uparrow\ g \text{ es la gráfica superior}}{[g(x) - f(x)]}\, dx. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$.

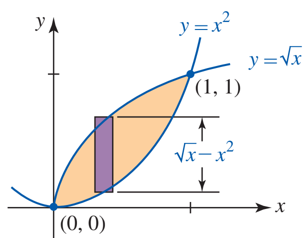


FIGURA 6.2.7 Área en el ejemplo 3

Solución Como se muestra en la FIGURA 6.2.7, la región en cuestión se localiza en el primer cuadrante. Puesto que 0 y 1 son las soluciones de la ecuación $x^2 = \sqrt{x}$, las gráficas se cortan en los puntos (0, 0) y (1, 1). En otras palabras, la región se encuentra entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$. Puesto que $y = \sqrt{x}$ es la gráfica superior sobre el intervalo (0, 1), se concluye que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2x$ y $y = -x + 4$ sobre el intervalo $[-4, 2]$.

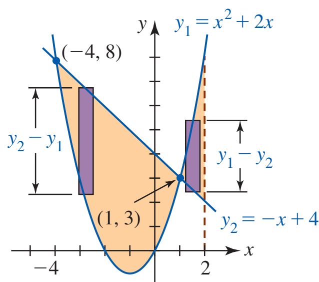


FIGURA 6.2.8 Área en el ejemplo 4

Solución Las funciones dadas se denotan por

$$y_1 = x^2 + 2x \qquad \text{y} \qquad y_2 = -x + 4.$$

Como se muestra en la FIGURA 6.2.8, las gráficas se cortan sobre el intervalo $[-4, 2]$.

Para encontrar los puntos de intersección resolvemos la ecuación $x^2 + 2x = -x + 4$ o $x^2 + 3x - 4 = 0$ y encontramos que $x = -4$ y $x = 1$. El área en cuestión es la suma de las áreas $A = A_1 + A_2$:

$$A = \int_{-4}^{2} |y_2 - y_1|\, dx = \int_{-4}^{1} |y_2 - y_1|\, dx + \int_{1}^{2} |y_2 - y_1|\, dx.$$

Pero como $y_2 = -x + 4$ es la gráfica superior sobre el intervalo $(-4, 1)$ y $y_1 = x^2 + 2x$ es la gráfica superior sobre el intervalo $(1, 2)$, es posible escribir

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{1} [(-x + 4) - (x^2 + 2x)]\, dx + \int_{1}^{2} [(x^2 + 2x) - (-x + 4)]\, dx \\ &= \int_{-4}^{1} (-x^2 - 3x + 4)\, dx + \int_{1}^{2} (x^2 + 3x - 4)\, dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right)\Big]_{-4}^{1} + \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x\right)\Big]_{1}^{2} \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16\right) + \left(\frac{8}{3} + 6 - 8\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right) = \frac{71}{3}. \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 5 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área de las cuatro regiones acotadas por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ que se muestran en la FIGURA 6.2.9.

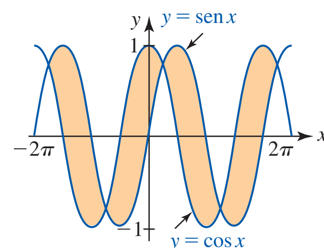


FIGURA 6.2.9 Cada una de las cuatro regiones tiene la misma área en el ejemplo 5

Solución Hay una infinidad de regiones acotadas por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ y el área de cada región es la misma. En consecuencia, sólo es necesario encontrar el área de la región sobre el intervalo correspondiente a las dos primeras soluciones positivas de la ecuación $\operatorname{sen} x = \cos x$. Al dividir entre $\cos x$, una forma más útil de la última ecuación es $\tan x = 1$. La primera solución positiva es $x = \tan^{-1} 1 = \pi/4$. Luego, como $\tan x$ tiene periodo π, la siguiente solución positiva es $x = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$. Sobre el intervalo $(\pi/4, 5\pi/4)$, $y = \operatorname{sen} x$ es la gráfica superior, de modo que el área de las cuatro regiones es

$$\begin{aligned} A &= 4\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx \\ &= 4(-\cos x - \operatorname{sen} x)\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= 4(2\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}. \end{aligned}$$ ■

Al encontrar el área acotada por dos gráficas, no siempre es conveniente integrar con respecto a la variable x.

EJEMPLO 6 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área acotada por las gráficas $y^2 = 1 - x$ y $2y = x + 2$.

Solución Observamos que la ecuación $y^2 = 1 - x$ define de manera implícita dos funciones, $y_2 = \sqrt{1 - x}$ y $y_1 = -\sqrt{1 - x}$ para $x \le 1$. Si definimos $y_3 = \frac{1}{2}x + 1$, por la FIGURA 6.2.10 vemos que la altura de un elemento de área sobre el intervalo $(-8, 0)$ es $y_3 - y_1$, mientras la altura de un elemento sobre el intervalo $(0, 1)$ es $y_2 - y_1$. Por tanto, si se integra con respecto a x, el área deseada es la suma de

$$A_1 = \int_{-8}^{0} (y_3 - y_1)\, dx \qquad \text{y} \qquad A_2 = \int_{0}^{1} (y_2 - y_1)\, dx.$$

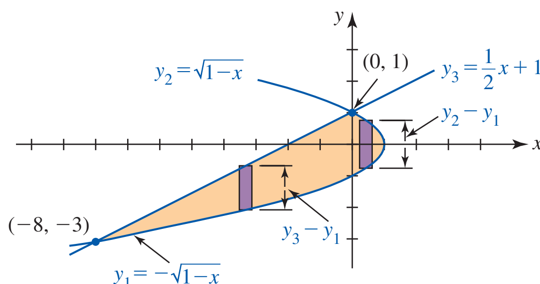


FIGURA 6.2.10 En el ejemplo 6, y_3 es la gráfica superior sobre el intervalo $(-8, 0)$; y_2 es la gráfica superior sobre el intervalo $(0, 1)$

Por tanto, el área de la región es la suma de las áreas $A = A_1 + A_2$; es decir,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-8}^{0}\left[\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - (-\sqrt{1-x})\right]dx + \int_{0}^{1}[\sqrt{1-x} - (-\sqrt{1-x})]\,dx \\ &= \int_{-8}^{0}\left(\frac{1}{2}x + 1 + \sqrt{1-x}\right)dx + 2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x}\,dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right)\Big]_{-8}^{0} - \frac{4}{3}(1-x)^{3/2}\Big]_{0}^{1} \\ &= -\frac{2}{3}\cdot 1^{3/2} - \left(16 - 8 - \frac{2}{3}\cdot 9^{3/2}\right) - \frac{4}{3}\cdot 0 + \frac{4}{3}\cdot 1^{3/2} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 7 Solución alterna del ejemplo 6

La necesidad de usar dos integrales en el ejemplo 6 para encontrar el área se evita al construir rectángulos horizontales y usar a y como variable independiente. Si definimos $x_2 = 1 - y^2$ y $x_1 = 2y - 2$, entonces, como se muestra en la FIGURA 6.2.11, el área del elemento horizontal es

$$A_k = [\text{gráfica derecha} - \text{gráfica izquierda}] \cdot \text{ancho}.$$

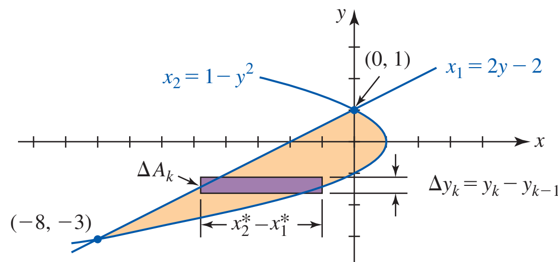


FIGURA 6.2.11 Uso de y como la variable de integración en el ejemplo 7

Es decir, $$A_k = [x_2^* - x_1^*]\,\Delta y_k,$$

donde $$x_2^* = 1 - (y_k^*)^2, \quad x_1^* = 2y_k^* - 2 \quad \text{y} \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}.$$

Al sumar los rectángulos en la dirección de y positiva obtenemos

$$A = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}[x_2^*(y) - x_1^*(y)]\;\Delta y_k,$$

donde $\|P\|$ es la norma de una partición P del intervalo sobre el eje y definida por $-3 \le y \le 1$. En otras palabras,

$$A = \int_{-3}^{1}(x_2 - x_1)\,dy,$$

donde el límite inferior -3 y el límite superior 1 son las coordenadas y de los puntos de intersección $(-8, -3)$ y $(0, 1)$, respectivamente. Luego, al sustituir por x_2 y x_1 obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{1}[(1 - y^2) - (2y - 2)]\,dy \\ &= \int_{-3}^{1}(-y^2 - 2y + 3)\,dy \\ &= \left(-\frac{1}{3}y^3 - y^2 + 3y\right)\Big]_{-3}^{1} \\ &= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - \left(\frac{27}{3} - 9 - 9\right) = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

■



NOTAS DESDE EL AULA

Como se mencionó en la introducción, en este capítulo veremos diferentes interpretaciones de la integral definida. En cada sección veremos una variedad de la integral definida, dentro del párrafo *Construyendo una integral*. Antes de memorizar estas fórmulas de integrales, usted debe estar al tanto de que el resultado obtenido en general no es aplicable a toda situación geométrica o física concebible. Por ejemplo, como vimos en el ejemplo 7, para encontrar el área de una región en el plano puede resultar más conveniente integrar con respecto a y y así poder construir una integral totalmente diferente. En lugar de aplicar a ciegas una fórmula, usted debe tratar de comprender el proceso y la práctica de construir integrales al analizar la geometría de cada problema.

Ejercicios 6.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

Fundamentos

En los problemas 1-22, encuentre el área total acotada por la gráfica de la función dada y el eje x en el intervalo dado.

1. $y = x^2 - 1;\quad [-1, 1]$
2. $y = x^2 - 1;\quad [0, 2]$
3. $y = x^3;\quad [-3, 0]$
4. $y = 1 - x^3;\quad [0, 2]$
5. $y = x^2 - 3x;\quad [0, 3]$
6. $y = -(x + 1)^2;\quad [-1, 0]$
7. $y = x^3 - 6x;\quad [-1, 1]$
8. $y = x^3 - 3x^2 + 2;\quad [0, 2]$
9. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3);\quad [0, 3]$
10. $y = x(x + 1)(x - 1);\quad [-1, 1]$
11. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2};\quad [\frac{1}{2}, 3]$
12. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2};\quad [1, 2]$
13. $y = \sqrt{x} - 1;\quad [0, 4]$
14. $y = 2 - \sqrt{x};\quad [0, 9]$
15. $y = \sqrt[3]{x};\quad [-2, 3]$
16. $y = 2 - \sqrt[3]{x};\quad [-1, 8]$
17. $y = \operatorname{sen} x;\quad [-\pi, \pi]$
18. $y = 1 + \cos x;\quad [0, 3\pi]$
19. $y = -1 + \operatorname{sen} x;\quad [-3\pi/2, \pi/2]$
20. $y = \sec^2 x;\ [0, \pi/3]$
21. $y = \begin{cases} x, & -2 \le x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \end{cases};\quad [-2, 1]$
22. $y = \begin{cases} x + 2, & -3 \le x < 0 \\ 2 - x^2, & 0 \le x \le 2 \end{cases};\quad [-3, 2]$

En los problemas 23-50, encuentre el área de la región acotada por la gráfica de las funciones dadas.

23. $y = x,\ y = -2x,\ x = 3$
24. $y = x,\ y = 4x,\ x = 2$
25. $y = x^2,\ y = 4$
26. $y = x^2,\ y = x$
27. $y = x^3,\ y = 8,\ x = -1$
28. $y = x^3,\ y = \sqrt[3]{x}$, primer cuadrante
29. $y = 4(1 - x^2),\ y = 1 - x^2$
30. $y = 2(1 - x^2),\ y = x^2 - 1$
31. $y = x,\ y = 1/x^2,\ x = 3$
32. $y = x^2,\ y = 1/x^2,\ y = 9$, primer cuadrante
33. $y = -x^2 + 6,\ y = x^2 + 4x$
34. $y = x^2,\ y = -x^2 + 3x$
35. $y = x^{2/3},\ y = 4$
36. $y = 1 - x^{2/3},\ y = x^{2/3} - 1$
37. $y = x^2 - 2x - 3,\ y = 2x + 2$, sobre $[-1, 6]$
38. $y = -x^2 + 4x,\ y = \frac{3}{2}x$
39. $y = x^3,\ y = x + 6,\ y = -\frac{1}{2}x$
40. $x = y^2,\ x = 0,\ y = 1$
41. $x = -y,\ x = 2 - y^2$
42. $x = y^2,\ x = 6 - y^2$
43. $x = y^2 + 2y + 2,\ x = -y^2 - 2y + 2$
44. $x = y^2 - 6y + 1,\ x = -y^2 + 2y + 1$
45. $y = x^3 - x,\ y = x + 4,\ x = -1,\ x = 1$
46. $x = y^3 - y,\ x = 0$
47. $y = \cos x,\ y = \operatorname{sen} x,\ x = 0,\ x = \pi/2$
48. $y = 2 \operatorname{sen} x,\ y = -x,\ x = \pi/2$
49. $y = 4 \operatorname{sen} x,\ y = 2$, sobre $[\pi/6, 5\pi/6]$
50. $y = 2\cos x,\ y = -\cos x$, sobre $[-\pi/2, \pi/2]$

En los problemas 51 y 52, interprete la integral definida dada como el área de la región acotada por la gráfica de dos funciones. Trace las dos regiones que tienen el área dada por la integral.

51. $\displaystyle\int_0^4 \left(\sqrt{x} + x\right) dx$
52. $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 3 - x\right) dx$

En los problemas 53 y 54, interprete la integral definida dada como el área de la región acotada por la gráfica de dos funciones sobre un intervalo. Evalúe la integral dada y trace la región.

53. $\displaystyle\int_0^2 \left|\frac{3}{x + 1} - 4x\right| dx$
54. $\displaystyle\int_{-1}^1 |e^x - 2e^{-x}|\, dx$

En los problemas 55-58, use el hecho de que el área de un círculo de radio r es πr^2 para evaluar la integral definida dada. Trace una región cuya área esté dada por la integral definida.

55. $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$
56. $\displaystyle\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2}\, dx$
57. $\displaystyle\int_{-2}^2 \left(1 + \sqrt{4 - x^2}\right) dx$
58. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(2x + 3 - \sqrt{1 - x^2}\right) dx$

59. Establezca una integral definida que represente el área de una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$. Use la idea que se utilizó en los problemas 55-58 para evaluar la integral definida.

60. Encuentre el área del triángulo con vértices en (1, 1), (2, 4) y (3, 2).

61. Considere la región acotada por las gráficas de $y^2 = -x - 2$, $y = 2$, $y = -2$ y $y = 2(x - 1)$. Calcule el área de la región al integrar con respecto a x.

62. Calcule el área de la región dada en el problema 61 al integrar con respecto a y.

63. Considere la región acotada por las gráficas de $y = 2e^x - 1$, $y = e^x$ y $y = 2$ mostradas en la FIGURA 6.2.12. Exprese el área de la región como integrales definidas primero usando integración con respecto a x y luego usando integración con respecto a y. Escoja una de estas integrales para encontrar el área.

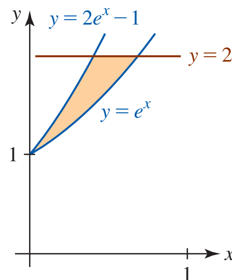


FIGURA 6.2.12 Gráficas para el problema 63

Problemas con calculadora/SAC

64. Use una calculadora o un SAC para aproximar las coordenadas x de los puntos de intersección de las gráficas mostradas en la FIGURA 6.2.13. Encuentre un valor aproximado del área de la región.

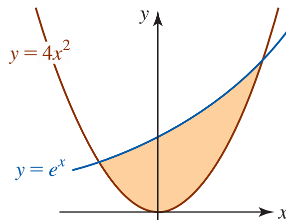


FIGURA 6.2.13 Gráficas para el problema 64

Piense en ello

65. El segmento de recta entre Q y R mostrado en la FIGURA 6.2.14 es tangente a la gráfica de $y = 1/x$ en el punto P. Demuestre que el área del triángulo QOR es independiente de las coordenadas de P.

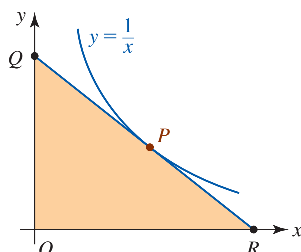


FIGURA 6.2.14 Triángulo en el problema 65

66. Un trapezoide está acotado por las gráficas de $f(x) = Ax + B$, $x = a$, $x = b$ y $x = 0$. Muestre que el área del trapezoide es $\dfrac{f(a) + f(b)}{2}(b - a)$.

67. Exprese el área de la región sombreada mostrada en la FIGURA 6.2.15 en términos del número a. Trate de ser un poco perspicaz.

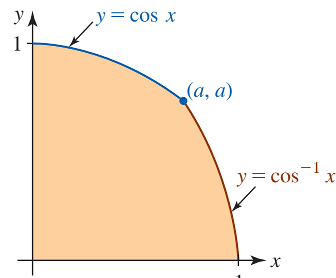


FIGURA 6.2.15 Gráficas para el problema 67

68. Suponga que los dos brochazos de pintura mostrados en la FIGURA 6.2.16 se hacen de una sola pasada usando una brocha de ancho k, $k > 0$, sobre el intervalo $[a, b]$. En la figura 6.2.16*b*) se supone que la región pintada en rojo es paralela al eje x. ¿Cuál brochazo tiene mayor área? Argumente su respuesta con una demostración matemática sólida. ¿Puede plantear un principio general?

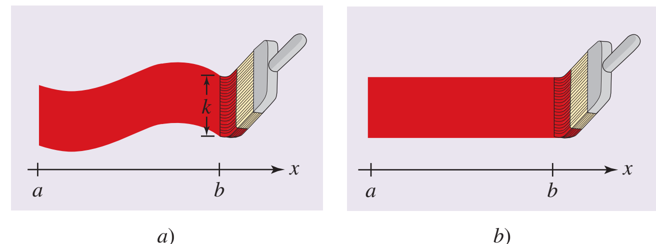


FIGURA 6.2.16 Brochazos de pintura en el problema 68

Proyectos

69. El área más grande Los puntos A y B están sobre una recta y los puntos C y D están sobre una recta paralela a la primera recta. Los puntos en la FIGURA 6.2.17*a*) forman un rectángulo $ABCD$. Los puntos C y D se mueven a la izquierda como se muestra en la figura 6.2.17*b*) de modo que $ABC'D'$ forme un paralelogramo. Analice: ¿cuál tiene mayor área, el rectángulo $ABCD$ o el paralelogramo $ABC'D'$?

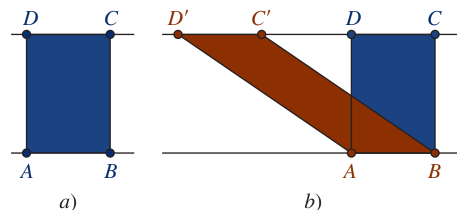


FIGURA 6.2.17 Rectángulo y paralelogramo en el problema 69

70. Principio de Cavalieri Escriba un reporte breve acerca del principio de Cavalieri. Analice los problemas 68 y 69 en su reporte.

6.3 Volúmenes de sólidos: método de las rebanadas

Introducción La forma que indiscutiblemente viene a la mente al evocar las palabras **cilindro recto** es el cilindro *circular* recto; es decir, la conocida forma de una lata de aluminio. Sin embargo, un cilindro recto no necesita ser circular. Por geometría, un **cilindro recto** se define como un sólido acotado por dos regiones planas congruentes, en planos paralelos y una superficie lateral que es generada por un segmento de recta perpendicular a ambos planos y cuyos extremos constituyen los límites de las regiones planas. Cuando las regiones son círculos, obtenemos el cilindro circular recto. Si las regiones son rectángulos, el cilindro es un paralelepípedo rectangular. Algo común a todos los cilindros, como los cinco mostrados en la FIGURA 6.3.1, es que su volumen V está dado por la fórmula

$$V = B \cdot h, \tag{1}$$

donde B denota el área de una base (es decir, el área de una de las regiones planas) y h denota la altura del cilindro (es decir, la distancia perpendicular entre las regiones planas).

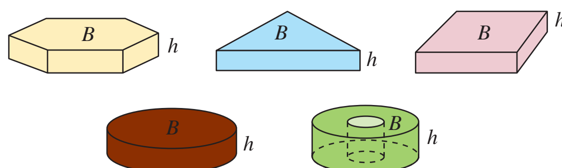


FIGURA 6.3.1 Cinco cilindros rectos diferentes

En esta sección se demostrará cómo es posible usar la integral definida para calcular volúmenes de ciertos tipos de sólidos, específicamente sólidos con sección transversal conocida. La fórmula (1) es especialmente importante en el siguiente análisis.

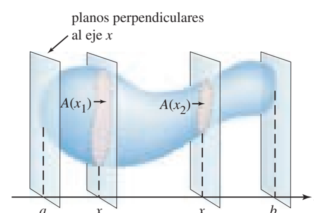


FIGURA 6.3.2 Las regiones o las secciones transversales tienen áreas conocidas

Método de las rebanadas Suponga que V es el volumen del sólido mostrado en la FIGURA 6.3.2 acotado por planos que son perpendiculares al eje x en $x = a$ y $x = b$. Además, suponga que conoce una función continua $A(x)$ que proporciona el área de una región de sección transversal que se forma al *rebanar* el sólido por un plano perpendicular al eje x; en otras palabras, una rebanada es la intersección del sólido y un plano. Por ejemplo, para $a < x_1 < x_2 < b$ las áreas de las secciones transversales mostradas en la figura 6.3.2 son $A(x_1)$ y $A(x_2)$. Con esto en mente, suponga que rebana al sólido en cortes delgados por planos paralelos (semejantes a rebanadas de pan de caja comercial) de modo que el grosor o ancho de una rebanada es Δx_k. Al usar cilindros rectos para aproximar los volúmenes de estas rebanadas es posible construir una integral definida que proporcione el volumen V del sólido.



Una pieza de pan es una rodaja formada por dos rebanadas

Construcción de una integral Ahora considere rebanar el sólido en n rodajas. Si P es la partición

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

del intervalo $[a, b]$ y x_k^* es un punto muestra en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, entonces una aproximación al volumen del sólido sobre este subintervalo, o rebanada, es el volumen V_k del cilindro recto, que se muestra en la ampliación de la FIGURA 6.3.3. El área B de la base del cilindro recto es el área $A(x_k^*)$ de la sección transversal y su altura h es Δx_k de modo que por (1) su volumen es

$$V_k = \text{área de la base} \cdot \text{altura} = A(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) = A(x_k^*)\,\Delta x_k. \tag{2}$$

Se concluye que la suma de Riemann de los volúmenes $V_k = A(x_k^*)\,\Delta x_k$ de los n cilindros rectos,

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\,\Delta x_k,$$

es una aproximación al volumen V del sólido sobre $[a, b]$. Usamos la integral definida

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\,\Delta x_k = \int_a^b A(x)\,dx$$

como definición del volumen V del sólido.

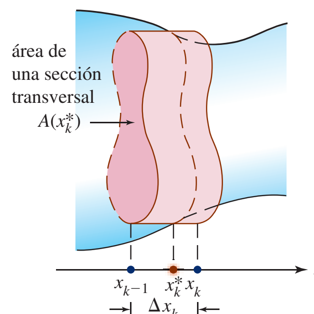


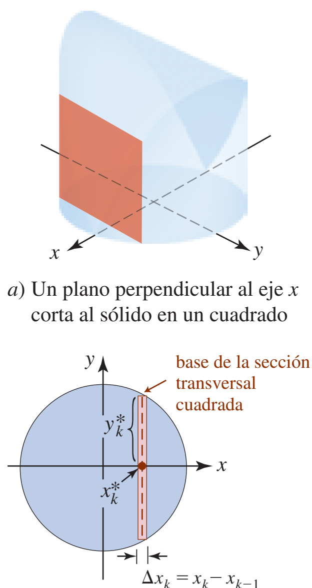
FIGURA 6.3.3 El volumen de un cilindro recto es una aproximación al volumen de una rebanada

Definición 6.3.1 Volumen por rebanadas

Sea V el volumen de un sólido acotado por planos perpendiculares al eje x en $x = a$ y $x = b$. Si $A(x)$ es una función continua que proporciona el área de una sección transversal del sólido formado por un plano perpendicular al eje x en cualquier punto en el intervalo $[a, b]$, entonces el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b A(x)\, dx. \tag{3}$$

Tenga presente que no hay nada especial sobre la variable x en (3); dependiendo de la geometría y el análisis del problema también es posible terminar con una integral $\int_c^d A(y)\, dy$.



a) Un plano perpendicular al eje x corta al sólido en un cuadrado

b) Base circular del sólido

FIGURA 6.3.4 Sólido en el ejemplo 1

EJEMPLO 1 Sólido con secciones transversales cuadradas

Para el sólido en la FIGURA 6.3.4*a*), las secciones transversales perpendiculares a un diámetro de una base circular son cuadradas. Dado que el radio de la base es 4 pies, encuentre el volumen del sólido.

Solución Sean x y y ejes como se muestra en la figura 6.3.4*a*); a saber: el origen está en el centro de la base circular del sólido. En esta figura, una sección transversal cuadrada se muestra perpendicular al eje x. Puesto que la base del sólido es un círculo, tenemos $x^2 + y^2 = 4^2$. En la figura 6.3.4*b*), la línea discontinua en x_k^* representa la sección transversal del sólido perpendicular al eje x en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ en una partición del intervalo $[-4, 4]$. A partir de esto vemos que la longitud de un lado de la sección transversal cuadrada es $2y_k^* = 2\sqrt{16 - (x_k^*)^2}$. Por tanto, el área de una sección transversal cuadrada es

$$A(x_k^*) = \left(2\sqrt{16 - (x_k^*)^2}\right)^2 = 64 - 4(x_k^*)^2.$$

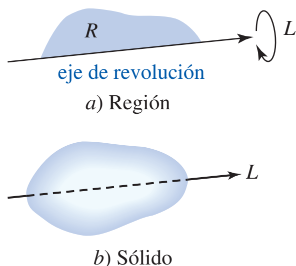
El volumen del cilindro recto que aproxima el volumen del sólido o rebanada en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es

$$V_k = A(x_k^*)\, \Delta x_k = (64 - 4(x_k^*)^2)\, \Delta x_k.$$

Al formar la suma $\sum_{k=1}^{n} V_k$ y tomar el límite cuando $\|P\| \to 0$ obtenemos la integral definida

$$V = \int_{-4}^{4} (64 - 4x^2)\, dx = 64x - \frac{4}{3}x^3\Big]_{-4}^{4} = \frac{512}{3} - \left(-\frac{512}{3}\right) = \frac{1\,024}{3}. \quad \blacksquare$$

Sólidos de revolución Si una región R en el plano xy se hace girar alrededor de un eje L, se genera un sólido denominado **sólido de revolución**. Vea la FIGURA 6.3.5.



a) Región

b) Sólido

FIGURA 6.3.5 Un sólido de revolución se forma al girar una región plana R alrededor de un eje L

Método del disco Como acaba de analizarse, el volumen V de un sólido puede encontrarse por medio de una integral definida siempre que se conoce una función $A(x)$ que proporciona el área de una sección transversal formada al hacer pasar un plano por el sólido de forma perpendicular a un eje. En el caso de encontrar el volumen de un sólido de revolución, siempre es posible encontrar $A(x)$; el eje en cuestión es el eje de revolución L. Vemos que al rebanar el sólido por medio de dos planos paralelos perpendiculares al eje de revolución, el volumen de las rebanadas resultantes del sólido pueden aproximarse por cilindros *circulares* rectos que son discos o arandelas. A continuación se ilustrará la construcción de una integral de volumen usando discos.

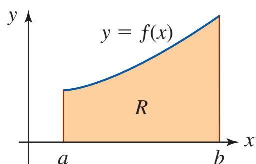


FIGURA 6.3.6 Región a girar alrededor del eje x

Construcción de una integral Sea R la región acotada por la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la FIGURA 6.3.6. Si esta región se hace girar alrededor del eje x, encontramos el volumen V del sólido de revolución resultante.

Sea P una partición de $[a, b]$ y sea x_k^* cualquier número en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ como se muestra en la FIGURA 6.3.7*a*). A medida que el elemento rectangular de ancho Δx_k y altura $f(x_k^*)$ gira alrededor del eje x, genera un disco sólido. Luego, la sección transversal del sólido determinada por un plano que corta la superficie en x_k^* es un círculo de radio $r = f(x_k^*)$, y así el

área de la sección transversal es $A(x_k^*) = \pi[f(x_k^*)]^2$. El volumen del cilindro circular recto, o disco sólido, de radio $r = f(x_k^*)$ y altura $h = \Delta x_k$ es $\pi r^2 h$ o

$$V_k = A(x_k^*)\,\Delta x_k = \pi[f(x_k^*)]^2\,\Delta x_k.$$

La suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \pi[f(x_k^*)]^2\,\Delta x_k$$

representa una aproximación al volumen del sólido mostrado en la figura 6.3.7*d*). Esto sugiere que el volumen V del sólido de revolución está dado por

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi[f(x_k^*)]^2\,\Delta x_k$$

o bien,

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx. \tag{4}$$

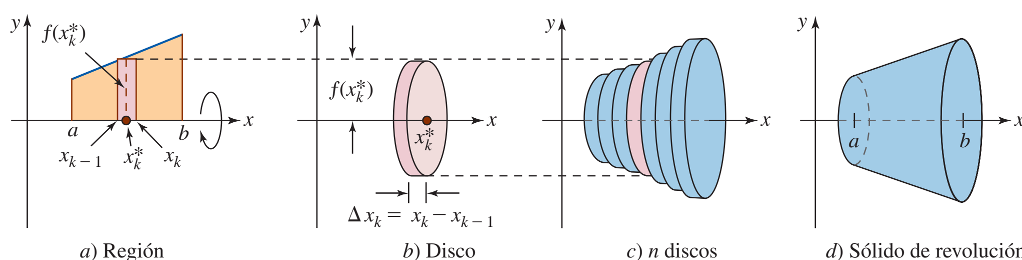


FIGURA 6.3.7 Cuando el elemento rectangular rojo en *a*) gira alrededor del eje x se genera el disco circular rojo en *b*)

Si una región R se hace girar alrededor de algún otro eje, entonces (4) puede simplemente no ser aplicable al problema de encontrar el volumen del sólido resultante. En lugar de aplicar una fórmula a ciegas, usted debe establecer una integral con sumo cuidado por medio del análisis de la geometría de cada problema. Un caso así se analizará en el ejemplo 6.

EJEMPLO 2 Método del disco

Encuentre el volumen V del sólido formado al girar alrededor del eje x la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$.

Solución En la FIGURA 6.3.8*a*) se muestra la región en cuestión. Luego, el área de una rebanada de la sección transversal x_k^* es

$$A(x_k^*) = \pi[f(x_k^*)]^2 = \pi[(x_k^*)^{1/2}]^2 = \pi x_k^*,$$

y así el volumen del disco correspondiente mostrado en la figura 6.3.8*b*) es

$$V_k = A(x_k^*)\,\Delta x_k = \pi x_k^*\,\Delta x_k.$$

Por tanto, el volumen del sólido es

$$V = \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\frac{1}{2}x^2\Big]_0^4 = 8\pi.$$

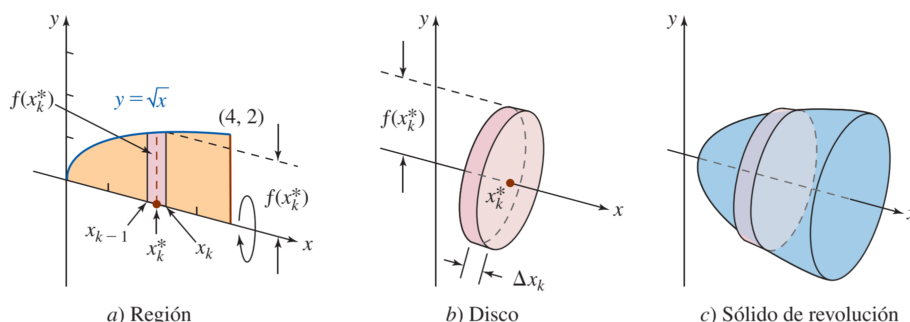


FIGURA 6.3.8 Región y sólido de revolución en el ejemplo 2 ■

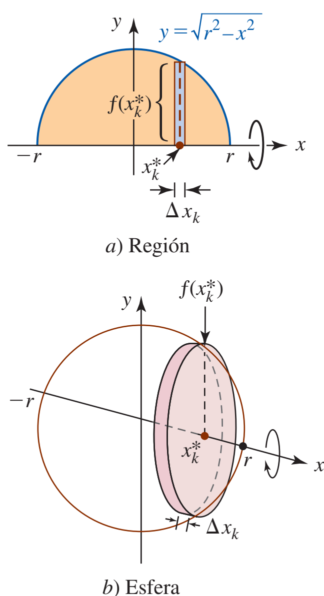


FIGURA 6.3.9 Semicírculo y esfera en el ejemplo 3

EJEMPLO 3 Volumen de una esfera

Demuestre que el volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Solución Una esfera de radio r puede generarse al girar un semicírculo $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ alrededor del eje x. Por la FIGURA 6.3.9 vemos que el área de una región de la sección transversal del sólido perpendicular al eje x en x_k^* es

$$A(x_k^*) = \pi[f(x_k^*)]^2 = \pi\left(\sqrt{r^2 - (x_k^*)^2}\right)^2 = \pi(r^2 - (x_k^*)^2)$$

y por tanto, el volumen de un disco es

$$V_k = A(x_k^*)\,\Delta x_k = \pi(r^2 - (x_k^*)^2)\,\Delta x_k.$$

Al usar (4) observamos que el volumen de la esfera es

$$V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx = \pi\left(r^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big]_{-r}^{r} = \pi\frac{2}{3}r^3 - \left(-\pi\frac{2}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$ ■

Método de la arandela Sea R la región acotada por las gráficas de las funciones continuas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la FIGURA 6.3.10*a*), que se hace girar alrededor del eje x. Entonces una rebanada perpendicular al eje x del sólido de revolución en x_k^* es una circular o anillo anular. Cuando el elemento rectangular de ancho Δx_k que se muestra en la figura 6.3.10*a*) gira alrededor del eje x, genera una arandela. El área del anillo es

$$\begin{aligned} A(x_k^*) &= \text{área del círculo} - \text{área del orificio} \\ &= \pi[f(x_k^*)]^2 - \pi[g(x_k^*)]^2 = \pi([f(x_k^*)]^2 - [g(x_k^*)]^2) \end{aligned}$$

y el volumen V_k de la arandela representativa mostrada en la figura 6.3.10*b*) es

$$V_k = A(x_k^*)\,\Delta x_k = \pi([f(x_k^*)]^2 - [g(x_k^*)]^2)\,\Delta x_k.$$

En consecuencia, el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx. \tag{5}$$

Observe que la integral en (5) se reduce a (4) cuando $g(x) = 0$.

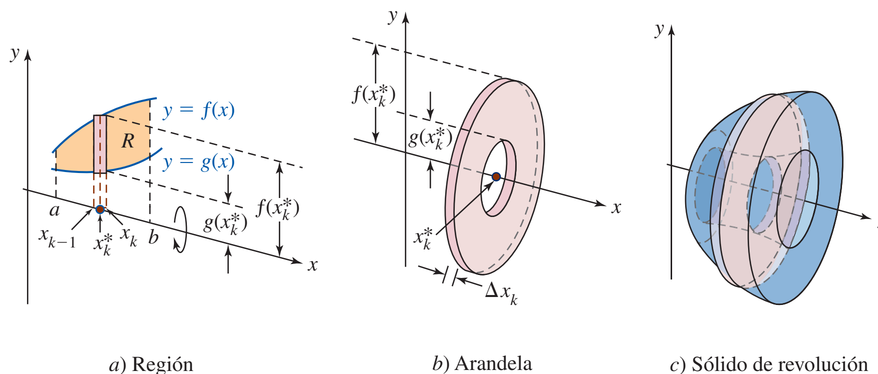


FIGURA 6.3.10 Cuando el elemento rectangular rojo en *a*) gira alrededor del eje x se genera la arandela circular roja en *b*)

EJEMPLO 4 Método de la arandela

Encuentre el volumen V del sólido formado al girar alrededor del eje x la región acotada por las gráficas de $y = x + 2$, $y = x$, $x = 0$ y $x = 3$.

Solución En la FIGURA 6.3.11*a*) se muestra la región en cuestión. Luego, el área de una sección transversal del sólido correspondiente al plano perpendicular al eje x en x_k^* es

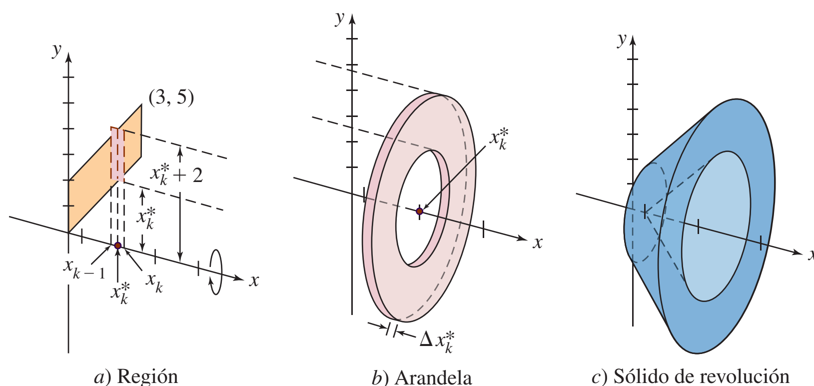
$$A(x_k^*) = \pi(x_k^* + 2)^2 - (x_k^*)^2 = \pi(4x_k^* + 4).$$

Como se ve en la figura 6.3.11*a*) y *b*), un elemento rectangular vertical de ancho Δx_k, cuando se hace girar alrededor del eje *x*, produce una arandela cuyo volumen es

$$V_k = A(x_k^*)\ \Delta x_k = \pi(4x_k^* + 4)\ \Delta x_k.$$

El proceso usual de sumas y límites acostumbrado lleva a la integral definida para el volumen *V* del sólido de revolución:

$$V = \pi \int_0^3 (4x + 4)\, dx = \pi(2x^2 + 4x)\Big]_0^3 = 30\pi.$$



a) Región *b*) Arandela *c*) Sólido de revolución

FIGURA 6.3.11 Región y sólido de revolución en el ejemplo 4 ■

EJEMPLO 5 Integración con respecto a *y*

Encuentre el volumen *V* del sólido formado por la región que gira alrededor del eje *x* acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.

Solución Cuando el elemento rectangular horizontal en la FIGURA 6.3.12*a*) gira alrededor del eje *y* genera una arandela de ancho Δy_k. El área $A(y_k^*)$ de la región anular en y_k^* es

$$A(y_k^*) = \text{área del círculo} - \text{área del orificio.} - 1$$

El radio del círculo y el radio del hueco se obtienen al despejar, a su vez, $y = x$ y $y = \sqrt{x}$ para *x* en términos de *y*:

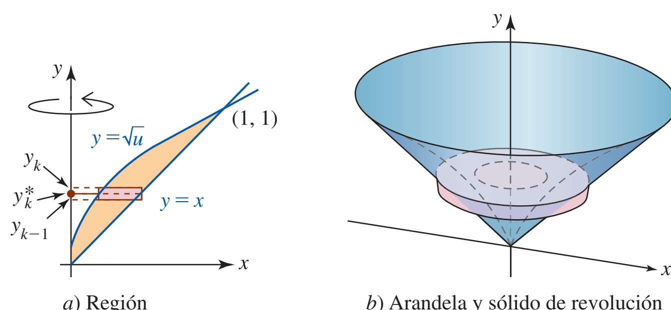
$$A(y_k^*) = \pi(y_k^*)^2 - \pi[(y_k^*)^2]^2 = \pi((y_k^*)^2 - (y_k^*)^4).$$

Así, el volumen de una arandela es

$$V_k = A(y_k^*)\ \Delta y_k = \pi((y_k^*)^2 - (y_k^*)^4)\ \Delta y_k.$$

Usualmente sumando los V_k y tomando el límite de la suma cuando $\|P\| \to 0$ llevan a la integral definida para el volumen del sólido:

$$V = \pi \int_0^1 (y^2 - y^4)\, dy = \pi\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5\right)\Bigg]_0^1 = \frac{2}{15}\pi.$$



a) Región *b*) Arandela y sólido de revolución

FIGURA 6.3.12 Región y sólido de revolución en el ejemplo 5 ■

Revolución alrededor de una recta El siguiente ejemplo muestra cómo encontrar el volumen de un sólido de revolución cuando una región se hace girar alrededor de un eje que no es un eje de coordenadas.

EJEMPLO 6 Eje de revolución que no es un eje de coordenadas

Encuentre el volumen V del sólido que se forma al girar la región alrededor de la recta $x = 4$ que se muestra en el ejemplo 2.

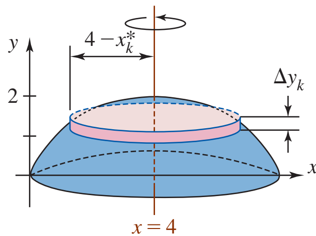


FIGURA 6.3.13 Sólido de revolución en el ejemplo 6

Solución El sólido de revolución en forma de domo se muestra en la FIGURA 6.3.13. Por inspección de la figura vemos que un elemento rectangular horizontal de ancho Δy_k que es perpendicular a la recta vertical $x = 4$ genera un disco sólido cuando gira alrededor de ese eje. El radio r de ese disco es

$$r = (\text{valor } x \text{ más a la derecha}) - (\text{valor } x \text{ más a la izquierda}) = 4 - x_k^*,$$

y entonces su volumen es

$$V_k = \pi(4 - x_k^*)^2\,\Delta y_k.$$

Para expresar x en términos de y se usa $y = \sqrt{x}$ para obtener $x_k^* = (y_k^*)^2$. En consecuencia,

$$V_k = \pi(4 - (y_k^*)^2)^2\,\Delta y_k.$$

Eso conduce a la integral

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^2 (4 - y^2)^2\,dy \\ &= \pi\int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4)\,dy \\ &= \pi\left(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right)\Big]_0^2 = \frac{256}{15}\pi. \end{aligned}$$

■

Ejercicios 6.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

≡ Fundamentos

En los problemas 1 y 2, use el método de las rebanadas para encontrar el volumen del sólido si se proporcionan sus secciones transversales perpendiculares a un diámetro de una base circular. Suponga que el radio de la base es 4.

1.

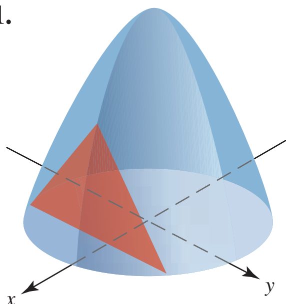


FIGURA 6.3.14 Las secciones transversales son triángulos equiláteros

2.

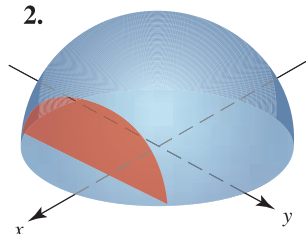


FIGURA 6.3.15 Las secciones transversales son semicírculos

3. La base de un sólido está acotada por las curvas $x = y^2$ y $x = 4$ en el plano xy. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son rectángulos para los cuales la altura es cuatro veces la base. Encuentre el volumen del sólido.

4. La base de un sólido está acotada por la curva $y = 4 - x^2$ y el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros. Encuentre el volumen del sólido.

5. La base de un sólido es un triángulo isósceles cuya base y altura miden, respectivamente, 4 y 5 pies. Las secciones transversales perpendiculares a la altura son semicírculos. Encuentre el volumen del sólido.

6. Por el centro de una esfera sólida de radio $r = 2$ pies se perfora un orificio de 1 pie de radio. Encuentre el volumen del sólido restante. Vea la FIGURA 6.3.16.

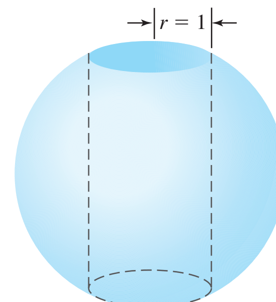


FIGURA 6.3.16 Orificio a través de la esfera en el problema 6

7. La base de un sólido es un triángulo isósceles recto formado por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 3$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuadrados. Encuentre el volumen del sólido.

8. Suponga que la pirámide que se muestra en la FIGURA 6.3.17 tiene altura h y base cuadrada de área B. Demuestre que el volumen de la pirámide está dado por $A = \frac{1}{3}hB$. [*Sugerencia*: Sea b la longitud de un lado de la base cuadrada.]

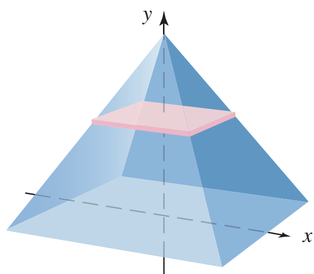


FIGURA 6.3.17 Pirámide en el problema 8

En los problemas 9-14, consulte la FIGURA 6.3.18. Use el método del disco o arandela para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región dada alrededor de la recta indicada.

9. R_1 alrededor de OC

10. R_1 alrededor de OA

11. R_2 alrededor de OA

12. R_2 alrededor de OC

13. R_1 alrededor de AB

14. R_2 alrededor de AB

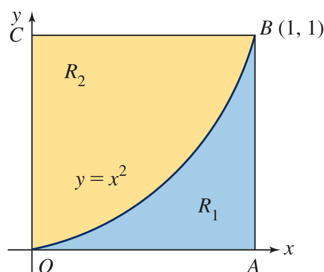


FIGURA 6.3.18 Regiones para los problemas 9-14

En los problemas 15-40, use el método del disco o de la arandela para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas alrededor de la recta o eje que se indica.

15. $y = 9 - x^2, y = 0$; eje x

16. $y = x^2 + 1, x = 0, y = 5$; eje y

17. $y = \dfrac{1}{x}, x = 1, y = \dfrac{1}{2}$; eje y

18. $y = \dfrac{1}{x}, x = \dfrac{1}{2}, x = 3, y = 0$; eje x

19. $y = (x - 2)^2, x = 0, y = 0$; eje x

20. $y = (x + 1)^2, x = 0, y = 0$; eje y

21. $y = 4 - x^2, y = 1 - \frac{1}{4}x^2$; eje x

22. $y = 1 - x^2, y = x^2 - 1, x = 0$, primer cuadrante; eje y

23. $y = x, y = x + 1, x = 0, y = 2$; eje y

24. $x + y = 2, x = 0, y = 0, y = 1$; eje x

25. $y = \sqrt{x - 1}, x = 5, y = 0$; $x = 5$

26. $x = y^2, x = 1$; $x = 1$

27. $y = x^{1/3}, x = 0, y = 1$; $y = 2$

28. $x = -y^2 + 2y, x = 0$; $x = 2$

29. $x^2 - y^2 = 16, x = 5$; eje y

30. $y = x^2 - 6x + 9, y = 9 - \frac{1}{2}x^2$; eje x

31. $x = y^2, y = x - 6$; eje y

32. $y = x^3 + 1, x = 0, y = 9$; eje y

33. $y = x^3 - x, y = 0$; eje x

34. $y = x^3 + 1, x = 1, y = 0$; eje x

35. $y = e^{-x}, x = 1, y = 1$; $y = 2$

36. $y = e^x, y = 1, x = 2$; eje x

37. $y = |\cos x|, y = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$; eje x

38. $y = \sec x, x = -\pi/4, x = \pi/4, y = 0$; eje x

39. $y = \tan x, y = 0, x = \pi/4$; eje x

40. $y = \text{sen } x, y = \cos x, x = 0$, primer cuadrante; eje x

≡ Piense en ello

41. Relea los problemas 68-70 acerca del principio de Cavalieri, en los ejercicios 6.2. A continuación muestre que los cilindros circulares de la FIGURA 6.3.19 tienen el mismo volumen.

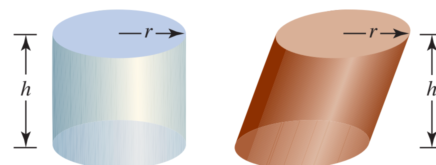


FIGURA 6.3.19 Cilindros en el problema 41

42. Considere el cilindro circular recto de radio a que se muestra en la FIGURA 6.3.20. Un plano inclinado a un ángulo θ con respecto a la base del cilindro pasa por un diámetro de la base. Encuentre el volumen de la cuña resultante que se corta del cilindro cuando

a) $\theta = 45°$ ***b)*** $\theta = 60°$.

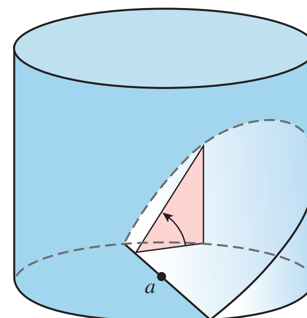


FIGURA 6.3.20 Cilindro y cuña en el problema 42

≡ Proyectos

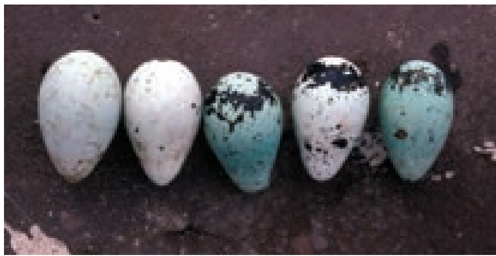
43. Para las aves Un modelo matemático para la forma de un huevo puede obtenerse al girar la región acotada por las gráficas de $y = 0$ y la función $f(x) = P(x)\sqrt{1 - x^2}$, donde $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es un polinomio cúbico, alrededor del eje x. Por ejemplo, un huevo de arao común corresponde a $P(x) = -0.07x^3 - 0.02x^2 + 0.2x + 0.56$. En la FIGURA 6.3.21 se muestra la gráfica de f obtenida con ayuda de un SAC.

***a*)** Encuentre una fórmula general para el volumen V de un huevo con base en el modelo matemático $f(x) = P(x)\sqrt{1 - x^2}$, donde $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. [*Sugerencia*: Este problema puede resolverse con cálculos manuales, aunque es lento y "confuso". Use un SAC para realizar la integración.]

***b*)** Use la fórmula obtenida en el inciso *a*) para estimar el volumen de un huevo de arao común.

***c*)** Un huevo de somorgujo petirrojo corresponde a $P(x) = -0.06x^3 + 0.04x^2 + 0.1x + 0.54$. Use un SAC para obtener la gráfica de f.

***d*)** Use el inciso *a*) para estimar el volumen de un huevo del somorgujo petirrojo.



Huevos de arao común

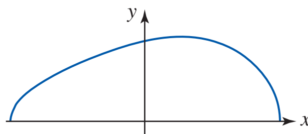


FIGURA 6.3.21 Modelo de la forma del huevo de arao común en el problema 43

44. Ese sentimiento de hundirse Una bola esférica de madera de radio r flota en un estanque de agua tranquila. Sea h la profundidad a que se hundirá la bola. Vea la FIGURA 6.3.22.

***a*)** Demuestre que el volumen de la porción sumergida de la bola está dado por $V = \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi h^3$.

***b*)** Suponga que el peso específico de la bola se denota por ρ_{bola} y que el peso específico del agua es ρ_{agua} (medida en lb/pies^3). Si $r = 3$ pulg y $\rho_{\text{bola}} = 0.4\ \rho_{\text{agua}}$, use el principio de Arquímedes —el peso de la bola es igual al peso del agua desplazada— para determinar la profundidad aproximada h que se hundirá la bola. Necesita una calculadora o un SAC para resolver una ecuación de un polinomio cúbico.

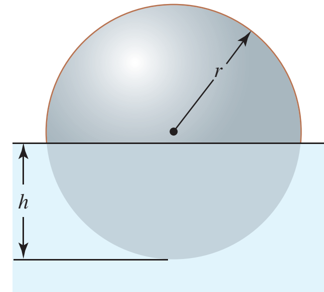


FIGURA 6.3.22 Bola de madera flotante en el problema 44

45. Sólidos de Steinmetz El sólido formado por dos cilindros circulares de radio r cuyos ejes se cortan formando un ángulo recto se denomina **bicilindro** y es un caso especial de los sólidos de Steinmetz. Por razones de claridad se muestra la octava parte del sólido en la FIGURA 6.3.23.

***a*)** Encuentre el volumen total del bicilindro ilustrado en la figura.

***b*)** Escriba un breve reporte sobre los sólidos de Steinmetz.

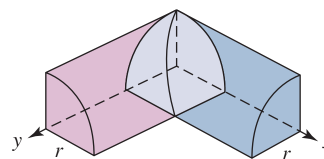


FIGURA 6.3.23 Cilindros circulares rectos que se cortan en el problema 45

6.4 Volúmenes de sólidos: método de los cascarones

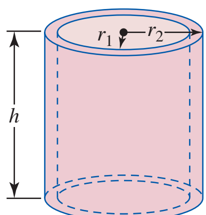


FIGURA 6.4.1 Cascarón cilíndrico

Introducción En esta sección continuamos el análisis de cómo encontrar volúmenes de sólidos de revolución. Pero en lugar de usar planos perpendiculares al eje de revolución para rebanar el sólido en rodajas cuyo volumen puede aproximarse por cilindros circulares rectos regulares (discos o arandelas), desarrollamos un nuevo método para encontrar volúmenes de sólidos de revolución que utiliza cascarones cilíndricos circulares. Antes de construir un integral que represente el **método de los cascarones** es necesario encontrar el volumen del cascarón cilíndrico general que se muestra en la FIGURA 6.4.1. Si, como se observa en la figura, r_1 y r_2 denotan respectivamente los radios interior y exterior del cascarón, y h es su altura, entonces su volumen está dado por la diferencia

$$\text{volumen del cilindro exterior} - \text{volumen del cilindro interior} = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)h = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h. \tag{1}$$

Construcción de una integral En la sección 6.3 vimos que un elemento rectangular de área que es perpendicular a un eje de revolución genera, al girar, ya sea un disco circular o una arandela circular. No obstante, si hacemos girar el elemento rectangular mostrado en la FIGURA 6.4.2*a*) alrededor del eje *y*, generamos un cascarón hueco como se muestra en la figura 6.4.2*b*). Para encontrar el volumen que se observa en la figura 6.4.2*c*), sea *P* una partición arbitraria del intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

La partición *P* divide el intervalo en *n* subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, de ancho $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Si identificamos el radio exterior como $r_2 = x_k$ y el radio interior como $r_1 = x_{k-1}$ y definimos $x_k^* = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})$, entonces x_k^* es el punto medio del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Con la identificación adicional $h = f(x_k^*)$ por (1) se concluye que el volumen representativo del cascarón en la figura 6.4.2*b*) puede escribirse como

$$\begin{aligned} V_k &= \pi(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1})h \\ &= 2\pi\frac{x_k + x_{k-1}}{2}h(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

o bien,

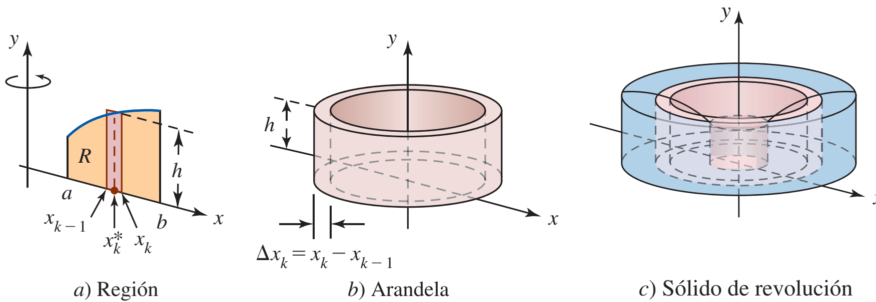
$$V_k = 2\pi x_k^* f(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

Una aproximación al volumen del sólido está dada por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k^* f(x_k^*)\,\Delta x_k. \tag{2}$$

Cuando la norma $\|P\|$ de la partición tiende a cero, el límite de (2) es una integral definida que se usa como la definición del volumen *V* del sólido:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx. \tag{3}$$

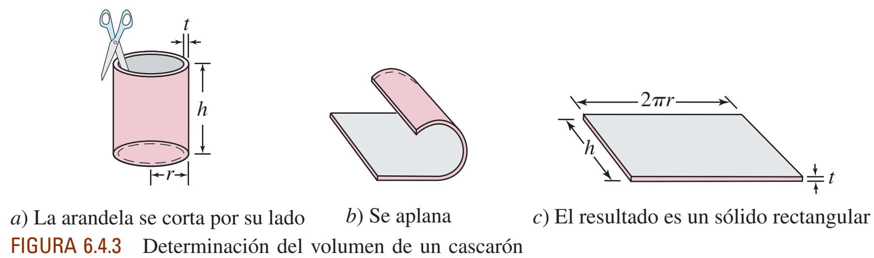


a) Región *b*) Arandela *c*) Sólido de revolución

FIGURA 6.4.2 Cuando el elemento rectangular rojo en *a*) gira alrededor del eje *y* se genera el cascarón rojo en *b*)

Como se mencionó en las *Notas desde el aula* al final de la sección 6.2, no es posible obtener una integral, que en este caso representa el volumen de un sólido de revolución, que "funcione" en todos los casos posibles. De nuevo se apremia al lector a que no memorice una fórmula particular como (3). Intente comprender la interpretación geométrica de las componentes del integrando. Por ejemplo, $f(x)$, que representa la altura del rectángulo en la figura 6.4.2, puede ser la diferencia $f(x) - g(x)$ si el elemento rectangular está entre las gráficas de dos funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$, $f(x) \geq g(x)$. Para establecer una integral para un problema dado sin adentrarse en un tedioso análisis, considere que un cascarón es una delgada lata de aluminio a la que se han quitado las partes superior e inferior. Para encontrar el volumen de la concha (es decir, el volumen del metal en la analogía de la lata de aluminio), imagine que la lata se corta en forma recta a lo largo de su lado y que se aplana como se ilustra en la FIGURA 6.4.3*a*) y *b*). Como se muestra en la figura 6.4.3*c*), entonces el volumen de la concha es el volumen de este sólido regular:

$$\begin{aligned} \text{volumen} &= (\text{longitud}) \cdot (\text{ancho}) \cdot (\text{grosor}) \\ &= (\text{circunferencia del cilindro}) \cdot (\text{altura}) \cdot (\text{grosor}) \\ &= 2\pi rht. \end{aligned} \tag{4}$$



a) La arandela se corta por su lado b) Se aplana c) El resultado es un sólido rectangular

FIGURA 6.4.3 Determinación del volumen de un cascarón

EJEMPLO 1 Uso del método de los cascarones

Vuelva a leer el ejemplo 5 en la sección 6.3 antes de abordar este ejemplo.

Use el método de los cascarones para encontrar el volumen V del sólido que se forma al girar alrededor del eje y la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.

Solución Este problema se resolvió en el ejemplo 5 de la sección 6.3. En ese ejemplo vimos que usar un elemento rectangular horizontal perpendicular al eje y de ancho Δy_k generaba una arandela al girarlo alrededor del eje y. En contraste, cuando un elemento rectangular vertical de ancho Δx_k gira alrededor del eje y genera un cascarón. Con ayuda de la FIGURA 6.4.4*a*) en (4) se hace la identificación $r = x_k^*$,

$$h = \text{gráfica superior} - \text{gráfica inferior} = \sqrt{x_k^*} - x_k^*,$$

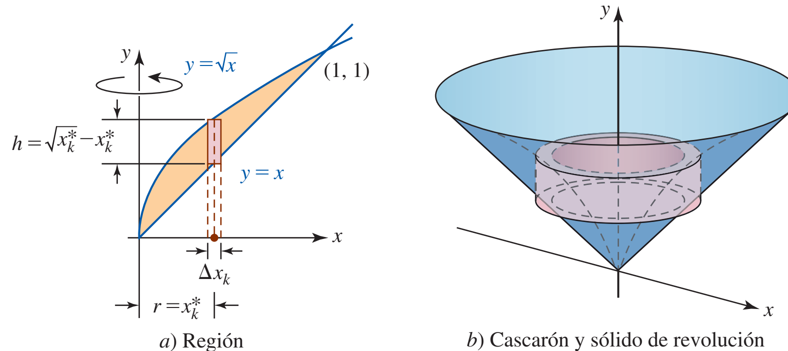
y $t = \Delta x_k$. A partir del volumen del cascarón,

$$V_k = 2\pi x_k^*\left(\sqrt{x_k^*} - x_k^*\right)\Delta x_k = 2\pi\left((x_k^*)^{3/2} - (x_k^*)^2\right)\Delta x_k,$$

obtenemos la integral definida al determinar el volumen del sólido:

$$V = 2\pi\int_0^1 (x^{3/2} - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg]_0^1 = \frac{2}{15}\pi.$$



a) Región b) Cascarón y sólido de revolución

FIGURA 6.4.4 Región y sólido de revolución en el ejemplo 1 ■

No siempre es conveniente o incluso posible usar los métodos del disco o de la arandela analizados en la última sección para encontrar el volumen de un sólido de revolución.

EJEMPLO 2 Uso del método de los cascarones

Encuentre el volumen V del sólido que se forma al girar alrededor del eje y la gráfica de $y = \operatorname{sen} x^2$ y $y = 0$, $0 \le x \le \sqrt{\pi}$.

Solución La gráfica de $y = \operatorname{sen} x^2$ sobre el intervalo indicado en la FIGURA 6.4.5 se obtuvo con ayuda de un SAC.

Si elegimos usar un elemento rectangular horizontal para girarlo alrededor del eje y, se generaría una arandela. Para determinar los radios interior y exterior de la arandela sería necesario despejar x en $y = \operatorname{sen} x^2$ en términos de y. Aunque esto simplemente lleva a x^2 como un seno inverso, plantea un problema práctico: por ahora no es posible integrar una función trigonomé-

trica inversa. Por tanto, atendemos al elemento rectangular vertical mostrado en la figura 6.4.5*a*). Cuando este elemento gira alrededor del eje y, se genera un cascarón con radio $r = x_k^*$, altura $h = \text{sen}(x_k^*)^2$ y grosor $t = \Delta x_k$. Por (4), el volumen del cascarón es

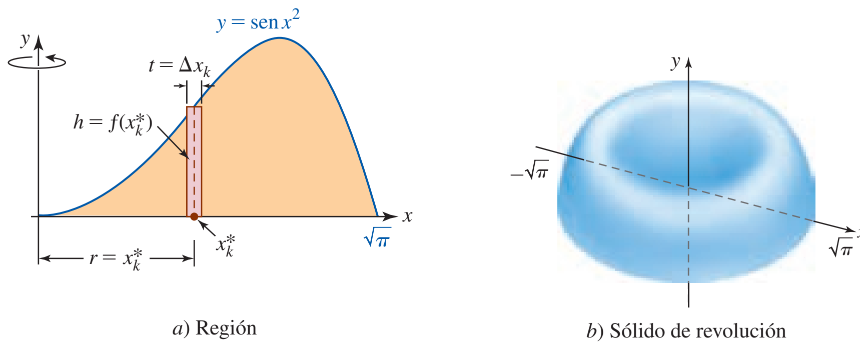
$$V_k = 2\pi x_k^* \,\text{sen}\,(x_k^*)^2\ \Delta x_k.$$

Así, por (3) se tiene

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} x \,\text{sen}\, x^2\, dx.$$

Si $u = x^2$, entonces $du = 2x\,dx$ y $x\,dx = \frac{1}{2}du$. Los límites de integración u se determinan a partir del hecho de que cuando $x = 0$, $u = 0$ y $x = \sqrt{\pi}$, $u = \pi$. En consecuencia, el volumen del sólido de revolución mostrado en la figura 6.4.5*b*) es

$$V = \pi \int_0^{\pi} \text{sen}\, u\, du = -\pi \cos u \Big]_0^{\pi} = \pi(1 + 1) = 2\pi.$$



a) Región *b*) Sólido de revolución

FIGURA 6.4.5 Región y sólido de revolución en el ejemplo 2 ■

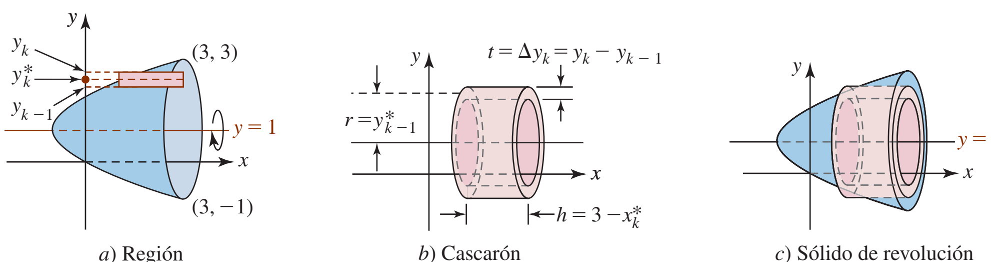
En el siguiente ejemplo ilustramos el método de los cascarones cuando una región gira alrededor de una recta que no es un eje de coordenadas.

EJEMPLO 3 Eje de revolución que no es un eje de coordenadas

Encuentre el volumen V del sólido que se forma al girar la región acotada por las gráficas de $x = y^2 - 2y$ y $x = 3$ alrededor de la recta $y = 1$.

Solución En este caso, un elemento rectangular de área perpendicular a una recta horizontal que gire alrededor de la recta $y = 1$ generaría un disco. Puesto que el radio del disco no se mide desde el eje x sino desde la recta $y = 1$, sería necesario resolver $x = y^2 - 2y$ para y en términos de x. Este inconveniente puede evitarse si se usa un elemento horizontal de área, que entonces genera un cascarón como el que se muestra en la FIGURA 6.4.6*b*). Observe que cuando $x = 3$, la ecuación $3 = y^2 - 2y$, o en forma equivalente $(y + 1)(y - 3) = 0$, tiene las soluciones -1 y 3. Por tanto, sólo es necesario partir el intervalo [1, 3] sobre el eje y. Después de hacer las identificaciones $r = y_k^* - 1$, $h = 3 - x_k^*$ y $t = \Delta y_k$, por (4) se concluye que el volumen de un cascarón es

$$\begin{aligned} V_k &= 2\pi(y_k^* - 1)(3 - x_k^*)\Delta y_k \\ &= 2\pi(y_k^* - 1)(3 - (y_k^*)^2 + 2y_k^*)\Delta y_k \\ &= 2\pi(-(y_k^*)^3 + 3(y_k^*)^2 + y_k^* - 3)\Delta y_k. \end{aligned}$$



a) Región *b*) Cascarón *c*) Sólido de revolución

FIGURA 6.4.6 Región, cascarón y sólido de revolución en el ejemplo 3

A partir de la última línea se observa que el volumen del sólido es la integral definida

$$V = 2\pi\int_1^3 (-y^3 + 3y^2 + y - 3)\,dy$$
$$= 2\pi\left(-\frac{1}{4}y^4 + y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 3y\right)\Big]_1^3$$
$$= 2\pi\left[\left(-\frac{81}{4} + 27 + \frac{9}{2} - 9\right) - \left(-\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 3\right)\right] = 8\pi. \quad ■$$

Ejercicios 6.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

Fundamentos

En los problemas 1-6, consulte la FIGURA 6.4.7. Use el método de los cascarones para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región dada alrededor de la recta indicada.

1. R_1 alrededor de OC
2. R_1 alrededor de OA
3. R_2 alrededor de BC
4. R_2 alrededor de OA
5. R_1 alrededor de AB
6. R_2 alrededor de AB

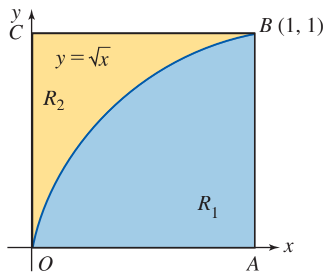


FIGURA 6.4.7 Regiones para los problemas 1-6

En los problemas 7-30, use el método de los cascarones para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas alrededor de la recta o eje que se indica.

7. $y = x, x = 0, y = 5$; eje x
8. $y = 1 - x, x = 0, y = 0$; $y = -2$
9. $y = x^2, x = 0, y = 3$, primer cuadrante; eje x
10. $y = x^2, x = 2, y = 0$; eje y
11. $y = x^2, x = 1, y = 0$; $x = 3$
12. $y = x^2, y = 9$; eje x
13. $y = x^2 + 4, x = 0, x = 2, y = 2$; eje y
14. $y = x^2 - 5x + 4, y = 0$; eje y
15. $y = (x - 1)^2, y = 1$; eje x
16. $y = (x - 2)^2, y = 4$; $x = 4$
17. $y = x^{1/3}, x = 1, y = 0$; $y = -1$
18. $y = x^{1/3} + 1, y = -x + 1, x = 1$; $x = 1$
19. $y = x^2, y = x$; eje y
20. $y = x^2, y = x$; $x = 2$
21. $y = -x^3 + 3x^2, y = 0$, primer cuadrante; eje y
22. $y = x^3 - x, y = 0$, segundo cuadrante; eje y
23. $y = x^2 - 2, y = -x^2 + 2, x = 0$, segundo y tercer cuadrantes; eje y
24. $y = x^2 - 4x, y = -x^2 + 4x$; $x = -1$
25. $x = y^2 - 5y, x = 0$; eje x
26. $x = y^2 + 2, y = x - 4, y = 1$; eje x
27. $y = x^3, y = x + 6, x = 0$; eje y
28. $y = \sqrt{x}, y = \sqrt{1 - x}, y = 0$; eje x
29. $y = \operatorname{sen} x^2, x = 0, y = 1$; eje y
30. $y = e^{x^2}, y = 0, x = 0, x = 1$; eje y

En los problemas 31-36, la región en el inciso *a*) gira alrededor del eje indicado, generando el sólido que vemos en el inciso *b*). Escoja entre los métodos del disco, de la arandela o de los cascarones para encontrar el volumen del sólido de revolución.

31.

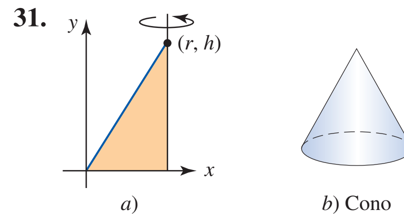


FIGURA 6.4.8 Región y sólido para el problema 31

32.

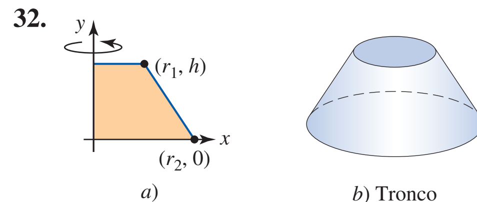


FIGURA 6.4.9 Región y sólido para el problema 32

33.

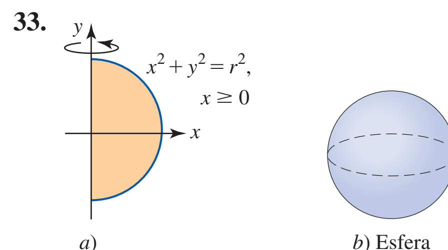
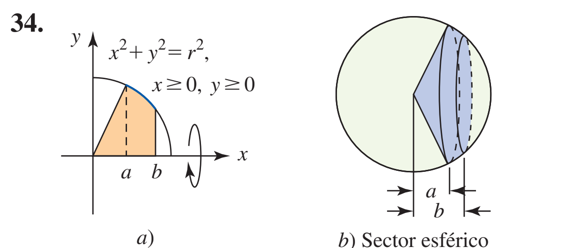


FIGURA 6.4.10 Región y sólido para el problema 33

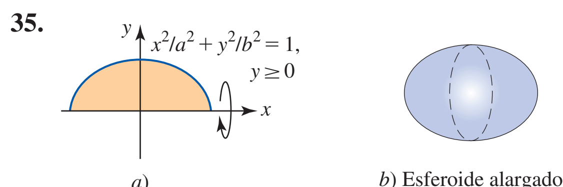
34.



a) *b)* Sector esférico

FIGURA 6.4.11 Región y sólido para el problema 34

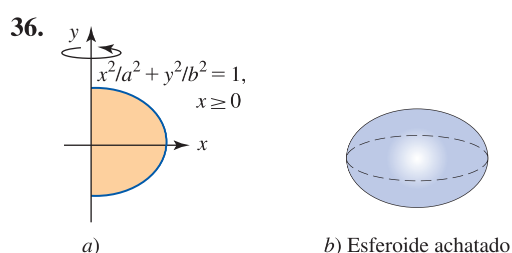
35.



a) *b)* Esferoide alargado

FIGURA 6.4.12 Región y sólido para el problema 35

36.



a) *b)* Esferoide achatado

FIGURA 6.4.13 Región y sólido para el problema 36

≡ Aplicaciones

37. Un cubo cilíndrico de radio r que contiene un líquido gira alrededor del eje y con velocidad angular constante ω. Es posible mostrar que la sección transversal del líquido está dada por $y = \omega^2 x^2/(2g)$, $-r \leq x \leq r$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Use el método de los cascarones para encontrar el volumen V del líquido en el líquido giratorio dado que la altura del cubo es h. Vea la FIGURA 6.4.14.

38. En el problema 37, determine la velocidad angular ω para la cual el fluido entra en contacto con el fondo del cubo. ¿Cuál es el volumen V correspondiente del líquido?

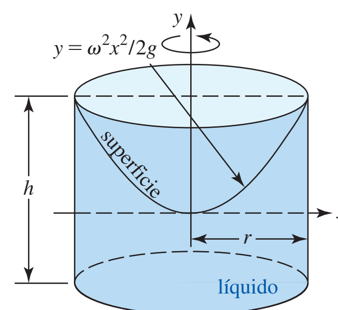


FIGURA 6.4.14 Cubo en los problemas 37 y 38

6.5 Longitud de una gráfica

Introducción Si una función $y = f(x)$ tiene una primera derivada continua sobre un intervalo $[a, b]$, entonces se dice que la gráfica es **suave** y f se denomina **función suave**. Como el nombre lo implica, una gráfica suave carece de picos. En el análisis que sigue se establece una fórmula formal de la **longitud** L, o **longitud de arco**, de una gráfica suave sobre un intervalo $[a, b]$. Vea la FIGURA 6.5.1.

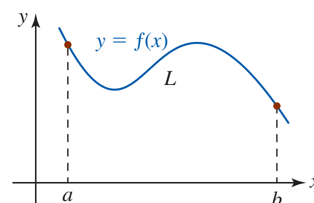


FIGURA 6.5.1 Determinación de la longitud L de la gráfica de f sobre $[a, b]$

Construcción de una integral Sean f que tiene una gráfica suave sobre $[a, b]$ y P una partición arbitraria del intervalo:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Como de costumbre, sean Δx_k el ancho del k-ésimo subintervalo y $\|P\|$ el ancho del subintervalo más grande. Como se muestra en la FIGURA 6.5.2*a*), es posible aproximar la longitud de la gráfica sobre cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ al encontrar la longitud L_k de la cuerda entre los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Por la figura 6.5.2*b*), la longitud L_k se obtiene a partir del teorema de Pitágoras:

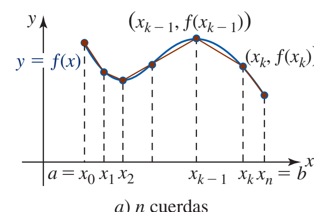
$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}. \qquad (1)$$

Por el teorema del valor medio (sección 4.4) sabemos que en cada subintervalo abierto x_k^* existe un número (x_{k-1}, x_k) tal que

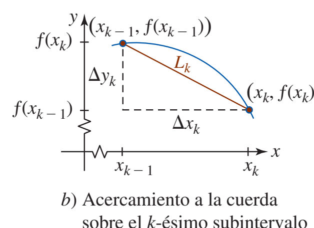
$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x_k^*) \qquad \text{o bien,} \qquad f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}).$$

Al usar la última ecuación, $f(x_k) - f(x_{k-1})$ sustituimos en (1) y simplificamos:

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f'(x_k^*)]^2(x_k - x_{k-1})^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2(1 + [f'(x_k^*)]^2)} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\ \Delta x_k. \end{aligned}$$



a) n cuerdas



b) Acercamiento a la cuerda sobre el k-ésimo subintervalo

FIGURA 6.5.2 Aproximación de la longitud de una gráfica al sumar las longitudes de cuerdas

La suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\, \Delta x_k$$

representa la longitud de la curva poligonal que une $(a, f(a))$ y $(b, f(a))$, y proporciona una aproximación a la longitud total de la gráfica de $[a, b]$. Cuando $\|P\| \to 0$, obtenemos

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\, \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{2}$$

El análisis anterior sugiere usar (2) como la definición de la longitud de la gráfica sobre el intervalo.

Definición 6.5.1 Longitud de arco

Sea f una función para la cual f' es continua sobre un intervalo $[a, b]$. Entonces la **longitud** L de la gráfica de $y = f(x)$ sobre el intervalo está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{3}$$

La fórmula para la longitud de arco (3) también se escribe como

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{4}$$

Se dice que una gráfica que tiene longitud de arco es **rectificable**.

EJEMPLO 1 Longitud de una curva

Encuentre la longitud de la gráfica $y = 4x^{3/2}$ del origen (0, 0) al punto (1, 4).

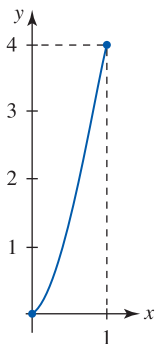


FIGURA 6.5.3 Gráfica de la función en el ejemplo 1

Solución La gráfica de la función sobre el intervalo [0, 1] se muestra en la FIGURA 6.5.3. Luego,

$$\frac{dy}{dx} = 6x^{1/2}$$

es continua sobre el intervalo. En consecuencia, por (4) se concluye que

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + [6x^{1/2}]^2}\, dx \\ &= \int_0^1 (1 + 36x)^{1/2}\, dx \\ &= \frac{1}{36}\int_0^1 (1 + 36x)^{1/2}(36\, dx) \\ &= \frac{1}{54}(1 + 36x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{1}{54}[37^{3/2} - 1] \approx 4.1493. \end{aligned}$$ ■

Diferencial de longitud de arco Si C es una curva suave definida por $y = f(x)$, entonces la longitud de arco entre un punto inicial $(a, f(a))$ y un punto variable $(x, f(x))$, donde $a \le x \le b$, está dada por

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt, \tag{5}$$

donde t representa una variable de integración ficticia. Resulta evidente que el valor de la integral en (5) depende de x, por lo que se denomina **función de longitud de arco**. Luego, por (10) de la sección 5.5, $ds/dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ y, en consecuencia,

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{6}$$

La última función se denomina **diferencial de la longitud de arco** y puede usarse para aproximar longitudes de curvas. Con $dy = f'(x)\,dx$, (6) puede escribirse como

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \qquad \text{o bien,} \qquad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \tag{7}$$

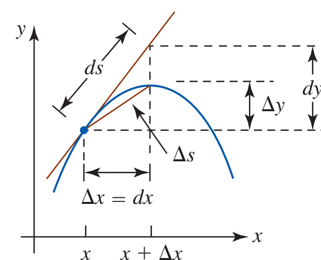


FIGURA 6.5.4 Interpretación geométrica de la diferencial de la longitud de arco

En la FIGURA 6.5.4 se muestra que la diferencial ds puede interpretarse como la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos dx y dy.

Si (3) se escribe $L = \int ds$ para abreviar y la curva C se define por $x = g(y)$, $c \le y \le d$, entonces la última expresión en (7) puede usarse para resolver ds/dy:

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \qquad \text{o} \qquad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy.$$

Por tanto, la integración con respecto a y análoga de (4) es

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy. \tag{8}$$

Vea los problemas 17 y 18 en los ejercicios 6.5.

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

A menudo, la integral en (3) lleva a problemas en los cuales se requieren técnicas especiales de integración. Vea el capítulo 7. Pero aun con estos procedimientos ulteriores, *no siempre* es posible evaluar la integral indefinida $\int \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ en términos de las conocidas funciones elementales, incluso para algunas de las funciones más simples como $y = x^2$. Vea el problema 45 en los ejercicios 7.8.

Ejercicios 6.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

Fundamentos

En los problemas 1-12, encuentre la longitud de la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica.

1. $y = x$; $[-1, 1]$

2. $y = 2x + 1$; $[0, 3]$

3. $y = x^{3/2} + 4$; $[0, 1]$

4. $y = 3x^{2/3}$; $[1, 8]$

5. $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$; $[1, 4]$

6. $(y + 1)^2 = 4(x + 1)^3$; $[-1, 0]$

7. $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}$; $[1, 4]$

8. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$; $[2, 4]$

9. $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$; $[2, 3]$

10. $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{12x^3}$; $[1, 2]$

11. $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$; $[1, 8]$

12. $y = \begin{cases} x - 2, & 2 \le x < 3 \\ (x - 2)^{2/3}, & 3 \le x < 10; \\ \frac{1}{2}(x - 6)^{3/2}, & 10 \le x \le 15 \end{cases}$ $[2, 15]$

En los problemas 13-16 establezca, pero no evalúe, una integral para la longitud de la función dada sobre el intervalo indicado.

13. $y = x^2$; $[-1, 3]$

14. $y = 2\sqrt{x + 1}$; $[-1, 3]$

15. $y = \operatorname{sen} x$; $[0, \pi]$

16. $y = \tan x$; $[-\pi/4, \pi/4]$

En los problemas 17 y 18, use (8) para encontrar la longitud de la gráfica de la ecuación dada sobre el intervalo indicado.

17. $x = 4 - y^{2/3}$; $[0, 8]$

18. $5x = y^{5/2} + 5y^{-1/2}$; $[4, 9]$

19. Considere la longitud de la gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ en el primer cuadrante.

a) Muestre que el uso de (3) conduce a un integrando discontinuo.

b) Suponga que el teorema fundamental del cálculo puede usarse para evaluar la integral obtenida en el inciso *a*) y encuentre la longitud total de la gráfica.

20. Establezca, pero no intente evaluar, una integral que proporcione la longitud total de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$.

21. Dado que la circunferencia de un círculo de radio r es $2\pi r$, encuentre el valor de la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$$

22. Use la diferencial de la longitud de arco (6) para aproximar la longitud de la gráfica de $y = \frac{1}{4}x^4$ desde $(2, 4)$ hasta $(2.1, 4.862025)$. [*Sugerencia*: Revise (13) de la sección 4.9.]

6.6 Área de una superficie de revolución

Introducción Como se ha visto en las secciones 6.3 y 6.4, cuando una gráfica de una función continua $y = f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ gira alrededor del eje x, genera un sólido de revolución. En esta sección tenemos interés en encontrar el área S de la superficie correspondiente; es decir, una **superficie de revolución** sobre $[a, b]$ como se muestra en la FIGURA 6.6.1*b*).

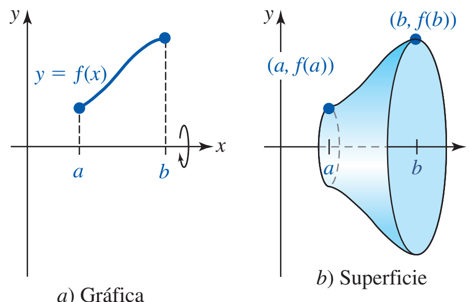


FIGURA 6.6.1 Superficie de revolución

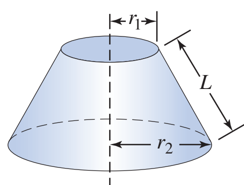


FIGURA 6.6.2 Tronco de un cono

Construcción de una integral Antes de construir una integral definida para la definición del área de una superficie de revolución, se requiere una fórmula para el área lateral (excluyendo las partes superior e inferior) de un *tronco* de un cono circular recto. Vea la FIGURA 6.6.2. Si r_1 y r_2 son los radios de las partes superior e inferior y L es la altura oblicua, entonces el área lateral está dada por

$$\pi(r_1 + r_2)L. \tag{1}$$

Vea el problema 17 en los ejercicios 6.6. Ahora suponga que $y = f(x)$ es una función suave y que $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo $[a, b]$. Sea P una partición del intervalo:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Luego, si unimos con una cuerda los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ mostrados en la FIGURA 6.6.3*a*), formamos un trapezoide. Cuando el trapezoide gira alrededor del eje x, genera un tronco de un cono con radios $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$. Vea la figura 6.6.3*b*). Como se muestra en la sección transversal en la figura 6.6.3*c*), la altura oblicua puede obtenerse a partir del teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

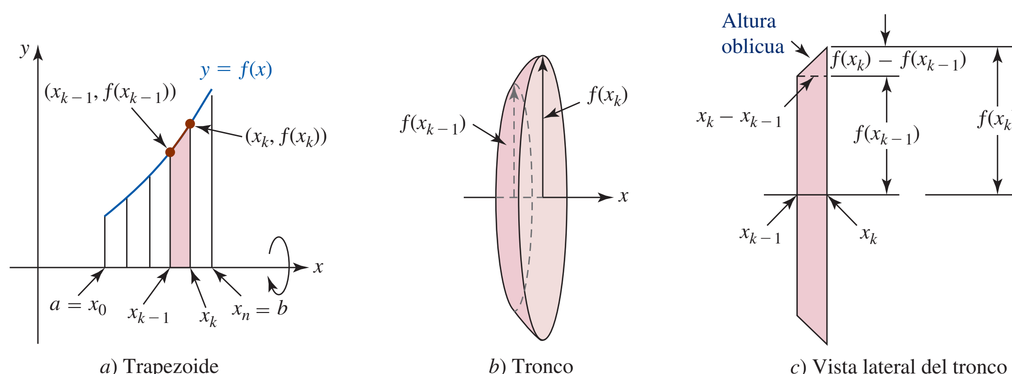


FIGURA 6.6.3 Aproximación del área de la superficie de revolución al sumar áreas de troncos

Así, por (1) el área superficial de este elemento es

$$\begin{aligned} S_k &= \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\,\Delta x_k, \end{aligned}$$

donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Esta última cantidad es una aproximación al área verdadera de la superficie de revolución sobre el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

Luego, así como en el análisis de la longitud de arco, se invoca el teorema del valor medio para derivadas a fin de afirmar que en el intervalo abierto x_k^* hay un (x_{k-1}, x_k) tal que

$$f'(x_k^*) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

La suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \pi \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\,\Delta x_k$$

es una aproximación al área S sobre $[a, b]$. Esto sugiere que el área superficial S está dada por el límite de la suma de Riemann:

$$S = \lim_{\|P\|\to 0} \pi \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\,\Delta x_k. \qquad (2)$$

Puesto que también se espera que $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$ tiendan al límite común $f(x)$ cuando $\|P\| \to 0$, tenemos $f(x_k) + f(x_{k-1}) \to 2f(x)$.

El análisis anterior sugiere usar (2) como la definición del área de la superficie de revolución sobre el intervalo.

Definición 6.6.1 Área de una superficie de revolución

Sean f una función para la cual f' es continua y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo $[a, b]$. El **área** S de la superficie que se obtiene al girar la gráfica de f sobre el intervalo alrededor del eje x está dada por

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \qquad (3)$$

EJEMPLO 1 Área de una superficie

Encuentre el área S de la superficie que se forma al girar la gráfica de $y = \sqrt{x}$ sobre el intervalo $[1, 4]$ alrededor del eje x.

Solución Se tiene $f(x) = x^{1/2}, f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = 1/(2\sqrt{x})$, y por (3)

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx \\
&= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx \\
&= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\,dx \\
&= \pi \int_1^4 \sqrt{4x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\pi \int_1^4 (4x+1)^{1/2}(4\,dx) = \frac{1}{6}\pi(4x+1)^{3/2}\Big]_1^4 \\
&= \frac{1}{6}\pi[17^{3/2} - 5^{3/2}] \approx 30.85.
\end{aligned}$$

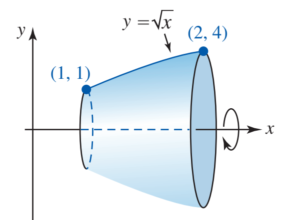


FIGURA 6.6.4 Superficie de revolución alrededor del eje x en el ejemplo 1

Vea la FIGURA 6.6.4. ■

Revolución alrededor del eje *y* Es posible mostrar que si la gráfica de una función continua $y = f(x)$ sobre $[a, b]$, $0 \leq a < b$, gira alrededor del eje y, entonces el área S de la superficie de revolución resultante está dada por

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{4}$$

Así como en (3), en (4) se supone que $f'(x)$ es continua sobre el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 2 Área de una superficie

Encuentre el área S de la superficie que se forma cuando la gráfica de $y = x^{1/3}$ sobre el intervalo $[0, 8]$ gira alrededor del eje y.

Solución Se tiene $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, de modo que por (4) se concluye que

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^8 x\sqrt{1 + \frac{1}{9}x^{-4/3}}\, dx \\ &= 2\pi \int_0^8 x\sqrt{\frac{9x^{4/3} + 1}{9x^{4/3}}}\, dx \\ &= \frac{2}{3}\pi \int_0^8 x^{1/3}\sqrt{9x^{4/3} + 1}\, dx. \end{aligned}$$

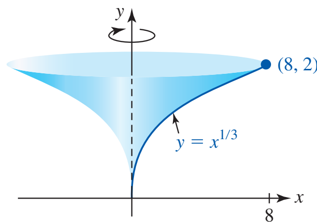


FIGURA 6.6.5 Superficie de revolución alrededor del eje y en el ejemplo 2

La última integral se evaluará al revisar el método de sustitución u. Si hacemos $u = 9x^{4/3} + 1$, entonces $du = 12x^{1/3}\,dx$, $dx = \frac{1}{12}x^{-1/3}\,du$, $x = 0$ implica $u = 1$, y $x = 8$ proporciona $u = 145$. En consecuencia,

$$S = \frac{1}{18}\pi \int_1^{145} u^{1/2}\, du = \frac{1}{27}\pi u^{3/2}\Big]_1^{145} = \frac{1}{27}\pi(145^{3/2} - 1^{3/2}) \approx 203.04.$$

Vea la FIGURA 6.6.5. ■

Ejercicios 6.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre el área de la superficie que se forma al girar cada gráfica sobre el intervalo dado alrededor del eje indicado.

1. $y = 2\sqrt{x}$, $[0, 8]$; eje x
2. $y = \sqrt{x + 1}$, $[1, 5]$; eje x
3. $y = x^3$, $[0, 1]$; eje x
4. $y = x^{1/3}$, $[1, 8]$; eje y
5. $y = x^2 + 1$, $[0, 3]$; eje y
6. $y = 4 - x^2$, $[0, 2]$; eje y
7. $y = 2x + 1$, $[2, 7]$; eje x
8. $y = \sqrt{16 - x^2}$, $[0, \sqrt{7}]$; eje y
9. $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$, $[1, 2]$; eje y
10. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x}$, $[1, 2]$; eje x
11. ***a)*** La forma de una antena de disco es una parábola que gira alrededor de un eje de simetría, denominada **paraboloide de revolución**. Encuentre el área superficial de una antena de radio r y profundidad h que obtenemos al girar la gráfica de $f(x) = r\sqrt{1 - x/h}$ alrededor del eje x. Vea la FIGURA 6.6.6.

    b) La profundidad de una antena de disco varía de 10 a 20% de su radio. Si la profundidad h de la antena del inciso *a*) es 10% del radio, muestre que el área superficial de la antena es aproximadamente la misma que el área de un círculo de radio r. ¿Cuál es el error porcentual en este caso?


Las antenas de disco son paraboloides de revolución

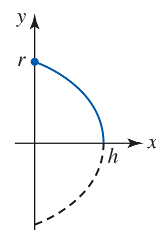


FIGURA 6.6.6 Gráfica de f en el problema 11

12. La superficie formada por dos planos paralelos que cortan una esfera de radio r se denomina **zona esférica**. Encuentre el área de la zona esférica que se muestra en la FIGURA 6.6.7.

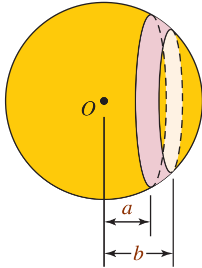


FIGURA 6.6.7 Zona esférica en el problema 12

13. La gráfica de $y = |x + 2|$ sobre $[-4, 2]$, mostrada en la FIGURA 6.6.8, gira alrededor del eje x. Encuentre el área S de la superficie de revolución.

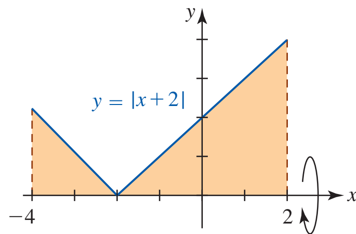


FIGURA 6.6.8 Gráfica de la función en el problema 13

14. Encuentre el área de superficie que se forma al girar $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $[-a, a]$, alrededor del eje x.

≡ Piense en ello

15. Demuestre que el área superficial lateral de un cono circular recto de radio r y altura oblicua L es πrL. [*Sugerencia*: Cuando un cono se corta por el lado y se aplana forma un sector circular con área $\frac{1}{2}L^2\theta$.]

16. Use el problema 15 para mostrar que el área superficial lateral de un cono circular recto de radio r y altura h está dada por $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Obtenga el mismo resultado usando (3) o (4).

17. Use el problema 15 para obtener la fórmula (1). [*Sugerencia*: Considere un cono completo de radio r_2 y altura oblicua L_2. Corte la parte cónica superior. Puede ser de ayuda considerar triángulos semejantes.]

18. Muestre que el área superficial del tronco de un cono circular recto de radios r_1 y r_2 y altura h está dada por $\pi(r_1 + r_2)\sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2}$.

19. Sea $y = f(x)$ una función no negativa continua sobre $[a, b]$ cuya primera derivada es continua sobre el intervalo. Demuestre que si la gráfica de f gira alrededor de una recta horizontal $y = L$, entonces el área S de la superficie de revolución resultante está dada por

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x) - L|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

20. Use el resultado del problema 19 para encontrar una integral definida que proporcione el área de la superficie que se forma al girar $y = x^{2/3}$, $[1, 8]$, alrededor de la recta $y = 4$. No evalúe.

≡ Proyectos

21. Una vista desde el espacio

a) Desde una nave espacial en órbita alrededor de la Tierra a una distancia h de la superficie terrestre, un astronauta puede observar sólo una porción A_s del área total del área superficial de la Tierra, A_e. Vea la FIGURA 6.6.9*a*). Encuentre una fórmula para la expresión fraccionaria A_s/A_e como una función de h. En la figura 6.6.9*b*) se muestra la Tierra en sección transversal como un círculo con centro C y radio R. Sean los ejes x y y como se muestra y sean y_B y $y_E = R$ las coordenadas y de los puntos B y E, respectivamente.

b) ¿Qué porcentaje de la superficie de la Tierra ve un astronauta desde una altura de 2 000 km? Considere que el radio terrestre es $R = 6\,380$ km.

c) ¿A qué altura h el astronauta ve un cuarto de la superficie de la Tierra?

d) ¿Cuál es el límite de A_s/A_e cuando la altura h crece sin cota ($h \to \infty$)? ¿Por qué la respuesta tiene sentido intuitivo?

e) ¿Qué porcentaje de la superficie terrestre ve un astronauta desde la Luna si $h = 3.76 \times 10^5$ km?

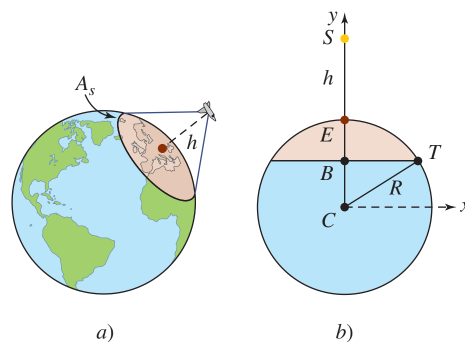


FIGURA 6.6.9 Porción de la superficie terrestre en el problema 21

6.7 Valor promedio de una función

Introducción Todos los estudiantes saben qué es un promedio. Si un estudiante presenta cuatro exámenes en un semestre y sus calificaciones porcentuales son 80, 75, 85 y 92%, entonces su promedio puntaje es

$$\frac{80 + 75 + 85 + 92}{4}$$

o bien, 83%. En general, dados n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se dice que su **media aritmética** o **promedio**, es

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{1}$$

En esta sección se extiende el concepto de un promedio discreto como (1) al promedio de *todos* los valores de una función continua definida sobre un intervalo $[a, b]$.

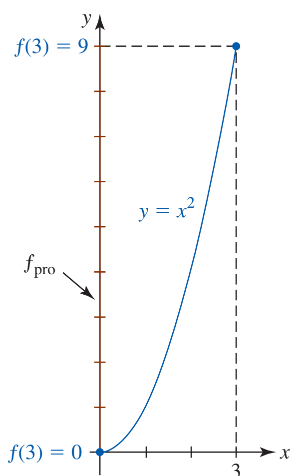


FIGURA 6.7.1 Determinación del promedio de todos los números indicados en rojo sobre el eje y

Promedio de valores funcionales Ahora suponga que tenemos una función continua f definida sobre un intervalo $[a, b]$. Para los números x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ escogidos de manera arbitraria de modo que $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, entonces por (1) el promedio del conjunto de valores funcionales es

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k). \tag{2}$$

Si ahora se considera el conjunto de valores funcionales $f(x)$ que corresponde a todos los números x en un intervalo, debe resultar evidente que no es posible usar una suma discreta como en (1), puesto que este conjunto de valores funcionales suele ser un conjunto no numerable. Por ejemplo, para $f(x) = x^2$ sobre [0, 3], los valores de la función varían desde un mínimo de $f(0) = 0$ hasta un máximo de $f(3) = 9$. Como se indica en la FIGURA 6.7.1, de manera intuitiva es de esperar que exista un valor entero promedio f_{pro} tal que $f(0) \le f_{\text{pro}} \le f(3)$.

Construcción de una integral Volviendo al caso general de una función continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, sea P una partición regular del intervalo en n subintervalos de ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Si x_k^* es un número escogido en cada subintervalo, entonces el promedio

$$\frac{f(x_k^*) + f(x_k^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

puede escribirse como

$$\frac{f(x_k^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\dfrac{b - a}{\Delta x}} \tag{3}$$

puesto que $n = (b - a)/\Delta x$. Al volver a escribir (3) como

$$\frac{1}{b - a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x$$

y tomar el límite de esa expresión como $\|P\| = \Delta x \to 0$, obtenemos la integral definida

$$\frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Debido a que se ha supuesto que f es continua sobre $[a, b]$, su mínimo absoluto y su máximo absoluto sobre el intervalo se denotarán por m y M, respectivamente. Si la desigualdad

$$m \le f(x_k^*) \le M$$

se multiplica por $\Delta x > 0$ y se suma, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} m\,\Delta x \le \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x \le \sum_{k=1}^{n} M\,\Delta x.$$

Debido a que $\sum_{k=1}^{n} \Delta x = b - a$, la desigualdad precedente equivale a

$$(b - a)m \le \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x \le (b - a)M.$$

Y así cuando $\Delta x \to 0$, se concluye que

$$(b - a)m \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b - a)M.$$

A partir de la última desigualdad concluimos que el número obtenido a partir de (4) satisface

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \leq M.$$

Por el teorema del valor intermedio, f asume todos los valores entre m y M. Por tanto, el número obtenido a partir de (4) en realidad corresponde a un valor de la función sobre el intervalo. Esto sugiere plantear la siguiente definición.

Definición 6.7.1 Valor promedio de una función

Sea $y = f(x)$ continua sobre $[a, b]$. El **valor promedio** de f sobre el intervalo es el número

$$f_{pro} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \quad (5)$$

Aunque principalmente se tiene interés en funciones continuas, la definición 6.7.1 es válida para cualquier función integrable sobre el intervalo.

EJEMPLO 1 Determinación de un valor promedio

Encuentre el valor promedio de $f(x) = x^2$ sobre $[0, 3]$.

Solución Por (5) de la definición 6.7.1, obtenemos

$$f_{pro} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big]_0^3 = 3. \quad ■$$

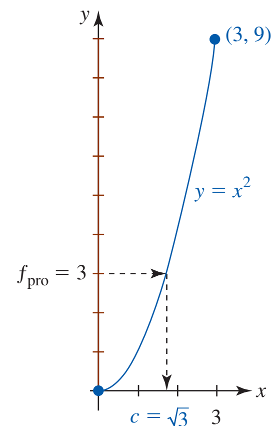


FIGURA 6.7.2 f_{pro} es el valor funcional $f(\sqrt{3})$ en el ejemplo 1

Algunas veces es posible determinar el valor de x en el intervalo que corresponde al valor promedio de una función.

EJEMPLO 2 Determinación de x correspondiente a f_{pro}

Encuentre el valor de x en el intervalo $[0, 3]$ que corresponde al valor promedio f_{pro} de la función $f(x) = x^2$.

Solución Puesto que la función $f(x) = x^2$ es continua sobre el intervalo cerrado $[0, 3]$, por el teorema del valor intermedio sabemos que entre 0 y 3 existe un número c tal que

$$f(c) = c^2 = f_{pro}.$$

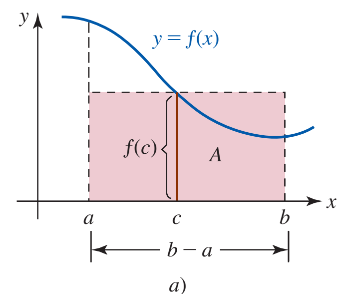
Pero, por el ejemplo 1, sabemos que $f_{pro} = 3$. Por tanto, la ecuación $c^2 = 3$ tiene las soluciones $c = \pm\sqrt{3}$. Como se muestra en la FIGURA 6.7.2, la única solución de esta ecuación en $[0, 3]$ es $c = \sqrt{3}$. ■

Teorema del valor medio para integrales definidas A continuación se presenta una consecuencia inmediata del análisis anterior. El resultado se denomina teorema del valor medio para integrales.

Teorema 6.7.1 Teorema del valor medio para integrales

Sea $y = f(x)$ continua sobre $[a, b]$. Entonces en el intervalo abierto (a, b) existe un número c tal que

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx. \quad (6)$$



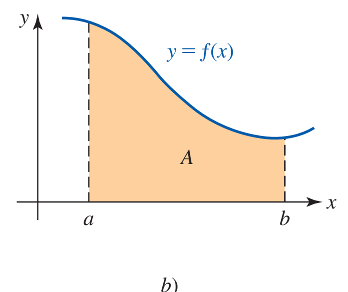


FIGURA 6.7.3 El área A del rectángulo es la misma que el área bajo la gráfica sobre $[a, b]$

En el caso en que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, el teorema 6.7.1 se interpreta fácilmente en términos de área. El resultado en (6) simplemente establece que en (a, b) existe un número c para el cual el área A de un *rectángulo* de altura $f(c)$ y ancho $b - a$ mostrado en la FIGURA 6.7.3*a*) es la misma que el *área A bajo la gráfica* indicada en la figura 6.7.3*b*).

EJEMPLO 3 Determinación de x correspondiente a f_{pro}

Encuentre la altura $f(c)$ de un rectángulo de modo que el área A bajo la gráfica de $y = x^2 + 1$ sobre $[-2, 2]$ sea la misma que $f(c)[2 - (-2)] = 4f(c)$.

Solución Básicamente, éste es el mismo tipo de problema ilustrado en el ejemplo 2. Así, el área bajo la gráfica mostrada en la FIGURA 6.7.4*a*) es

$$A = \int_{-2}^{2} (x^2 + 1)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big]_{-2}^{2} = \frac{28}{3}.$$

También, $4f(c) = 4(c^2 + 1)$, de modo que $4(c^2 + 1) = \frac{28}{3}$ implica $c^2 = \frac{4}{3}$. Las dos soluciones $c_1 = 2/\sqrt{3}$ y $c_2 = -2/\sqrt{3}$ están en el intervalo $(-2, 2)$. Para cualquier número, observamos que la altura del rectángulo es $f(c_1) = f(c_2) = (\pm 2/\sqrt{3})^2 + 1 = \frac{7}{3}$. El área del rectángulo mostrado en la figura 6.7.4*b*) es $f(c)[2 - (-2)] = \frac{7}{3} \cdot 4 = \frac{28}{3}$.

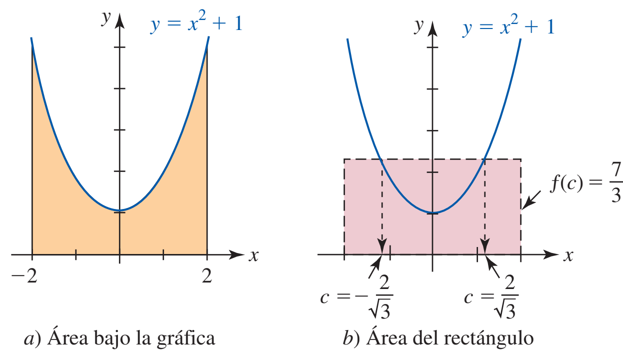


FIGURA 6.7.4 El área en *a*) es la misma que el área en *b*) en el ejemplo 3 ■

Ejercicios 6.7 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-21.

Fundamentos

En los problemas 1-20, encuentre el valor promedio f_{pro} de la función dada sobre el intervalo indicado.

1. $f(x) = 4x$; $[-3, 1]$
2. $f(x) = 2x + 3$; $[-2, 5]$
3. $f(x) = x^2 + 10$; $[0, 2]$
4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$; $[-1, 1]$
5. $f(x) = 3x^2 - 4x$; $[-1, 3]$
6. $f(x) = (x + 1)^2$; $[0, 2]$
7. $f(x) = x^3$; $[-2, 2]$
8. $f(x) = x(3x - 1)^2$; $[0, 1]$
9. $f(x) = \sqrt{x}$; $[0, 9]$
10. $f(x) = \sqrt{5x + 1}$; $[0, 3]$
11. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 16}$; $[0, 3]$
12. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3}\frac{1}{x^2}$; $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
13. $f(x) = \frac{1}{x^3}$; $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$
14. $f(x) = x^{2/3} - x^{-2/3}$; $[1, 4]$
15. $f(x) = \frac{2}{(x + 1)^2}$; $[3, 5]$
16. $f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{\sqrt{x}}$; $[4, 9]$
17. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $[-\pi, \pi]$
18. $f(x) = \cos 2x$; $[0, \pi/4]$
19. $f(x) = \csc^2 x$; $[\pi/6, \pi/2]$
20. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\cos^2 \pi x}$; $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

En los problemas 21 y 22, encuentre un valor c en el intervalo dado para el cual $f(c) = f_{pro}$.

21. $f(x) = x^2 + 2x$; $[-1, 1]$
22. $f(x) = \sqrt{x + 3}$; $[1, 6]$

23. El valor promedio de una función no negativa continua $y = f(x)$ sobre el intervalo $[1, 5]$ es $f_{pro} = 3$. ¿Cuál es el área bajo la gráfica sobre el intervalo?

24. Para $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, encuentre un valor de b tal que $f_{pro} = 0$ sobre $[0, b]$. Interprete geométricamente.

Aplicaciones

25. La función $T(t) = 100 + 3t - \frac{1}{2}t^2$ aproxima la temperatura a las t horas después de mediodía en un día típico de agosto en Las Vegas. Encuentre la temperatura media entre el mediodía y las 6 p.m.

26. Una empresa determina que las ganancias obtenidas después de la venta de x unidades de un producto están dadas por $R(x) = 50 + 4x + 3x^2$. Encuentre el promedio de las ganancias para ventas de $x = 1$ a $x = 5$. Compare el resultado con el promedio $\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} R(k)$.

27. Sea $s(t)$ la posición de una partícula sobre un eje horizontal como una función del tiempo t. La velocidad media $\bar{v}$ durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es $\bar{v} = [s(t_2) - s(t_1)]/(t_2 - t_1)$. Use (5) para demostrar que $v_{pro} = \bar{v}$. [*Sugerencia*: Recuerde que $ds/dt = v$.]

28. Cuando no hay amortiguamiento, la posición de una masa m sobre un resorte que vibra libremente está dada por la función $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, donde A, ω y ϕ son

constantes. El periodo de oscilación es $2\pi/\omega$. La energía potencial del sistema es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, donde k es la constante del resorte. La energía cinética del sistema es $K = \frac{1}{2}mv^2$, donde $v = dx/dt$. Si $\omega^2 = k/m$, muestre que la energía potencial media y la energía cinética media sobre un periodo son las mismas y que cada una es igual a $\frac{1}{4}kA^2$.

29. En física, el **teorema impulso-cantidad de movimiento** establece que el cambio del impulso de un cuerpo sobre un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es $mv_1 - mv_0 = (t_1 - t_0)\overline{F}$, donde mv_0 es la cantidad de impulso inicial, mv_1 es la cantidad de impulso final y $\overline{F}$ es la fuerza media que actúa sobre el cuerpo durante el intervalo. Encuentre el cambio en el impulso de un martinete que se deja caer sobre un apilamiento entre los instantes $t = 0$ y $t = t_1$ si

$$F(t) = k\left[1 - \left(\frac{2t}{t_1} - 1\right)^2\right],$$

donde k es una constante.

30. En una arteria pequeña, la velocidad del torrente sanguíneo (en cm/s) está dada por $v(r) = (P/4\nu l))(R^2 - r^2)$, $0 \leq r \leq R$, donde P es la presión sanguínea, ν es la viscosidad de la sangre, l es la longitud de la arteria y R es el radio de la arteria. Encuentre el promedio de $v(r)$ sobre el intervalo $[0, R]$.

≡ Piense en ello

31. Si $y = f(x)$ es una función impar continua, entonces, ¿cuál es f_{pro} sobre cualquier intervalo $[-a, a]$?

32. Para una función lineal $f(x) = ax + b$, $a > 0$, $b > 0$, el valor promedio de la función sobre $[x_1, x_2]$ es $f_{pro} = aX + b$, donde X es algún número en el intervalo. Conjeture el valor de X. Demuestre su afirmación.

33. Si $y = f(x)$ es una función diferenciable, encuentre el valor promedio de f' sobre el intervalo $[x, x + h]$, donde $h > 0$.

34. Dado que n es un entero positivo y $a > 1$, muestre que el valor promedio de $f(x) = (n + 1)x^n$ sobre el intervalo $[1, a]$ es $f_{pro} = a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1$.

35. Suponga que $y = f(x)$ es una función continua y que f_{pro} es su valor promedio sobre $[a, b]$. Explique: $\int_a^b [f(x) - f_{pro}]\, dx = 0$.

36. Sea $f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función entero mayor o función piso. Sin integración, ¿cuál es el promedio de f sobre $[0, 1]$? ¿Y sobre $[0, 2]$? ¿Y sobre $[0, 3]$? ¿Y sobre $[0, 4]$? Conjeture el valor promedio de f sobre el intervalo $[0, n]$, donde n es un entero positivo. Demuestre su afirmación.

37. Como se muestra en la FIGURA 6.7.5, una cuerda se traza aleatoriamente entre dos puntos del círculo de radio $r = 1$. Analice: ¿cuál es la longitud media de las cuerdas?

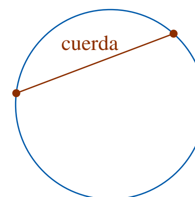


FIGURA 6.7.5 Círculo en el problema 37

≡ Proyectos

38. Miembros humanos La siguiente fórmula se usa a menudo para aproximar el área superficial S de un miembro humano:

$$S \approx \text{circunferencia media} \times \text{longitud del miembro}.$$

a) Como se muestra en la FIGURA 6.7.6, un miembro puede considerarse como un sólido de revolución. Para muchos miembros, $f'(x)$ es pequeña. Si $|f'(x)| \leq \varepsilon$ para $a \leq x \leq b$, muestre que

$$\int_a^b 2\pi f(x)\, dx \leq S \leq \sqrt{1 + \varepsilon^2} \int_a^b 2\pi f(x)\, dx.$$

b) Muestre que $\overline{C}L \leq S \leq \sqrt{1 + \varepsilon^2}\, \overline{C}L$, donde $\overline{C}$ es la circunferencia media del miembro sobre el intervalo $[a, b]$. Así, la fórmula de aproximación planteada antes siempre subestima a S pero funciona bien cuando ε es pequeño (como para el antebrazo a la muñeca).

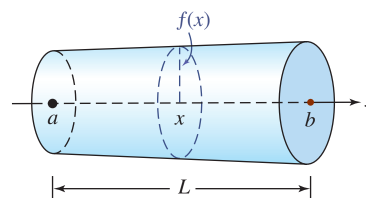


FIGURA 6.7.6 Modelo de un miembro en el problema 38

6.8 Trabajo

Introducción En física, cuando una fuerza *constante* F mueve un objeto a una distancia d en la misma dirección de la fuerza, el **trabajo** realizado se define como el producto

$$W = Fd. \tag{1}$$

Por ejemplo, si una fuerza de 10 lb mueve un objeto 7 pies en la misma dirección de la fuerza, entonces el trabajo realizado es 70 pies-lb. En esta sección veremos cómo encontrar el trabajo realizado por una fuerza *variable*.

Antes de examinar el trabajo como integral definida, revisaremos algunas unidades importantes.

Unidades En la tabla siguiente se enumeran **unidades** de uso común de fuerza, distancia y trabajo.

Cantidad	Sistema ingenieril	SI	cgs
Fuerza	libra (lb)	newton (N)	dina
Distancia	pie (pie)	metro (m)	centímetro (cm)
Trabajo	pie-libra (pie-lb)	newton-metro (joule)	dina-centímetro (ergio)

Por tanto, si una fuerza de 300 N mueve 15 m un objeto, el trabajo realizado es $W = 300 \cdot 15 = 4\,500$ N-m o 4 500 joules. Para efectos de comparación y conversión de una unidad a otra, se observa que

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dinas} = 0.2247 \text{ lb}$$
$$1 \text{ pie-lb} = 1.356 \text{ joules} = 1.356 \times 10^7 \text{ ergios}.$$

De modo que, por ejemplo, 70 pies-lb equivalen a $70 \times 1.356 = 94.92$ joules, y 4 500 joules equivalen a $4\,500/1.356 = 3\,318.584$ pies-lb.

Construcción de una integral Ahora, si $F(x)$ representa una fuerza variable continua que actúa sobre un intervalo $[a, b]$, entonces el trabajo no es simplemente un producto como en (1). Suponga que P es la partición

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

y Δx_k es el ancho del k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Sea x_k^* el punto muestra escogido de manera arbitraria en cada subintervalo. Si el ancho de cada $[x_{k-1}, x_k]$ es muy pequeño, entonces, puesto que F es continua, los valores funcionales $F(x)$ no pueden variar mucho en el subintervalo. Por tanto, puede considerarse en forma razonable que la fuerza actúa sobre $[x_{k-1}, x_k]$ como la constante $F(x_k^*)$ y que el trabajo realizado desde x_{k-1} hasta x_k está dado por la aproximación

$$W_k = F(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

Entonces, una aproximación al trabajo total realizado desde a hasta b está dada por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} W_k = F(x_1^*)\,\Delta x_1 + F(x_2^*)\,\Delta x_2 + \cdots + F(x_n^*)\,\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

Resulta natural suponer que el trabajo realizado por F sobre el intervalo es

$$W = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

El análisis anterior se resume en la siguiente definición.

Definición 6.8.1 Trabajo

Sea F continua sobre el intervalo $[a, b]$ y sea $F(x)$ la fuerza en un número x en el intervalo. Entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza para mover un objeto de a a b es

$$W = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{2}$$

Nota: Si F es constante, $F(x) = k$ para toda x en el intervalo, entonces (2) se vuelve $W = \int_a^b k\,dx = kx]_a^b = k(b - a)$, lo cual es consistente con (1).

Problemas de resortes La ley de Hooke establece que cuando un resorte se estira (o comprime) más allá de su longitud natural, la fuerza de reconstitución ejercida por el resorte es directamente proporcional a la cantidad de elongación (o compresión) x. Así, para estirar un resorte x unidades más allá de su longitud natural es necesario aplicar la fuerza

$$F(x) = kx, \tag{3}$$

donde k es una constante de proporcionalidad denominada **constante del resorte**. Vea la FIGURA 6.8.1.

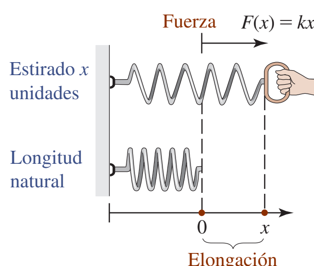


FIGURA 6.8.1 Para estirar un resorte x unidades se requiere una fuerza $F(x) = kx$

EJEMPLO 1 Alargamiento de un resorte

Para estirar un resorte de 50 cm se requiere una fuerza de 130 N. Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte 20 cm más allá de su longitud natural (sin estirar).

Solución Cuando una fuerza se mide en newtons, las distancias suelen expresarse en metros. Puesto que $x = 50$ cm $= \frac{1}{2}$ m cuando $F = 130$ N, (3) se vuelve $130 = k\left(\frac{1}{2}\right)$, lo que implica que la constante del resorte es $k = 260$ N/m. Por tanto, $F = 260x$. Luego, 20 cm $= \frac{1}{5}$ m, de modo que el trabajo realizado para estirar el resorte por esta cantidad es

$$W = \int_0^{1/5} 260x\,dx = 130x^2\Big]_0^{1/5} = \frac{26}{5} = 5.2 \text{ joules.}$$ ■

Nota: Suponga que la longitud natural del resorte en el ejemplo 1 es de 40 cm. Una forma equivalente de plantear el problema es: encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte hasta una longitud de 60 cm. Puesto que la elongación es $60 - 40 = 20$ cm $= \frac{1}{5}$ m, se integra $F = 260x$ sobre el intervalo $\left[0, \frac{1}{5}\right]$. No obstante, si el problema fuese encontrar el trabajo realizado para estirar el mismo resorte de 50 cm a 60 cm, entonces se integraría sobre el intervalo $\left[\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right]$. En este caso se inicia desde una posición en que el resorte ya está estirado 10 cm $\left(\frac{1}{10}\text{ m}\right)$.

Trabajo realizado contra la gravedad A partir de la ley de gravitación universal, la fuerza entre un planeta (o satélite) de masa m_1 y un cuerpo de masa m_2 está dada por

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{4}$$

donde k es una constante denominada **constante gravitacional**, y r es la distancia desde el centro del planeta de masa m_2. Vea la FIGURA 6.8.2. Para elevar la masa m_2 desde la superficie de un planeta de radio R hasta una altura h, el trabajo puede realizarse al usar (4) en (2):

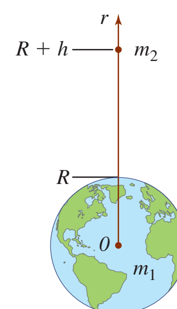


FIGURA 6.8.2 Levantamiento de una masa m_2 hasta una altura h

$$W = \int_R^{R+h} \frac{km_1m_2}{r^2}\,dr = km_1m_2\left(-\frac{1}{r}\right)\Big]_R^{R+h} = km_1m_2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right). \tag{5}$$

En unidades SI, $k = 6.67 \times 10^{-11}$ N · m²/kg². En la tabla de la derecha se proporcionan algunas masas y valores de R.

Planetas	m_1 (en kg)	R (en m)
Venus	4.9×10^{24}	6.2×10^6
Tierra	6.0×10^{24}	6.4×10^6
Luna (satélite)	7.3×10^{22}	1.7×10^6
Marte	6.4×10^{23}	3.3×10^6

EJEMPLO 2 Trabajo realizado para subir una carga útil

El trabajo realizado para subir una carga útil de 5 000 kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura de 30 000 m (0.03×10^6 m) se concluye por (5) y la tabla precedente:

$$W = (6.67 \times 10^{-11})(6.0 \times 10^{24})(5\,000)\left(\frac{1}{6.4 \times 10^6} - \frac{1}{6.43 \times 10^6}\right)$$
$$\approx 1.46 \times 10^9 \text{ joules.}$$ ■

Problemas de bombeo Cuando un líquido que pesa ρ lb/pie³ se bombea desde un tanque, el trabajo realizado para mover un volumen fijo o una capa de líquido d pies en una dirección vertical es

$$W = \text{fuerza} \cdot \text{distancia} = (\text{peso por unidad de volumen}) \cdot (\text{volumen}) \cdot (\text{distancia})$$

o bien,
$$W = \underbrace{\rho \cdot (\text{volumen})}_{\text{fuerza}} \cdot d. \tag{6}$$

En física, la cantidad ρ se denomina **peso específico** del fluido. Para agua, $\rho = 62.4$ lb/pie³, o 9 800 N/m³.

En los varios ejemplos siguientes se usará (6) para construir la integral idónea a fin de encontrar el trabajo realizado al bombear agua desde un tanque.

EJEMPLO 3 Trabajo realizado para bombear agua

Un tanque hemisférico de radio de 20 pies está lleno de agua hasta una profundidad de 15 pies. Encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta la parte superior del tanque.

Solución Como se muestra en la FIGURA 6.8.3, hacemos que el eje x positivo esté dirigido *hacia abajo* y el origen se fija en el punto medio de la parte superior del tanque. Puesto que la sección transversal del tanque es un semicírculo, x y y están relacionadas por $x^2 + y^2 = (20)^2$, $0 \le x \le 20$. Ahora suponga que el intervalo $[5, 20]$, que corresponde al agua sobre el eje x, se parte en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de ancho Δx_k. Sea x_k^* cualquier punto muestra en el k-ésimo subintervalo y sea W_k una aproximación al trabajo realizado por la bomba al hacer subir una capa circular de agua de grosor Δx_k hasta la parte superior del tanque. Por (6) se concluye que

$$W_k = \underbrace{[62.4\pi(y_k^*)^2\Delta x_k]}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{x_k^*}_{\text{distancia}},$$

donde $(y_k^*)^2 = 400 - (x_k^*)^2$. Por tanto, el trabajo realizado por la bomba es aproximado por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} W_k = \sum_{k=1}^{n} 62.4\pi[400 - (x_k^*)^2]x_k^*\Delta x_k.$$

El trabajo realizado para bombear toda el agua hasta la parte superior del tanque es el límite de esta última expresión cuando $\|P\| \to 0$; es decir,

$$W = \int_5^{20} 62.4\pi(400 - x^2)x\,dx = 62.4\pi\left(200x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg]_5^{20} \approx 6\,891\,869 \text{ pies-lb}.$$

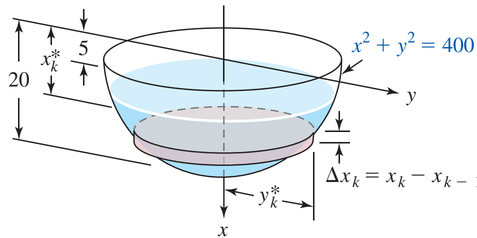


FIGURA 6.8.3 Tanque hemisférico en el ejemplo 3 ■

Merece la pena continuar el análisis del ejemplo 3 para el caso en que el eje x positivo se tome en la dirección *hacia arriba* y el origen esté en el punto medio de la parte inferior del tanque.

EJEMPLO 4 Solución alterna del ejemplo 3

Con los ejes como se muestra en la FIGURA 6.8.4, vemos que una capa circular de agua debe subirse una distancia de $20 - x_k^*$ pies. Puesto que el centro del semicírculo está en $(20, 0)$, ahora x y y están relacionadas por $(x - 20)^2 + y^2 = 400$. Entonces,

$$\begin{aligned} W_k &= \underbrace{(62.4\pi(y_k^*)^2\,\Delta x_k)}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{(20 - x_k^*)}_{\text{distancia}} \\ &= 62.4\pi[400 - (x - 20)^2](20 - x_k^*)\,\Delta x_k \end{aligned}$$

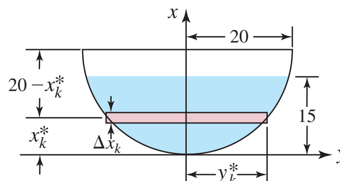


FIGURA 6.8.4 Tanque hemisférico en el ejemplo 4

y así

$$W = 62.4\pi \int_0^{15} [400 - (x - 20)^2](20 - x)\, dx$$
$$= 62.4\pi \int_0^{15} (x^3 - 60x^2 + 800x)\, dx.$$

Observe los nuevos límites de integración; esto se debe a que el agua mostrada en la figura 6.8.4 corresponde al intervalo [0, 15] sobre el eje vertical. Usted debe comprobar que el valor de W en este caso es el mismo que en el ejemplo 3. ■

EJEMPLO 5 Otro repaso al ejemplo 3

En el ejemplo 3, encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta un punto 10 pies por arriba del tanque hemisférico.

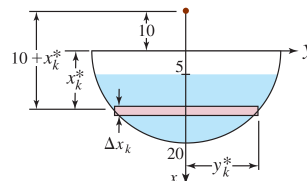


FIGURA 6.8.5 Tanque hemisférico en el ejemplo 5

Solución Como en la figura 6.8.3, el eje x positivo se ubica hacia abajo. Luego, por la FIGURA 6.8.5 vemos

$$W_k = (62.4\pi(y_k^*)^2\, \Delta x_k) \cdot (10 + x_k^*)$$
$$= 62.4\pi[400 - (x_k^*)^2](10 + x_k^*)\, \Delta x_k.$$

Por tanto,

$$W = 62.4\pi \int_5^{20} (400 - x^2)(10 + x)\, dx$$
$$= 62.4\pi \int_5^{20} (-x^3 - 10x^2 + 400x + 4\,000)\, dx$$
$$= 62.4\pi\left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + 200x^2 + 4\,000x\right)\Bigg]_5^{20}$$
$$= 13\,508\,063 \text{ pies-lb.}$$ ■

Problemas con cables El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que cuando se calcula el trabajo realizado para subir un objeto por medio de un cable (cuerda pesada o cadena), el peso del cable debe tomarse en cuenta.

EJEMPLO 6 Subida de un elevador

Un cable que pesa 6 lb/pie está conectado a un elevador de construcción que pesa 1 500 lb. Encuentre el trabajo realizado para subir el elevador hasta una altura de 500 pies.

Solución Puesto que el peso del elevador es una fuerza constante, por (1) se concluye que el trabajo realizado para subir el elevador hasta una altura de 500 pies es simplemente

$$W_E = (1\,500) \cdot (500) = 750\,000 \text{ pies-lb.}$$

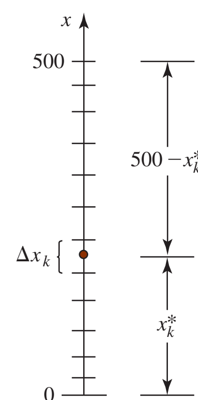


FIGURA 6.8.6 Cable en el ejemplo 6

El peso del cable es la fuerza variable. Sea W_C el trabajo realizado para subir el cable. Como se muestra en la FIGURA 6.8.6, suponga que el eje x positivo está dirigido hacia arriba y que el intervalo [0, 500] se parte en n subintervalos con longitudes Δx_k. A una altura de x_k^* pies del suelo, un segmento de cable correspondiente al subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ pesa $6\Delta x_k$ y es necesario jalarlo $500 - x_k^*$ pies adicionales. Por tanto, es posible escribir

$$(W_C)_k = \underbrace{(6\,\Delta x_k)}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{(500 - x_k^*)}_{\text{distancia}} = (3\,000 - 6x_k^*)\,\Delta x_k$$

y así

$$W_C = \int_0^{500} (3\,000 - 6x)\, dx = (3\,000x - 3x^2)\Big]_0^{500} = 750\,000 \text{ pies-lb.}$$

Por tanto, el trabajo total realizado para subir el elevador es

$$W = W_E + W_C = 1\,500\,000 \text{ pies-lb.}$$ ■

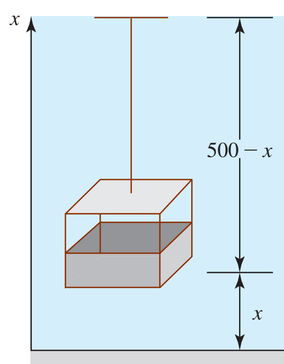


FIGURA 6.8.7 Elevador en los ejemplos 6 y 7

EJEMPLO 7 Solución alterna del ejemplo 6

Éste es un análisis ligeramente más rápido del ejemplo 6. Como se muestra en la FIGURA 6.8.7, cuando el elevador está a una altura de x pies, es necesario jalarlo $500 - x$ pies adicionales. La fuerza necesaria para subirlo a esa altura es

$$\underbrace{1\,500}_{\text{peso del elevador}} + \underbrace{6(500 - x)}_{\text{peso del cable}} = 4\,500 - 6x.$$

Así, por (2) el trabajo realizado es

$$W = \int_0^{500} (4\,500 - 6x)\,dx = 1\,500\,000 \text{ pies-lb.}$$ ■

Ejercicios 6.8

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-21.

Fundamentos

1. Encuentre el trabajo realizado cuando una fuerza de 55 lb mueve un objeto 20 yd en la misma dirección de la fuerza.

2. Una fuerza de 100 N se aplica a un objeto a 30º medidos con respecto a la horizontal. Si el objeto se mueve 8 cm horizontalmente, encuentre el trabajo realizado por la fuerza.

3. Una masa que pesa 10 lb estira $\frac{1}{2}$ pie un resorte. ¿Cuánto estira una masa que pesa 8 lb el mismo resorte?

4. La longitud natural de un resorte es 0.5 m. Una fuerza de 50 N estira el resorte una longitud de 0.6 m.

a) ¿Qué fuerza se requiere para estirar el resorte x m?
b) ¿Qué fuerza se requiere para estirar el resorte una longitud de 1 m?
c) ¿Cuánto mide de largo el resorte cuando lo estira una fuerza de 200 N?

5. En el problema 4:

a) Encuentre el trabajo realizado al estirar 0.2 m el resorte.
b) Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte desde una longitud de 1 m hasta una longitud de 1.1 m.

6. Se requiere una fuerza de $F = \frac{3}{2}x$ lb para estirar x pulg adicionales un resorte de 10 pulg.

a) Encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte hasta una longitud de 16 pulg.
b) Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte 16 pulg.

7. Una masa que pesa 10 lb está suspendida de un resorte de 2 pies. El resorte es estirado 8 pulg y luego se retira la masa.

a) Encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte hasta una longitud de 3 pies.
b) Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte desde una longitud de 4 pies hasta una longitud de 5 pies.

8. Una fuerza de 50 lb comprime por 3 pulg un resorte de 15 pulg de largo. Encuentre el trabajo realizado al comprimir el resorte hasta una longitud final de 5 pulg.

9. Encuentre el trabajo realizado para subir una masa de 10 000 kg desde la superficie terrestre hasta una altura de 500 km.

10. Encuentre el trabajo realizado para subir una masa de 50 000 kg en la superficie de la Luna hasta una altura de 200 km.

11. Un tanque en forma de cilindro circular recto se llena con agua. Las dimensiones del tanque (en pies) se muestran en la FIGURA 6.8.8. Encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua a la parte superior del tanque.

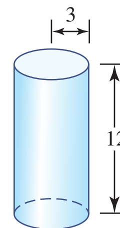


FIGURA 6.8.8 Tanque cilíndrico en el problema 11

12. En un tanque en forma de cono circular recto, con el vértice hacia abajo, se vierte agua hasta una profundidad igual a la mitad de su altura. Las dimensiones del tanque (en pies) se muestran en la FIGURA 6.8.9. Encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua a la parte superior del tanque. [*Sugerencia*: Suponga que el origen es el vértice del cono.]

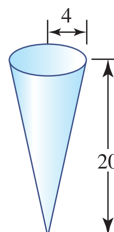


FIGURA 6.8.9 Tanque cónico en el problema 12

13. Para el tanque cónico en el problema 12, encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta un punto situado a 5 pies por arriba del tanque.

14. Suponga que el tanque cilíndrico en el problema 11 es horizontal. Encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta un punto situado a 2 pies por arriba del tanque. [*Sugerencia*: Vea los problemas 55-58 en los ejercicios 6.2.]

15. Un tanque tiene secciones transversales en forma de triángulos isósceles con el vértice hacia abajo. Las dimensiones del tanque (en pies) se muestran en la FIGURA 6.8.10. Encuentre el trabajo realizado para llenar el tanque al introducirle agua a través de un orificio en el fondo por medio de una bomba situada a 5 pies por abajo del vértice.

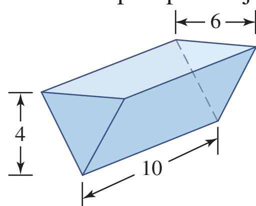


FIGURA 6.8.10 Tanque con secciones transversales triangulares en el problema 15

16. Una tina horizontal con sección transversal semicircular contiene aceite cuya densidad es 80 lb/pie^3. Las dimensiones del tanque (en pies) se muestran en la FIGURA 6.8.11. Si la profundidad del aceite es de 3 pies, encuentre el trabajo realizado para bombear todo el aceite hasta la parte superior del tanque.

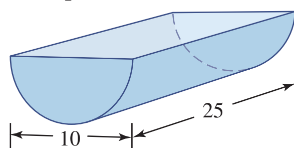


FIGURA 6.8.11 Tina semicircular en el problema 16

17. La cadena de 100 pies de un ancla, que pesa 20 lb/pie, cuelga verticalmente del lado de un barco. ¿Cuánto trabajo se realiza al jalar 40 pies de la cadena?

18. Un barco está anclado en 200 pies de agua. En el agua, el ancla del barco pesa 3 000 lb y la cadena del ancla pesa 40 lb/pie. Si la cadena cuelga verticalmente, ¿cuánto trabajo se realiza al jalar 100 pies de la cadena?

19. Un cubo de arena que pesa 80 lb se levanta verticalmente por medio de una cuerda y una polea hasta una altura de 65 pies. Encuentre el trabajo realizado si

***a*)** el peso de la cuerda es despreciable y

***b*)** la cuerda pesa $\frac{1}{2}$ lb/pie.

20. Un cubo, que originalmente contiene 20 pies^3 de agua, se levanta verticalmente a partir del nivel del suelo. Si en el cubo hay una fuga de agua a razón de $\frac{1}{2}$ pie^3 por pie vertical, encuentre el trabajo realizado para subir el cubo hasta una altura en que esté vacío.

21. La fuerza de atracción entre un electrón y el núcleo de un átomo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Si la distancia inicial entre un núcleo y un protón es 1 unidad, encuentre el trabajo realizado por una fuerza externa que mueve el electrón una distancia igual a cuatro veces la distancia de separación original.

22. En su lanzamiento, un cohete que pesa 2 500 000 lb lleva un transbordador espacial de 200 000 lb. Suponga que en las etapas iniciales del lanzamiento el cohete consume combustible a razón de 100 lb/pie.

***a*)** Exprese el peso total del sistema en términos de su altitud por arriba de la superficie terrestre. Vea la FIGURA 6.8.12.

***b*)** Encuentre el trabajo realizado para que el sistema llegue a una altitud de 1 000 pies.

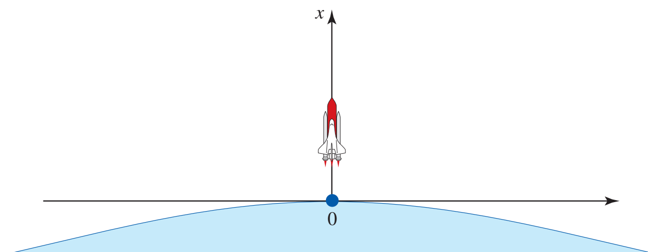


FIGURA 6.8.12 Cohete en el problema 22

23. En termodinámica, si un gas confinado en un cilindro se expande contra un pistón de modo que el volumen del gas cambia de v_1 a v_2, entonces el trabajo realizado sobre el pistón está dado por $W = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv$, donde p es la presión (fuerza por unidad de área). Vea la FIGURA 6.8.13. En una expansión adiabática de un gas ideal, la presión y el volumen están relacionados por $pv^\gamma = k$, donde γ y k son constantes. Muestre que si $\gamma \neq 1$, entonces

$$W = \frac{p_2v_2 - p_1v_1}{1 - \gamma}$$

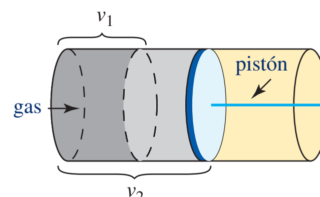


FIGURA 6.8.13 Pistón en el problema 23

24. Muestre que cuando un cuerpo de peso mg se eleva verticalmente desde un punto y_1 hasta un punto y_2, $y_2 > y_1$, el trabajo realizado es el cambio en energía potencial $W = mgy_2 - mgy_1$.

≡ Piense en ello

25. Cuando una persona empuja sobre una pared inmóvil con una fuerza horizontal de 75 lb, ¿cuánto trabajo realiza?

26. En la FIGURA 6.8.14 se muestra la gráfica de una fuerza variable F. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza al mover una partícula desde $x = 0$ hasta $x = 6$.

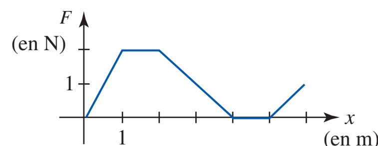


FIGURA 6.8.14 Gráfica de la fuerza en el problema 26

27. Un poco de historia: Una gran verdadera historia En 1977, George Willig, conocido como la "Mosca humana" o el "Hombre araña", escaló la parte exterior de la torre sur del edificio del World Trade Center en Nueva York hasta una altura de 1 350 pies en 3.5 h a razón de 6.4 pies/min. En esa época Willig pesaba 165 lb. ¿Cuánto trabajo realizó George? (Por su esfuerzo, fue multado con $1.10; 1 centavo por cada uno de los 110 pisos del edificio.)

28. Un cubo que contiene agua pesa 200 lb. Cuando el cubo es levantado por una cuerda, en su parte inferior hay una fuga a razón constante, de modo que cuando el cubo llega a una altura de 10 pies pesa 180 lb. Suponga que el peso de la cuerda es despreciable. Analice: explique por qué $\frac{200\ +\ 180}{2} \cdot 10 = 1\,900$ pies/lb es una aproximación razonable al trabajo realizado. Sin integración, muestre que la "aproximación" anterior es también el valor exacto del trabajo realizado.

29. Como se muestra en la FIGURA 6.8.15, un cuerpo de masa m es movido por una fuerza horizontal F sobre una superficie sin fricción desde una posición x_1 hasta una posición x_2. En esos puntos respectivos, el cuerpo se mueve a velocidades v_1 y v_2, donde $v_2 > v_1$. Muestre que el trabajo realizado por la fuerza es el incremento en energía cinética $W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$. [*Sugerencia*: Use la segunda ley de Newton, $F = ma$, y exprese la aceleración a en términos de la velocidad v. Integre con respecto al tiempo t y haga una sustitución.]

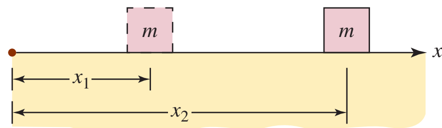


FIGURA 6.8.15 Masa en el problema 29

30. Como se muestra en la FIGURA 6.8.16, un cubo que contiene concreto y está suspendido por un cable se empuja horizontalmente desde la vertical por un obrero de la construcción. La longitud del cable es de 30 m y la masa combinada m del cubo y el concreto es de 550 kg. Por principios de física es posible mostrar que la fuerza requerida para mover el cubo x m está dada por $F = mg \tan \theta$, donde g es la aceleración de la gravedad. Encuentre el trabajo realizado por el obrero de la construcción al empujar el cubo una distancia horizontal de 3 m. [*Sugerencia*: Use (2) y una sustitución.]

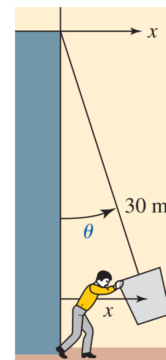


FIGURA 6.8.16 Cubo en el problema 30

6.9 Presión y fuerza del fluido

Introducción Todo el mundo ha experimentado que se le "tapan los oídos" e incluso dolor en los oídos cuando desciende en avión (o en un elevador), o cuando bucea hacia el fondo de una piscina. Estas sensaciones molestas en los oídos se deben a un incremento en la *presión* ejercida por el aire o el agua sobre mecanismos en el oído medio. El aire y el agua son ejemplos de fluidos. En esta sección se mostrará la forma en que la integral definida puede usarse para encontrar la fuerza ejercida por un fluido.

Los *fluidos* incluyen líquidos (como agua y aceite) y gases (como el nitrógeno).

Fuerza y presión Suponga que una placa *horizontal* plana se sumerge en un fluido como agua. La fuerza ejercida por el fluido exactamente arriba de la placa, denominada **fuerza *F* del fluido**, se define como

$$F = \underbrace{(\text{fuerza por unidad de área})}_{\text{presión del fluido } P} \cdot (\text{área de superficie}) = PA. \tag{1}$$

Si ρ denota el peso específico del fluido (peso por unidad de volumen) y A es el área de la placa horizontal sumergida hasta una profundidad h, mostrado en la FIGURA 6.9.1*a*), entonces la **presión *P* del fluido** sobre la placa puede expresarse en términos de ρ:

$$P = (\text{peso por unidad de volumen}) \cdot (\text{profundidad}) = \rho h. \tag{2}$$

En consecuencia, la fuerza (1) del fluido es la misma que

$$F = (\text{presión de fluido}) \cdot (\text{área de superficie}) = \rho h A. \tag{3}$$

No obstante, cuando se sumerge una placa *vertical*, la presión del fluido y la fuerza del fluido sobre un lado de la placa varían con la profundidad. Vea la figura 6.9.1*b*). Por ejemplo, la presión del fluido sobre una presa vertical es menor en la parte superior que en su base.

Antes de empezar, considere un ejemplo simple de presión y fuerza de una placa sumergida horizontalmente.

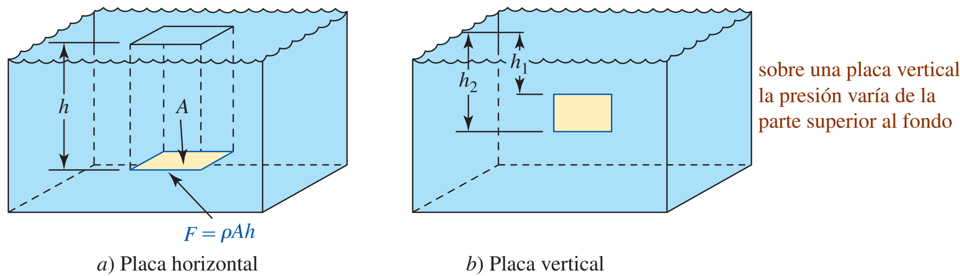


FIGURA 6.9.1 La presión y la fuerza del fluido son constantes sobre una placa sumergida horizontalmente, pero la presión y la fuerza del fluido varían con la profundidad en una placa sumergida verticalmente

EJEMPLO 1 Presión y fuerza

Una placa rectangular plana de 5 pies × 6 pies se sumerge horizontalmente en agua a una profundidad de 10 pies. Determine la presión y la fuerza ejercidas sobre la placa por el agua arriba de ésta.

Solución Recuerde que el peso específico del agua es 62.4 lb/pie^3. Así, por (2) la presión del fluido es

$$P = \rho h = (62.4 \text{ lb/pie}^3) \cdot (10 \text{ pies}) = 624 \text{ lb/pie}^2.$$

Puesto que el área superficial de la placa es $A = 30$ pies^2, por (3) se concluye que la fuerza del fluido sobre la placa es

$$F = PA = (\rho h)A = (624 \text{ lb/pie}^2) \cdot (30 \text{ pies}^2) = 18\,720 \text{ lb.}$$ ■

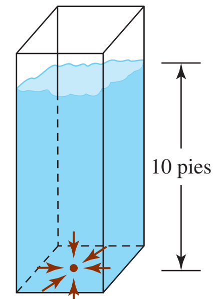


FIGURA 6.9.2 Una presión de 640 lb/pie^2 se aplica en todas direcciones

Para determinar la fuerza total F ejercida por un fluido sobre un lado de una superficie plana sumergida verticalmente, se emplea una forma del **principio de Pascal**:

- La presión ejercida por un fluido a una profundidad h es la misma en todas direcciones.

Entonces, si en un gran contenedor con fondo plano y paredes verticales se vierte agua hasta una profundidad de 10 pies, la presión de 624 lb/pie^2 en el fondo se ejerce de la misma forma sobre las paredes. Vea la FIGURA 6.9.2.

Construcción de una integral Considere que el eje x positivo está dirigido hacia abajo con el origen en la superficie del fluido. Suponga que una placa plana vertical, limitada por las rectas horizontales $x = a$ y $x = b$, se sumerge en el fluido como se muestra en la FIGURA 6.9.3*a*). Sea $w(x)$ una función que denota el ancho de la placa en cualquier número x en $[a, b]$ y sea P cualquier partición del intervalo. Si x_k^* es un punto muestra en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, entonces por (3) con las identificaciones $h = x_k^*$ y $A = w(x_k^*)\,\Delta x_k$, la fuerza F_k ejercida por el fluido sobre el elemento rectangular correspondiente es aproximada por

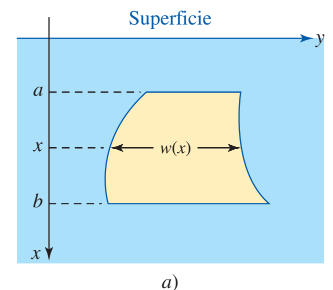
$$F_k = \rho \cdot x_k^* \cdot w(x_k^*)\,\Delta x_k,$$

donde, como antes, ρ denota el peso específico del fluido. Así, una aproximación a la fuerza del fluido sobre un lado de la placa está dada por la suma de Riemann

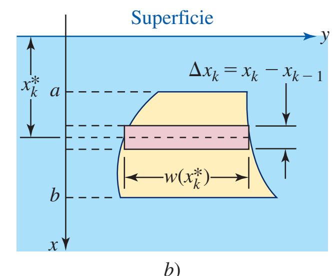
$$\sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{k=1}^{n} \rho x_k^* w(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

Esto sugiere que la fuerza total del fluido sobre la placa es

$$F = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho x_k^* w(x_k^*)\,\Delta x_k.$$



a)



b)

FIGURA 6.9.3 Placa vertical sumergida con ancho variable $w(x)$ sobre $[a, b]$

Definición 6.9.1 Fuerza ejercida por un fluido

Sea ρ el peso específico de un fluido y sea $w(x)$ una función continua sobre $[a, b]$ que describe el ancho de una placa plana sumergida verticalmente a una profundidad x. La **fuerza F** ejercida por el fluido sobre un lado de la placa sumergida es

$$F = \int_a^b \rho x\, w(x)\, dx. \tag{4}$$

EJEMPLO 2 Fuerza de un fluido

Una placa en forma de triángulo isósceles de 3 pies de altura y 4 pies de ancho se sumerge verticalmente en agua, con la base hacia abajo, hasta que la base queda a 5 pies por debajo de la superficie. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre un lado de la placa.

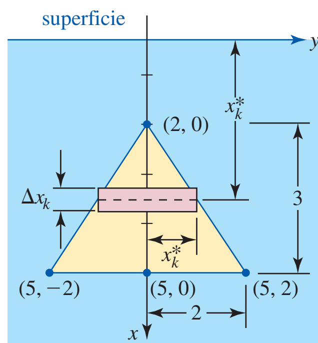


FIGURA 6.9.4 Placa triangular en el ejemplo 2

Solución Por conveniencia, el eje x positivo se coloca a lo largo del eje de simetría de la placa triangular con el origen en la superficie del agua. Como se indica en la FIGURA 6.9.4, el intervalo $[2, 5]$ se parte en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, y en cada subintervalo se escoge un punto x_k^*. Puesto que la ecuación de la línea recta que contiene a los puntos (2, 0) y (5, 2) es $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$, por simetría se concluye que el ancho del elemento rectangular, mostrado en rojo en la figura 6.9.4, es

$$2y_k^* = 2\left(\frac{2}{3}x_k^* - \frac{4}{3}\right).$$

Luego, $\rho = 62.4$ lb/pie^3, de modo que la fuerza del fluido sobre esa porción de la placa que corresponde al k-ésimo subintervalo es aproximada por

$$F_k = (62.4) \cdot x_k^* \cdot 2\left(\frac{2}{3}x_k^* - \frac{4}{3}\right)\Delta x_k.$$

Al formar la suma $\sum_{k=1}^{n} F_k$ y tomar el límite cuando $\|P\| \to 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} F &= \int_2^5 (62.4)2x\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\right)dx \\ &= (62.4)\frac{4}{3}\int_2^5 (x^2 - 2x)\,dx \\ &= 83.2\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big]_2^5 \\ &= (83.2) \cdot 18 = 1\,497.6 \text{ lb.} \end{aligned}$$

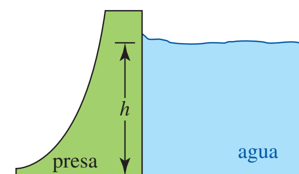
■

En problemas como el ejemplo 2, los ejes x y y se colocan donde convenga. Si el eje y se coloca perpendicular al eje x en la parte superior de la placa en el punto (2, 0), entonces los cuatro puntos (2, 0), (5, −2), (5, 0) y (5, 2) en la figura 6.9.4 se vuelven (0, 0), (3, −2), (3, 0) y (3, 2), respectivamente. La ecuación de la línea recta que contiene a los puntos (0, 0) y (3, 2) es $y = \frac{2}{3}x$. Usted debe comprobar que la fuerza F ejercida por el agua contra la placa está dada por la integral definida

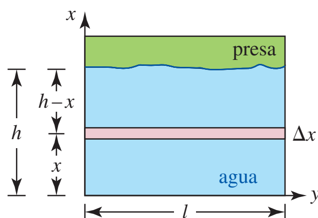
$$F = (62.4)\frac{4}{3}\int_0^3 x(x + 2)\,dx.$$

EJEMPLO 3 Fuerza del agua contra una presa

Una presa tiene una cara rectangular vertical. Encuentre la fuerza ejercida por el agua contra la cara vertical de la presa si la profundidad del agua es h pies y su ancho mide l pies. Vea la FIGURA 6.9.5*a*).



a) Vista lateral de la presa y el agua



b) Agua contra la cara de la presa

FIGURA 6.9.5 Presa en el ejemplo 3

Solución Para variar, el eje x positivo apunta hacia arriba desde el fondo de la cara rectangular de la presa, como se muestra en la figura 6.9.5*b*). Luego, el intervalo $[0, h]$ se divide en n subintervalos. Al eliminar uno de los subíndices, la fuerza F_k del fluido contra esa porción rectangular de la placa que corresponde al k-ésimo subintervalo, mostrado en rojo claro en la figura 6.9.5*b*), es aproximada por

$$F_k = (62.4) \cdot (h - x) \cdot (l\,\Delta x).$$

Aquí la profundidad es $h - x$ y el área del elemento rectangular es $l\,\Delta x$. Al sumar estas aproximaciones y tomar el límite cuando $\|P\| \to 0$ se llega a

$$F = \int_0^h 62.4\,l(h - x)\,dx = \frac{1}{2}(62.4)lh^2.$$

■

En el ejemplo 3, si, por ejemplo, la profundidad del agua es 100 pies y su ancho mide 300 pies, entonces la fuerza del fluido sobre la cara de la presa es 93 600 000 lb.

Ejercicios 6.9

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-21.

☰ Fundamentos

1. Considere los tanques con fondos circulares que se muestran en la FIGURA 6.9.6. Cada tanque está lleno de agua cuyo peso específico es 62.4 lb/pie^3. Encuentre la presión y la fuerza ejercidas por el agua sobre el fondo de cada tanque.

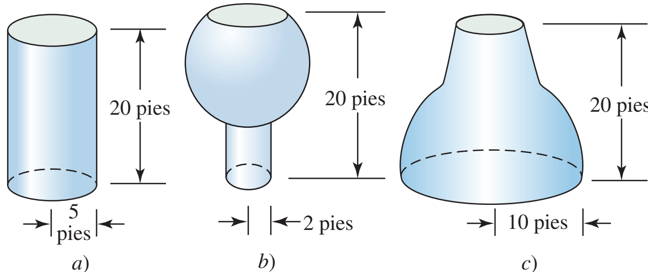


FIGURA 6.9.6 Tanques en el problema 1

2. El buque tanque mostrado en la FIGURA 6.9.7 tiene fondo plano y está lleno de petróleo cuyo peso específico es 55 lb/pie^3. El buque mide 350 pies de largo.
   a) ¿Cuál es la presión que ejerce el petróleo sobre el fondo del buque?
   b) ¿Cuál es la presión que ejerce el agua sobre el fondo del buque?
   c) ¿Cuál es la fuerza que ejerce el petróleo sobre el fondo del buque?
   d) ¿Cuál es la fuerza que ejerce el agua sobre el fondo del buque?

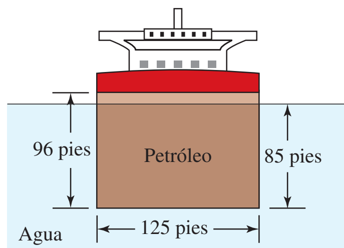


FIGURA 6.9.7 Buque tanque en el problema 2

3. Las dimensiones de una piscina rectangular en forma de paralelepípedo rectangular son 30 pies × 15 pies × 9 pies.
   a) Si la piscina está llena de agua hasta una profundidad de 8 pies, encuentre la presión y la fuerza ejercidas sobre el fondo plano de la piscina. Vea la FIGURA 6.9.8.
   b) Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre una de las paredes verticales de la piscina, así como sobre un lado vertical.

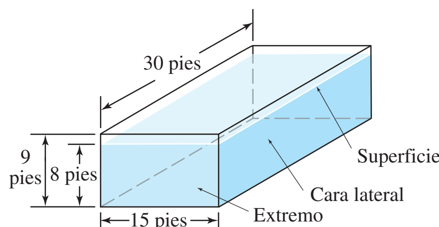


FIGURA 6.9.8 Piscina en el problema 3

4. Una placa en forma de triángulo equilátero de $\sqrt{3}$ pie por lado se sumerge verticalmente, con la base hacia abajo, con el vértice a 1 pie por abajo de la superficie del agua. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre un lado de la placa.
5. Encuentre la fuerza sobre un lado de la placa en el problema 4 si la placa está suspendida con la base hacia arriba a 1 pie por abajo de la superficie del agua.
6. Una placa triangular se sumerge verticalmente en agua como se muestra en la FIGURA 6.9.9. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre un lado de la placa.

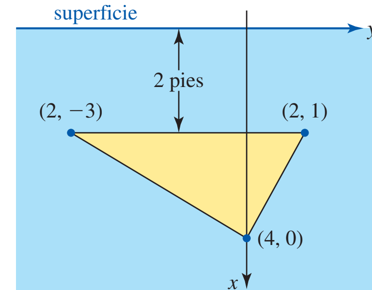


FIGURA 6.9.9 Placa triangular en el problema 6

7. Suponga que el eje x positivo es hacia abajo y que una placa acotada por la parábola $x = y^2$ y la recta $x = 4$ se sumerge verticalmente en aceite cuyo peso específico es 50 lb/pie^3. Si el vértice de la parábola está en la superficie, encuentre la fuerza ejercida por el aceite sobre un lado de la placa.
8. Suponga que el eje x positivo es hacia abajo, y que una placa acotada por la parábola $x = y^2$ y la recta $y = -x + 2$ se sumerge verticalmente en agua. Si el vértice de la parábola está en la superficie, encuentre la fuerza ejercida por el aceite sobre un lado de la placa.
9. Un canalón lleno de agua tiene extremos verticales en forma de trapezoide como se muestra en la FIGURA 6.9.10. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre un lado del canalón.

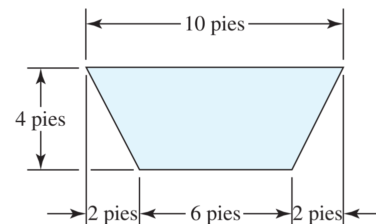


FIGURA 6.9.10 Canalón de agua en el problema 9

10. Un canalón lleno de agua tiene extremos en la forma que se muestra en la FIGURA 6.9.11. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre un lado del canalón.

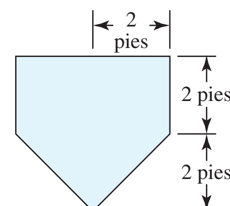


FIGURA 6.9.11 Canalón de agua en el problema 10

11. Un extremo vertical de una piscina tiene la forma que se muestra en la FIGURA 6.9.12. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre este lado de la piscina.

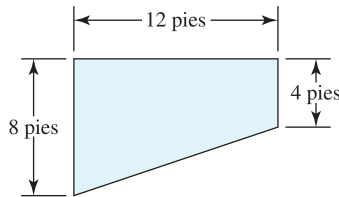


FIGURA 6.9.12 Extremo de la piscina en el problema 11

12. Un tanque en forma de cilindro circular recto de 10 pies de diámetro reposa sobre su costado. El tanque contiene petróleo hasta la mitad de su capacidad, y el peso específico del petróleo es de 60 lb/pie^3. Encuentre la fuerza que ejerce el petróleo sobre uno de los extremos del tanque.

13. Una placa circular de 4 pies de radio se sumerge verticalmente de modo que el centro de la placa está a 10 pies por debajo de la superficie del agua. Encuentre la fuerza que el agua ejerce sobre un lado de la placa. [*Sugerencia*: Para facilitar las cosas, considere que el origen está en el centro de la placa, con el eje x positivo hacia abajo. También vea los problemas 55-58 en los ejercicios 6.2.]

14. Un tanque cuyos extremos tienen forma elíptica $x^2/4 + y^2/9 = 1$ se sumerge en un líquido cuyo peso específico es ρ, de modo que las placas extremas son verticales. Encuentre la fuerza que el líquido ejerce sobre un extremo si su centro está a 10 pies por debajo de la superficie del líquido. [*Sugerencia*: Proceda como en el problema 13 y use el hecho de que el área de una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es πab.]

15. Un bloque sólido en forma de cubo de 2 pies de arista se sumerge en un gran tanque de agua. La parte superior del bloque es horizontal y se ubica a 3 pies por abajo de la superficie del agua. Encuentre la fuerza total sobre el bloque (seis lados) provocada por la presión del líquido. Vea la FIGURA 6.9.13.

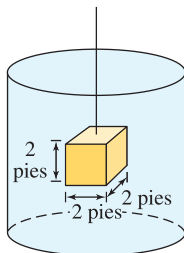
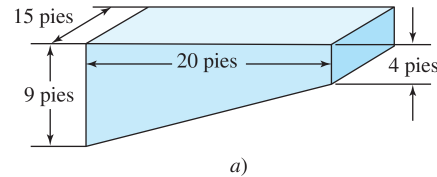


FIGURA 6.9.13 Bloque sumergido en el problema 15

16. En el problema 15, ¿cuál es la diferencia entre la fuerza sobre el fondo del bloque y la fuerza sobre la parte superior del bloque? La diferencia es la fuerza de empuje del agua y, por el principio de Arquímedes, es igual al peso del agua desplazada. ¿Cuál es el peso del agua desplazada? ¿Cuál es el peso del agua desplazada por el bloque?

≡ Piense en ello

17. Considere la piscina rectangular que se muestra en la FIGURA 6.9.14*a*) cuyos extremos son trapezoides. La piscina está llena de agua. Tome el eje x positivo como se muestra en la figura 6.9.14*b*) y encuentre la fuerza que el agua ejerce sobre el fondo de la piscina. [*Sugerencia*: Exprese la profundidad d en términos de x.]



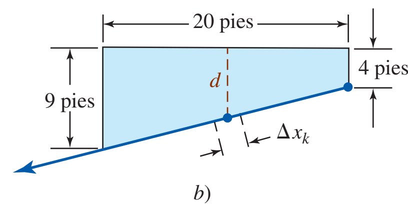


FIGURA 6.9.14 Piscina en el problema 17

18. Se construye una presa de barro cuyas dimensiones se muestran en la FIGURA 6.9.15*a*). Tome el eje x positivo como se muestra en la figura 6.9.15*b*) y encuentre la fuerza que el agua ejerce sobre la pared inclinada de la presa.

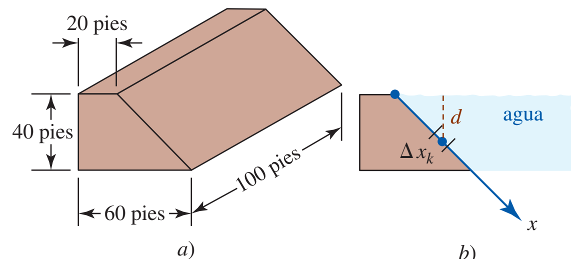


FIGURA 6.9.15 Presa en el problema 18

19. Analice el problema 18 con el eje x positivo que se muestra en la FIGURA 6.9.16.

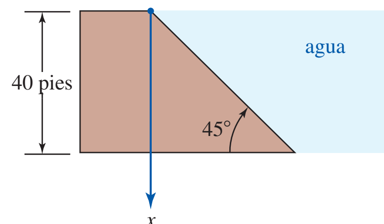


FIGURA 6.9.16 Orientación del eje x en el problema 19

6.10 Centros de masa y centroides

Introducción En esta sección consideramos otra aplicación de la física. Usamos la integral definida para encontrar el centro de masa de barras y regiones planas. Empezamos con una revisión de la forma de encontrar el centro de masa de sistemas bidimensionales y tridimensionales de n masas discretas o puntuales.

Sistemas unidimensionales Si x denota la distancia dirigida del origen O a una masa m, se dice que el producto mx es el **momento de masa** respecto al origen. En la tabla siguiente se resumen algunas unidades.

Cantidad	Sistema ingenieril	SI	cgs
Masa	slug	kilogramo (kg)	gramo (g)
Momento de masa	slug-pie	kilogramo-metro	gramo-centímetro

Luego, para n masas puntuales $m_1, m_2, \ldots, m_n$ a distancias dirigidas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente, a partir de O, como en la FIGURA 6.10.1, decimos que

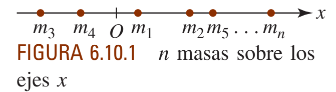


FIGURA 6.10.1 n masas sobre los ejes x

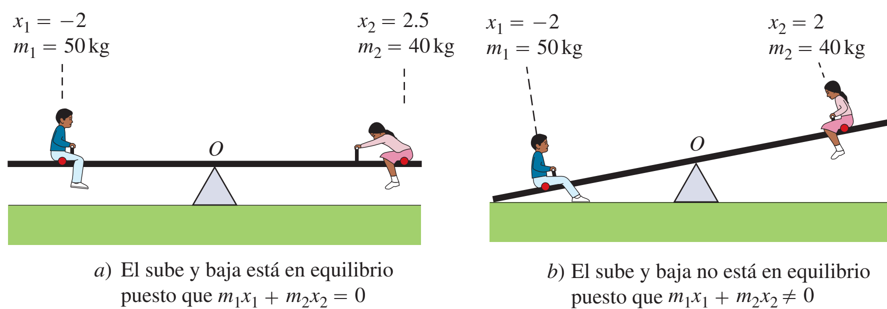
$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

es la **masa total del sistema**, y que

$$M_O = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = \sum_{k=1}^{n} m_kx_k$$

es el **momento del sistema respecto al origen**. Si $\sum_{k=1}^{n} m_kx_k = 0$, se dice que el sistema está en **equilibrio**. Vea la FIGURA 6.10.2. Si el sistema de masas de la figura 6.10.1 no está en equilibrio, hay un punto P con coordenada $\bar{x}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - \bar{x}) = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad \sum_{k=1}^{n} m_kx_k - \bar{x}\sum_{k=1}^{n} m_k = 0.$$



a) El sube y baja está en equilibrio puesto que $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$

b) El sube y baja no está en equilibrio puesto que $m_1x_1 + m_2x_2 \neq 0$

FIGURA 6.10.2 *a*) Sube y baja en equilibrio; *b*) no está en equilibrio

Al despejar $\bar{x}$ obtenemos

$$\bar{x} = \frac{M_O}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_kx_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}. \qquad (1)$$

El punto con coordenada $\bar{x}$ se llama **centro de masa** o **centro de gravedad** del sistema.

Puesto que (1) implica $\bar{x}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m_kk_k$, se concluye que $\bar{x}$ es la distancia dirigida desde el origen hasta un punto en que puede considerarse que está concentrada la masa total del sistema.

En un sistema en que la aceleración de la gravedad varía de una masa a otra, el centro de gravedad no es el mismo que el centro de masa.

EJEMPLO 1 Centro de masa de tres objetos

Tres cuerpos de masas 4, 6 y 10 kilogramos se colocan en $x_1 = -2$, $x_2 = 4$ y $x_3 = 9$, respectivamente. Las distancias se miden en metros. Encuentre el centro de masa.

Solución Por (1),

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot (-2) + 6 \cdot 4 + 10 \cdot 9}{4 + 6 + 10} = \frac{106}{20} = 5.3.$$

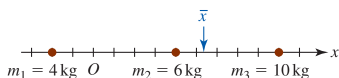


FIGURA 6.10.3 Centro de masa de tres masas puntuales

La FIGURA 6.10.3 muestra que el centro de masa $\bar{x}$ está 5.3 m a la derecha del origen. ■

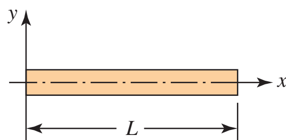


FIGURA 6.10.4 Barra de longitud L que coincide con el eje x

Construcción de una integral Ahora se considerará el problema de encontrar el centro de masa de una barra de longitud L que tiene una **densidad lineal variable** ρ (la masa/longitud unitaria se mide en slugs/pie, kg/m o g/cm). Se supone que la barra coincide con el eje x sobre el intervalo $[0, L]$, como se muestra en la FIGURA 6.10.4, y la densidad es una función continua $\rho(x)$. Después de formar una partición P del intervalo, se escoge un punto x_k^* en $[x_{k-1}, x_k]$. El número

$$m_k = \rho(x_k^*)\, \Delta x_k$$

es una aproximación a la masa de esa porción de la barra sobre el subintervalo. También, el momento de este elemento de masa respecto al origen es aproximado por

$$(M_O)_k = x_k^* \rho(x_k^*)\, \Delta x_k.$$

Así, se concluye que

$$m = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k^*)\, \Delta x_k = \int_0^L \rho(x)\, dx$$

y

$$M_O = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} x_k^* \rho(x_k^*)\, \Delta x_k = \int_0^L x\rho(x)\, dx$$

son la **masa de la barra** y su **momento respecto al origen**, respectivamente. Luego, por $\bar{x} = M_O/m$ se concluye que el centro de masa de la barra está dado por

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x\rho(x)\, dx}{\int_0^L \rho(x)\, dx}. \qquad (2)$$

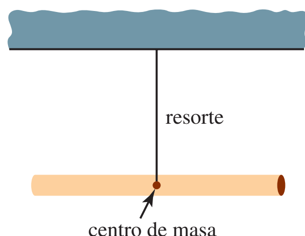


FIGURA 6.10.5 Barra suspendida en equilibrio

Como se muestra en la FIGURA 6.10.5, una barra suspendida por un resorte sujeta a su centro de masa podría colgar en perfecto equilibrio.

EJEMPLO 2 Centro de masa de una barra

Una barra de 16 cm de largo tiene densidad lineal, medida en g/cm, dada por $\rho(x) = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 16$. Encuentre su centro de masa.

Solución En gramos, la masa de la barra es

$$m = \int_0^{16} x^{1/2}\, dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^{16} = \frac{128}{3}.$$

El momento respecto al origen (en g-cm) es

$$M_0 = \int_0^{16} x \cdot x^{1/2}\, dx = \frac{2}{5}x^{5/2}\Big]_0^{16} = \frac{2\,048}{5}.$$

Por (2) encontramos

$$\bar{x} = \frac{2\,048/5}{128/3} = 9.6.$$

Es decir, el centro de masa $\bar{x}$ de la barra está a 9.6 cm del extremo izquierdo de la barra que coincide con el origen. ■

Sistemas bidimensionales Para n masas puntuales situadas en el plano xy, como se indica en la FIGURA 6.10.6, el **centro de masa del sistema** se define como el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

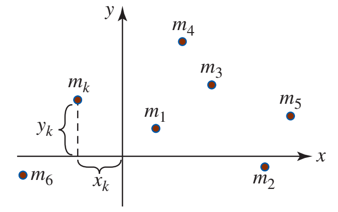


FIGURA 6.10.6 n masas en el plano xy

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje } y}{\text{masa total}},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje } x}{\text{masa total}}.$$

Lámina Ahora se analizará el problema de encontrar el centro de masa, o punto de equilibrio, de un frotis de materia, o **lámina** delgada bidimensional, que tiene densidad constante ρ (masa por unidad de área). Vea la FIGURA 6.10.7. Cuando ρ es constante, se dice que la lámina es **homogénea**.

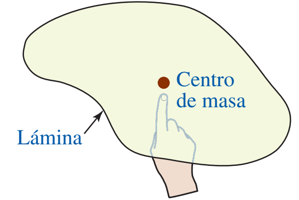


FIGURA 6.10.7 Centro de masa de una lámina

Construcción de una integral Como se muestra en la FIGURA 6.10.8*a*), suponga que la lámina coincide con una región R en el plano xy acotada por la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Si P es una partición del intervalo $[a, b]$, entonces la masa del elemento rectangular que se muestra en la figura 6.8.10*b*) es

$$m_k = \rho\, \Delta A_k = \rho f(x_k^*)\, \Delta x_k,$$

donde, en este caso, tomamos x_k^* como el punto medio del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y ρ es la densidad constante. El momento de este elemento con respecto al eje y es

$$(M_y)_k = x_k^*\, \Delta m_k = x_k^*(\rho\, \Delta A_k) = \rho x_k^* f(x_k^*)\, \Delta x_k.$$

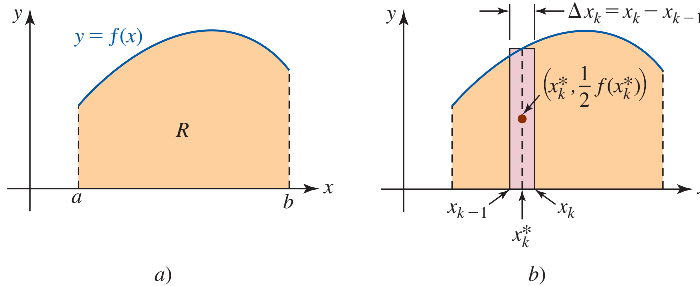


FIGURA 6.10.8 Encontrar el centro de masa de la región R

Puesto que la densidad es constante, el centro de masa del elemento necesariamente está en su centro geométrico $(x_k^*, \frac{1}{2}f(x_k^*))$. Por tanto, el momento del elemento respecto al eje x es

$$(M_x)_k = \frac{1}{2} f(x_k^*)(\rho\, \Delta A_k) = \frac{1}{2}\rho [f(x_k^*)]^2\, \Delta x_k.$$

Concluimos que

$$m = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho f(x_k^*)\, \Delta x_k = \int_a^b \rho f(x)\, dx,$$

$$M_y = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho x_k^* f(x_k^*)\, \Delta x_k = \int_a^b \rho x f(x)\, dx,$$

y

$$M_x = \lim_{\|P\| \to 0} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \rho [f(x_k^*)]^2 \Delta x_k = \frac{1}{2}\int_a^b \rho [f(x)]^2\, dx.$$

Por tanto, las coordenadas del centro de masa de la lámina se definen como

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b \rho x f(x)\, dx}{\int_a^b \rho f(x)\, dx}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \rho [f(x)]^2\, dx}{\int_a^b \rho f(x)\, dx}. \tag{3}$$

Centroide Observamos que la densidad constante ρ se cancela en las ecuaciones (3) para $\bar{x}$ y $\bar{y}$, y que el denominador de $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área A de la región R. En otras palabras, el centro de masa sólo depende de la forma de R:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\displaystyle\int_a^b xf(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2\,dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}. \tag{4}$$

Para recalcar la diferencia, aunque menor, entre el objeto físico, que es la lámina homogénea, y el objeto geométrico, que es la región plana R, se dice que las ecuaciones en (4) definen las coordenadas del **centroide** de la región.

Nota: Es importante que comprenda el resultado en (4), pero no intente memorizar las integrales porque para abreviar el análisis se ha supuesto que R está acotada por la gráfica de una función f y el eje x. R también podría ser la región acotada entre las gráficas de dos funciones f y g. Vea el ejemplo 5.

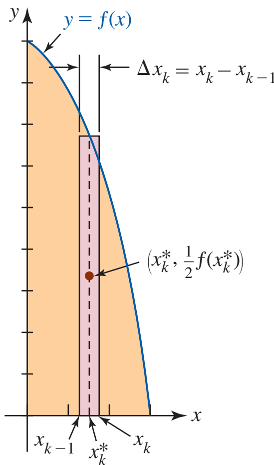


FIGURA 6.10.9 Región en el ejemplo 3

EJEMPLO 3 Centroide de una región

Encuentre el centroide de la región en el primer cuadrante acotada por la gráfica de $y = 9 - x^2$, el eje x y el eje y.

Solución La región se muestra en la FIGURA 6.10.9. Luego, si $f(x) = 9 - x^2$, entonces

$$A_k = f(x_k^*)\,\Delta x_k$$
$$(M_y)_k = xf(x_k^*)\,\Delta x_k$$

y

$$(M_x)_k = \frac{1}{2}f(x_k^*)(f(x_k^*)\,\Delta x_k) = \frac{1}{2}[f(x_k^*)]^2\,\Delta x_k.$$

Por tanto,

$$A = \int_0^3 (9 - x^2)\,dx = \left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big]_0^3 = 18$$
$$M_y = \int_0^3 x(9 - x^2)\,dx = \left(\frac{9}{5}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big]_0^3 = \frac{81}{4}$$
$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^3 (9 - x^2)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^3 (81 - 18x^2 + x^4)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(81x - 6x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big]_0^3 = \frac{324}{5}.$$

Por (4) se concluye que las coordenadas del centroide son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{81/4}{18} = \frac{9}{8}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{324/5}{18} = \frac{54}{15}. \qquad \blacksquare$$

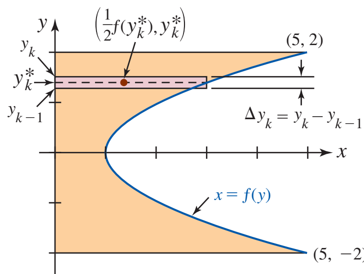


FIGURA 6.10.10 Región en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Integración con respecto a *y*

Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $x = y^2 + 1$, $x = 0$, $y = 2$ y $y = -2$.

Solución La región se muestra en la FIGURA 6.10.10. El análisis de la figura sugiere el uso de elementos rectangulares horizontales. Si $f(y) = y^2 + 1$, entonces

$$A_k = f(y_k^*)\,\Delta y_k$$
$$(M_x)_k = y_k^* f(y_k^*)\,\Delta y_k$$
$$(M_y)_k = \frac{1}{2}f(y_k^*)(f(y_k^*)\,\Delta y_k) = -\frac{1}{2}[f(y_k^*)]^2\,\Delta y_k$$

y así
$$A = \int_{-2}^{2} (y^2 + 1)\, dy = \left(\frac{1}{3}y^3 + y\right)\Big]_{-2}^{2} = \frac{28}{3},$$
$$M_x = \int_{-2}^{2} y(y^2 + 1)\, dy = \left(\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2\right)\Big]_{-2}^{2} = 0,$$
$$M_y = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (y^2 + 1)^2\, dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (y^4 + 2y^2 + 1)\, dy$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}y^5 + \frac{2}{3}y^3 + y\right)\Big]_{-2}^{2} = \frac{206}{15}.$$

Por tanto, se tiene
$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{206/15}{28/3} = \frac{103}{70}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{0}{28/3} = 0.$$

Como es de esperar, puesto que la lámina es simétrica respecto al eje x, el centroide está en el eje de simetría. También se observa que el centroide está fuera de la región. ■

EJEMPLO 5 Región entre dos gráficas

Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = -x^2 + 3$ y $y = x^2 - 2x - 1$.

Solución En la FIGURA 6.10.11 se muestra la región en cuestión. Se observa que los puntos de intersección de las gráficas son $(-1, 2)$ y $(2, -1)$. Luego, si $f(x) = -x^2 + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x - 1$, entonces el área de la región es
$$A = \int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx$$
$$= \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\, dx$$
$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right)\Big]_{-1}^{2} = 9.$$

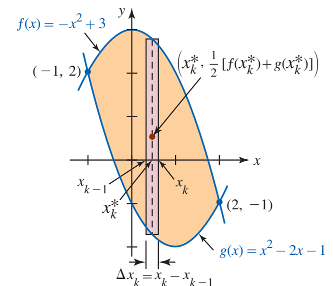


FIGURA 6.10.11 Región en el ejemplo 5

Puesto que las coordenadas del punto medio del elemento indicado son $(x_k^*, \frac{1}{2}[f(x_k^*) + g(x_k^*)])$, se concluye que
$$M_y = \int_{-1}^{2} x[f(x) - g(x)]\, dx$$
$$= \int_{-1}^{2} (-2x^3 + 2x^2 + 4x)\, dx$$
$$= \left(-\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right)\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2},$$

y
$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} [f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} [(-x^2 + 3)^2 - (x^2 - 2x - 1)^2]\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} (4x^3 - 8x^2 - 4x + 8)\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 8x\right)\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

Por tanto, las coordenadas del centroide son
$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{9/2}{9} = \frac{1}{2}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{9/2}{9} = \frac{1}{2}.$$ ■

Ejercicios 6.10 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-21

Fundamentos

En los problemas 1-4, encuentre el centro de masa del sistema de masas dado. La masa m_k está situada sobre el eje x en un punto cuya distancia dirigida desde el origen es x_k. Suponga que la masa se mide en gramos y que la distancia se mide en centímetros.

1. $m_1 = 2, m_2 = 5; x_1 = 4, x_2 = -2$

2. $m_1 = 6, m_2 = 1, m_3 = 3; x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -3, x_3 = 8$

3. $m_1 = 10, m_2 = 5, m_3 = 8, m_4 = 7; x_1 = -5, x_2 = 2, x_3 = 6, x_4 = -3$

4. $m_1 = 2, m_2 = \frac{3}{2}, m_3 = \frac{7}{2}, m_4 = \frac{1}{2}; x_1 = 9, x_2 = -4, x_3 = -6, x_4 = -10$

5. Dos masas están colocadas en los extremos de una tabla uniforme de masa despreciable, como se muestra en la FIGURA 6.10.12. ¿Dónde debe colocarse el fulcro de modo que el sistema esté en equilibrio? [*Sugerencia*: Aunque el origen puede situarse en cualquier parte, se supondrá que se establece en el punto medio entre las masas.]

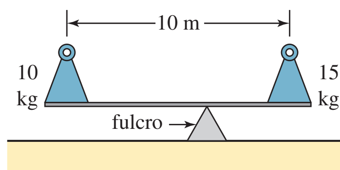


FIGURA 6.10.12 Masas en el problema 5

6. Encuentre el centro de masa de las tres masas m_1, m_2 y m_3 que están en los vértices del triángulo equilátero mostrado en la FIGURA 6.10.13. [*Sugerencia*: Primero encuentre el centro de masa de m_1 y m_2.]

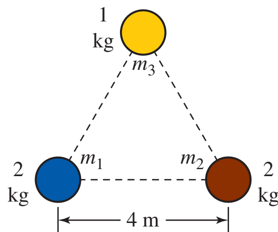


FIGURA 6.10.13 Masas en el problema 6

En los problemas 7-14, una barra de densidad lineal $\rho(x)$ kg/m coincide con el eje x en el intervalo indicado. Encuentre su centro de masa.

7. $\rho(x) = 2x + 1; \quad [0, 5]$

8. $\rho(x) = -x^2 + 2x; \quad [0, 2]$

9. $\rho(x) = x^{1/3}; \quad [0, 1]$

10. $\rho(x) = -x^2 + 1; \quad [0, 1]$

11. $\rho(x) = |x - 3|; \quad [0, 4]$

12. $\rho(x) = 1 + |x - 1|; [0, 3]$

13. $\rho(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}; \quad [0, 2]$

14. $\rho(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x \le 3 \end{cases}; \quad [0, 3]$

15. La densidad de una barra de 10 pies varía con el cuadrado de la distancia al extremo izquierdo. Encuentre su centro de masa si la densidad en su centro es 12.5 slug/pie.

16. La densidad lineal de una barra de 3 m varía con la distancia al extremo derecho. Encuentre la densidad lineal en el centro de la barra si su masa total es de 6 kg.

En los problemas 17-20, encuentre el centro de masa del sistema de masas dado. La masa m_k está en el punto P_k. Suponga que la masa se mide en gramos y que la distancia se mide en centímetros.

17. $m_1 = 3, m_2 = 4; P_1 = (-2, 3), P_2 = (1, 2)$

18. $m_1 = 1, m_2 = 3, m_3 = 2; P_1 = (-4, 1), P_2 = (2, 2), P_3 = (5, -2)$

19. $m_1 = 4, m_2 = 8, m_3 = 10; P_1 = (1, 1), P_2 = (-5, 2), P_3 = (7, -6)$

20. $m_1 = 1, m_2 = \frac{1}{2}, m_3 = 4, m_4 = \frac{5}{2}; P_1 = (9, 3), P_2 = (-4, -6), P_3 = \left(\frac{3}{2}, -1\right), P_4 = (-2, 10)$

En los problemas 21-38, encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

21. $y = 2x + 4, y = 0, x = 0, x = 2$

22. $y = x + 1, y = 0, x = 3$

23. $y = x^2, y = 0, x = 1$

24. $y = x^2 + 2, y = 0, x = -1, x = 2$

25. $y = x^3, y = 0, x = 3$

26. $y = x^3, y = 8, x = 0$

27. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1, x = 4$

28. $x = y^2, x = 1$

29. $y = x^2, y - x = 2$

30. $y = x^2, y = \sqrt{x}$

31. $y = x^3, y = x^{1/3}$, primer cuadrante

32. $y = 4 - x^2, y = 0, x = 0$, segundo cuadrante

33. $y = 1/x^3, y = 0, x = 1, x = 3$

34. $y = x^2 - 2x + 1, y = -4x + 9$

35. $x = y^2 - 1, y = -1, y = 2, x = -2$

36. $y = x^2 - 4x + 6, y = 0, x = 0, x = 4$

37. $y = 4 - 4x^2, y = 1 - x^2$

38. $y^2 + x = 1, y + x = -1$

En los problemas 39 y 40, use simetría para localizar $\bar{x}$ e integración para encontrar $\bar{y}$ de la región acotada por las gráficas de las funciones dadas.

39. $y = 1 + \cos x,\ y = 1,\ -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

40. $y = 4 \operatorname{sen} x,\ y = -\operatorname{sen} x,\ 0 \leq x \leq \pi$

Piense en ello

41. Un teorema atribuido a **Pappus de Alejandría** (c. 350 d.C.) afirma lo siguiente:

> Sean L un eje en un plano y R una región en el mismo plano que no corta a L. Cuando R gira alrededor de L, el volumen V del sólido de revolución resultante es igual al área A de R multiplicada por la longitud de la ruta recorrida por el centroide de R.

a) Como se muestra en la FIGURA 6.10.14, sea R la región acotada por las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$. Muestre que si R gira alrededor del eje x, entonces $V = (2\pi\bar{y})A$, donde A es el área de la región.

b) ¿Qué considera que proporciona V cuando la región R gira alrededor del eje y?

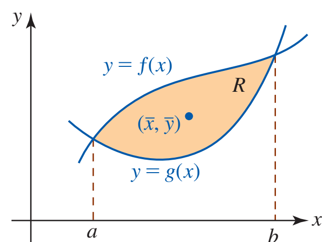


FIGURA 6.10.14 Región en el problema 41

42. Compruebe el teorema de Pappus en el problema 41 cuando la región acotada por $y = x^2 + 1,\ y = 1,\ x = 2$ gira alrededor del eje x.

43. Use el teorema de Pappus en el problema 41 para encontrar el volumen del toroide que se muestra en la FIGURA 6.10.15.

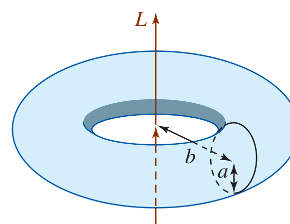


FIGURA 6.10.15 Toroide en el problema 43

44. Una barra de densidad lineal $\rho(x)$ kg/m coincide con el eje x sobre el intervalo [0, 6]. Si $\rho(x) = x(6 - x) + 1$, ¿dónde se espera de manera intuitiva que esté el centro de masa? Demuestre su respuesta.

45. Considere la región triangular R en la FIGURA 6.10.16. ¿Dónde cree que está el centroide del triángulo? Piense geométricamente.

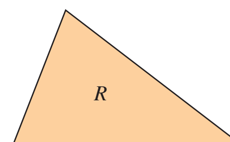


FIGURA 6.10.16 Región triangular en el problema 45

46. Sin integración, determine el centroide de la región R mostrada en la FIGURA 6.10.17.

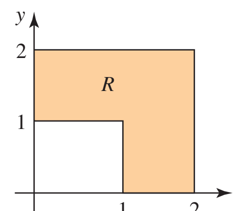


FIGURA 6.10.17 Región en el problema 46

Revisión del capítulo 6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-21.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-12, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. Cuando $\int_a^b f(x)\,dx > 0$, la integral proporciona el área bajo la gráfica de $y = f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$. _____

2. $\int_0^3 (x - 1)\,dx$ es el área bajo la gráfica $y = x - 1$ sobre [0, 3]. _____

3. La integral $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ proporciona el área entre las gráficas de las funciones continuas f y g siempre que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$. _____

4. Los métodos del disco y la arandela para encontrar volúmenes de sólidos de revolución son casos especiales del método de rebanar. _____

5. El valor promedio f_{pro} de una función continua sobre un intervalo $[a, b]$ necesariamente es un número que satisface $m \leq f_{pro} \leq M$, donde m y M son los valores mínimo y máximo de f sobre el intervalo, respectivamente. _____

6. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, entonces el valor medio de $f + g$ es $(f + g)_{pro} = f_{pro} + g_{pro}$. _____

7. El centro de masa de un lápiz con densidad lineal constante ρ está en su centro geométrico. _____

8. El centro de masa de una lámina que coincide con una región plana R es un punto en R donde la lámina colgaría en equilibrio. _____

9. La presión sobre el fondo plano de una piscina es la misma que la presión horizontal sobre la pared vertical a la misma profundidad. _____

10. Considere una delgada lata de aluminio con radio de 6 pulg y un depósito circular con radio de 50 pies. Si cada uno tiene fondo plano y contiene agua hasta una profundidad de 1 pie, entonces la presión del líquido sobre el fondo del depósito es mayor que la presión sobre el fondo de la lata de aluminio. _____

11. Si $s(t)$ es la función de posición de un cuerpo que se mueve en línea recta, entonces $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$ es la distancia que el cuerpo se mueve en el intervalo $[t_1, t_2]$. _____

12. Cuando no hay resistencia del aire y desde la misma altura se sueltan al mismo tiempo una bala de cañón y un dulce, la bala de cañón llega primero al suelo. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-8, llene los espacios en blanco.

1. La unidad de trabajo en el sistema SI es__________.

2. Para calentarse, un corredor de 200 lb empuja contra un árbol durante 5 minutos con fuerza constante de 60 lb y luego corre 2 mi en 10 minutos. El trabajo total realizado es __________.

3. El trabajo realizado por una fuerza constante de 100 lb aplicada a un ángulo de 60° con respecto a la horizontal durante una distancia de 50 pies es __________.

4. A un resorte que mide inicialmente 1 m de longitud se le aplica una fuerza de 80 N, y se logra una longitud de 1.5 m. El resorte medirá __________ m de longitud cuando se aplique una fuerza de 100 N.

5. Las coordenadas del centroide de una región R son (2, 5) y el momento de la región con respecto al eje x es 30. Por tanto, el área de R es __________ unidades cuadradas.

6. El peso específico del agua es __________ lb/pie^3.

7. Se dice que la gráfica de una función con primera derivada continua es __________.

8. Una pelota soltada desde una gran altura choca contra el suelo en T segundos con una velocidad v_{impacto}. Si la función velocidad es $v(t) = -gt$, entonces la velocidad media v_{pro} de la pelota para $0 \le t \le T$ en términos de v_{impacto} es __________.

C. Ejercicios

En los problemas 1-8, establezca la(s) integral(es) definida(s) para encontrar el área de la región sombreada en cada figura.

1.

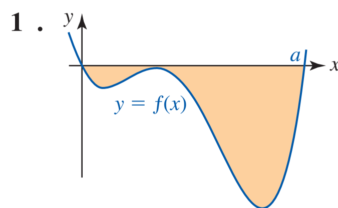


FIGURA 6.R.1 Gráfica para el problema 1

2.

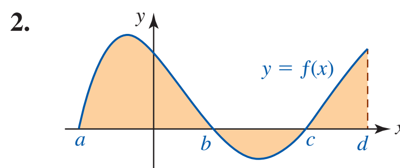


FIGURA 6.R.2 Gráfica para el problema 2

3.

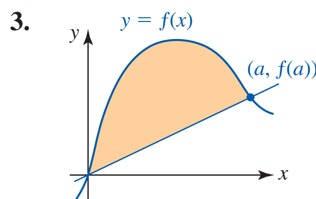


FIGURA 6.R.3 Gráfica para el problema 3

4.

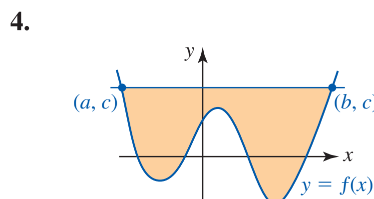


FIGURA 6.R.4 Gráfica para el problema 4

5.

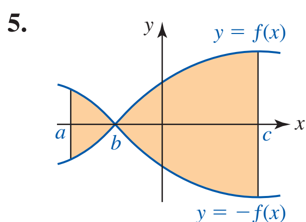


FIGURA 6.R.5 Gráfica para el problema 5

6.

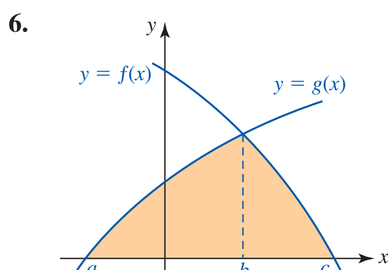


FIGURA 6.R.6 Gráfica para el problema 6

7.

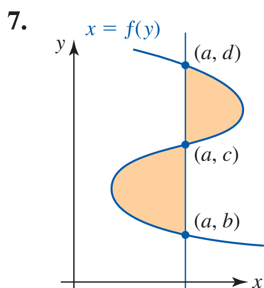


FIGURA 6.R.7 Gráfica para el problema 7

8.

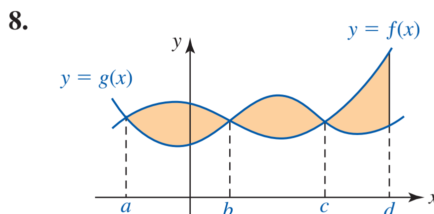


FIGURA 6.R.8 Gráfica para el problema 8

En los problemas 9 y 10, use la integral definida para encontrar el área de la región sombreada en términos de a y b.

9.

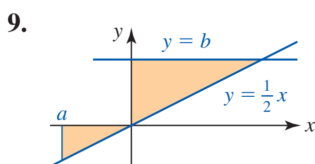


FIGURA 6.R.9 Gráfica para el problema 9

10.

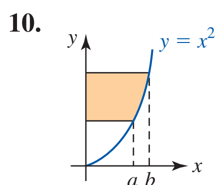


FIGURA 6.R.10 Gráfica para el problema 10

En los problemas 11-16, considere la región R en la FIGURA 6.R.11. Establezca la(s) integral(es) definida(s) para la cantidad indicada.

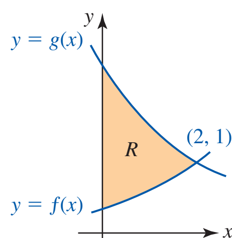


FIGURA 6.R.11 Región para los problemas 11-16

11. El centroide de la región

12. El volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje x

13. El volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje y

14. El volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor de la recta $y = -1$

15. El volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor de la recta $x = 2$

16. El volumen del sólido con R como su base de modo que las secciones transversales del sólido paralelas al eje y son cuadradas

17. Encuentre el área acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen} 2x$ sobre el intervalo $[0, \pi]$.

18. Considere la región acotada por las gráficas de $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y $x = \ln 2$.

a) Encuentre el área de la región.

b) Encuentre el volumen del sólido de revolución si la región gira alrededor del eje x.

19. Considere la región R acotada por las gráficas de $x = y^2$ y $x = \sqrt{2}$. Use el método de rebanadas para encontrar el volumen del sólido si la región R es su base y

a) las secciones transversales del sólido perpendiculares al eje x son cuadrados,
b) las secciones transversales del sólido perpendiculares al eje x son círculos.

20. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma cuando la región R acotada por las gráficas de $x = 2y - y^2$ y $x = 0$ gira alrededor de la recta $y = 3$.

21. La nariz de un cohete espacial es un cono circular recto de 8 pies de altura y 10 pies de radio. La superficie lateral debe cubrirse con tela excepto por una sección de 1 pie de altura en el ápice del cono de la nariz. Encuentre el área de la tela necesaria.

22. El área bajo la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$ sobre el intervalo $[-3, 4]$ es 21 unidades cuadradas. ¿Cuál es el valor medio de la función sobre el intervalo?

23. Encuentre el valor promedio de $f(x) = x^{3/2} + x^{1/2}$ sobre [1, 4].

24. Encuentre un valor x en el intervalo [0, 3] que corresponda al valor promedio de la función $f(x) = 2x - 1$.

25. Un resorte de longitud de $\frac{1}{2}$ m sin estirar se alarga hasta una longitud de 1 m por medio de una fuerza de 50 N. Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte desde una longitud de 1 m hasta una longitud de 1.5 m.

26. El trabajo realizado para estirar un resorte 6 pulg más allá de su longitud natural es 10 pies-lb. Encuentre la constante del resorte.

27. Un tanque de agua, en forma de cubo de 10 pies de lado, se llena con agua. Encuentre el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta un punto situado a 5 pies por arriba del tanque.

28. Un cubo que pesa 2 lb contiene 30 lb de líquido. A medida que el cubo se levanta verticalmente a razón de 1 pie/s, el líquido se fuga a razón de $\frac{1}{4}$ lb/s. Encuentre el trabajo realizado para levantar el cubo una distancia de 5 pies.

29. En el problema 28, encuentre el trabajo realizado para levantar el cubo hasta un punto en que esté vacío.

30. En el problema 28, encuentre el trabajo realizado para levantar el cubo con fuga hasta una distancia de 5 pies si la cuerda que sujeta al cubo pesa $\frac{1}{8}$ lb/pie.

31. Un tanque en la parte superior de una torre de 15 pies de altura consta de un tronco de un cono sobrepuesto por un cilindro circular recto. Las dimensiones (en pies) se muestran en la FIGURA 6.R.12. Encuentre el trabajo realizado para llenar el tanque con agua desde el nivel del suelo.

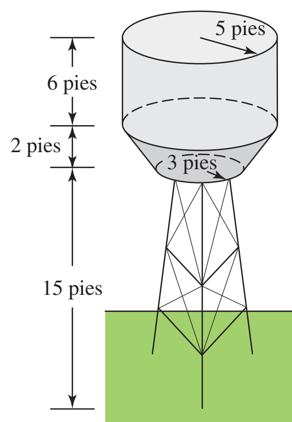


FIGURA 6.R.12 Tanque en el problema 31

32. Una roca se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Luna con una velocidad inicial de 44 pies/s.

a) Si la aceleración de la gravedad en la Luna es 5.5 pies/s^2, encuentre la altura máxima que se alcanza. Compare con la Tierra.
b) En su descenso, la roca choca contra la cabeza de un astronauta de 6 pies de estatura. ¿Cuál es la velocidad de impacto de la roca?

33. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = (x - 1)^{3/2}$ desde (1, 0) hasta (5, 8).

34. La densidad lineal de una barra de 6 m de longitud es una función lineal de la distancia a su extremo izquierdo. La densidad en la parte media de la barra es 11 kg/m y en el extremo derecho es 17 kg/m. Encuentre el centro de masa de la barra.

35. Una placa plana, en forma de cuarto de círculo, se sumerge verticalmente en aceite como se muestra en la FIGURA 6.R.13. Si el peso específico del aceite es 800 kg/m^3, encuentre la fuerza que ejerce el aceite sobre un lado de la placa.

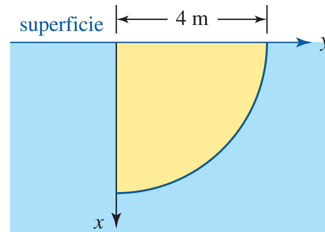


FIGURA 6.R.13 Placa vertical sumergida en el problema 35

36. Una barra metálica uniforme de masa 4 kg y longitud 2 m soporta dos masas, como se muestra en la FIGURA 6.R.14. ¿Dónde debe atarse el cable a la barra de modo que el sistema cuelgue en equilibrio?

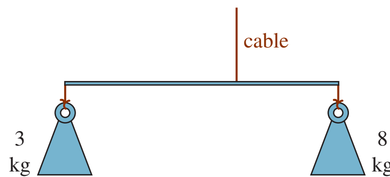


FIGURA 6.R.14 Masas en el problema 36

37. Tres masas están suspendidas de barras uniformes de masa despreciable como se muestra en la FIGURA 6.R.15. Determine dónde deben colocarse los cables indicados de modo que todo el sistema cuelgue en equilibrio.

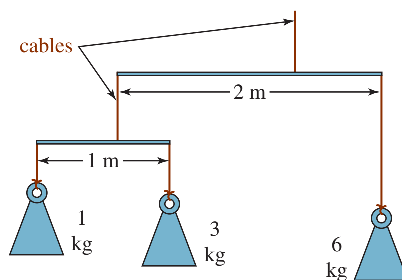
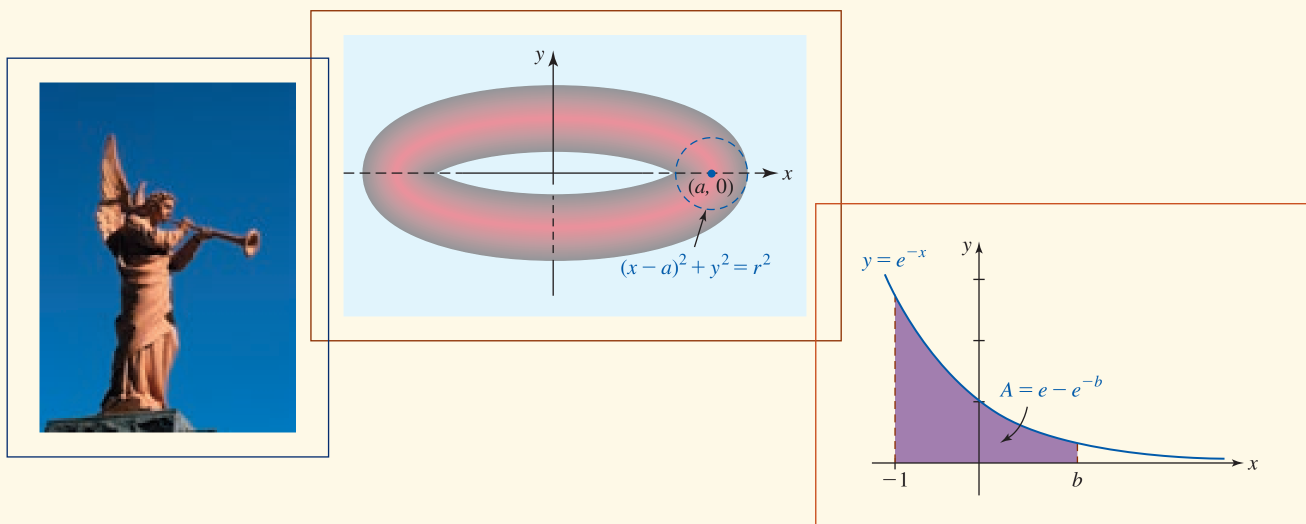


FIGURA 6.R.15 Masas en el problema 37

Capítulo 7

Técnicas de integración



En este capítulo A menudo uno se encuentra una integral que no puede clasificarse en una forma conocida como $\int u^n\,du$ o $\int e^u\,du$. Por ejemplo, no es posible evaluar $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$ mediante la aplicación inmediata de cualquiera de las fórmulas enumeradas en las páginas 380-381. No obstante, al aplicar una **técnica de integración** algunas veces es posible reducir una integral como ésta a una o más de estas formas conocidas.

7.1 Integración: tres recursos

Introducción En este capítulo vamos a resumir el estudio de antiderivadas que empezó en el capítulo 5, en el que mostramos superficialmente cómo obtener antiderivadas de una función f. Recuerde que una integral definida

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

es una familia $F(x) + C$ de antiderivadas de la función f; es decir, F está relacionada con f por el hecho de que $F'(x) = f(x)$. De esta manera, a la derivada de una función específica (sen x, cos x, e^x, ln x, etc.) corresponde una integral indefinida análoga. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \text{implica} \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$$

Tablas La TABLA 7.1.1 que se muestra a continuación es una versión ampliada de la tabla 5.2.1. Puesto que resume en notación integral indefinida todas las derivadas de la regla de la cadena de las funciones analizadas en los capítulos 1 y 3, referiremos las entradas de la tabla 7.1.1 a formas *familiares* o *básicas*. El objetivo de este capítulo consiste en evaluar integrales que, en su mayor parte, no caen en ninguna de las formas proporcionadas en la tabla.

La tabla 7.1.1 es sólo la punta de un *iceberg* más bien enorme; los manuales de referencia solían incluir cientos de fórmulas de integración. Aunque aquí no somos tan ambiciosos, en la sección *Fórmulas matemáticas* al final de este texto proporcionamos una tabla más amplia de fórmulas de integración. Como de costumbre, en ambas se usa notación diferencial. Si $u = g(x)$ denota una función diferenciable, entonces la diferencial de u es el producto $du = g'(x)\,dx$.

TABLA 7.1.1

Fórmulas de integración

Integrandos constantes

1. $\int du = u + C$
2. $\int k\,du = ku + C$

Integrandos que son potencias

3. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
4. $\int u^{-1}\,du = \int \dfrac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

Integrandos exponenciales

5. $\int e^u\,du = e^u + C$
6. $\int a^u\,du = \dfrac{1}{\ln a}a^u + C$

Integrandos trigonométricos

7. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
8. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
9. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
10. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
11. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
12. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
13. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
14. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
15. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
16. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

(continúa)

Integrandos hiperbólicos

17. $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

18. $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

19. $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

20. $\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

21. $\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

22. $\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

Integrandos algebraicos

23. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\, du = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

24. $\int \frac{1}{a^2 + u^2}\, du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

25. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

26. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}}\, du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$

27. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

28. $\int \frac{1}{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u + a}{u - a}\right| + C$

29. $\int \frac{1}{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C$

30. $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 - u^2}}\, du = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

31. $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 + u^2}}\, du = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u}\right| + C$

Aunque estas fórmulas de integración se han designado como *familiares* o *básicas*, tal vez usted observe que puede no estar *familiarizado* con algunas de ellas, especialmente las fórmulas 17-22 y 26-31. Debido a que los profesores a veces prestan poca atención a las funciones hiperbólicas, se le solicita revisar (o, en caso de ser necesario, estudiar por primera vez) la sección 3.10. Las fórmulas 26-31, que semejan a las fórmulas 23-25, son las formas de integral indefinida de las fórmulas de diferenciación para las funciones hiperbólicas inversas combinadas con el hecho de que toda función hiperbólica inversa es un logaritmo natural. Vea la página 183.

Técnicas de integración En las siguientes secciones, las integrales que analizaremos no pueden clasificarse como una simple forma familiar como $\int u^n\, du$, $\int e^u\, du$ o $\int \operatorname{sen} u\, du$. A pesar de ello, la tabla 7.1.1 es importante; a medida que avance en este capítulo, necesariamente se le hará referencia a esa tabla. Una gran cantidad de integrales puede evaluarse al ejecutar operaciones específicas sobre el integrando —denominada **técnica de integración**— y reducir una integral dada a *una o más* de las formas familiares en la tabla. Por ejemplo, no es posible evaluar $\int \ln x\, dx$ al identificarla con cualquiera de las fórmulas de integración en la tabla 7.1.1. No obstante, en la sección 7.3 veremos que al aplicar una técnica de integración, $\int \ln x\, dx$ puede evaluarse en pocos segundos al usar la derivada de ln x junto con la fórmula 1 en la tabla.

Para efecto de repaso, se solicita al lector que trabaje los problemas en los ejercicios 7.1. Por medio de una sustitución u idónea, cada problema puede hacerse corresponder con una de las fórmulas en la tabla 7.1.1.

Pero ni una tabla, sin importar cuán grande sea, ni las técnicas de integración, sin importar lo poderosas que sean, constituye un remedio para todos los problemas de integración. Mientras algunas integrales, como $\int e^{x^2}\, dx$, desafían por completo a las tablas y técnicas de integración, otras sólo *parecen* desafiar tales recursos. Por ejemplo, la integral $\int e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} 2x\, dx$ no aparece en ninguna tabla pero *es posible* evaluarla por medio de una técnica de integración. El problema aquí es que no resulta evidente de forma inmediata *cuál* técnica puede aplicarse. Algunas veces se espera que el lector proporcione algunas ideas para replantear un integrando en una forma más receptiva para una técnica de integración.

En la sección 5.5 se indicó (vea las páginas 312-313) que una función continua f puede no tener una antiderivada que sea una función elemental.

Tecnología Unas palabras sobre tecnología: si usted no ha trabajado con un sistema algebraico computarizado (SAC) como *Mathematica*, *Maple*, *Derive* o *Axiom*, debe corregir esta deficiencia lo más pronto posible. Un sistema algebraico computarizado es un programa extremada-

mente sofisticado diseñado para realizar una amplia gama de operaciones matemáticas simbólicas como álgebra normal, álgebra matricial, aritmética con números complejos, resolver ecuaciones polinomiales, aproximar raíces de ecuaciones, diferenciación, integración, graficado de ecuaciones en dos o tres dimensiones, resolver ecuaciones diferenciales, manipular funciones especiales ya contempladas en el SAC, etcétera. Si usted piensa convertirse en un estudiante serio de matemáticas, ciencias o ingeniería, entonces una ayuda ideal para sus clases teóricas y prácticas (así como para su carrera futura) sería contar con una computadora portátil equipada con un programa como *Mathematica*, *Maple* o MATLAB. También verifique en los laboratorios de matemáticas de su departamento de matemáticas o física; las computadoras que ahí encuentre indudablemente cuentan con uno o más de estos programas.

A medida que conozca y se sienta cómodo al usar un SAC, tal vez se interese en investigar sitios en la web como:

http://scienceworld.wolfram.com
http://mathworld.wolfram.com

Wolfram Research es el desarrollador del sistema computacional de álgebra *Mathematica*.

Ejercicios 7.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-21.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-32, use una sustitución u y la tabla 7.1.1 para evaluar la integral dada.

1. $\int 5^{-5x}\,dx$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}\,dx$
3. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$
4. $\int \frac{\cos e^{-x}}{e^{x}}\,dx$
5. $\int \frac{x}{\sqrt{25-4x^2}}\,dx$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{25-4x^2}}\,dx$
7. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-25}}\,dx$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{25+4x^2}}\,dx$
9. $\int \frac{1}{25+4x^2}\,dx$
10. $\int \frac{x}{25+4x^2}\,dx$
11. $\int \frac{1}{4x^2-25}\,dx$
12. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+25}}\,dx$
13. $\int \cot 10x\,dx$
14. $\int x\csc^2 x^2\,dx$
15. $\int \frac{6}{(3-5t)^{2.2}}\,dx$
16. $\int x^2\sqrt{(1-x^3)^5}\,dx$
17. $\int \sec 3x\,dx$
18. $\int 2\csc 2x\,dx$
19. $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
20. $\int \frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1} x}\,dx$
21. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$
22. $\int \frac{\cos(\ln 9x)}{x}\,dx$
23. $\int \frac{x^3}{\cosh^2 x^4}\,dx$
24. $\int \tanh x\,dx$
25. $\int \tan 2x\sec 2x\,dx$
25. $\int \operatorname{sen} x\operatorname{sen}(\cos x)\,dx$
27. $\int \operatorname{sen} x\csc(\cos x)\cot(\cos x)\,dx$
28. $\int \cos x\csc^2(\operatorname{sen} x)\,dx$
29. $\int (1+\tan x)^2\sec^2 x\,dx$
30. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$
31. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$
32. $\int \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}\,dx$

7.2 Integración por sustitución

Introducción En esta sección se ampliará la idea de **sustitución *u*** presentada en la sección 5.2, donde esta sustitución se usó básicamente como ayuda para identificar que una integral era una de las fórmulas de integración familiares como $\int u^n\,du$, $\int du/u$, $\int e^u\,du$, etcétera. Por ejemplo, con la sustitución $u = \ln x$ y $du = (1/x)\,dx$ reconocemos que

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx \qquad \text{es lo mismo que} \qquad \int u^2\,du.$$

Usted debe comprobar que $\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx$ no se ajusta a *ninguna* de las 31 fórmulas de integración de la tabla 7.1.1. No obstante, con ayuda de una sustitución es posible reducir la integral a *varios* casos de una de las fórmulas en la tabla 7.1.1.

El primer ejemplo ilustra la idea general.

EJEMPLO 1 Uso de una sustitución *u*

Evalúe $\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx$.

Solución Si se hace $u = 2x + 1$, entonces la integral dada puede replantearse en términos de la variable u. Para ello, observe que

$$x = \frac{1}{2}(u-1), \qquad dx = \frac{1}{2}\,du,$$

$$x^2 = \frac{1}{4}(u-1)^2 = \frac{1}{4}(u^2-2u+1) \text{ y } \sqrt{2x+1} = u^{1/2}.$$

Al sustituir estas expresiones en la integral dada se obtiene:

$$\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx = \int \frac{1}{4}(u^2-2u+1)u^{1/2}\frac{1}{2}\,du,$$

es decir,

$$\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{8}\int (u^2-2u+1)u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{1}{8}\int (u^{5/2}-2u^{3/2}+u^{1/2})\,du \quad \leftarrow \text{tres aplicaciones de la fórmula 3 en la tabla 7.1.1}$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(\frac{2}{7}u^{7/2}-\frac{4}{5}u^{5/2}+\frac{2}{3}u^{3/2}\right)+C \quad \leftarrow \text{ahora se vuelve a sustituir para } u$$

$$= \frac{1}{28}(2x+1)^{7/2}-\frac{1}{10}(2x+1)^{5/2}+\frac{1}{12}(2x+1)^{3/2}+C.$$

Usted debe comprobar que la derivada de la última línea en realidad es $x^2\sqrt{2x+1}$. ■

La elección de cuál sustitución usar, en caso de haber alguna, no siempre es evidente. En general, si el integrando contiene una potencia de una función, entonces una buena idea consiste en intentar que u sea esa función *o* potencia de la función en sí. En el ejemplo 1, la sustitución alterna $u = \sqrt{2x+1}$ o $u^2 = 2x + 1$ lleva a la integral diferente $\frac{1}{4}\int(1-u^2)^2u^2\,du$. La última puede evaluarse al desarrollar el integrando e integrar cada término.

EJEMPLO 2 Uso de una sustitución *u*

Evalúe $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

Solución Sea $u = \sqrt{x}$ de modo que $x = u^2$ y $dx = 2u\,du$. Entonces

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{1+u}2u\,du$$

$$= \int \frac{2u}{1+u}\,du \quad \leftarrow \text{ahora se usa división larga}$$

$$= \int\left(2-\frac{2}{1+u}\right)du \quad \leftarrow \text{fórmulas 2 y 4 en tabla 7.1.1}$$

$$= 2u - 2\ln|1+u| + C \quad \leftarrow \text{se vuelve a sustituir para } u$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C.$$ ■

Integrandos que contienen una expresión cuadrática Si un integrando contiene una expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$, completar el cuadrado puede producir una integral que sea posible expresar en términos de una función trigonométrica inversa o una función hiperbólica inversa. Por supuesto, también es posible que integrales más complicadas produzcan otras funciones.

EJEMPLO 3 Completar el cuadrado

Evalúe $\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx.$

Solución Después de completar el cuadrado, la integral dada puede escribirse como

$$\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx = \int \frac{x+4}{(x+3)^2+9}\,dx.$$

Ahora, si $u = x + 3$, entonces $x = u - 3$ y $dx = du$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx &= \int \frac{u+1}{u^2+9}\,du \quad \leftarrow \text{división término a término}\\
&= \int \frac{u}{u^2+9}\,du + \int \frac{1}{u^2+9}\,du\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+9}\,du + \int \frac{1}{u^2+9}\,du \quad \leftarrow \text{fórmulas 4 y 24 en la tabla 7.1.1}\\
&= \frac{1}{2}\ln(u^2+9) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{u}{3} + C\\
&= \frac{1}{2}\ln[(x+3)^2+9] + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x+3}{3} + C\\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+18) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x+3}{3} + C.
\end{aligned}$$

■

El siguiente ejemplo ilustra una sustitución algebraica en una integral definida.

EJEMPLO 4 Una integral definida

Evalúe $\int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx.$

Solución Si $u = 3x + 2$, entonces

$$x = \frac{1}{3}(u-2), \qquad dx = \frac{1}{3}\,du,$$

$$6x + 1 = 2(u-2) + 1 = 2u - 3 \text{ y } \sqrt[3]{3x+2} = u^{1/3}.$$

Puesto que se cambiará la variable de integración, es necesario convertir los límites de integración x en límites de integración u. Observe que cuando $x = 0$, $u = 2$ y cuando $x = 2$, $u = 8$. En consecuencia, la integral original se vuelve

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx &= \int_2^8 \frac{2u-3}{u^{1/3}}\frac{1}{3}\,du \quad \leftarrow \text{de nuevo división término a término}\\
&= \int_2^8 \left(\frac{2}{3}u^{2/3} - u^{-1/3}\right)du\\
&= \left(\frac{2}{5}u^{5/3} - \frac{3}{2}u^{2/3}\right)\Big]_2^8\\
&= \left(\frac{2}{5}\cdot 2^5 - \frac{3}{2}\cdot 2^2\right) - \left(\frac{2}{5}\cdot 2^{5/3} - \frac{3}{2}\cdot 2^{2/3}\right)\\
&= \frac{34}{5} - \frac{2}{5}\cdot 2^{5/3} + \frac{3}{2}\cdot 2^{2/3} \approx 7.9112.
\end{aligned}$$

■

Se pide que el lector vuelva a trabajar el ejemplo 4. La segunda vez use $u = \sqrt[3]{3x+2}$.

$\int$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Cuando trabaje los ejercicios presentados en este capítulo, no se preocupe demasiado si no siempre obtiene la misma respuesta que se proporciona en el texto. Al aplicar técnicas diferentes al mismo problema es posible obtener respuestas que parecen diferentes. Recuerde que dos antiderivadas de la misma función pueden diferir cuando mucho por una constante. Intente conciliar los conflictos que se presenten.

ii) También podría ser de utilidad en este punto recordar que la integración del cociente de dos funciones polinomiales, $p(x)/q(x)$, suele empezar con división larga si el grado de $p(x)$ es mayor que o igual al grado de $q(x)$. Vea el ejemplo 2.

iii) Busque problemas que sea posible resolver con métodos previos.

Ejercicios 7.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-22.

Fundamentos

En los problemas 1-26, use una sustitución para evaluar la integral dada.

1. $\int x(x+1)^3\,dx$

2. $\int \frac{x^2-3}{(x+1)^3}\,dx$

3. $\int (2x+1)\sqrt{x-5}\,dx$

4. $\int (x^2-1)\sqrt{2x+1}\,dx$

5. $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}\,dx$

7. $\int \frac{x+3}{(3x-4)^{3/2}}\,dx$

8. $\int (x^2+x)\sqrt[3]{x+7}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$

10. $\int \frac{t}{\sqrt{t}+1}\,dt$

11. $\int \frac{\sqrt{t}-3}{\sqrt{t}+1}\,dt$

12. $\int \frac{\sqrt{r}+3}{r+3}\,dr$

13. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

14. $\int \frac{x^5}{\sqrt[5]{x^2+4}}\,dx$

15. $\int \frac{x^2}{(x-1)^4}\,dx$

16. $\int \frac{2x+1}{(x+7)^2}\,dx$

17. $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$

19. $\int \sqrt{1-\sqrt{v}}\,dv$

20. $\int \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1-\sqrt{w}}}\,dw$

21. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$

22. $\int \sqrt{t}\sqrt{1+t\sqrt{t}}\,dt$

23. $\int \frac{2x+7}{x^2+2x+5}\,dx$

24. $\int \frac{6x-1}{4x^2+4x+10}\,dx$

25. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{16-6x-x^2}}\,dx$

26. $\int \frac{4x-3}{\sqrt{11+10x-x^2}}\,dx$

En los problemas 27 y 28, use la sustitución $u = x^{1/6}$ para evaluar la integral.

27. $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$

28. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

En los problemas 29-40, use una sustitución para evaluar la integral definida dada.

29. $\int_0^1 x\sqrt{5x+4}\,dx$

30. $\int_{-1}^0 x\sqrt[3]{x+1}\,dx$

31. $\int_1^{16} \frac{1}{10+\sqrt{x}}\,dx$

32. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

33. $\int_2^9 \frac{5x-6}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

34. $\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

35. $\int_0^1 (1-\sqrt{x})^{50}\,dx$

36. $\int_0^4 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^3}\,dx$

37. $\int_1^8 \frac{1}{x^{1/3}+x^{2/3}}\,dx$

38. $\int_1^{64} \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}+2}\,dx$

39. $\int_0^1 x^2(1-x)^5\,dx$

40. $\int_0^6 \frac{2x+5}{\sqrt{2x+4}}\,dx$

En los problemas 41 y 42, use una sustitución para establecer el resultado dado. Suponga $x > 0$.

41. $\int_1^{x^2} \frac{1}{t}\,dt = 2\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

42. $\int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

Repaso de aplicaciones

43. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \frac{1}{x^{1/3}+1}$ sobre el intervalo $[0, 1]$.

44. Encuentre el área acotada por la gráfica de $y = x^3\sqrt{x+1}$ y el eje x sobre el intervalo $[-1, 1]$.

45. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las gráficas de $y = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$, $x = 0$, $x = 4$ y $y = 0$ alrededor del eje y.

46. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar alrededor del eje x la región en el problema 45.

47. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \frac{4}{5}x^{5/4}$ en el intervalo $[0, 9]$.

48. La **ecuación diferencial de Bertalanffy** es un modelo matemático para el crecimiento de un organismo donde se supone que el metabolismo constructivo (anabolismo)

del organismo procede en razón proporcional al área superficial, mientras el metabolismo destructivo (catabolismo) procede en razón proporcional al volumen. Si también se supone que el área superficial es proporcional a la potencia dos tercios del volumen y que el peso w del organismo es proporcional al volumen, entonces es posible escribir la ecuación de Bertalanffy como

$$\frac{dw}{dt} = Aw^{2/3} - Bw,$$

donde A y B son parámetros positivos. A partir de esta ecuación puede concluirse que el tiempo necesario para que tal organismo aumente de peso desde w_1 hasta w_2 está dado por la integral definida

$$T = \int_{w_1}^{w_2} \frac{1}{Aw^{2/3} - Bw}\, dw.$$

Evalúe esta integral. Encuentre un límite superior sobre cuánto puede crecer el organismo.

7.3 Integración por partes

Introducción En esta sección desarrollaremos una fórmula importante que puede usarse a menudo para integrar el producto de dos funciones. Para aplicar la fórmula es necesario identificar una de las funciones en el producto como una diferencial. Recuerde que si $v = g(x)$, entonces su diferencial es la función $dv = g'(x)\, dx$.

Integración de productos Puesto que deseamos integrar un producto, parece razonable empezar con la regla de diferenciación del producto. Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones diferenciables, entonces la derivada de $f(x)g(x)$ es

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \tag{1}$$

A su vez, la integración de ambos miembros de (1),

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\, dx = \int f(x)g'(x)\, dx + \int g(x)f'(x)\, dx$$

o

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\, dx + \int g(x)f'(x)\, dx,$$

produce la fórmula

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx. \tag{2}$$

La fórmula (2) suele escribirse en términos de las diferenciales $du = f'(x)\, dx$ y $dv = g'(x)\, dx$:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du. \tag{3}$$

El procedimiento definido por la fórmula (3) se denomina **integración por partes**. La idea esencial detrás de (3) es evaluar la integral $\int u\, dv$ mediante la evaluación de otra, que se espera sea más simple, integral $\int v\, du$.

Directrices para la integración por partes

- El **primer paso** en este proceso de integración por partes consta en la elección e integración de dv en la integral dada. Como cuestión práctica, la función dv *suele ser* el factor más complicado en el producto que puede integrarse usando una de las fórmulas básicas en la tabla 7.1.1.
- El **segundo paso** es la diferenciación del factor restante u en la integral dada. Luego se forma

se diferencia

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

se integra

- El **tercer paso**, por supuesto, es la evaluación de $\int v\, du$.

Algunas veces los problemas de integración pueden efectuarse aplicando varios métodos. En el primer ejemplo, la integral puede evaluarse por medio de una sustitución algebraica (sección 7.2) así como por integración por partes.

EJEMPLO 1 Uso de (3)

Evalúe $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

Solución Primero, la integral se escribe como

$$\int x(x+1)^{-1/2}\,dx.$$

A partir de esta última forma vemos que para la función dv hay varias opciones. De las posibles opciones para dv,

$$dv = (x+1)^{-1/2}\,dx, \quad dv = x\,dx \quad \text{o} \quad dv = dx,$$

escogemos

$$dv = (x+1)^{-1/2}\,dx \quad \text{y} \quad u = x.$$

Luego, por integración de la fórmula 3 en la tabla 7.1.1 encontramos

$$v = \int (x+1)^{-1/2}\,dx = 2(x+1)^{1/2}.$$

Cuando se integra dv no se requiere ninguna constante de integración.

Al sustituir $v = 2(x+1)^{1/2}$ y $du = dx$ en (3) se obtiene

$$\int \overbrace{x}^{u}\overbrace{(x+1)^{-1/2}\,dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\cdot\overbrace{2(x+1)^{1/2}}^{v} - \int \overbrace{2(x+1)^{1/2}}^{v}\,\overbrace{dx}^{du}$$

$$= 2x(x+1)^{1/2} - 2\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C \leftarrow \text{se usó la fórmula 3 en la tabla 7.1.1}$$

$$= 2x(x+1)^{1/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + C.$$

Comprobación por diferenciación Para verificar el resultado precedente se usa la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}\left(2x(x+1)^{1/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + C\right) = 2x\cdot\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} + 2(x+1)^{1/2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}(x+1)^{1/2}$$

$$= x(x+1)^{-1/2} + 2(x+1)^{1/2} - 2(x+1)^{1/2}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x+1}}.$$

■

La clave para que la integración por partes funcione consiste en hacer la elección "correcta" de la función dv. En las directrices antes del ejemplo 1 se afirmó que dv suele ser el factor más complicado en el producto que puede integrarse de inmediato por medio de una fórmula conocida de antemano. Sin embargo, esto no puede tomarse como una regla estricta. Considerando que la opción "correcta" para dv que se ha hecho a menudo se basa en retrospectiva pragmática, ¿la segunda integral $\int v\,du$ es menos complicada que la primera integral $\int u\,dv$? ¿Es posible evaluar esta segunda integral? Para ver qué ocurre cuando se hace una elección "mala", de nuevo se considerará el ejemplo 1, aunque esta vez se escoge

$$dv = x\,dx \quad \text{y} \quad u = (x+1)^{-1/2}$$

de modo que

$$v = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{y} \quad du = -\frac{1}{2}(x+1)^{-3/2}\,dx.$$

En este caso, al aplicar (3) se obtiene

$$\int x(x+1)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2}x^2(x+1)^{-1/2} + \frac{1}{4}\int x^2(x+1)^{-3/2}\,dx.$$

Aquí la dificultad es evidente: la segunda integral $\int v\,du$ es más complicada que la original $\int u\,dv$. La selección alterna $dv = dx$ también conduce a un callejón sin salida.

EJEMPLO 2 Uso de (3)

Evalúe $\displaystyle\int x^3 \ln x\,dx$.

Solución De nuevo, hay varias opciones posibles para la función dv:

$$dv = \ln x\,dx, \quad dv = x^3\,dx \quad \text{o} \quad dv = dx. \tag{4}$$

Aunque la elección $dv = \ln x\,dx$ es indudablemente el factor más complicado en el producto $x^3 \ln x\,dx$, esta opción se rechaza porque no coincide con ninguna fórmula en la tabla 7.1.1. De las dos funciones restantes en (4), la segunda es la más "complicada", de modo que se escoge

$$dv = x^3\,dx \qquad \text{y} \qquad u = \ln x,$$

entonces

$$v = \frac{1}{4}x^4 \qquad \text{y} \qquad du = \frac{1}{x}\,dx.$$

Así, por (3),

$$\int x^3 \ln x\,dx = \overbrace{\ln x}^{u} \cdot \overbrace{\frac{1}{4}x^4}^{v} - \int \overbrace{\frac{1}{4}x^4}^{v} \cdot \overbrace{\frac{1}{x}\,dx}^{du} \qquad \leftarrow \text{se simplifica el integrando}$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx \qquad \leftarrow \text{se integra } x^3$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

■

EJEMPLO 3 Uso de (3)

Evalúe $\displaystyle\int x \tan^{-1} x\,dx$.

Solución La elección $dv = \tan^{-1} x\,dx$ no es prudente, puesto que no es posible integrar de inmediato esta función con base en un resultado previo conocido. Así, escogemos

$$dv = x\,dx \qquad \text{y} \qquad u = \tan^{-1} x$$

y se encuentra

$$v = \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{y} \qquad du = \frac{1}{1 + x^2}\,dx.$$

En consecuencia, con (3) se obtiene

$$\int \overbrace{(\tan^{-1} x)}^{u}\,\overbrace{(x\,dx)}^{dv} = \overbrace{(\tan^{-1} x)}^{u}\,\overbrace{\frac{1}{2}x^2}^{v} - \int \overbrace{\frac{1}{2}x^2}^{v} \cdot \overbrace{\frac{1}{1 + x^2}\,dx}^{du}. \qquad \leftarrow \text{se simplifica el integrando}$$

Para evaluar la integral indefinida $\int x^2\,dx/(1 + x^2)$, usamos la división larga (vea el ejemplo 7 de la sección 5.1). Por tanto,

$$\int x \tan^{-1} x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C.$$

■

Integraciones sucesivas Un problema puede requerir integración por partes varias veces consecutivas. Como regla, integrales del tipo

$$\int p(x) \operatorname{sen} kx\,dx, \qquad \int p(x) \cos kx\,dx \qquad \text{y} \qquad \int p(x) e^{kx}\,dx, \tag{5}$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ y k es una constante, requieren integración por partes n veces. Además, una integral como

$$\int x^k (\ln x)^n \, dx, \tag{6}$$

donde de nuevo n es un entero positivo, también requiere n aplicaciones de (3). La integral en el ejemplo 2 es de la forma (6) con $k = 3$ y $n = 1$.

EJEMPLO 4 Uso de (3) dos veces consecutivas

Evalúe $\int x^2 \cos x \, dx$.

Solución La integral $\int x^2 \cos x \, dx$ es la segunda de tres formas en (5) con $p(x) = x^2$ y $n = 2$. En consecuencia, (3) se aplica dos veces consecutivas. En la primera integración se usa

$$dv = \cos x \, dx \quad \text{y} \quad u = x^2$$

de modo que

$$v = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad du = 2x \, dx.$$

Por tanto, (3) se vuelve

se requiere integración por partes ↓

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x \, dx. \tag{7}$$

La segunda integral en (7) es la primera forma en (5) y sólo requiere una integración por partes, puesto que el grado del polinomio $p(x) = x$ es $n = 1$. En esta segunda integral se escoge $dv = \operatorname{sen} x \, dx$ y $u = x$:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \operatorname{sen} x - 2\left[x(-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx\right] \\ &= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2\int \cos x \, dx \quad \leftarrow \text{fórmula 8 en la tabla 7.1.1} \\ &= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C. \qquad (8)\ ■\end{aligned}$$

El resultado en (8) puede obtenerse con un atajo sistemático. Si consideramos la integral en el ejemplo 4 como $\int f(x)g'(x)\, dx$ donde $f(x) = x^2$ y $g'(x) = \cos x$, entonces podemos mostrar las derivadas y la integral en un arreglo:

$f(x)$ y sus derivadas		$g'(x)$ y sus integrales
x^2	$+$ ↘	$\cos x$
$2x$	$-$ ↘	$\operatorname{sen} x$
2	$+$ ↘	$-\cos x$
0		$-\operatorname{sen} x$

Luego formamos los productos de las funciones unidas por las flechas y sumamos o restamos un producto según el signo algebraico indicado en azul:

$$\int x^2 \cos x \, dx = +x^2(\operatorname{sen} x) - 2x(-\cos x) + 2(-\operatorname{sen} x) + C.$$

El último cero en la columna de las derivadas indica que ya no es necesario integrar más $g'(x)$; los productos de ese punto son cero.

Esta técnica de integración sucesiva por partes funciona para todas las integrales del tipo mostrado en (5) y se denomina **integración tabular**. Para una integral como $\int x^4 e^{-2x}\, dx$ podríamos escoger $f(x) = x^4$ y $g'(x) = e^{-2x}$. Usted debe comprobar que con integración tabular se obtiene

$$\begin{aligned}\int x^4 e^{-2x}\, dx &= +x^4\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - 4x^3\left(\frac{1}{4}e^{-2x}\right) + 12x^2\left(-\frac{1}{8}e^{-2x}\right) - 24x\left(\frac{1}{16}e^{-2x}\right) + 24\left(-\frac{1}{32}e^{-2x}\right) + C \\ &= -\frac{1}{2}x^4 e^{-2x} - x^3 e^{-2x} - \frac{3}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{3}{2}x e^{-2x} - \frac{3}{4}e^{-2x} + C.\end{aligned}$$

Despeje de integrales Para ciertas integrales, una o más aplicaciones de la integración por partes puede resultar en una situación en que la integral original aparece en el miembro derecho. En este caso el problema de evaluar la integral se completa al *despejar* la integral original. El siguiente ejemplo ilustra la técnica.

EJEMPLO 5 Despeje de la integral original

Evalúe $\int \sec^3 x\,dx$.

Solución Al examinar la integral no se observa ninguna elección evidente para dv. No obstante, al escribir el integrando como el producto $\sec^3 x = \sec x \cdot \sec^2 x$, identificamos

$$dv = \sec^2 x\,dx \qquad \text{y} \qquad u = \sec x$$

de modo que

$$v = \tan x \qquad \text{y} \qquad du = \sec x \tan x\,dx.$$

Por (3) se concluye que

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\,dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx \quad \leftarrow \text{identidad trigonométrica para } \tan^2 x \\ &= \sec x \tan x + \int \sec x\,dx - \int \sec^3 x\,dx \\ &= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\,dx.\end{aligned}$$

Vea (18) en la sección 5.2 para la evaluación de la integral $\int \sec x\,dx$. También, vea la fórmula 15 en la tabla 7.1.1.

En la última ecuación despejamos $\int \sec^3 x\,dx$ y sumamos una constante de integración:

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$

y así

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C. \qquad ■$$

Integrales del tipo

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx \qquad \text{y} \qquad \int e^{ax} \cos bx\,dx \tag{9}$$

son importantes en ciertos aspectos de matemáticas aplicadas. Estas integrales requieren dos aplicaciones de la integración por partes antes de recuperar la integral original en el miembro derecho.

EJEMPLO 6 Despeje de la integral original

Evalúe $\int e^{2x} \cos 3x\,dx$.

Solución Si se escoge

$$dv = e^{2x}\,dx \qquad \text{y} \qquad u = \cos 3x,$$

entonces

$$v = \frac{1}{2}e^{2x} \qquad \text{y} \qquad du = -3 \operatorname{sen} 3x\,dx.$$

Luego, la fórmula (3) de integración por partes proporciona

$$\int e^{2x} \cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x\,dx.$$

A la integral destacada en color le aplicamos de nuevo integración por partes con $dv = e^{2x}\,dx$ y $u = \text{sen}\,3x$:

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\,\text{sen}\,3x - \int \frac{1}{2}e^{2x}(3\cos 3x)\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\,\text{sen}\,3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx.$$

Al despejar $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ de la última ecuación se obtiene

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\,\text{sen}\,3x.$$

Después de dividir entre $\frac{13}{4}$ y fijar una constante de integración obtenemos

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{13}e^{2x}\,\text{sen}\,3x + C.$$ ■

Al evaluar las integrales $\int e^{ax}\,\text{sen}\,bx\,dx$ y $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ no importa cuáles funciones se escojan como dv y u. En el ejemplo 6 escogimos $dv = e^{2x}\,dx$ y $u = \cos 3x$; se le solicita volver a trabajar este ejemplo usando $dv = \cos 3x\,dx$ y $u = e^{2x}$.

Integrales definidas Una integral definida puede evaluarse usando integración por partes como sigue:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Por conveniencia, la ecuación anterior suele escribirse como

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du, \tag{10}$$

donde se entiende que los *límites de integración son valores de x* y las integraciones en las integrales se llevan a cabo con respecto a la variable x.

EJEMPLO 7 Área bajo la gráfica

Encuentre el área bajo la gráfica de $f(x) = \ln x$ sobre el intervalo $[1, e]$.

Solución Por la FIGURA 7.3.1 vemos que $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. Por tanto, el área A está dada por la integral definida

$$A = \int_1^e \ln x\,dx.$$

Al escoger $\qquad dv = dx \quad$ y $\quad u = \ln x,$

entonces $\qquad v = x \quad$ y $\quad du = \frac{1}{x}\,dx.$

Por (10) tenemos

$$A = x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e dx$$
$$= x\ln x\Big]_1^e - x\Big]_1^e$$
$$= e\ln e - \ln 1 - e + 1 = 1.$$

Aquí usamos $\ln e = 1$ y $\ln 1 = 0$. ■

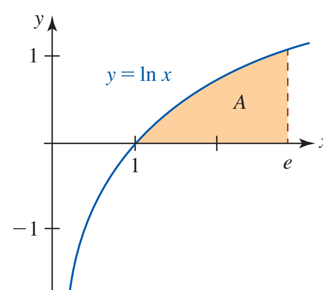


FIGURA 7.3.1 Área bajo la gráfica en el ejemplo 7

Ejercicios 7.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-22.

Fundamentos

En los problemas 1-40, use integración por partes para evaluar la integral dada.

1. $\int x\sqrt{x+3}\,dx$
2. $\int \frac{x}{\sqrt{2x-5}}\,dx$
3. $\int \ln 4x\,dx$
4. $\int \ln(x+1)\,dx$
5. $\int x\ln 2x\,dx$
6. $\int x^{1/2}\ln x\,dx$
7. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
8. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}\,dx$
9. $\int (\ln t)^2\,dt$
10. $\int (t\ln t)^2\,dt$
11. $\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$
12. $\int x^2\tan^{-1}x\,dx$
13. $\int xe^{3x}\,dx$
14. $\int x^2e^{5x}\,dx$
15. $\int x^3e^{-4x}\,dx$
16. $\int x^5e^x\,dx$
17. $\int x^3e^{x^2}\,dx$
18. $\int x^5e^{2x^3}\,dx$
19. $\int t\cos 8t\,dt$
20. $\int x\operatorname{senh} x\,dx$
21. $\int x^2\operatorname{sen} x\,dx$
22. $\int x^2\cos\frac{x}{2}\,dx$
23. $\int x^3\cos 3x\,dx$
24. $\int x^4\operatorname{sen} 2x\,dx$
25. $\int e^x\operatorname{sen} 4x\,dx$
26. $\int e^{-x}\cos 5x\,dx$
27. $\int e^{-2\theta}\cos\theta\,d\theta$
28. $\int e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\,dx$
29. $\int \theta\sec\theta\tan\theta\,d\theta$
30. $\int e^{2t}\cos e^t\,dt$
31. $\int \operatorname{sen} x\cos 2x\,dx$
32. $\int \cosh x\cosh 2x\,dx$
33. $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx$
34. $\int \frac{t^5}{(t^3+1)^2}\,dt$
35. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$
36. $\int \cos x\ln(\operatorname{sen} x)\,dx$
37. $\int \csc^3 x\,dx$
38. $\int x\sec^{-1}x\,dx$
39. $\int x\sec^2 x\,dx$
40. $\int x\tan^2 x\,dx$

En los problemas 41-46, evalúe la integral definida dada.

41. $\int_0^2 x\ln(x+1)\,dx$
42. $\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$
43. $\int_2^4 xe^{-x/2}\,dx$
44. $\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos x\,dx$
45. $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$
46. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \cos^{-1}x\,dx$

Repaso de aplicaciones

47. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = 1 + \ln x$ sobre el intervalo $[e^{-1}, 3]$.
48. Encuentre el área acotada por la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ y el eje x sobre el intervalo $[-1, 1]$.
49. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \ln x$, $x = 5$ y $y = 0$ gira alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido de revolución.
50. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = e^x$, $x = 0$ y $y = 3$ gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución.
51. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = 0$, $0 \le x \le \pi$, gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución.
52. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \ln(\cos x)$ sobre el intervalo $[0, \pi/4]$.
53. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \tan^{-1}(x/2)$ sobre el intervalo $[0, 2]$.
54. Un cuerpo se mueve en línea recta con velocidad $v(t) = e^{-t}\operatorname{sen} t$, donde v se mide en cm/s. Encuentre la función posición $s(t)$ si se sabe que $s = 0$ cuando $t = 0$.
55. Un cuerpo se mueve en línea recta con aceleración $a(t) = te^{-t}$, donde a se mide en cm/s^2. Encuentre la función velocidad $v(t)$ y la función posición $s(t)$ si $v(0) = 1$ y $s(0) = -1$.
56. Un tanque de agua se forma al girar la región acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen}\pi x$ y $y = 0$, $0 \le x \le 1$, alrededor del eje x, que se toma en la dirección hacia abajo. El tanque contiene agua hasta una profundidad de $\frac{1}{2}$ pie. Determine el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta la parte superior del tanque.
57. Encuentre la fuerza provocada por la presión de un líquido sobre un lado de la placa vertical que se muestra en la FIGURA 7.3.2. Suponga que la placa está sumergida en agua y que las dimensiones están en pies.

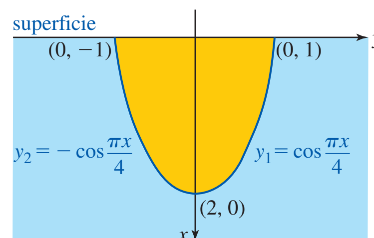


FIGURA 7.3.2 Placa sumergida en el problema 57

58. Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \text{sen}\, x$, $y = 0$ y $x = \pi/2$.

En los problemas 59-62, evalúe la integral usando primero una sustitución seguida de integración por partes.

59. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\tan^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

60. $\displaystyle\int xe^{\sqrt{x}}\, dx$

61. $\displaystyle\int \text{sen}\sqrt{x+2}\, dx$

62. $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{t}\, dt$

En los problemas 63-66, use integración por partes para establecer la **fórmula de reducción** dada.

63. $\displaystyle\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx$

64. $\displaystyle\int \text{sen}^n x\, dx = -\frac{\text{sen}^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} x\, dx$

65. $\displaystyle\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x\, \text{sen}\, x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$

66. $\displaystyle\int \sec^n x\, dx = \frac{\sec^{n-2} x\tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\, dx,$

En los problemas 67-70, use una fórmula de reducción para los problemas 63-66 para evaluar la integral dada.

67. $\displaystyle\int \text{sen}^3 x\, dx$

68. $\displaystyle\int \sec^4 x\, dx$

69. $\displaystyle\int \cos^3 10x\, dx$

70. $\displaystyle\int \cos^4 x\, dx$

71. Use el problema 64 para demostrar que para $n \geq 2$,

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n-2} x\, dx.$$

72. Demuestre cómo el uso repetido de la fórmula en el problema 71 sirve para obtener los siguientes resultados.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x\, dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n},$
n par y $n \geq 2$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x\, dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n},$
n impar y $n \geq 3$

73. Use el inciso *a*) del problema 72 para evaluar $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^8 x\, dx$.

74. Use el inciso *b*) del problema 72 para evaluar $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^5 x\, dx$.

≡ Piense en ello

En los problemas 75-82, la integración por partes es algo más desafiante. Evalúe la integral dada.

75. $\displaystyle\int e^{2x}\tan^{-1} e^x\, dx$

76. $\displaystyle\int (\text{sen}^{-1} x)^2\, dx$

77. $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx$

78. $\displaystyle\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\, dx$

79. $\displaystyle\int xe^x\, \text{sen}\, x\, dx$

80. $\displaystyle\int xe^{-x}\cos 2x\, dx$

81. $\displaystyle\int \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) dx$

82. $\displaystyle\int e^{\text{sen}^{-1} x}\, dx$

≡ Problemas con calculadora/SAC

83. ***a***) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = 3 + 2\,\text{sen}^2 x - 5\,\text{sen}^4 x$.

b) Encuentre el área bajo la gráfica de la función dada en el inciso *a*) sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

84. ***a***) Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $y = x\,\text{sen}\, x$ y $y = x\cos x$.

b) Encuentre el área de la región acotada por las gráficas sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, donde x_1 y x_2 son las coordenadas x positivas correspondientes a los puntos primero y segundo de intersección de las gráficas para $x > 0$.

7.4 Potencias de funciones trigonométricas

Introducción En la sección 5.2 vimos cómo integrar $\text{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$. En esta sección veremos cómo integrar potencias superiores de sen x y cos x, determinados productos de potencias de sen x y cos x, y productos de potencias de sec x y tan x. Las técnicas ilustradas en esta sección dependen de identidades trigonométricas.

Integrales de la forma $\int \text{sen}^m x\cos^n x\, dx$ Para evaluar integrales del tipo

$$\int \text{sen}^m x\ \cos^n x\, dx, \tag{1}$$

distinguimos dos casos.

CASO I: *m* o *n* es un entero positivo impar

Primero suponemos que $m = 2k + 1$ en (1) es un entero positivo impar. Entonces:

- Empezamos por separar el factor sen x de $\operatorname{sen}^{2k+1} x$, es decir, se escribe $\operatorname{sen}^{2k+1} x = \operatorname{sen}^{2k} x$ sen x, donde ahora $2k$ es par.
- Usamos la identidad pitagórica básica $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, para volver a escribir

$$\operatorname{sen}^{2k} x = (\operatorname{sen}^2 x)^k = (1 - \cos^2 x)^k.$$

- Desarrollamos el binomio $(1 - \cos^2 x)^k$.

De esta manera es posible expresar el integrando en (1) como una suma de potencias de cos x multiplicadas por sen x. Así, la integral original puede expresarse como una suma de integrales, cada una de la cuales tiene la forma identificable

$$\int \cos^r x \operatorname{sen} x\, dx = -\int \overbrace{(\cos x)^r}^{u^r} \overbrace{(-\operatorname{sen} x\, dx)}^{du} = -\int u^r\, du.$$

Si $n = 2k + 1$ es un entero positivo impar en (1), entonces el procedimiento es el mismo, excepto que escribimos $\cos^{2k+1} x = \cos^{2k} x \cos x$, usamos $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, y escribimos la integral como una suma de integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^r x \cos x\, dx = \int \overbrace{(\operatorname{sen} x)^r}^{u^r} \overbrace{(\cos x\, dx)}^{du} = \int u^r\, du.$$

Observamos que el exponente r no necesita ser un entero.

EJEMPLO 1 Caso I de la integral (1)

Evalúe $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$.

Solución Empezamos por escribir la potencia de sen x como $\operatorname{sen}^5 x = \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x$:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx &= \int \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int \cos^2 x (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx && \leftarrow \text{reemplace } \operatorname{sen}^2 x \text{ por } 1 - \cos^2 x \\
&= \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int \cos^2 x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x\, dx && \leftarrow \text{se escribe como tres integrales} \\
&= -\int \overbrace{(\cos x)^2}^{u^2} \overbrace{(-\operatorname{sen} x\, dx)}^{du} + 2\int \overbrace{(\cos x)^4}^{u^4} \overbrace{(-\operatorname{sen} x\, dx)}^{du} - \int \overbrace{(\cos x)^6}^{u^6} \overbrace{(-\operatorname{sen} x\, dx)}^{du} \\
&= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Caso I de la integral (1)

Evalúe $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$.

Solución Como en el ejemplo 1, volvemos a escribir la potencia de sen x como $\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x$:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int \operatorname{sen} x\, dx + \int (\cos x)^2 (-\operatorname{sen} x\, dx) \\
&= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Caso I de la integral (1)

Evalúe $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\, dx$.

Solución En esta ocasión volvemos a escribir la potencia de cos x como $\cos^2 x \cos x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \cos x\, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^4 x(1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx \qquad \leftarrow \text{se escribe como dos integrales} \\ &= \int \overbrace{(\operatorname{sen} x)^4}^{u^4}\overbrace{(\cos x\, dx)}^{du} - \int \overbrace{(\operatorname{sen} x)^6}^{u^6}\overbrace{(\cos x\, dx)}^{du} \\ &= \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x + C.\end{aligned}$$

■

CASO II: *m* y *n* son ambos enteros no negativos pares

Cuando m y n son enteros no negativos pares, la evaluación de (1) depende de las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x). \tag{2}$$

En la sección 5.2 vimos las dos últimas identidades como las formas útiles para las fórmulas de la mitad de un ángulo para el seno y el coseno.

EJEMPLO 4 Uso de las identidades (2) en la integral (1)

Evalúe $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$.

Solución La integral se evaluará en dos formas. Empezamos por usar las fórmulas segunda y tercera en (2):

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\cdot\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left[1 - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx \qquad \leftarrow \begin{array}{l}\text{tercera identidad en (2)} \\ \text{con } x \text{ sustituida por } 2x\end{array} \\ &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx \\ &= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C.\end{aligned}$$

Solución alterna Ahora usamos la primera fórmula en (2):

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx &= \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2\, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\, dx.\end{aligned}$$

El resto de la solución es igual que antes. ■

EJEMPLO 5 Uso de las identidades (2) en la integral (1)

Evalúe $\int \cos^4 x\, dx$.

Solución Empezamos por volver a escribir $\cos^4 x$ como $(\cos^2 x)^2$ y luego usamos la tercera identidad en (2):

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x\, dx &= \int (\cos^2 x)^2\, dx \\ &= \int \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right]^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx \qquad \leftarrow \text{se usa la tercera fórmula en (2) por segunda ocasión} \\ &= \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx \\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\text{sen}\, 2x + \frac{1}{32}\text{sen}\, 4x + C.\end{aligned}$$

■

Integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ Para evaluar una integral que implique potencias de la secante y la tangente,

$$\int \tan^m x \sec^n x\, dx, \tag{3}$$

consideramos tres casos. El procedimiento en los dos primeros casos es semejante al caso I para la integral (1) en el sentido de que a partir del producto $\tan^m x \sec^n x$ descomponemos un factor para que funcione como parte de la diferencial du.

CASO I: *m* es un entero positivo impar

Cuando $m = 2k + 1$ es un entero positivo impar en (3), $2k$ es par. Entonces:

- Empezamos por separar el factor $\sec x \tan x$ a partir de $\tan^{2k+1} x \sec^n x$, es decir, escribimos $\tan^{2k+1} x \sec^n x = \tan^{2k} x = \sec^{n-1} x \sec x \tan x$, donde $2k$ ahora es par.
- Usamos la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para volver a escribir

$$\tan^{2k} x = (\tan^2 x)^k = (\sec^2 x - 1)^k.$$

- Desarrollamos el binomio $(\sec^2 x - 1)^k$.

De esta manera es posible expresar el integrando en (3) como una suma de potencias de $\sec x$ multiplicada por $\sec x \tan x$. Ahora, la integral original puede expresarse como una suma de integrales, cada una de las cuales tiene la forma identificable

$$\int \overbrace{(\sec x)^r}^{u^r}\overbrace{(\sec x \tan x\, dx)}^{du} = \int u^r\, du.$$

EJEMPLO 6 Caso I de la integral (3)

Evalúe $\int \tan^3 x \sec^7 x\, dx$.

Solución Al escribir $\tan^3 x \sec^7 x = \tan^2 x \sec^6 x \sec x \tan x$, la integral puede escribirse como dos integrales que pueden evaluarse:

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec^7 x\, dx &= \int \tan^2 x \sec^6 x \sec x \tan x\, dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)\sec^6 x \sec x \tan x\, dx\end{aligned}$$

$$= \int \overbrace{(\sec x)^8}^{u^8} \overbrace{(\sec x \tan x\, dx)}^{du} - \int \overbrace{(\sec x)^6}^{u^6} \overbrace{(\sec x \tan x\, dx)}^{du}$$

$$= \frac{1}{9}\sec^9 x - \frac{1}{7}\sec^7 x + C. \quad \blacksquare$$

CASO II: *n* es un entero positivo par

Sea $n = 2k$ un entero positivo par en (3). Entonces:

- Empezamos por separar el factor $\sec^2 x$ de $\sec^{2k} x \tan^m x$, es decir, escribimos $\sec^{2k} x \tan^m x = \sec^{2(k-1)} x \tan^m x \sec^2 x$.
- Usamos la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ para volver a escribir

$$\sec^{2(k-1)} x = (\sec^2 x)^{k-1} = (1 + \tan^2 x)^{k-1}.$$

- Desarrollamos el binomio $(1 + \tan^2 x)^{k-1}$.

De esta manera es posible expresar el integrando en (3) como una suma de potencias de $\tan x$ multiplicadas por $\sec^2 x$. Así, la integral original puede expresarse como una suma de integrales, cada una de la cuales tiene la forma identificable

$$\int \overbrace{(\tan x)^r}^{u^r} \overbrace{(\sec^2 x\, dx)}^{du} = \int u^r\, du.$$

EJEMPLO 7 Caso II de la integral (3)

Evalúe $\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x\, dx$.

Solución Volvemos a escribir el integrando usando $\sec^4 x = \sec^2 x \sec^2 x$:

$$\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x\, dx = \int (\tan x)^{1/2} \sec^2 x \sec^2 x\, dx$$

$$= \int (\tan x)^{1/2} (1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \overbrace{(\tan x)^{1/2}}^{u^{1/2}} \overbrace{(\sec^2 x\, dx)}^{du} + \int \overbrace{(\tan x)^{5/2}}^{u^{5/2}} \overbrace{(\sec^2 x\, dx)}^{du}$$

$$= \frac{2}{3}(\tan x)^{3/2} + \frac{2}{7}(\tan x)^{7/2} + C. \quad \blacksquare$$

CASO III: *m* es par y *n* es impar

Finalmente, si m es un entero positivo par y n es un entero positivo impar, escribimos el integrando de (3) en términos de $\sec x$ y usamos integración por partes.

EJEMPLO 8 Caso III de la integral (3)

Evalúe $\int \tan^2 x \sec x\, dx$.

Solución Al escribir

$$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec x\, dx$$

$$= \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx$$

encontramos dos integrales que ya fueron evaluadas:

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C_1, \tag{4}$$

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C_2. \tag{5}$$

Para el resultado en (4), vea el ejemplo 5 en la sección 7.3. Para (5), vea (18) en la sección 5.2.

Al restar los resultados en (4) y (5) se llega al resultado deseado:

$$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C. \quad ■$$

Integrales del tipo

$$\int \cot^m x \csc^n x\, dx \tag{6}$$

se manejan de manera análoga a (3). En este caso usamos la identidad $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$.

Ejercicios 7.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-22.

Fundamentos

En los problemas 1-40, evalúe la integral indefinida. Observe que algunas integrales no caen, hablando estrictamente, en ninguno de los casos considerados en esta sección. Usted debe evaluar estas integrales aplicando métodos previos.

1. $\int (\operatorname{sen} x)^{1/2} \cos x\, dx$
2. $\int \cos^4 5x \operatorname{sen} 5x\, dx$
3. $\int \cos^3 x\, dx$
4. $\int \operatorname{sen}^3 4x\, dx$
5. $\int \operatorname{sen}^5 t\, dt$
6. $\int \cos^5 t\, dt$
7. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\, dx$
8. $\int \operatorname{sen}^5 2x \cos^2 2x\, dx$
9. $\int \operatorname{sen}^4 t\, dt$
10. $\int \cos^6 \theta\, d\theta$
11. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$
12. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$
13. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx$
14. $\int \operatorname{sen}^2 3x \cos^2 3x\, dx$
15. $\int \tan^3 2t \sec^4 2t\, dt$
16. $\int (2 - \sqrt{\tan x})^2 \sec^2 x\, dx$
17. $\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx$
18. $\int \tan^2 3x \sec^2 3x\, dx$
19. $\int \tan^3 x (\sec x)^{-1/2}\, dx$
20. $\int \tan^3 \frac{x}{2} \sec^3 \frac{x}{2}\, dx$
21. $\int \tan^3 x \sec^5 x\, dx$
22. $\int \tan^5 x \sec x\, dx$
23. $\int \sec^5 x\, dx$
24. $\int \frac{1}{\cos^4 x}\, dx$
25. $\int \cos^2 x \cot x\, dx$
26. $\int \operatorname{sen} x \sec^7 x\, dx$
27. $\int \cot^{10} x \csc^4 x\, dx$
28. $\int (1 + \csc^2 t)^2\, dt$
29. $\int \frac{\sec^4(1-t)}{\tan^8(1-t)}\, dt$
30. $\int \frac{\operatorname{sen}^3\sqrt{t}\cos^2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$
31. $\int (1 + \tan x)^2 \sec x\, dx$
32. $\int (\tan x + \cot x)^2\, dx$
33. $\int \tan^4 x\, dx$
34. $\int \tan^5 x\, dx$
35. $\int \cot^3 t\, dt$
36. $\int \csc^5 t\, dt$
37. $\int (\tan^6 x - \tan^2 x)\, dx$
38. $\int \cot 2x \csc^{5/2} 2x\, dx$
39. $\int x \operatorname{sen}^3 x^2\, dx$
40. $\int x \tan^8(x^2) \sec^2(x^2)\, dx$

En los problemas 41-46, evalúe la integral definida dada.

41. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 \theta \sqrt{\cos \theta}\, d\theta$
42. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x \cos^5 x\, dx$
43. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 2t\, dt$
44. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$
45. $\int_0^{\pi/4} \tan y \sec^4 y\, dy$
46. $\int_0^{\pi/3} \tan x \sec^{3/2} x\, dx$

En los problemas 47-52, use las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]$$
$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$
$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

para evaluar la integral trigonométrica dada.

47. $\int \operatorname{sen} x \cos 2x\, dx$
48. $\int \cos 3x \cos 5x\, dx$

49. $\int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 4x\, dx$

50. $\int \dfrac{5 - 3 \operatorname{sen} 2x}{\sec 6x}\, dx$

51. $\int_0^{\pi/6} \cos 2x \cos x\, dx$

52. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \frac{3}{2}x \operatorname{sen} \frac{1}{2}x\, dx$

53. Demuestre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$

54. Evalúe $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx.$

≡ Repaso de aplicaciones

En los problemas 55 y 56 se proporcionan las gráficas de $f(x) = \sec^2(x/2)$ (problema 55) y $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (problema 56). Encuentre el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región R acotada por la función de f sobre el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ alrededor del eje indicado.

55. El eje x:

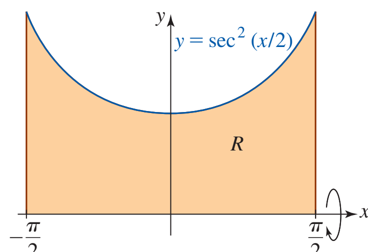


FIGURA 7.4.1 Región en el problema 55

56. La recta $y = 1$;

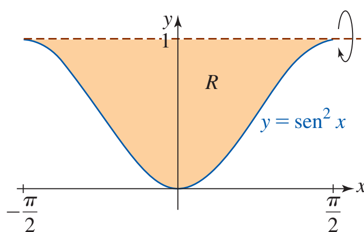


FIGURA 7.4.2 Región en el problema 56

57. Encuentre el área de la región R acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen}^3 x$ y $y = \cos^3 x$ sobre el intervalo $[-3\pi/4, \pi/4]$. Vea la FIGURA 7.4.3.

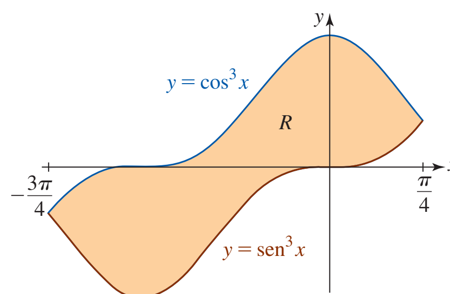


FIGURA 7.4.3 Gráficas para el problema 57

58. La gráfica de la ecuación $r = |\operatorname{sen} 4\theta \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta|$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$, encierra una región que es un modelo matemático para la forma de una hoja de castaño. Vea la FIGURA 7.4.4. En el capítulo 10 verá que el área acotada por esta gráfica está dada por $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\theta$. Encuentre esta área. [*Sugerencia*: Use una de las identidades dadas en las instrucciones para los problemas 47-52.]

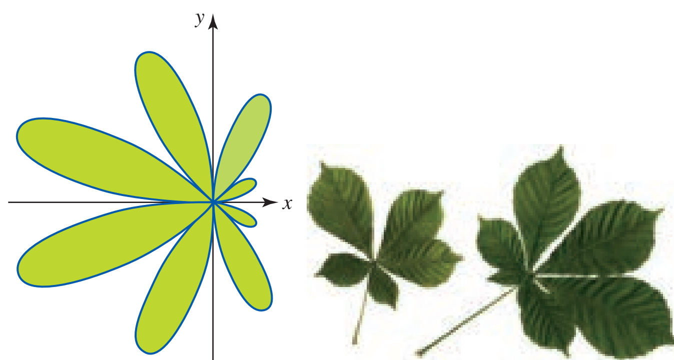


FIGURA 7.4.4 Región en el problema 58   Hojas de castaño

≡ Problemas con calculadora/SAC

59. Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $y = \cos^3 x$, $y = \cos^5 x$ y $y = \cos^7 x$ sobre el intervalo $[0, \pi]$. Use las gráficas para conjeturar los valores de las integrales definidas

$$\int_0^{\pi} \cos^3 x\, dx, \quad \int_0^{\pi} \cos^5 x\, dx \quad \text{y} \quad \int_0^{\pi} \cos^7 x\, dx.$$

60. En el problema 59, ¿cuál cree que es el valor de $\int_0^{\pi} \cos^n x\, dx$, donde n es un entero positivo impar? Demuestre su conjetura.

7.5 Sustituciones trigonométricas

Introducción Cuando un integrando contiene potencias enteras de x y potencias enteras de

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \quad \sqrt{a^2 + u^2} \quad \text{o} \quad \sqrt{u^2 - a^2},\ a > 0 \qquad (1)$$

podemos evaluar la integral por medio de sustituciones trigonométricas. Los tres casos que consideramos en esta sección dependen, a su vez, de las identidades pitagóricas fundamentales escritas en la forma:

$$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta, \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad \text{y} \qquad \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta.$$

El procedimiento para una integral indefinida es semejante al análisis en las secciones 5.2 y 7.2:

- Hacer una sustitución en una integral.
- Después de simplificar, efectuar la integración con respecto a la nueva variable.
- Volver a la variable original por resustitución.

Antes de proceder, se harán corresponder la sustitución trigonométrica y los radicales en (1).

Directrices para las sustituciones trigonométricas

Para integrandos que contienen

- $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$, sea $u = a \operatorname{sen} \theta$, donde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.
- $\sqrt{a^2 + u^2}$, $a > 0$, sea $u = a \tan \theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.
- $\sqrt{u^2 - a^2}$, $a > 0$, sea $u = a \sec \theta$, donde $\begin{cases} 0 \leq \theta < \pi/2, & \text{si } u \geq a \\ \pi/2 < \theta \leq \pi, & \text{si } u \leq -a. \end{cases}$

Vea la sección 1.5 para un repaso de las funciones trigonométricas inversas.

En cada caso, la restricción impuesta sobre la variable θ es precisamente la que acompaña a la función trigonométrica inversa correspondiente. En otras palabras, si queremos escribir $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(u/a)$, etcétera. Además, con ayuda de las identidades anteriores, cada una de estas sustituciones produce un cuadrado perfecto. Con la restricción sobre θ para las sustituciones $u = a \operatorname{sen} \theta$ y $u = a \tan \theta$, la raíz cuadrada puede tomarse sin recurrir a valores absolutos. Como verá, debe tener más cuidado al usar la sustitución $u = a \sec \theta$.

- Si $u = a \operatorname{sen} \theta$, donde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, entonces
$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta.$$
- Si $u = a \tan \theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, entonces
$$\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a \sec \theta.$$
- Si $u = a \sec \theta$, donde $0 \leq \theta < \pi/2$ o $\pi/2 < \theta \leq \pi$, entonces
$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 \theta - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = a|\tan \theta|.$$

Cuando una expresión como $\sqrt{a^2 - u^2}$ aparece en el denominador de un integrando, hay una restricción adicional sobre la variable θ; en este caso, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Después de llevar a cabo la integración en θ es necesario volver a la variable original x. Si se construye un triángulo rectángulo de referencia, uno donde $\operatorname{sen} \theta = u/a$, $\tan \theta = u/a$, o $\sec \theta = u/a$ como se muestra en la FIGURA 7.5.1, entonces las otras funciones trigonométricas pueden expresarse fácilmente en términos de u.

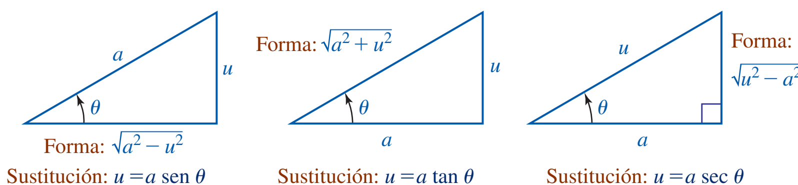


FIGURA 7.5.1 Triángulos rectángulos de referencia usados para expresar funciones trigonométricas en términos de una expresión algebraica en u y a

En los dos primeros ejemplos, el integrando contiene la forma radical $\sqrt{a^2 - u^2}$.

EJEMPLO 1 Uso de una sustitución seno

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx.$

Solución Al identificar $u = x$ y $a = 3$ se llega a las sustituciones

$$x = 3 \operatorname{sen} \theta \qquad \text{y} \qquad dx = 3 \cos \theta \, d\theta,$$

donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. La integral se vuelve

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{9\,\text{sen}^2\,\theta}{\sqrt{9-9\,\text{sen}^2\,\theta}}(3\cos\theta\,d\theta) \leftarrow \text{se simplifica}$$
$$= 9\int \text{sen}^2\,\theta\,d\theta.$$

Recuerde que para evaluar esta última integral trigonométrica usamos la identidad de la mitad del ángulo $\text{sen}^2\,\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \frac{9}{2}\int (1-\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{4}\text{sen}\,2\theta + C$$
$$= \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{2}\text{sen}\,\theta\cos\theta + C. \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble}$$

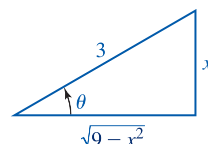


FIGURA 7.5.2 Triángulo rectángulo en el ejemplo 1

Para expresar este resultado de nuevo en términos de la variable x, usamos $\text{sen}\,\theta = x/3$ y $\theta = \text{sen}^{-1}(x/3)$. Luego, por el triángulo rectángulo de referencia en la FIGURA 7.5.2 vemos que $\cos\theta = \sqrt{9-x^2}/3$, de modo que

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \frac{9}{2}\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C. \quad ■$$

EJEMPLO 2 Uso de una sustitución seno

Evalúe $\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}\,dx$.

Solución Al identificar $u = 2x$, $a = 1$ se hace $2x = \text{sen}\,\theta$, y así $x = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta$ y $dx = \frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta$. Entonces

$$\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-\text{sen}^2\,\theta}}{\frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta}\left(\frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta\right) \leftarrow \text{se simplifica}$$
$$= \int \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\,\theta}\,d\theta$$
$$= \int \frac{1-\text{sen}^2\,\theta}{\text{sen}\,\theta}\,d\theta \leftarrow \text{se usa división término a término}$$
$$= \int (\csc\theta - \text{sen}\,\theta)\,d\theta \leftarrow \text{fórmulas 16 y 7 en la tabla 7.1.1}$$
$$= \ln|\csc\theta - \cot\theta| + \cos\theta + C.$$

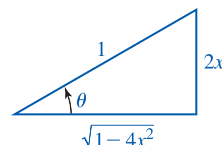


FIGURA 7.5.3 Triángulo rectángulo en el ejemplo 2

En la FIGURA 7.5.3 se ha construido un triángulo rectángulo para el cual $\text{sen}\,\theta = 2x$ y $\cos\theta = \sqrt{1-4x^2}$. En consecuencia, $\csc\theta = 1/\text{sen}\,\theta = 1/(2x)$ y $\cot\theta = \cos\theta/\text{sen}\,\theta = \sqrt{1-4x^2}/(2x)$. Por tanto, el resultado obtenido al integrar con respecto a θ puede escribirse en términos de x como

$$\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}\,dx = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x}\right| + \sqrt{1-4x^2} + C. \quad ■$$

Como recordatorio para las habilidades de integración, se solicita que el lector compruebe periódicamente que la derivada de la antiderivada que obtuvo es el integrando de la integral original. La derivada de la respuesta final en el ejemplo 2,

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x}\right| + \sqrt{1-4x^2} + C\right] = -\frac{-1+4x^2+\sqrt{1-4x^2}}{x(-1+\sqrt{1-4x^2})},$$

está antes, no en el integrando en el ejemplo 2. Use álgebra para resolver la diferencia entre este resultado y el integrando $\sqrt{1-4x^2}/x$.

En los dos ejemplos siguientes, el integrando contiene una potencia entera de la forma radical $\sqrt{a^2 + u^2}$.

EJEMPLO 3 Uso de una sustitución tangente

Evalúe $\displaystyle\int \frac{1}{(4 + x^2)^{3/2}}\, dx$.

Solución Observe que el integrando es una potencia entera de $\sqrt{4 + x^2}$, puesto que $(4 + x^2)^{3/2} = \left(\sqrt{4 + x^2}\right)^3$. Luego, cuando $u = x$, $x = 2 \tan \theta$ y $dx = 2 \sec^2 \theta \, d\theta$ se tiene $\sqrt{4 + x^2} = \sqrt{4 \sec^2 \theta} = 2 \sec \theta$ y $(4 + x^2)^{3/2} = 8 \sec^3 \theta$. Por tanto,

$$\int \frac{1}{(4 + x^2)^{3/2}}\, dx = \int \frac{1}{8 \sec^3 \theta}(2 \sec^2 \theta \, d\theta)$$
$$= \frac{1}{4}\int \cos \theta \, d\theta$$
$$= \frac{1}{4} \operatorname{sen} \theta + C.$$

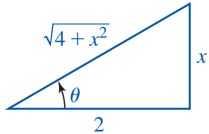


FIGURA 7.5.4 Triángulo rectángulo en el ejemplo 3

A partir del triángulo en la FIGURA 7.5.4, vemos que $\operatorname{sen} \theta = x/\sqrt{4 + x^2}$. Por tanto,

$$\int \frac{1}{(4 + x^2)^{3/2}}\, dx = \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}} + C. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Longitud de arco

Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ sobre el intervalo $[0, 1]$.

Solución Recuerde que la fórmula para la longitud de arco es $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$. Puesto que $dy/dx = x$, tenemos

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx.$$

Luego, si $u = x$, entonces se sustituye $x \tan \theta$ y $dx = \sec^2 \theta \, d\theta$. Los límites de integración θ en la integral trigonométrica definida se obtienen a partir de los límites x en la integral original:

$$x = 0: \quad \theta = \tan^{-1} 0 = 0$$

y

$$x = 1: \quad \theta = \tan^{-1} 1 = \pi/4.$$

En consecuencia,

$$L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 \theta}\, \sec^2 \theta \, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta \, d\theta.$$

La integral definida de $\sec^3 \theta$ se encontró en el ejemplo 5 de la sección 7.3 usando integración por partes:

$$L = \left(\frac{1}{2}\sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2}\ln|\sec \theta + \tan \theta|\right)\Bigg]_0^{\pi/4}$$
$$= \frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\left|\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) \approx 1.1478. \qquad \blacksquare$$

En los dos ejemplos siguientes, los integrandos contienen una potencia entera de la forma radical $\sqrt{u^2 - a^2}$.

EJEMPLO 5 Uso de una sustitución secante

Evalúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^4}\, dx$ suponiendo que $x > 4$.

Solución Si $u = x$ y $x = 4\sec\theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$, y $dx = 4\sec\theta\tan\theta\, d\theta$, la integral se vuelve

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}\,dx = \int \frac{\sqrt{16\sec^2\theta - 16}}{256\sec^4\theta}(4\sec\theta\tan\theta\, d\theta)$$
$$= \frac{1}{16}\int \frac{\tan^2\theta}{\sec^3\theta}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^3\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int (\operatorname{sen}\theta)^2(\cos\theta\, d\theta)$$
$$= \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3\theta + C.$$

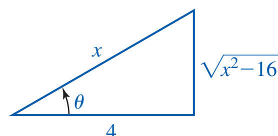


FIGURA 7.5.5 Triángulo rectángulo en el ejemplo 5

El triángulo rectángulo en la FIGURA 7.5.5 se construyó de modo que $\sec\theta = x/4$ o $\cos\theta = 4/x$, por lo que vemos que $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{x^2-16}/x$. Debido a que $\operatorname{sen}^3 x = (\sqrt{x^2-16})^3/x^3$, se concluye que

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}\,dx = \frac{1}{48}\frac{(x^2-16)^{3/2}}{x^3} + C.$$ ■

EJEMPLO 6 Una integral definida

Evalúe $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$

Solución Se identifica $u = x$ y $a = 1$ y usamos las sustituciones $x = \sec\theta$ y $dx = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$. En este caso suponemos que $\pi/2 < \theta \le \pi$ puesto que el intervalo de integración indica que $x \le -a$, donde $-a = -1$. Vea la FIGURA 7.5.6 para una gráfica del integrando $f(x) = \sqrt{x^2-1}/x$.

Así como en el ejemplo 4, obtenemos los límites θ de integración a partir de los límites de integración originales:

$$x = -2: \qquad \theta = \sec^{-1}(-2) = \frac{2\pi}{3}$$
$$x = -1: \qquad \theta = \sec^{-1}(-1) = \pi.$$

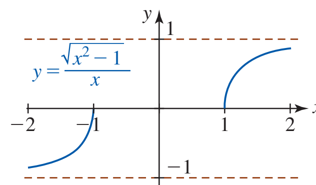


FIGURA 7.5.6 Gráfica del integrando en el ejemplo 6

En consecuencia, $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sec\theta}(\sec\theta\tan\theta\, d\theta)$

$$= \int_{2\pi/3}^{\pi} \sqrt{\tan^2\theta}(\tan\theta\, d\theta).$$

Porque $\pi/2 < \theta \le \pi$, $\tan\theta \le 0$, $\sqrt{\tan^2\theta} = |\tan\theta| = -\tan\theta$, la última integral se vuelve

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int_{2\pi/3}^{\pi} \sqrt{\tan^2\theta}(\tan\theta\, d\theta)$$
$$= -\int_{2\pi/3}^{\pi} \tan^2\theta\, d\theta \quad \leftarrow \text{se usa una identidad trigonométrica}$$
$$= -\int_{2\pi/3}^{\pi} (\sec^2\theta - 1)\, d\theta$$
$$= -(\tan\theta - \theta)\Big]_{2\pi/3}^{\pi}$$
$$= -\left[(0 - \pi) - \left(-\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.6849.$$

La respuesta negativa tiene sentido, puesto que en la figura 7.5.6 vemos que $f(x) \le 0$ sobre el intervalo $[-2, -1]$. ■

Integrandos que contienen una cuadrática Una sustitución trigonométrica también puede usarse cuando un integrando contiene una potencia entera de la raíz cuadrada de una expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$. Al completar el cuadrado, el radical puede expresarse como una de las formas:

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \quad \sqrt{a^2 + u^2} \quad \text{o} \quad \sqrt{u^2 - a^2}.$$

Si, por ejemplo, el integrando contiene una potencia entera de

$$\sqrt{x^2 + 4x + 7} = \sqrt{3 + (x + 2)^2},$$

es necesario identificar $u = x + 2$, $a = \sqrt{3}$, y usar la sustitución $x + 2 = \sqrt{3}\tan\theta$.

EJEMPLO 7 Completar el cuadrado

Evalúe $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 + 8x + 25)^{3/2}}\,dx$.

Solución Al completar el cuadrado en x, reconocemos que el integrando contiene una potencia entera de $a^2 + u^2$,

$$\int \frac{1}{(x^2 + 8x + 25)^{3/2}}\,dx = \int \frac{1}{[9 + (x + 4)^2]^{3/2}}\,dx,$$

donde $u = x + 4$ y $a = 3$. Al usar las sustituciones $x + 4 = 3\tan\theta$ y $dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$ encontramos

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2 + 8x + 25)^{3/2}} &= \int \frac{3\sec^2\theta\,d\theta}{[9 + 9\tan^2\theta]^{3/2}}\\ &= \frac{1}{9}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}\,d\theta\\ &= \frac{1}{9}\int \cos\theta\,d\theta\\ &= \frac{1}{9}\operatorname{sen}\theta + C.\end{aligned}$$

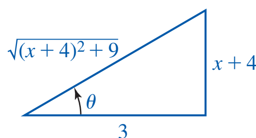


FIGURA 7.5.7 Triángulo rectángulo en el ejemplo 7

El examen del triángulo en la FIGURA 7.5.7 indica cómo expresar sen θ en términos de x. Se concluye que

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 8x + 25)^{3/2}} = \frac{1}{9}\frac{x + 4}{\sqrt{(x + 4)^2 + 9}} + C = \frac{x + 4}{9\sqrt{x^2 + 8x + 25}} + C. \quad ■$$

∫ NOTAS DESDE EL AULA

Integrales de la forma

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}\,du, \quad \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\,du \quad \text{y} \quad \int \frac{1}{u^2 - a^2}\,du$$

pueden evaluarse rápidamente por medio de sustituciones trigonométricas. Al analizar la tabla 7.1.1 de fórmulas integrales vemos que cada una de estas fórmulas es un logaritmo. Pero quienes tienen buena memoria deben reconocer que éstas son las formas integrales indefinidas de las fórmulas de diferenciación para tres de las funciones hiperbólicas inversas:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{a^2 - u^2}\frac{du}{dx}.$$

Toda función hiperbólica inversa puede expresarse como un logaritmo natural. Vea (25)-(27) en la sección 3.10.

Ejercicios 7.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-23.

Fundamentos

En los problemas 1-38, evalúe la integral indefinida dada por medio de una sustitución trigonométrica cuando así convenga. Usted debe evaluar algunas de las integrales sin una sustitución.

1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$

2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-36}}\,dx$

4. $\int \sqrt{3-x^2}\,dx$

5. $\int x\sqrt{x^2+7}\,dx$

6. $\int (1-x^2)^{3/2}\,dx$

7. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

8. $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$

9. $\int \frac{1}{(x^2-4)^{3/2}}\,dx$

10. $\int (9-x^2)^{3/2}\,dx$

11. $\int \sqrt{x^2+4}\,dx$

12. $\int \frac{x}{25+x^2}\,dx$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$

14. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-25}}\,dx$

15. $\int \frac{1}{x\sqrt{16-x^2}}\,dx$

16. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$

17. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$

18. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$

19. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$

20. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx$

21. $\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{3/2}}\,dx$

22. $\int \frac{x^2}{(4+x^2)^{3/2}}\,dx$

23. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$

24. $\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}\,dx$

25. $\int \frac{1}{(4+x^2)^{5/2}}\,dx$

26. $\int \frac{x^3}{(1-x^2)^{5/2}}\,dx$

27. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}\,dx$

28. $\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

29. $\int \frac{1}{(x^2+6x+13)^2}\,dx$

30. $\int \frac{1}{(11-10x-x^2)^2}\,dx$

31. $\int \frac{x-3}{(5-4x-x^2)^{3/2}}\,dx$

32. $\int \frac{1}{(x^2+2x)^{3/2}}\,dx$

33. $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}\,dx$

34. $\int \frac{1}{4+(x-3)^2}\,dx$

35. $\int \frac{x^2}{x^2+16}\,dx$

36. $\int \frac{\sqrt{4-9x^2}}{x}\,dx$

37. $\int \sqrt{6x-x^2}\,dx$

38. $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$

En los problemas 39-44, evalúe la integral definida dada.

39. $\int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx$

40. $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

41. $\int_{0}^{5} \frac{1}{(x^2+25)^{3/2}}\,dx$

42. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$

43. $\int_{1}^{6/5} \frac{16}{x^4\sqrt{4-x^2}}\,dx$

44. $\int_{0}^{1/2} x^3(1+x^2)^{-1/2}\,dx$

En los problemas 45 y 46, use integración por partes seguida de una sustitución trigonométrica.

45. $\int x^2 \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$

46. $\int x \cos^{-1} x\,dx$

Repaso de aplicaciones

47. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = \frac{1}{x\sqrt{3+x^2}}$. Encuentre el área bajo la gráfica sobre el intervalo $[1, \sqrt{3}]$.

48. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = x^5\sqrt{1-x^2}$. Encuentre el área bajo la gráfica sobre el intervalo [0, 1].

49. Demuestre que el área de un círculo dado por $x^2 + y^2 = a^2$ es πa^2.

50. Demuestre que el área de una elipse dada por $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ es πab.

51. La región descrita en el problema 47 gira alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido de revolución.

52. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \frac{4}{4+x^2}$, $x = 2$ y $y = 0$ gira alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido de revolución.

53. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = x\sqrt{4+x^2}$, $x = 2$ y $y = 0$ gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución.

54. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $x = 1$ y $y = 0$ gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución.

55. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \ln x$ sobre el intervalo $[1, \sqrt{3}]$.

56. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ sobre el intervalo [1, 2].

57. Una mujer, M, empezando en el origen, se mueve en la dirección del eje y positivo jalando una masa a lo largo de la curva C, denominada **tractriz**, indicada en la FIGURA 7.5.8. La masa, que inicialmente está sobre el eje x en

$(a, 0)$, es jalada por una cuerda de longitud constante a que mantiene durante todo el movimiento.

a) Demuestre que la ecuación diferencial de la tractriz es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

b) Resuelva la ecuación en el inciso *a*). Suponga que el punto inicial sobre el eje x es $(10, 0)$ y que la longitud de la cuerda es $a = 10$ pies.

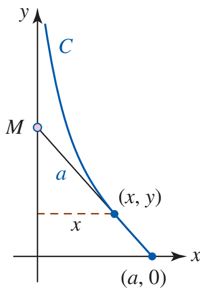


FIGURA 7.5.8 Tractriz en el problema 57

58. La región acotada por la gráfica de $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, $r < a$, gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución o **toroide**. Vea la FIGURA 7.5.9.

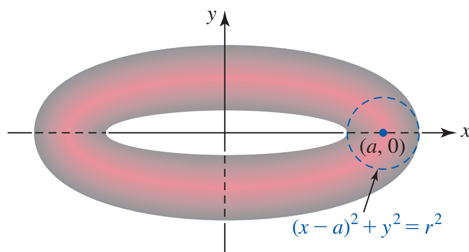


FIGURA 7.5.9 Toroide en el problema 58

59. Encuentre la fuerza del fluido sobre un lado de la placa vertical mostrada en la FIGURA 7.5.10. Suponga que la placa está sumergida en agua y que las dimensiones están en pies.

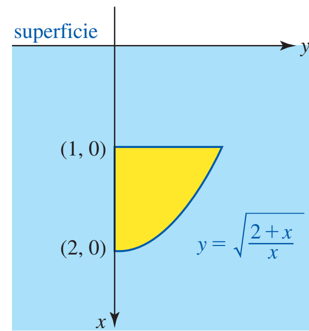


FIGURA 7.5.10 Placa sumergida en el problema 59

60. Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$.

≡ Piense en ello

61. Evalúe las siguientes integrales por medio de una sustitución trigonométrica idónea.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}\,dx$ ***b***) $\displaystyle\int \sqrt{e^{2x} - 1}\,dx$

62. Encuentre el área de la región en forma creciente mostrada en amarillo en la FIGURA 7.5.11. La región, fuera del círculo de radio a pero dentro del círculo de radio b, $a \neq b$, se denomina **luna**.

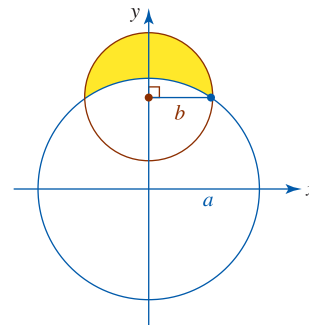


FIGURA 7.5.11 Luna en el problema 62

7.6 Fracciones parciales

Introducción Cuando se suman dos funciones racionales, por ejemplo $g(x) = 2/(x + 5)$ y $h(x) = 1/(x + 1)$, los términos se combinan por medio de un denominador común:

$$g(x) + h(x) = \frac{2}{x + 5} + \frac{1}{x + 1} = \frac{2}{x + 5}\left(\frac{x + 1}{x + 1}\right) + \frac{1}{x + 1}\left(\frac{x + 5}{x + 5}\right). \tag{1}$$

Al sumar los denominadores en el miembro derecho de (1) obtenemos la función racional simple

$$f(x) = \frac{3x + 7}{(x + 5)(x + 1)}. \tag{2}$$

Ahora suponga que es necesario integrar la función f. Por supuesto, la solución es evidente: usamos la igualdad de (1) y (2) para escribir

$$\int \frac{3x + 7}{(x + 5)(x + 1)}\,dx = \int \left[\frac{2}{x + 5} + \frac{1}{x + 1}\right] dx = 2 \ln|x + 5| + \ln|x + 1| + C.$$

Este ejemplo ilustra un procedimiento para integrar ciertas funciones racionales $f(x) = p(x)/q(x)$. Este método consiste en invertir el proceso ilustrado en (1); en otras palabras, empezamos con una función racional —como (2)— y la separamos en fracciones componentes más simples $g(x) = 2/(x + 5)$ y $h(x) = 1/(x + 1)$, denominadas **fracciones parciales**. Luego evaluamos la integral término a término.

Fracciones parciales El proceso algebraico para separar una expresión racional, como (2), en fracciones parciales se denomina **descomposición en fracciones parciales**. Por conveniencia supondremos que la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$, $q(x) \neq 0$, es una **fracción propia** o una **expresión racional propia**; es decir, que el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. También supondremos que $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes.

En esta sección estudiaremos cuatro casos de descomposición en fracciones parciales.

Factores lineales distintos El siguiente hecho del álgebra se plantea sin demostración. Si el denominador $q(x)$ contiene un producto de n factores lineales distintos,

$$(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n),$$

donde las a_i y b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de $f(x) = p(x)/q(x)$ contiene la suma

$$\frac{C_1}{a_1x + b_1} + \frac{C_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{C_n}{a_nx + b_n}.$$

En otras palabras, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto para f contiene una fracción parcial para cada uno de los factores lineales $a_ix + b_i$.

EJEMPLO 1 Factores lineales distintos

Evalúe $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)}\,dx.$

Solución Se establece la hipótesis de que el integrando puede escribirse como

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}.$$

Al combinar los términos del miembro derecho de la ecuación sobre un común denominador obtenemos

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A(x + 3) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)}.$$

Puesto que los denominadores son iguales, los numeradores de las dos expresiones deben ser idénticamente iguales:

$$2x + 1 = A(x + 3) + B(x - 1). \tag{3}$$

Puesto que la última línea es una identidad, los coeficientes de las potencias de x son los mismos

$$2x + 1x^0 = (A + B)x + (3A - B)x^0$$

(iguales: 2 y $A + B$; iguales: 1 y $3A - B$)

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} 2 &= A + B \\ 1 &= 3A - B. \end{aligned} \tag{4}$$

Al sumar las dos ecuaciones obtenemos $3 = 4A$, de modo que encontramos $A = \frac{3}{4}$. Luego, al sustituir este valor en cualquier ecuación de (4) obtenemos $B = \frac{5}{4}$. Por tanto, la descomposición en fracciones parciales deseada es

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{\frac{3}{4}}{x - 1} + \frac{\frac{5}{4}}{x + 3}.$$

En consecuencia,

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}\,dx = \int \left[\frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{5}{4}}{x+3}\right] dx = \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{5}{4}\ln|x+3| + C. \qquad \blacksquare$$

Un atajo que vale la pena conocer Si el denominador contiene, por ejemplo, tres factores lineales, como en $\dfrac{4x^2 - x + 1}{(x-1)(x+3)(x-6)}$, entonces la descomposición en fracciones parciales aparece como sigue:

$$\frac{4x^2 - x + 1}{(x-1)(x+3)(x-6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-6}.$$

Al seguir los mismos pasos que en el ejemplo 1, sería deseable encontrar que el análogo de (4) ahora son tres ecuaciones en las tres incógnitas A, B y C. La cuestión es ésta: mientras más fracciones lineales haya en el denominador, más grande es el sistema de ecuaciones que habrá que resolver. Hay un procedimiento algebraico que vale la pena conocer porque permite abreviar algo del álgebra. Para ilustrarlo, se volverá a la identidad (3). Puesto que la igualdad es cierta para todo valor de x, se cumple para $x = 1$ y $x = -3$, *los ceros del denominador*. Al hacer $x = 1$ en (3) obtenemos $3 = 4A$, a partir de lo cual se concluye de inmediato que $A = \frac{3}{4}$. En forma semejante, al hacer $x = -3$ en (3) obtenemos $-5 = (-4)B$ o $B = \frac{5}{4}$.

Vea las *Notas desde el aula* al final de esta sección para consultar otro método rápido para determinar las constantes.

EJEMPLO 2 Área bajo una gráfica

Encuentre el área A bajo la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ sobre el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Solución El área en cuestión se muestra en la FIGURA 7.6.1. Puesto que $f(x)$ es positiva para toda x en el intervalo, el área es la integral definida

$$A = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{x(x+1)}\,dx.$$

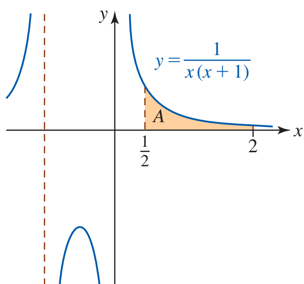


FIGURA 7.6.1 Área bajo la gráfica en el ejemplo 2

Al usar fracciones parciales

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)}$$

se concluye que

$$1 = A(x+1) + Bx. \tag{5}$$

Al seguir el atajo previo a este ejemplo, vemos, a la vez, que $x = 0$ y $x = -1$ en (5) y obtenemos $A = 1$ y $B = -1$. En consecuencia,

$$A = \int_{1/2}^{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right] dx = (\ln|x| - \ln|x+1|)\Big]_{1/2}^{2}$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big]_{1/2}^{2} = \ln 2 \approx 0.6931. \qquad \blacksquare$$

Factores lineales repetidos Si el denominador de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ contiene un factor lineal repetido $(ax + b)^n$, $n > 1$, donde a y b son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de f contiene la suma

$$\frac{C_1}{ax+b} + \frac{C_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(ax+b)^n}.$$

En otras palabras, la descomposición en fracciones parciales de f contiene una fracción parcial para cada potencia de $ax + b$.

EJEMPLO 3 Factor lineal repetido

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)^3}\,dx.$

Solución La descomposición del integrando contiene una fracción parcial para cada una de las tres potencias de $x + 1$:

$$\frac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3}.$$

Al igualar los numeradores obtenemos

$$x^2 + 2x + 4 = A(x + 1)^2 + B(x + 1) + C = Ax^2 + (2A + B)x + (A + B + C). \qquad (6)$$

Observe que al hacer $x = -1$ (el único cero del denominador) en (6) obtenemos sólo $C = 3$. Pero los coeficientes de x^2 y x en (6) producen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= A \\ 2 &= 2A + B. \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones vemos que $A = 1$ y $B = 0$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^3}\,dx &= \int \left[\frac{1}{x + 1} + \frac{3}{(x + 1)^3}\right] dx \\ &= \int \left[\frac{1}{x + 1} + 3(x + 1)^{-3}\right] dx \\ &= \ln|x + 1| - \frac{3}{2}(x + 1)^{-2} + D. \end{aligned}$$

■

Cuando el denominador $q(x)$ contiene factores lineales y también repetidos, se combinan los dos casos que acaban de considerarse.

EJEMPLO 4 Factor repetido y factor distinto

Evalúe $\displaystyle\int \frac{6x - 1}{x^3(2x - 1)}\,dx.$

Solución Puesto que x es un factor lineal repetido en el denominador del integrando, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto contiene una fracción parcial para cada una de las tres potencias de x y una fracción parcial para el factor lineal distinto $2x - 1$:

$$\frac{6x - 1}{x^3(2x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{2x - 1}.$$

Después de escribir el miembro derecho sobre un común denominador, se igualan los numeradores:

$$\begin{aligned} 6x - 1 &= Ax^2(2x - 1) + Bx(2x - 1) + C(2x - 1) + Dx^3 &(7)\\ &= (2A + D)x^3 + (-A + 2B)x^2 + (-B + 2C)x - C. &(8) \end{aligned}$$

Si $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$ en (7), encontramos $C = 1$ y $D = 16$, respectivamente. Entonces, al igualar los coeficientes de x^3 y x^2 en (8) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= 2A + D \\ 0 &= -A + 2B. \end{aligned}$$

Puesto que conocemos el valor de D, la primera ecuación produce $A = -\frac{1}{2}D = -8$. Luego, con la segunda obtenemos $B = \frac{1}{2}A = -4$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int \frac{6x - 1}{x^3(2x - 1)}\,dx &= \int \left[-\frac{8}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{16}{2x - 1}\right] dx \\ &= -8\ln|x| + 4x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + 8\ln|2x - 1| + E \\ &= 8\ln\left|\frac{2x - 1}{x}\right| + 4x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + E. \end{aligned}$$

■

La palabra *irreducible* significa que la expresión cuadrática no se factoriza sobre el conjunto de los números reales.

Factores cuadráticos distintos Si el denominador de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ contiene un producto de n factores cuadráticos *irreductibles*

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2)\cdots(a_nx^2 + b_nx + c_n),$$

donde los coeficientes a_i, b_i y c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales para f contiene la suma

$$\frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n}.$$

En forma análoga al caso en que $q(x)$ contiene un producto de factores lineales distintos, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto para f contiene una fracción parcial para cada uno de los factores cuadráticos $a_ix^2 + b_ix + c_i$.

EJEMPLO 5 Factor lineal repetido y uno cuadrático distinto

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x + 3}{x^4 + 9x^2}\,dx$.

Solución A partir de $x^4 + 9x^2 = x^2(x^2 + 9)$, vemos que el problema combina el factor cuadrático irreductible $x^2 + 9$ con el factor lineal repetido x. En consecuencia, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x + 3}{x^2(x^2 + 9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 9}.$$

Al proceder como de costumbre, encontramos

$$x + 3 = Ax(x^2 + 9) + B(x^2 + 9) + (Cx + D)x^2 \quad (9)$$
$$= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 9Ax + 9B. \quad (10)$$

Al hacer $x = 0$ en (9) obtenemos $B = \frac{1}{3}$. Luego, con (10) obtenemos

$$0 = A + C$$
$$0 = B + D$$
$$1 = 9A.$$

A partir de este sistema obtenemos $A = \frac{1}{9}$, $C = -\frac{1}{9}$ y $D = -\frac{1}{3}$. Así se llega a

$$\int \frac{x + 3}{x^2(x^2 + 9)}\,dx = \int \left[\frac{\frac{1}{9}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x^2} + \frac{-\frac{1}{9}x - \frac{1}{3}}{x^2 + 9}\right]dx$$
$$= \int \left[\frac{\frac{1}{9}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x^2} - \frac{1}{18}\frac{2x}{x^2 + 9} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2 + 9}\right]dx$$
$$= \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{3}x^{-1} - \frac{1}{18}\ln(x^2 + 9) - \frac{1}{9}\tan^{-1}\frac{x}{3} + E$$
$$= \frac{1}{18}\ln\frac{x^2}{x^2 + 9} - \frac{1}{3}x^{-1} - \frac{1}{9}\tan^{-1}\frac{x}{3} + E.$$

■

EJEMPLO 6 Factores cuadráticos distintos

Evalúe $\displaystyle\int \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)}\,dx$.

Solución Puesto que cada factor cuadrático en el denominador del integrando es irreductible, escribimos

$$\frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3}$$

a partir de lo cual encontramos

$$\begin{aligned} 4x &= (Ax + B)(x^2 + 2x + 3) + (Cx + D)(x^2 + 1) \\ &= (A + C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (3A + 2B + C)x + (3B + D). \end{aligned}$$

Puesto que el denominador del integrando no tiene ceros reales, se comparan los coeficientes de las potencias de x:

$$\begin{aligned} 0 &= A + C \\ 0 &= 2A + B + D \\ 4 &= 3A + 2B + C \\ 0 &= 3B + D. \end{aligned}$$

Al resolver las ecuaciones obtenemos $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$ y $D = -3$. En consecuencia,

$$\int \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)}\,dx = \int \left[\frac{x + 1}{x^2 + 1} - \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 3}\right] dx.$$

Ahora, la integral de cada término sigue representando un ligero desafío. Para el primer término en el integrando usamos división término a término para escribir

$$\frac{x + 1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}, \tag{11}$$

y luego en el segundo término se completa el cuadrado:

$$\frac{x + 3}{x^2 + 2x + 3} = \frac{x + 1 + 2}{(x + 1)^2 + 2} = \frac{1}{2}\frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2 + 2} + \frac{2}{(x + 1)^2 + 2}. \tag{12}$$

En los miembros derechos de (11) y (12) identificamos que las integrales de los términos primero y segundo son, respectivamente, de las formas $\int du/u$ y $\int du/(u^2 + a^2)$. Por último, obtenemos

$$\begin{aligned} &\int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}\,dx \\ &= \int \left[\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2} - \frac{2}{(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\right] dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln[(x + 1)^2 + 2] - \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right) + E \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 3}\right) + \tan^{-1} x - \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right) + E. \end{aligned}$$

■

Factores cuadráticos repetidos Si el denominador de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ contiene un factor cuadrático irreductible repetido $(ax^2 + bx + c)^n$, $n > 1$, donde a, b y c son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de f contiene la suma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Es decir, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto para f contiene una fracción parcial para cada potencia de $ax^2 + bx + c$.

EJEMPLO 7 Factor cuadrático repetido

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2}\,dx$.

Solución La descomposición en fracciones parciales del integrando

$$\frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)^2}$$

lleva a
$$x^2 = (Ax + B)(x^2 + 4) + Cx + D$$
$$= Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + (4B + D)$$
y
$$0 = A$$
$$1 = B$$
$$0 = 4A + C$$
$$0 = 4B + D.$$
A partir de este sistema encontramos $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ y $D = -4$. En consecuencia,
$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2}\,dx = \int \left[\frac{1}{x^2 + 4} - \frac{4}{(x^2 + 4)^2}\right] dx.$$
La integral del primer término es una tangente inversa. No obstante, para evaluar la integral del segundo término, empleamos la sustitución trigonométrica $x = 2 \tan \theta$:
$$\int \frac{1}{(x^2 + 4)^2}\,dx = \int \frac{2 \sec^2 \theta \, d\theta}{(4 \tan^2 \theta + 4)^2}$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^4 \theta}\,d\theta = \frac{1}{8}\int \cos^2 \theta \, d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int (1 + \cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{16}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)$$ ← aquí se usa la fórmula del ángulo doble
$$= \frac{1}{16}(\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta)$$
$$= \frac{1}{16}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}\right]$$
$$= \frac{1}{16}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{2x}{x^2 + 4}\right].$$
Por tanto, la integral original es
$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} - 4\left[\frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\frac{x}{x^2 + 4}\right] + E$$
$$= \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2 + 4} + E.$$ ■

Revise la sección 5.1.

Fracciones impropias En cada uno de los ejemplos precedentes el integrando $f(x) = p(x)/q(x)$ era una fracción propia. Recordemos que cuando $f(x) = p(x)/q(x)$ es una **fracción impropia**, es decir, cuando el grado de $p(x)$ es mayor que o igual al grado de $q(x)$, procedemos con una división larga.

EJEMPLO 8 El integrando es una fracción impropia

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2}\,dx.$

Solución El integrando se identifica como una fracción impropia y el numerador se divide entre el denominador:
$$\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} = x - 3 + \frac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2}.$$
Luego, como el denominador se factoriza como $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, el residuo se descompone en fracciones parciales:
$$\frac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x + 1} + \frac{4}{x + 2}.$$
Con esta información, la evaluación de la integral es inmediata:
$$\int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2}\,dx = \int \left[x - 3 + \frac{1}{x + 1} + \frac{4}{x + 2}\right] dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - 3x + \ln|x + 1| + 4\ln|x + 2| + C.$$ ■

NOTAS DESDE EL AULA

Hay otra forma, denominada **método de encubrimiento**, para determinar los coeficientes en una descomposición en fracciones parciales en el caso especial cuando el denominador del integrando es el producto de factores lineales distintos:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)}.$$

Este método se ilustrará por medio de un ejemplo específico. A partir del análisis anterior sabemos que existen constantes únicas A, B y C tales que

$$\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3}. \tag{13}$$

Suponga que multiplicamos por $x - 1$, que se simplifica y luego se hace $x = 1$, a ambos miembros de esta última expresión. Puesto que los coeficientes de B y C son cero, obtenemos

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 2)(x + 3)}\right|_{x=1} = A \qquad \text{o} \qquad A = -1.$$

Escrito de otra forma,

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{\boxed{(x - 1)}\,(x - 2)(x + 3)}\right|_{x=1} = A$$

donde sombreamos o cubrimos el factor que se cancela cuando el miembro izquierdo de (13) se multiplica por $x - 1$. *Este factor cubierto no se evalúa* en $x = 1$. Luego, para obtener B y C simplemente evaluamos el miembro izquierdo de (13) mientras se cubren, a la vez, $x - 2$ y $x + 3$:

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)\,\boxed{(x - 2)}\,(x + 3)}\right|_{x=2} = B \qquad \text{o} \qquad B = \frac{11}{5}$$

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)\,(x - 2)\,\boxed{(x + 3)}}\right|_{x=-3} = C \qquad \text{o} \qquad C = -\frac{1}{5}.$$

Por tanto, obtenemos la descomposición

$$\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)(x - 2)(x + 3)} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{\frac{11}{15}}{x - 2} + \frac{-\frac{1}{5}}{x + 3}.$$

Ejercicios 7.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-23.

Fundamentos

En los problemas 1-8, escriba la forma idónea de la descomposición en fracciones parciales de la expresión dada. No evalúe los coeficientes.

1. $\dfrac{x - 1}{x^2 + x}$

2. $\dfrac{9x - 8}{(x - 3)(2x - 5)}$

3. $\dfrac{x^3}{(x - 1)(x + 2)^3}$

4. $\dfrac{2x^2 - 3}{x^3 + 6x^2}$

5. $\dfrac{4}{x^3(x^2 + 3)}$

6. $\dfrac{-x^2 + 3x + 7}{(x + 2)^2(x^2 + x + 1)}$

7. $\dfrac{2x^3 - x}{(x^2 + 9)^2}$

8. $\dfrac{3x^2 - x + 4}{x^4 + 2x^3 + x}$

En los problemas 9-42, use fracciones parciales para evaluar la integral dada.

9. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x - 2)}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{x(2x + 3)}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{2x^2 - x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{3x + 10}{x^2 + 2x}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 - 16}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2 - 25}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2 + 5x + 2}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x + 5}{(x + 4)(x^2 - 1)}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 6}{x^3 - x}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - 4x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$ **20.** $\displaystyle\int \frac{1}{(4x^2-1)(x+7)}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{4t^2+3t-1}{t^3-t^2}\,dt$ **22.** $\displaystyle\int \frac{2x-11}{x^3+2x^2}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+2x^2+x}\,dx$ **24.** $\displaystyle\int \frac{t-1}{t^4+6t^3+9t^2}\,dt$

25. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x+1)^3}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2-4)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+6x+5)^2}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-x-6)(x^2-2x-8)}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2-x+9}{x^5+2x^4}\,dx$ **30.** $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x(x-3)^2(x+2)^2}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x(x^2+1)}\,dx$ **32.** $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x^2+3)}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^3(x^2+4)}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+13x^2+36}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$ **38.** $\displaystyle\int \frac{81}{x^4+27x}\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2+2x+2)}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{4x+12}{(x-2)(x^2+4x+8)}\,dx$

41. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+4}{(x^2+4)^2}\,dx$ **42.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$

En los problemas 43 y 44, proceda como en el ejemplo 7 para evaluar la integral dada.

43. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x-3}{x^4+8x^2+16}\,dx$ **44.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+3)^2}\,dx$

En los problemas 45 y 46, proceda como en el ejemplo 8 para evaluar la integral dada.

45. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+4}{(x+1)^2}\,dx$ **46.** $\displaystyle\int \frac{x^5-10x^3}{x^4-10x^2+9}\,dx$

En los problemas 47-54, evalúe la integral definida dada.

47. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx$ **48.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx$

49. $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x-1}{(x+3)^2}\,dx$ **50.** $\displaystyle\int_1^5 \frac{2x+6}{x(x+1)^2}\,dx$

51. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+x^2+2x+2}\,dx$ **52.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+8x^2+16}\,dx$

53. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6}\,dx$ **54.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^5+4x^4+5x^3}\,dx$

En los problemas 55-58, evalúe la integral definida dada usando primero la sustitución indicada seguida por fracciones parciales.

55. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3}\,dx;\quad u^2=1-x^2$

56. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx;\quad u^2=\frac{x-1}{x+1}$

57. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}\,dx;\quad u^3=x+1$

58. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx;\quad u^6=x$

☰ Repaso de aplicaciones

En los problemas 59 y 60, encuentre el área bajo la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado. De ser necesario, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función.

59. $y=\dfrac{1}{x^2+2x-3};\quad [2,4]$

60. $y=\dfrac{x^3}{(x^2+1)(x^2+2)};\quad [0,4]$

En los problemas 61 y 62, encuentre el área acotada por la gráfica de la función dada y el eje x sobre el intervalo indicado. De ser necesario, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función.

61. $y=\dfrac{x}{(x+2)(x+3)};\quad [-1,1]$

62. $y=\dfrac{3x^3}{x^3-8};\quad [-2,1]$

En los problemas 63-66, encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada en el primer cuadrante por las gráficas de las ecuaciones dadas alrededor del eje indicado. De ser necesario, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada.

63. $y=\dfrac{2}{x(x+1)},\ x=1,\ x=3,\ y=0;$ eje x

64. $y=\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x+4)}},\ x=0,\ x=2,\ y=0;$ eje x

65. $y=\dfrac{4}{(x+1)^2},\ x=0,\ x=1,\ y=0;$ eje y

66. $y=\dfrac{8}{(x^2+1)(x^2+4)},\ x=0,\ x=1,\ y=0;$ eje y

☰ Piense en ello

En los problemas 67-70, evalúe la integral dada haciendo primero la sustitución seguida de una descomposición en fracciones parciales.

67. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+3\operatorname{sen} x+2}\,dx$ **68.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x-\cos^3 x}\,dx$

69. $\displaystyle\int \frac{e^t}{(e^t+1)^2(e^t-2)}\,dt$ **70.** $\displaystyle\int \frac{e^{2t}}{(e^t+1)^3}\,dt$

71. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = e^x$ sobre el intervalo $[0, \ln 2]$. [*Sugerencia*: Evalúe la integral empezando con una sustitución.]

72. Explique por qué una descomposición en fracciones parciales podría ser innecesaria o inadecuada para la integral dada. Analice cómo es posible evaluar estas integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2-1)(x^2+1)}\,dx$ ***b***) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+4}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+5)^2}\,dx$ ***d***) $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6}\,dx$

73. Aunque para evaluar

$$\int \frac{x^5}{(x-1)^{10}(x+1)^{10}}\,dx$$

puede usarse descomposición en fracciones parciales, sería necesario resolver 20 ecuaciones en 20 incógnitas. Evalúe la integral usando una técnica de integración más sencilla.

74. ¿Por qué la respuesta al problema 53 podría obtenerse *sin ningún trabajo*?

7.7 Integrales impropias

Introducción Hasta el momento, en el estudio de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, entendíamos que

- los límites de integración eran números finitos, y que
- la función f era *continua* sobre $[a, b]$ o, en caso de ser discontinua, que estaba *acotada* sobre el intervalo.

Cuando se omite una de estas dos condiciones, se dice que la integral resultante es una **integral impropia**. En el siguiente análisis, primero consideramos integrales de funciones que están definidas y son continuas sobre intervalos no acotados; en otras palabras,

- por lo menos uno de los límites de integración es ∞ o $-\infty$.

Después de eso examinamos integrales sobre intervalos acotados de funciones que se vuelven no acotadas sobre un intervalo. En el segundo tipo de integral impropia,

- el integrando f tiene una *discontinuidad infinita* en algún número en el intervalo de integración.

Integrales impropias: intervalos no acotados Si el integrando f está definido sobre un intervalo no acotado, hay tres **integrales impropias** posibles con límites de integración infinitos. Sus definiciones se resumen como sigue:

Definición 7.7.1 Intervalos no acotados

i) Si f es continua sobre $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

ii) Si f es continua sobre $(-\infty, b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

iii) Si f es continua sobre $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Cuando los límites (1) y (2) existen, se dice que las integrales **convergen**. Si el límite no existe, se dice que las integrales **divergen**. En (3) la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge en el supuesto de que *ambas* $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ y $\int_c^{\infty} f(x)\,dx$ convergen. Si cualquiera de $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ o $\int_c^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

EJEMPLO 1 Uso de (1)

Evalúe $\int_2^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$.

Solución Por (1),

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b x^{-3}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{-2}}{-2}\Big]_2^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(b^{-2} - 2^{-2}).$$

Puesto que el límite $\lim_{b\to\infty} b^{-2} = \lim_{b\to\infty}(1/b^2)$ existe,

$$\lim_{b\to\infty}(b^{-2} - 2^{-2}) = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{4}\right) = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4},$$

la integral dada converge, y

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.$$

■

EJEMPLO 2 Uso de (1)

Evalúe $\int_1^\infty x^2\,dx$.

Solución Por (1),

$$\int_1^\infty x^2\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^2\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}x^3\Big]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}\right).$$

Puesto que $\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}\right) = \infty$ existe, se concluye que la integral diverge. ■

EJEMPLO 3 Uso de (3)

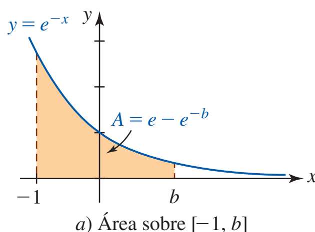
Evalúe $\int_{-\infty}^\infty x^2\,dx$.

Solución Puesto que c puede escogerse de manera arbitraria en (3), se elige $c = 1$ y escribimos

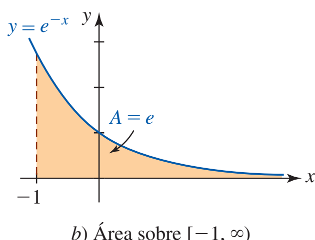
$$\int_{-\infty}^\infty x^2\,dx = \int_{-\infty}^1 x^2\,dx + \int_1^\infty x^2\,dx.$$

Pero en el ejemplo 2 vimos que $\int_1^\infty x^2\,dx$ diverge. Esto es suficiente para concluir que $\int_{-\infty}^\infty x^2\,dx$ también diverge. ■

Área Si $f(x) \geq 0$ para toda x sobre $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ o $(-\infty, \infty)$, entonces cada una de las integrales en (1), (2) y (3) puede interpretarse como área bajo la gráfica de f sobre el intervalo siempre que la integral converge.



a) Área sobre $[-1, b]$



b) Área sobre $[-1, \infty)$

FIGURA 7.7.1 Área bajo la gráfica en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Área

Evalúe $\int_{-1}^\infty e^{-x}\,dx$. Interprete geométricamente.

Solución Por (1),

$$\int_{-1}^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{-1}^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}(-e^{-x})\Big]_{-1}^b = \lim_{b\to\infty}(e - e^{-b}).$$

Puesto que $\lim_{b\to\infty} e^{-b} = 0$, $\lim_{b\to\infty}(e - e^{-b}) = e$ y así la integral dada converge a e. En la FIGURA 7.7.1*a)* vemos que el área bajo la gráfica de la función positiva $f(x) = e^{-x}$ sobre el intervalo $[-1, b]$ es $e - e^{-b}$. Pero, al tomar $b \to \infty$, $e^{-b} \to 0$, y entonces, como se muestra en la figura 7.7.1*b)*, es posible interpretar $\int_{-1}^\infty e^{-x}\,dx = e$ como una medida del área bajo la gráfica de f sobre $[-1, \infty)$. ■

EJEMPLO 5 Uso de (2)

Evalúe $\int_{-\infty}^{0} \cos x\, dx$.

Solución Por (2),

$$\int_{-\infty}^{0} \cos x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \cos x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \operatorname{sen} x \Big]_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty} (-\operatorname{sen} a).$$

Puesto que sen a oscila entre -1 y 1, concluimos que $\lim_{a\to-\infty}(-\operatorname{sen} a)$ no existe. Por tanto, $\int_{-\infty}^{0} \cos x\, dx$ diverge. ■

EJEMPLO 6 Uso de (3)

Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx$.

Solución Al escoger $c = 0$, es posible escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx = I_1 + I_2.$$

Primero, se analizará I_1:

$$I_1 = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx = \lim_{a\to-\infty} \ln(e^x + 1)\Big]_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty} [\ln 2 - \ln(e^a + 1)].$$

Luego, $e^a + 1 \to 1$ puesto que $e^a \to 0$ cuando $a \to -\infty$. En consecuencia, $\ln(e^a + 1) \to \ln 1 = 0$ cuando $a \to -\infty$. Por tanto, $I_1 = \ln 2$.

Segundo, se tiene

$$I_2 = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx = \lim_{b\to\infty} \ln(e^x + 1)\Big]_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty} [\ln(e^b + 1) - \ln 2].$$

No obstante, $e^b + 1 \to \infty$ cuando $b \to \infty$, de modo que $\ln(e^b + 1) \to \infty$. Por tanto, I_2 diverge.

Debido a que *ambas* I_1 e I_2 no convergen, se concluye que la integral dada es divergente. ■

EJEMPLO 7 Uso de (3)

La integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx$ converge porque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1 + x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

El resultado se concluye a partir de los hechos de que

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = -\lim_{a\to-\infty} \tan^{-1} a = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \tan^{-1} b = \frac{\pi}{2}.$$ ■

EJEMPLO 8 Trabajo

En (5) de la sección 6.8 vimos que el trabajo realizado para levantar una masa m_2 desde la superficie de un planeta de masa m_1 hasta una altura h está dado por

$$W = \int_{R}^{R+h} \frac{km_1 m_2}{r^2}\, dr,$$

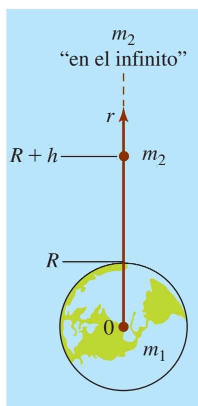


FIGURA 7.7.2 Masa m_2 levantada hasta el "infinito" en el ejemplo 8

donde R es el radio del planeta. Así, la cantidad de trabajo realizado para levantar m_2 hasta una distancia ilimitada o "infinita" desde la superficie del planeta es

$$\begin{aligned} W &= \int_R^\infty \frac{km_1m_2}{r^2}\,dr \\ &= km_1m_2 \lim_{b\to\infty} \int_R^b r^{-2}\,dr \\ &= km_1m_2 \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{R} \right] \\ &= \frac{km_1m_2}{R}. \end{aligned}$$

Vea la FIGURA 7.7.2. A partir de los datos en el ejemplo 2 de la sección 6.8 se concluye que el trabajo realizado para levantar una carga útil de 5 000 kg hasta una "distancia infinita" desde la superficie terrestre es

$$W = \frac{(6.67 \times 10^{-11})(6.0 \times 10^{24})(5\,000)}{6.4 \times 10^6} \approx 3.13 \times 10^{11} \text{ joules.}$$ ■

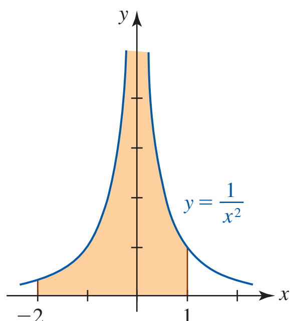


FIGURA 7.7.3 $x = 0$ es una asíntota vertical para la gráfica de $f(x) = 1/x^2$

Recuerde que si f es continua sobre $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe. Además, si $F'(x) = f(x)$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Sin embargo, no es posible evaluar una integral como

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \tag{4}$$

mediante el mismo procedimiento, puesto que $f(x) = 1/x^2$ tiene una discontinuidad infinita en $[-2, 1]$. Vea la FIGURA 7.7.3. En otras palabras, para la integral en (4), el "procedimiento"

$$-x^{-1}\Big]_{-2}^{1} = (-1) - \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

carece de sentido. Por tanto, se tiene otro tipo de integral que demanda un tratamiento especial.

Integrales impropias: discontinuidades infinitas De una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ también se dice que es **impropia** si f no está acotada sobre $[a, b]$, es decir, si f tiene una discontinuidad infinita en algún número en el intervalo de integración. Hay tres **integrales impropias** posibles de este tipo. Sus definiciones se resumen a continuación.

Definición 7.7.2 Discontinuidades infinitas

i) Si f es continua sobre $[a, b)$ y $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to b^-$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx. \tag{5}$$

ii) Si f es continua sobre $(a, b]$ y $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to a^+$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{s\to a^+} \int_s^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

iii) Si $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to c$ para alguna c en (a, b) y f es continua en todos los demás números en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Cuando los límites en (5) y (6) existen, se dice que las integrales **convergen**. Si el límite no existe, entonces se dice que la integral **diverge**. En (7) la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge siempre que *ambas* $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ convergen. Si cualquiera de $\int_a^c f(x)\,dx$ o $\int_c^b f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

EJEMPLO 9 Uso de (6)

Evalúe $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Solución Observe que $f(x) = 1/\sqrt{x} \to \infty$ cuando $x \to 0^+$, es decir, $x = 0$ es una asíntota vertical para la gráfica de f. Así, por (6) de la definición 7.7.2,

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{s\to 0^+} \int_s^4 x^{-1/2}\,dx = \lim_{s\to 0^+} 2x^{1/2}\Big]_s^4 = \lim_{s\to 0^+} [4 - 2s^{1/2}].$$

Puesto que $\lim_{s\to 0^+} s^{1/2} = 0$ se tiene $\lim_{s\to 0^+} [4 - 2s^{1/2}] = 4$. Entonces, la integral dada converge y

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 4.$$

Como vemos en la FIGURA 7.7.4, el número 4 puede considerarse como el área bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[0, 4]$. ■

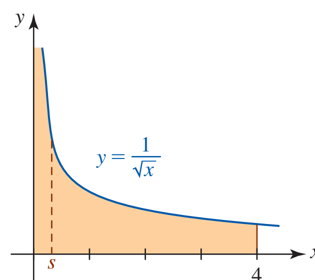


FIGURA 7.7.4 Área bajo la gráfica en el ejemplo 9

EJEMPLO 10 Uso de (6)

Evalúe $\displaystyle\int_0^e \ln x\,dx$.

Solución En este caso se sabe que $f(x) = \ln x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$. Al usar (6) e integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^e \ln x\,dx &= \lim_{s\to 0^+} \int_s^e \ln x\,dx \\ &= \lim_{s\to 0^+} (x \ln x - x)\Big]_s^e \\ &= \lim_{s\to 0^+} [(e \ln e - e) - (s \ln s - s)] \quad \leftarrow \ln e = 1 \\ &= \lim_{s\to 0^+} s(1 - \ln s).\end{aligned}$$

Luego, el último límite tiene la forma indeterminada $0 \cdot \infty$, pero si se escribe como

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{1 - \ln s}{1/s},$$

identificamos que la forma indeterminada ahora es ∞/∞. Entonces, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{1 - \ln s}{1/s} \overset{h}{=} \lim_{s\to 0^+} \frac{-1/s}{-1/s^2} = \lim_{s\to 0^+} s = 0.$$

En consecuencia, la integral converge y $\int_0^e \ln x\,dx = 0$. ■

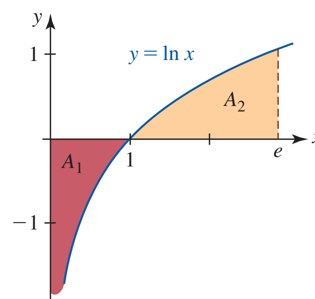


FIGURA 7.7.5 Área neta con signo en el ejemplo 10

El resultado $\int_0^e \ln x\,dx = 0$ en el ejemplo 10 indica que el área neta con signo entre la gráfica de $f(x) = \ln x$ y el eje x sobre $[0, e]$ es 0. A partir de la FIGURA 7.7.5 vemos que

$$\int_0^e \ln x\,dx = \int_0^1 \ln x\,dx + \int_1^e \ln x\,dx = -A_1 + A_2 = 0.$$

En el ejemplo 7 de la sección 7.3 vimos que $\int_1^e \ln x\,dx = 1$, y así $A_1 = A_2 = 1$.

EJEMPLO 11 Uso de (7)

Evalúe $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}\,dx$.

Solución En el intervalo $[1, 5]$ el integrando tiene una discontinuidad infinita en 2. En consecuencia, a partir de (7) escribimos

$$\int_1^5 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}\,dx = \int_1^2 (x-2)^{-1/3}\,dx + \int_2^5 (x-2)^{-1/3}\,dx = I_1 + I_2.$$

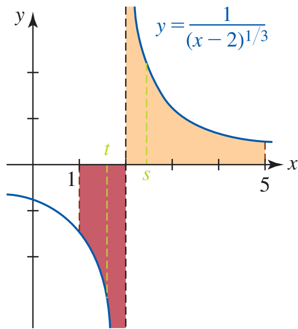


FIGURA 7.7.6 Gráfica del integrando en el ejemplo 11

Ahora,
$$I_1 = \lim_{t\to 2^-}\int_1^t (x-2)^{-1/3}\,dx = \lim_{t\to 2^-}\frac{3}{2}(x-2)^{2/3}\Big]_1^t$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{t\to 2^-}[(t-2)^{2/3} - 1] = -\frac{3}{2}.$$

De forma similar,
$$I_2 = \lim_{s\to 2^+}\int_s^5 (x-2)^{-1/3}\,dx = \lim_{s\to 2^+}\frac{3}{2}(x-2)^{2/3}\Big]_s^5$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{s\to 2^+}[3^{2/3} - (s-2)^{2/3}] = \frac{3^{5/3}}{2}.$$

Puesto que ambas I_1 e I_2 convergen, la integral dada converge y
$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} = -\frac{3}{2} + \frac{3^{5/3}}{2} \approx 1.62.$$

Observe a partir de la FIGURA 7.7.6 que este último número representa un área neta con signo sobre el intervalo [1, 5]. ■

EJEMPLO 12 Otro repaso a la integral en (4)

Evalúe $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$.

Solución Ésta es la integral analizada en (4). Puesto que en el intervalo [−2, 1] el integrando tiene una discontinuidad infinita en 0, escribimos
$$\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = I_1 + I_2.$$

Luego, el resultado
$$I_1 = \int_{-2}^0 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to 0^-}\int_{-2}^t x^{-2}\,dx = \lim_{t\to 0^-}(-x^{-1})\Big]_{-2}^t = \lim_{t\to 0^-}\left[-\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right] = \infty$$

indica que no hay necesidad de evaluar $I_2 = \int_0^1 dx/x^2$. La integral $\int_{-2}^1 dx/x^2$ diverge.

NOTAS DESDE EL AULA

i) Usted debe comprobar que $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_0^{\infty} x\,dx$ diverge, puesto que ambas $\int_{-\infty}^{0} x\,dx$ y $\int_0^{\infty} x\,dx$ divergen. Un error común que se comete al trabajar con integrales con límites infinitos dobles es usar un límite:
$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} x\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}x^2\Big]_{-t}^{t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}[t^2 - t^2] = 0.$$

Por supuesto, esta "respuesta" es incorrecta. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ requieren la evaluación de dos límites *independientes*.

ii) En el trabajo previo a menudo escribimos sin pensar que la integral de una suma es la suma de las integrales:
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{8}$$

Para integrales impropias es necesario proceder con más cautela. Por ejemplo, la integral $\displaystyle\int_1^{\infty}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]dx$ converge (vea el problema 25 en los ejercicios 7.7), pero
$$\int_1^{\infty}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]dx \neq \int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx - \int_1^{\infty}\frac{1}{x+1}\,dx.$$

La propiedad en (8) sigue siendo válida para integrales impropias siempre que ambas integrales en el miembro derecho de la igualdad converjan.

iii) Para ejemplos, problemas y gráficas como la figura 7.7.1, los estudiantes a menudo quedan con la impresión de que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ es una condición necesaria para que la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converja. Esto no es así. Cuando llegue a los ejercicios 9.3 trabaje el problema 70.

iv) Es posible que una integral tenga límites de integración infinitos *y* un integrando con una discontinuidad infinita. Para determinar si una integral como

límite infinito →
el integrando es discontinuo en $x = 1$ →

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

converge, la integración se interrumpe en algún punto de continuidad conveniente del integrando; por ejemplo, $x = 2$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx + \int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = I_1 + I_2. \tag{9}$$

I_1 e I_2 son integrales impropias; I_1 es del tipo dado en (6) e I_2 es del tipo dado en (1). Si ambas I_1 *e* I_2 convergen, entonces la integral original converge. Vea los problemas 85 y 86 en los ejercicios 7.7.

v) El integrando de $\int_a^b f(x)\,dx$ también puede tener discontinuidades infinitas tanto en $x = a$ como en $x = b$. En este caso la integral impropia se define en forma análoga a (7). Si un integrando f tiene una discontinuidad infinita en varios números en (a, b), entonces la integral impropia se define mediante una extensión natural de (7). Vea los problemas 87 y 88 en los ejercicios 7.7.

vi) Algunas veces ocurren cosas raras cuando se trabaja con integrales impropias. Es posible girar una región con área infinita alrededor de un eje y el volumen resultante del sólido de revolución puede ser finito. Un ejemplo bastante famoso de esta clase se proporciona en el problema 89 de los ejercicios 7.7.

Ejercicios 7.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-24.

Fundamentos

En los problemas 1-30, evalúe la integral impropia dada o demuestre que diverge.

1. $\int_3^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$

2. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

3. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{0.99}}\,dx$

4. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1.01}}\,dx$

5. $\int_{-\infty}^3 e^{2x}\,dx$

6. $\int_{-\infty}^\infty e^{-x}\,dx$

7. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

8. $\int_1^\infty \frac{\ln t}{t^2}\,dt$

9. $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

10. $\int_e^\infty \ln x\,dx$

11. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx$

12. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$

13. $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{(x^2+9)^2}\,dx$

14. $\int_5^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{3x+1}}\,dx$

15. $\int_2^\infty ue^{-u}\,du$

16. $\int_{-\infty}^3 \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$

17. $\int_{2/\pi}^\infty \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^2}\,dx$

18. $\int_{-\infty}^\infty te^{-t^2}\,dt$

19. $\int_{-1}^\infty \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

20. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$

21. $\int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx$

22. $\int_{-\infty}^0 e^x \cos 2x\,dx$

23. $\int_{1/2}^\infty \frac{x+1}{x^3}\,dx$

24. $\int_0^\infty (e^{-x}-e^{-2x})^2\,dx$

25. $\int_1^\infty \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]dx$

26. $\int_3^\infty \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+9}\right]dx$

27. $\int_2^\infty \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx$

28. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$

29. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$

30. $\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

En los problemas 31-52, evalúe la integral impropia dada o demuestre que diverge.

31. $\int_0^5 \frac{1}{x}\,dx$

32. $\int_0^8 \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$

33. $\int_0^1 \frac{1}{x^{0.99}}\,dx$

34. $\int_0^1 \frac{1}{x^{1.01}}\,dx$

35. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$

36. $\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

37. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^{5/3}}\,dx$

38. $\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

39. $\int_{0}^{2} (x-1)^{-2/3}\,dx$

40. $\int_{0}^{27} \frac{e^{x^{1/3}}}{x^{2/3}}\,dx$

41. $\int_{0}^{1} x \ln x\,dx$

42. $\int_{1}^{e} \frac{1}{x \ln x}\,dx$

43. $\int_{0}^{\pi/2} \tan t\,dt$

44. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\tan\theta}}\,d\theta$

45. $\int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\,dx$

46. $\int_{0}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx$

47. $\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$

48. $\int_{0}^{3} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

49. $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

50. $\int_{0}^{2} \frac{e^w}{\sqrt{e^w-1}}\,dw$

51. $\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$

52. $\int_{0}^{1} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right] dx$

En los problemas 53 y 54, use una sustitución para evaluar la integral dada.

53. $\int_{12}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+4)}\,dx$

54. $\int_{1}^{\infty} \sqrt{x}\,e^{-\sqrt{x}}\,dx$

Repaso de aplicaciones

En los problemas 55-58, encuentre el área bajo la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado.

55. $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$; $[1, \infty)$

56. $f(x) = \frac{10}{x^2+25}$; $(-\infty, 5]$

57. $f(x) = e^{-|x|}$; $(-\infty, \infty)$

58. $f(x) = |x|^3 e^{-x^4}$; $(-\infty, \infty)$

59. Encuentre el área de la región que está acotada por las gráficas de $y = 1/\sqrt{x-1}$ y $y = -1/\sqrt{x-1}$ sobre el intervalo $[1, 5]$.

60. Considere la región que está acotada por las gráficas de $y = 1/\sqrt{x+2}$ y $y = 0$ sobre el intervalo $[-2, 1]$.

a) Demuestre que el área de la región es finita.

b) Demuestre que el sólido de revolución formado al girar la región alrededor del eje x tiene volumen infinito.

61. Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de

$$y = \frac{1}{x} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{1}{x(x^2+1)}.$$

Determine si el área de la región acotada por estas gráficas sobre el intervalo $[0, 1]$ es finita.

62. Encuentre el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = xe^{-x}$ y $y = 0$ sobre $[0, \infty)$ alrededor del eje x.

63. Encuentre el trabajo realizado contra la gravedad al levantar una carga de 10 000 kg hasta una distancia infinita por arriba de la superficie de la Luna. [*Sugerencia*: Revise la página 357 de la sección 6.8.]

64. El trabajo realizado por una fuerza externa para mover una prueba de carga q_0 radialmente desde el punto A hasta el punto B en el campo eléctrico de una carga q se define como

$$W = -\frac{qq_0}{4\pi e_0}\int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2}\,dr.$$

Vea la FIGURA 7.7.7.

a) Demuestre que $W = \frac{qq_0}{4\pi e_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$.

b) Encuentre el trabajo realizado para llevar la carga de prueba hasta una distancia infinita del punto B.

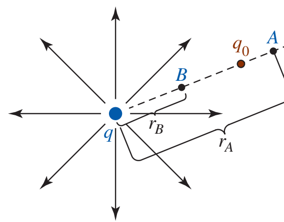


FIGURA 7.7.7 Carga en el problema 64

La **transformada de Laplace** de una función $y = f(x)$, definida por la integral

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt,$$

es muy útil en algunas áreas de las matemáticas aplicadas. En los problemas 65-72, encuentre la transformada de Laplace de la función e imponga una restricción sobre s para la cual la integral converja.

65. $f(x) = 1$

66. $f(x) = x$

67. $f(x) = e^x$

68. $f(x) = e^{-5x}$

69. $f(x) = \operatorname{sen} x$

70. $f(x) = \cos 2x$

71. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$

72. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 3 \\ e^{-x}, & x \ge 3 \end{cases}$

73. Una **función de densidad de probabilidad** es cualquier función no negativa f definida sobre un intervalo $[a, b]$ para la cual $\int_a^b f(x)\,dx = 1$. Compruebe que para $k > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ke^{-kx}, & x \ge 0 \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

74. Otra integral de matemáticas aplicadas es la **función gamma**:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt, \qquad x > 0.$$

a) Demuestre que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

b) Use el resultado en el inciso *a*) para demostrar que

$$\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n!,$$

donde el símbolo $n!$ se lee "n factorial". Debido a esta propiedad, la función gamma se denomina **función factorial generalizada**.

≡ Piense en ello

En los problemas 75-78, determine todos los valores de k tales que la integral dada sea convergente.

75. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}\,dx$ **76.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} x^{2k}\,dx$

77. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{kx}\,dx$ **78.** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{x}\,dx$

La siguiente es una **prueba de comparación** para integrales impropias. Suponga que f y g son continuas y que $0 \le f(x) \le g(x)$ para $x \ge a$. Si $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ también converge. En los problemas 79-82, use este resultado para demostrar que la integral dada es convergente.

79. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx$ **80.** $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 + 4}\,dx$

81. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x + e^x}\,dx$ **82.** $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

En la prueba de comparación para integrales impropias, si la integral $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ es divergente. En los problemas 83 y 84, use este resultado para demostrar que la integral dada es divergente.

83. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **84.** $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{x^2}\,dx$

En los problemas 85-88, determine si la integral dada es convergente o divergente.

85. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$ **86.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{4} \frac{1}{(x - 1)^{2/3}}\,dx$

87. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$ **88.** $\displaystyle\int_0^{2} \frac{2x - 1}{\sqrt[3]{x^2 - x}}\,dx$

≡ Proyectos

89. Un clásico matemático El matemático y físico italiano **Evangelista Torricelli** (1608-1647) fue el primero en investigar las interesantes propiedades de la región acotada por las gráficas de $y = 1/x$ y $y = 0$ sobre el intervalo $[1, \infty)$.

a) Demuestre que el área de la región es infinita.

b) Demuestre, no obstante, que el sólido de revolución formado al girar la región alrededor del eje x tiene volumen finito. Al sólido mostrado en la FIGURA 7.7.8 se le denomina **trompeta de Gabriel** o **trompeta de Torricelli**. En algunas tradiciones religiosas se afirma que Gabriel es el ángel del juicio, el destructor de Sodoma y Gomorra, y a menudo se le identifica como el ángel que tocará la trompeta para anunciar el día del Juicio Final.

c) Use (3) de la sección 6.6 para demostrar que el área superficial S del sólido de revolución está dada por

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3}\,dx.$$

Use la versión de la prueba de comparación dada en los problemas 83 y 84 para demostrar que el área superficial es infinita.

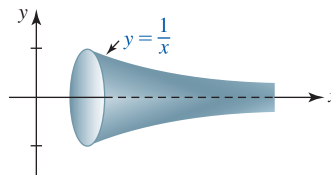


FIGURA 7.7.8 Trompeta de Gabriel en el problema 89

90. Un poco de historia: Regreso a la peste Un estudio de la epidemia de Bombay de 1905-1906 encontró que la tasa de mortalidad de la epidemia podía aproximarse con el modelo matemático

$$R = 890\,\mathrm{sech}^2(0.2t - 3.4),$$

donde R es el número de muertes por semana y t es el tiempo (en semanas) desde el inicio de la epidemia.

a) ¿Cuál es la tasa pico de mortalidad y cuándo ocurre?

b) Estime el número total de muertes al calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} R_0(t)\,dt$.

c) Demuestre que más de 99% de muertes ocurrió en las 34 primeras semanas de la epidemia; es decir, compare $\int_0^{34} R(t)\,dt$ con el resultado en el inciso *b*).

d) Suponga que se desea usar un modelo "más simple" para encontrar la tasa de mortalidad de la forma

$$R_0 = \frac{a}{t^2 - 2bt + c},$$

donde $c > b^2$. Se quiere que este modelo tenga la misma tasa pico de mortalidad que el modelo original y también que el número de muertes, $\int_{-\infty}^{\infty} R_0(t)\,dt$, sea el mismo. Encuentre coeficientes a, b y c que satisfagan estos requerimientos.

e) Para el modelo en el inciso *d*), demuestre que menos de 89% de las muertes ocurre en las 34 primeras semanas de la epidemia.

7.8 Integración aproximada

Introducción La vida en matemáticas podría ser bastante placentera si la antiderivada de cualquier función pudiera expresarse en términos de funciones elementales como funciones polinomiales, racionales, exponenciales o trigonométricas. Como se analizó en las *Notas desde el aula* en la sección 5.5, éste no es el caso. Por tanto, el teorema 5.5.1 no puede usarse para evaluar cualquier integral definida. Algunas veces lo mejor que podemos esperar es una aproximación del valor de una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. En esta última sección del capítulo consideraremos tres de estos procedimientos numéricos o de *integración aproximada*.

En el siguiente análisis, de nuevo será de utilidad interpretar la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ como el área bajo la gráfica de f sobre $[a, b]$. Aunque la continuidad de f es esencial, realmente no hay ningún requerimiento de que $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo.

Regla del punto medio Una forma de aproximar una integral definida es proceder de la misma manera que en el análisis inicial sobre cómo encontrar el área bajo una gráfica; a saber: construir elementos rectangulares bajo la gráfica y sumar sus áreas. En particular, se supondrá que $y = f(x)$ es continua sobre $[a, b]$ y que este intervalo se divide en n subintervalos de la misma longitud $\Delta x = (b - a)/n$. (Recuerde que esta partición se denomina *partición regular.*) Una regla de aproximación sencilla, aunque razonablemente precisa, consiste en sumar las áreas de n elementos rectangulares cuyas longitudes se calculan en el punto medio de cada subintervalo. Vea la FIGURA 7.8.1*a*).

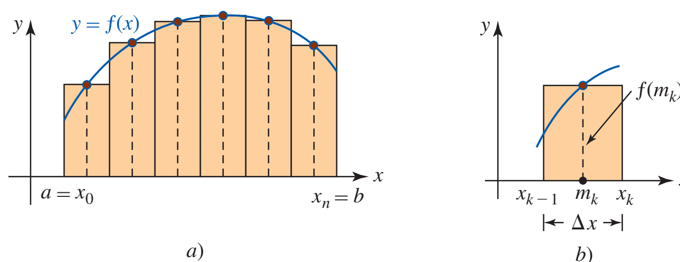


FIGURA 7.8.1 Uso de n rectángulos para aproximar la integral definida

Ahora, si $m_k = (x_{k-1} + x_k)/2$ es el punto medio de un subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, entonces el área del elemento rectangular mostrado en la figura 7.8.1*b*) es

$$A_k = f(m_k)\,\Delta x = f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)\Delta x.$$

Al identificar $a = x_0$ y $b = x_n$ y sumar las n áreas, obtenemos

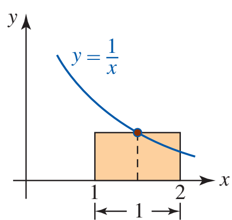
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)\Delta x + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\Delta x + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right)\Delta x.$$

Si Δx se sustituye por $(b - a)/n$, esta regla de aproximación del punto medio puede resumirse como sigue:

Definición 7.8.1 Regla del punto medio

La **regla del punto medio** es la aproximación $\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n$, donde

$$M_n = \frac{b - a}{n}\left[f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right)\right]. \qquad (1)$$



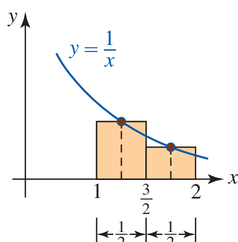


FIGURA 7.8.2 Rectángulos en el ejemplo 1

Puesto que la función $f(x) = 1/x$ es continua sobre cualquier intervalo $[a, b]$ que no incluya el origen, se sabe que $\int_a^b (1/x)\,dx$ existe. Para efectos del siguiente ejemplo, olvide que sabe que $\ln|x|$ es una antiderivada de $1/x$.

EJEMPLO 1 Uso de (1)

Aproxime $\int_1^2 (1/x)\,dx$ por la regla del punto medio para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 5$.

Solución Como se muestra en la FIGURA 7.8.2*a*), el caso $n = 1$ es un rectángulo donde $\Delta x = 1$. El punto medio del intervalo es $m_1 = \frac{3}{2}$ y $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}$. En consecuencia, por (1),

$$M_1 = 1 \cdot \frac{2}{3} \approx 0.6666.$$

k	m_k	$f(m_k)$
1	$\frac{11}{10}$	$\frac{10}{11}$
2	$\frac{13}{10}$	$\frac{10}{13}$
3	$\frac{15}{10}$	$\frac{10}{15}$
4	$\frac{17}{10}$	$\frac{10}{17}$
5	$\frac{19}{10}$	$\frac{10}{19}$

Cuando $n = 2$, la figura 7.8.2*b*) muestra $\Delta x = \frac{1}{2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x = \frac{3}{2}$ y $x_2 = 1 + 2\Delta x = 2$. Los puntos medios de los intervalos $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ y $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ son, respectivamente, $m_1 = \frac{5}{4}$ y $m_2 = \frac{7}{4}$, de modo que $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4}{5}$ y $f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{4}{7}$. Por tanto, con (1) obtenemos

$$M_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{5} + \frac{4}{7}\right] \approx 0.6857.$$

Finalmente, para $n = 5$, $\Delta x = \frac{1}{5}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x = \frac{6}{5}$, $x_2 = 1 + 2\Delta x = \frac{7}{5}, \ldots, x_5 = 1 + 5\Delta x = 2$. Los puntos medios de los cinco subintervalos $\left[1, \frac{6}{5}\right], \left[\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right], \left[\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right], \left[\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right], \left[\frac{9}{5}, 2\right]$ y los valores funcionales correspondientes se proporcionan en la tabla de la derecha. Así, con la información en la tabla obtenemos

$$M_5 = \frac{1}{5}\left[\frac{10}{11} + \frac{10}{13} + \frac{10}{15} + \frac{10}{17} + \frac{10}{19}\right] \approx 0.6919.$$

En otras palabras, $\int_1^2 (1/x)\,dx \approx M_5$ o $\int_1^2 (1/x)\,dx \approx 0.6919$. ■

Error en la regla del punto medio Suponga que $I = \int_a^b f(x)\,dx$ y que M_n es una aproximación a I usando n rectángulos. El error en el método se define como

$$E_n = |I - M_n|.$$

Por medio del siguiente resultado es posible encontrar una cota superior para el error. Se omite la demostración.

Teorema 7.8.1 Cota para el error de la regla del punto medio

Si hay un número $M > 0$ tal que $|f''(x)| \leq M$ para toda x en $[a, b]$, entonces

$$E_n \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2}. \tag{2}$$

Observe que esta cota superior para el error E_n es inversamente proporcional a n^2. Por tanto, la precisión en el método mejora a medida que tomamos cada vez más rectángulos. Por ejemplo, si se duplica el número de rectángulos, el error E_{2n} es menor que un cuarto de la cota para el error para E_n. Así, vemos que $\lim_{n\to\infty} M_n = I$.

El siguiente ejemplo ilustra cómo la cota para el error (2) puede usarse para determinar el número de rectángulos con los que obtenemos una precisión prescrita.

EJEMPLO 2 Uso de (2)

Determine un valor de n de modo que (1) proporcione una aproximación a $\displaystyle\int_1^2 (1/x)\,dx$ precisa hasta dos cifras decimales.

Solución La regla del punto medio es precisa hasta dos cifras decimales para los valores de n para los cuales la cota superior $M(b-a)^3/24n^2$ para el error es estrictamente menor que 0.005. Para $f(x) = 1/x$, se tiene $f''(x) = 2/x^3$. Puesto que f'' decrece sobre $[1, 2]$, se concluye que $f''(x) \leq f''(1) = 2$ para toda x en el intervalo. Así, con $M = 2$, $b - a = 1$, se tiene

Si se desea una precisión hasta tres cifras decimales, se usa 0.0005, etcétera.

$$\frac{2(1)^3}{24n^2} < 0.005 \qquad \text{o} \qquad n^2 > \frac{50}{3} \approx 16.67.$$

Al tomar $n \geq 5$ obtenemos la precisión deseada. ■

El ejemplo 2 indica que la tercera aproximación $\int_1^2 (1/x)\,dx \approx 0.6919$ obtenida en el ejemplo 1 es precisa hasta dos cifras decimales. Para efectos de comparación, el valor exacto de la integral, usando el teorema 5.5.1,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0.6931$$

es correcto hasta cuatro cifras decimales. Así, para $n = 5$ el error en el método E_n es aproximadamente 0.0012.

Regla trapezoidal Un método más conocido para aproximar una integral se basa en la validez de que es posible obtener una mejor estimación de $\int_a^b f(x)\,dx$ al sumar las áreas de trapezoides en lugar de rectángulos. Vea la FIGURA 7.8.3*a*). El área del trapezoide mostrado en la figura 7.8.3*b*) es $h(l_1 + l_2)/2$. Así, el área A_k del elemento trapezoidal mostrado en la figura 7.8.3*c*) es

$$A_k = \Delta x\,\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}.$$

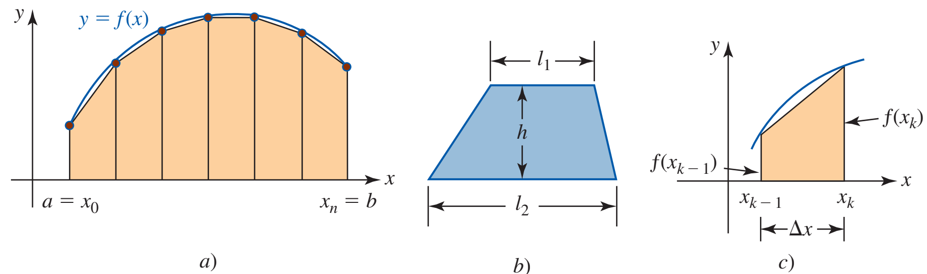


FIGURA 7.8.3 Uso de n trapezoides para aproximar la integral definida

Así, para una partición regular en el intervalo $[a, b]$ sobre el que f es continua, obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x\,\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \Delta x\,\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + \Delta x\,\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}.$$

Esta nueva regla de aproximación se resume en la siguiente definición después de combinar términos semejantes y sustituir $\Delta x = (b - a)/n$.

Definición 7.8.2 Regla trapezoidal

La **regla trapezoidal** es la aproximación $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n$, donde

$$T_n = \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]. \tag{3}$$

Error en la regla trapezoidal El error en el método para la regla trapezoidal está dado por $E_n = |I - T_n|$, donde $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Como lo demuestra el siguiente teorema, la cota del error para la regla trapezoidal es casi la misma que para la regla del punto medio.

Teorema 7.8.2 Cota para el error para la regla trapezoidal

Si existe un número $M > 0$ tal que $|f''(x)| \le M$ para toda x en $[a, b]$, entonces

$$E_n \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2}. \tag{4}$$

k	x_k	$f(x_k)$
0	1	1
1	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{7}$
2	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
4	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$
5	$\frac{11}{6}$	$\frac{6}{11}$
6	2	$\frac{1}{2}$

EJEMPLO 3 Uso de (4) y (3)

Determine un valor de n de modo que la regla trapezoidal proporcione una aproximación a $\displaystyle\int_1^2 (1/x)\,dx$ precisa hasta dos cifras decimales. Aproxime la integral.

Solución Al usar la información en el ejemplo 2, de inmediato tenemos:

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0.005 \qquad \text{o} \qquad n^2 > \frac{100}{3} \approx 33.33.$$

En este caso se toma $n \geq 6$ para obtener la precisión deseada. Entonces, $\Delta x = \frac{1}{6}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x = \frac{7}{6}, \ldots, x_6 = 1 + 6\Delta x = 2$. Con la información en la tabla acompañante, (3) proporciona

$$T_6 = \frac{1}{12}\left[1 + 2\left(\frac{6}{7}\right) + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 2\left(\frac{3}{5}\right) + 2\left(\frac{6}{11}\right) + \frac{1}{2}\right] \approx 0.6949. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Uso de (4) y (3)

Aproxime $\int_{1/2}^{1} \cos\sqrt{x}\, dx$ por la regla trapezoidal de modo que el error sea menor que 0.001.

Solución La segunda derivada de $f(x) = \cos\sqrt{x}$ es

$$f''(x) = \frac{1}{4x}\left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \cos\sqrt{x}\right).$$

Para x en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ se tiene $0 < (\operatorname{sen}\sqrt{x})/\sqrt{x} \leq 1$ y $0 < \cos\sqrt{x} \leq 1$, y en consecuencia $|f''(x)| \leq \frac{1}{4}x$. Por tanto, sobre el intervalo, $|f''(x)| \leq \frac{1}{2}$. Así, con $M = \frac{1}{2}$ y $b - a = \frac{1}{2}$, por (4) se concluye que deseamos

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3}{12n^2} < 0.001 \qquad \text{o} \qquad n^2 > \frac{125}{24} \approx 5.21.$$

k	x_k	$f(x_k)$
0	$\frac{1}{2}$	0.7602
1	$\frac{2}{3}$	0.6848
2	$\frac{5}{6}$	0.6115
3	1	0.5403

Así, para obtener la precisión deseada es suficiente escoger $n = 3$ y $\Delta x = \frac{1}{6}$. Con ayuda de una calculadora para obtener la información en la tabla acompañante, a partir de (3) encontramos la siguiente aproximación para $\int_{1/2}^{1} \cos\sqrt{x}\, dx$:

$$T_3 = \frac{1}{12}\left[\cos\sqrt{\frac{1}{2}} + 2\cos\sqrt{\frac{2}{3}} + 2\cos\sqrt{\frac{5}{6}} + \cos 1\right] \approx 0.3244. \quad \blacksquare$$

Aunque no es evidente a partir de una figura, un método mejorado de aproximación a una integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ puede obtenerse al considerar una serie de arcos parabólicos en lugar de una serie de cuerdas usadas en la regla trapezoidal. Es posible demostrar, en ciertas condiciones, que un arco parabólico que pasa por *tres* puntos específicos "ajusta" la gráfica de f mejor que una sola línea recta. Vea la FIGURA 7.8.4. Al sumar las áreas bajo arcos parabólicos obtenemos una aproximación a la integral.

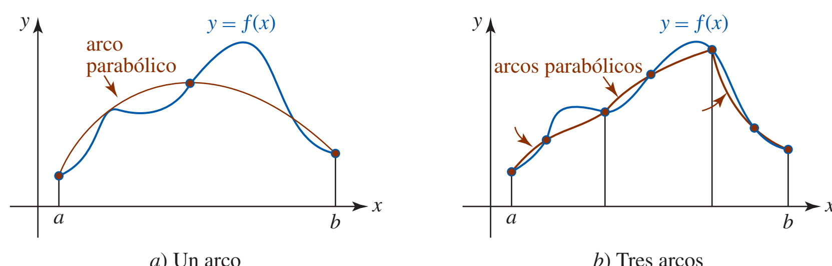


FIGURA 7.8.4 Ajuste de un arco parabólico a través de tres puntos consecutivos sobre la gráfica de una función

Para empezar, encontramos el área bajo un arco de una parábola que pasa por tres puntos $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, donde $x_0 < x_1 < x_2$ y $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$. Como se muestra en la FIGURA 7.8.5, esto puede hacerse al encontrar el área bajo la gráfica de $y = Ax^2 + Bx + C$ sobre el intervalo $[-h, h]$ de modo que P_0, P_1 y P_2 tienen coordenadas $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2), respectivamente. El intervalo $[-h, h]$ se escoge por simplicidad; el área en cuestión no depende de la ubicación del eje y. Al usar el teorema 5.5.1, el área es

$$\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C). \tag{5}$$

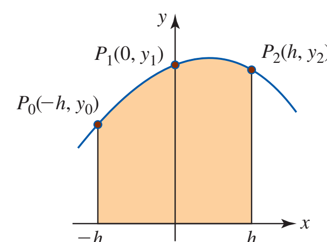


FIGURA 7.8.5 Área bajo un arco parabólico

Pero, puesto que la gráfica pasa por $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2), debe tenerse

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C \tag{6}$$

$$y_1 = C \tag{7}$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C. \tag{8}$$

Al sumar (6) y (8) y usar (7), encontramos $2Ah^2 = y_0 + y_2 - 2y_1$. Por tanto, (5) puede expresarse como

$$\text{área} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{9}$$

Regla de Simpson Ahora suponga que el intervalo $[a, b]$ se parte en n subintervalos del mismo ancho $\Delta x = (b - a)/n$, donde n es *un entero par*. Como se muestra en la FIGURA 7.8.6, sobre cada subintervalo $[x_{k-2}, x_k]$ de ancho $2\Delta x$ la gráfica de f se aproxima por un arco de parábola que pasa por los puntos P_{k-2}, P_{k-1} y P_k sobre la gráfica que corresponde a los puntos frontera y al punto medio del subintervalo. Si A_k denota el área bajo la parábola sobre $[x_{k-2}, x_k]$, por (9) se concluye que

$$A_k = \frac{\Delta x}{3}[f(x_{k-2}) + 4f(x_{k-1}) + f(x_k)].$$

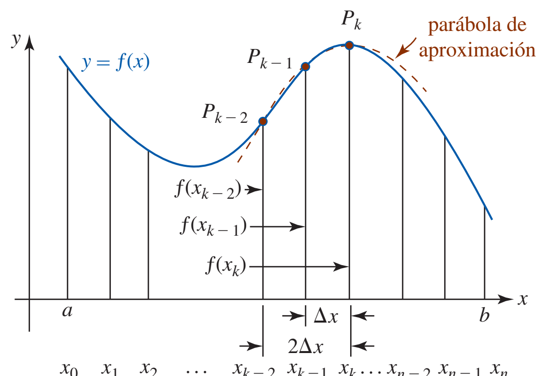


FIGURA 7.8.6 Aproximación de la función por un arco parabólico

Por tanto, al sumar todas las A_k obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{\Delta x}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \cdots + \frac{\Delta x}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Esta regla de aproximación, denominada así en honor del matemático inglés **Thomas Simpson** (1710-1761), se resume en la siguiente definición.

Definición 7.8.3 Regla de Simpson

La **regla de Simpson** es la aproximación $\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n$, donde

$$S_n = \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \tag{10}$$

De nuevo observamos que el entero n en (10) debe ser par, ya que cada A_k representa el área bajo un arco parabólico sobre un subintervalo de ancho $2\Delta x$.

Error en la regla de Simpson Si $I = \int_a^b f(x)\,dx$, el siguiente teorema establece una cota superior para el error en el método $E_n = |I - S_n|$ usando una cota superior para la cuarta derivada.

Teorema 7.8.3 Cota para el error para la regla de Simpson

Si hay un número $M > 0$ tal que $|f^{(4)}(x)| \leq M$ para toda x en $[a, b]$, entonces

$$E_n \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}. \qquad (11)$$

EJEMPLO 5 Uso de (11)

Determine un valor de n tal que (10) proporcione una aproximación a $\int_1^2 (1/x)\,dx$ precisa hasta dos cifras decimales.

Solución Para $f(x) = 1/x, f^{(4)}(x) = 24/x^5$ y sobre $[1, 2], f^{(4)}(x) \leq f^{(4)}(1) = 24$. Así, con $M = 24$ se concluye de (11) que

$$\frac{24(1)^5}{180n^4} < 0.005 \qquad \text{o} \qquad n^4 > \frac{80}{3} \approx 26.67$$

y así $n > 2.27$. Puesto que n debe ser un entero, es suficiente tomar $n \geq 4$. ■

EJEMPLO 6 Uso de (10)

Aproxime $\int_1^2 (1/x)\,dx$ por la regla de Simpson para $n = 4$.

Solución Cuando $n = 4$, se tiene $\Delta x = \frac{1}{4}$. Por (10) y la tabla acompañante obtenemos

$$S_4 = \frac{1}{12}\left[1 + 4\left(\frac{4}{5}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 4\left(\frac{4}{7}\right) + \frac{1}{2}\right] \approx 0.6933. \quad ■$$

k	m_k	$f(m_k)$
0	1	1
1	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{7}{4}$	$\frac{4}{7}$
4	2	$\frac{1}{2}$

En el ejemplo 6, tenga en cuenta que aun cuando se use $n = 4$, la integral definida $\int_1^2 (1/x)\,dx$ se está aproximando por el área de sólo dos arcos parabólicos. Recuerde que con la regla del punto medio se obtuvo $\int_1^2 (1/x)\,dx \approx 0.6919$ con $n = 5$, la regla trapezoidal proporcionó $\int_1^2 (1/x)\,dx \approx 0.6949$ con $n = 6$, y 0.6931 es una aproximación de la integral correcta hasta cuatro cifras decimales.

En algunas aplicaciones sólo puede ser posible obtener valores numéricos de una cantidad $Q(x)$; por ejemplo, por medición o experimentación, en puntos específicos en algún intervalo $[a, b]$ y aun así ser necesario tener alguna idea del valor de la integral definida $\int_a^b Q(x)\,dx$. Aun cuando Q no esté definida por medio de alguna fórmula explícita, sigue siendo posible aplicar la regla trapezoidal o la regla de Simpson para aproximar la integral.

EJEMPLO 7 Área de un terreno

Suponga que desea encontrar el área de un terreno de forma irregular acotado por un camino recto y la orilla de un lago. Los límites del terreno se indican mediante las líneas trazadas en la FIGURA 7.8.7*a*). Suponga que la frontera de 1 milla a lo largo del camino se divide, por ejemplo, en $n = 8$ subintervalos y que luego, como se muestra en la figura 7.8.7*b*), se miden las distancias perpendiculares desde el camino hasta la orilla del lago. Ahora es posible aproximar el área del terreno $A = \int_a^b f(x)\,dx$ por medio de la regla de Simpson. Con $b - a = 1$ mi $= 5\,280$ pies, $\Delta x = (b - a)/n = 5\,280/8 = 660$ y las identificaciones $f(x_0) = 83, \ldots, f(x_8) = 28$, de (10) obtenemos la siguiente aproximación para A:

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{660}{3}[83 + 4(82) + 2(96) + 4(100) + 2(82) + 4(55) + 2(63) + 4(54) + 28] \\ &= 386\,540 \text{ pies}^2. \end{aligned}$$

Sabiendo que 1 acre = 43 560 pies^2, vemos que el terreno mide aproximadamente 8.9 acres.

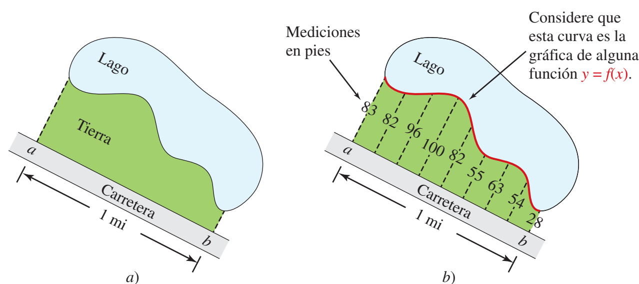


FIGURA 7.8.7 Orilla del lago en el ejemplo 7

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

i) A pesar de la popularidad de la regla trapezoidal, una comparación de las cotas de error (2) y (4) muestra que la regla del punto medio es más precisa que la trapezoidal. Específicamente, (2) sugiere que en algunos casos el error en la regla del punto medio puede ser la mitad que en la regla trapezoidal. Vea el problema 33 en los ejercicios 7.8.

ii) En algunas circunstancias, las reglas consideradas en el análisis previo proporcionan el valor *exacto* de una integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Las cotas de error (2) y (4) indican que M_n y T_n producirán el valor preciso siempre que f sea una función lineal. Vea los problemas 31, 32 y 35 en los ejercicios 7.8. La regla de Simpson proporciona el valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$ siempre que f sea una función lineal, cuadrática o polinomial. Vea los problemas 34 y 36 en los ejercicios 7.8.

iii) En general, la regla de Simpson proporciona mejor precisión que la regla del punto medio y que la trapezoidal. Así, ¿por qué molestarse con estas dos reglas? En algunos casos, las reglas del punto medio y trapezoidal producen una precisión que es suficiente para los efectos del caso en cuestión. Además, el requerimiento de que n debe ser un entero par en la regla de Simpson puede evitar su aplicación a un problema dado. También, para encontrar una cota de error para la regla de Simpson es necesario calcular y luego encontrar una cota superior para la cuarta derivada. La expresión para $f^{(4)}(x)$ puede, por supuesto, ser muy complicada. Las cotas de error para las otras dos reglas dependen de la segunda derivada.

Ejercicios 7.8

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-24.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, compare el valor exacto de la integral con la aproximación obtenida a partir de la regla del punto medio para el valor indicado de n.

1. $\displaystyle\int_1^4 (3x^2 + 2x)\,dx; \quad n = 3$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos x\,dx; \quad n = 4$

En los problemas 3 y 4, compare el valor exacto de la integral con la aproximación obtenida a partir de la regla trapezoidal para el valor indicado de n.

3. $\displaystyle\int_1^3 (x^3 + 1)\,dx; \quad n = 4$ **4.** $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x+1}\,dx; \quad n = 6$

En los problemas 5-12, use la regla del punto medio y la regla trapezoidal para obtener una aproximación a la integral dada para el valor indicado de n.

5. $\displaystyle\int_1^6 \frac{1}{x}\,dx; \quad n = 5$ **6.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{3x+1}\,dx; \quad n = 4$

7. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx; \quad n = 10$ **8.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx; \quad n = 5$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}\,dx; \quad n = 6$ **10.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx; \quad n = 3$

11. $\displaystyle\int_0^2 \cos x^2\,dx; \quad n = 6$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx;\quad n = 5$ [*Sugerencia*: Defina $f(0) = 1$.]

En los problemas 13 y 14, compare el valor exacto de la integral con la aproximación obtenida a partir de la regla de Simpson para el valor indicado de n.

13. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx;\quad n = 4$ **14.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx;\quad n = 2$

En los problemas 15-22, use la regla de Simpson para obtener una aproximación a la integral dada para el valor indicado de n.

15. $\displaystyle\int_{1/2}^{5/2} \frac{1}{x}\,dx;\quad n = 4$ **16.** $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{x+2}\,dx;\quad n = 6$

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx;\quad n = 4$ **18.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+1}\,dx;\quad n = 2$

19. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}\,dx;\quad n = 6$ **20.** $\displaystyle\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx;\quad n = 4$

21. $\displaystyle\int_2^4 \sqrt{x^3+x}\,dx;\quad n = 4$ **22.** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2+\operatorname{sen} x}\,dx;\quad n = 2$

23. Determine el número de rectángulos necesarios de modo que una aproximación a $\int_{-1}^{2} dx/(x+3)$ sea precisa hasta dos cifras decimales.

24. Determine el número de trapezoides necesarios de modo que el error en una aproximación a $\int_0^{1.5} \operatorname{sen}^2 x\,dx$ sea menor que 0.0001.

25. Use la regla trapezoidal de modo que una aproximación al área bajo la gráfica de $f(x) = 1/(1+x^2)$ sobre $[0, 2]$ sea precisa hasta dos cifras decimales. [*Sugerencia*: Analice $f'''(x)$.]

26. El dominio de $f(x) = 10^x$ es el conjunto de números reales y $f(x) > 0$ para toda x. Use la regla trapezoidal para aproximar el área bajo la gráfica de f sobre $[-2, 2]$ con $n = 4$.

27. Use la regla de Simpson para determinar n de modo que el error al aproximar $\int_1^3 dx/x$ sea menor que 10^{-5}. Compare con la n necesaria en la regla trapezoidal para obtener la misma precisión.

28. Encuentre una cota superior para el error al aproximar $\int_0^3 dx/(2x+1)$ por la regla de Simpson con $n = 6$.

En los problemas 29 y 30, use los datos proporcionados en la tabla y una norma para aproximar la integral definida indicada.

29. $\displaystyle\int_{2.05}^{2.30} f(x)\,dx;$

x	2.05	2.10	2.15	2.20	2.25	2.30
$f(x)$	4.91	4.80	4.66	4.41	3.93	3.58

30. $\displaystyle\int_0^{1.20} f(x)\,dx;$

x	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.00	1.20
$f(x)$	−0.72	−0.55	−0.16	0.62	0.78	1.34	1.47	1.61	1.51

31. Compare el valor exacto de la integral $\int_0^4 (2x+5)\,dx$ con la aproximación obtenida con la regla del punto medio con $n = 2$ y $n = 4$.

32. Repita el problema 31 usando la regla trapezoidal.

33. ***a***) Encuentre el valor exacto de la integral $I = \int_{-1}^{1} (x^3 + x^2)\,dx$.

b) Use la regla del punto medio con $n = 8$ para encontrar una aproximación a I.

c) Use la regla trapezoidal con $n = 8$ para encontrar una aproximación a I.

d) Compare los errores $E_8 = |I - M_8|$ y $E_8 = |I - T_8|$.

34. Compare el valor exacto de la integral $\int_{-1}^{3} (x^3 - x^2)\,dx$ con las aproximaciones obtenidas con la regla de Simpson con $n = 2$ y $n = 4$.

35. Demuestre que la regla trapezoidal proporciona el valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$ cuando $f(x) = c_1 x + c_0$, con c_0 y c_1 constantes. Geométricamente, ¿por qué esto tiene sentido?

36. Demuestre que la regla de Simpson proporciona el valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$ donde $f(x) = c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$, con c_0, c_1, c_2 y c_3 constantes.

37. Use los datos mostrados en la FIGURA 7.8.8 y la regla de Simpson para encontrar una aproximación al área bajo la gráfica de la función continua f sobre el intervalo $[1, 4]$.

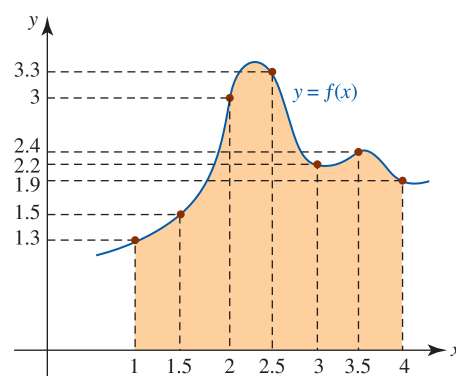


FIGURA 7.8.8 Gráfica para el problema 37

38. Use la regla trapezoidal con $n = 9$ para encontrar una aproximación al área bajo la gráfica en la FIGURA 7.8.9. ¿Proporciona esta regla el valor exacto del área?

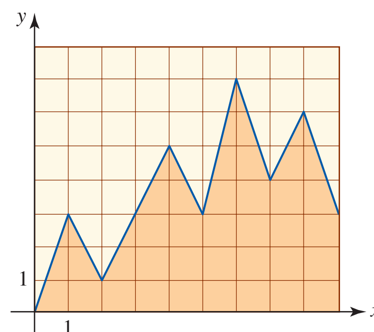


FIGURA 7.8.9 Gráfica para el problema 38

39. El gran estanque para peces en forma irregular que se muestra en la FIGURA 7.8.10 contiene agua hasta una profundidad uniforme de 4 pies. Use la regla de Simpson para encontrar una aproximación al número de galones de agua que hay en el estanque. Las medidas están en pies; la separación vertical entre las mediciones horizontales es 1.86 pies. En 1 pie^3 de agua hay 7.48 galones de agua.

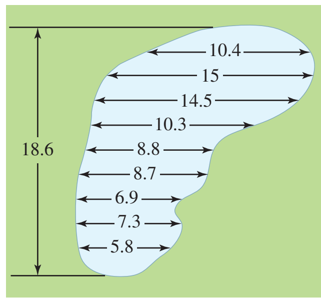
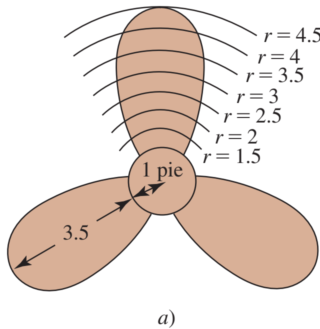


FIGURA 7.8.10 Estanque en el problema 39

40. El momento de inercia I de la hélice con tres aspas de un barco cuyas dimensiones se proporcionan en la FIGURA 7.8.11*a*) está dado por

$$I = \frac{3\rho\pi}{2g} + \frac{3\rho}{g}\int_1^{4.5} r^2 A\, dr,$$

donde ρ es la densidad del metal, g es la aceleración de la gravedad y A es el área de una sección transversal de la hélice a una distancia de r pies del centro del cubo. Si $\rho = 570$ lb/pie^3 para el bronce, use los datos en la figura 7.8.11*b*) y la regla trapezoidal para encontrar una aproximación a I.



a)

r (pies)	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
A (pies)	0.3	0.50	0.62	0.70	0.60	0.50	0.27	0

b)

FIGURA 7.8.11 Hélice en el problema 40

Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 41 y 42, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada. Use la regla de Simpson para aproximar el área acotada por la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo indicado. Use $n = 10$.

41. $f(x) = \sqrt[5]{(5^{2.5} - |x|^{2.5})^2}$; $[-5, 5]$

42. $f(x) = 1 + |\text{sen}\, x|^x$; $[0, 2\pi]$ [*Sugerencia*: Use la gráfica para discernir $f(0)$.]

43. ***a***) Demuestre que la integral convergente $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{1/x}}{x^{5/2}}\,dx$ puede escribirse como $\int_0^1 t^{1/2} e^t\, dt$.

b) Use el resultado en el inciso *a*) y la regla de Simpson con $n = 4$ para encontrar una aproximación a la integral impropia original.

44. Use (3) de la sección 6.5 y la regla de Simpson con $n = 4$ para encontrar una aproximación a la longitud L de la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^3 + 1$ desde el punto $(0, 1)$ hasta $\left(2, \frac{11}{3}\right)$.

45. Use (3) de la sección 6.5 y la regla trapezoidal con $n = 10$ para encontrar una aproximación a la longitud L de la gráfica de $y = x^2$ desde el origen $(0, 0)$ hasta el punto $(1, 1)$.

46. Use (3) de la sección 6.5 y la regla de Simpson con $n = 6$ para encontrar una aproximación a la longitud L de la gráfica de $y = \ln x$ sobre el intervalo $[1, 2]$.

47. Use (3) de la sección 6.6 y la regla del punto medio con $n = 5$ para encontrar una aproximación al área S de la superficie que se forma al girar la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ sobre el intervalo $[0, 2]$ alrededor del eje x.

48. Use la regla de Simpson con $n = 6$ para encontrar una aproximación al área S de la superficie que se forma al girar la gráfica de $x = y^2 + 1$ para $-1 \le y \le 1$ alrededor del eje y.

Piense en ello

49. ***a***) Calcule la longitud L de la gráfica que se muestra en la FIGURA 7.8.12 sobre el intervalo $[1, 8]$.

b) Explique por qué usar la regla trapezoidal con $n = 7$ no es una buena idea.

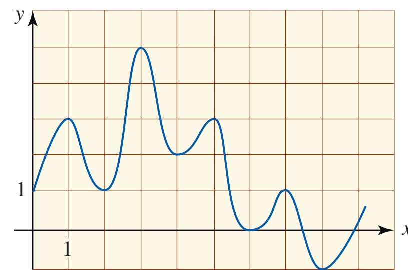


FIGURA 7.8.12 Gráfica para el problema 49

50. Un poco de historia La **función integral logarítmica**, Li(x), se define por la integral

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}\, dt$$

para $x > 2$. En 1896, el matemático francés **Jacques Hadamard** (1865-1963) y el matemático belga **Charles-Jean de la Vallée Poussin** (1886-1962) demostraron —de manera independiente— el teorema de los números primos, que establece que el número de números primos (2, 3, 5, 7, 11, etc.) menores que o iguales a x, denotado por $\pi(x)$, puede aproximarse por la integral logarítmica, lo cual significa que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\text{Li}(x)} = 1.$$

a) Demuestre que $\pi(x)$ también puede aproximarse por la función $x/\ln x$ al usar la regla de L'Hôpital y el teorema fundamental del cálculo para demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{Li}(x)}{x/\ln x} = 1.$$

Puesto que hay una infinidad de números primos, $\text{Li}(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$.

b) Use la regla de Simpson para aproximar Li(100). Calcule $x/\ln x$ para $x = 100$. Compare estas cifras con el número real de números primos menores que 100.

Revisión del capítulo 7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-24.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-20, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. Bajo el cambio de variable $u = 2x + 3$, la integral $\int_1^5 \frac{4x}{\sqrt{2x+3}}\,dx$ se vuelve $\int_5^{13}(u^{1/2} - 3u^{-1/2})\,du$. _____
2. La sustitución trigonométrica $u = a\sec\theta$ es idónea para integrales que contienen $\sqrt{a^2+u^2}$. _____
3. El método de integración por partes se obtiene a partir de la regla del producto para diferenciación. _____
4. $\int_1^e 2x\ln x^2\,dx = e^2 + 1$. _____
5. Las fracciones parciales no son aplicables a $\int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$. _____
6. Una descomposición en fracciones parciales de $x^2/(x+1)^2$ puede encontrarse al tener la forma $A/(x+1) + B/(x+1)^2$, donde A y B son constantes. _____
7. Para evaluar $\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx$, se supone que es posible encontrar constantes A, B, C y D tales que $\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-1} + \frac{Cx+D}{(x^2-1)^2}$. _____
8. Para evaluar $\int x^n e^x\,dx$, n un entero positivo, la integración por partes se usa $n-1$ veces. _____
9. Para evaluar $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$, es necesario usar $x = 3\,\text{sen}\,\theta$. _____
10. Cuando se evalúa, la integral $\int \text{sen}^3 x\cos^2 x\,dx$ puede expresarse como una suma de potencias de $\cos x$. _____
11. Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ convergen, entonces $\int_a^\infty [f(x)+g(x)]\,dx$ converge. _____
12. Si $\int_a^\infty [f(x)+g(x)]\,dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge. _____
13. Si f es continua para toda x y $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ diverge. _____
14. La integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ es definida por $\lim_{x\to\infty}\int_{-t}^t f(x)\,dx$. _____
15. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1+\ln x}\,dx$ es una integral impropia. _____
16. $\int_{-1}^1 x^{-3}\,dx = 0$. ______
17. $\int_0^4 x^{-0.999}\,dx$ converge. _____
18. $\int_1^\infty x^{-0.999}\,dx$ diverge. _____
19. $\int_2^\infty \left[\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x-1}\right]dx$ diverge, ya que $\int_2^\infty \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ diverge. _____
20. Si una función f positiva tiene una discontinuidad infinita en un número $[a, b]$, entonces el área bajo la gráfica sobre el intervalo también es infinita. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-6, llene los espacios en blanco.

1. $\int_0^\infty e^{-5x}\,dx =$ _______.
2. Si $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$, entonces $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx =$ ________.
3. Si $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$, entonces $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx =$ ________.
4. La integral $\int_1^\infty x^p\,dx$ converge para $p <$ _____ y diverge para $p \geq$ _____.

5. $\int_0^x e^{-2t}\,dt = \int_x^\infty e^{-2t}\,dt$ para $x =$ __________.

6. $\int \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x)\,dx =$ __________.

C. Ejercicios

En los problemas 1-80, use los métodos de este capítulo, o de capítulos previos, para evaluar la integral dada.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+9}\,dx$

2. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4)^3}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x(x^2-4)}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^2+4}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+27}}{x}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^9}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int (\ln 3x)^2\,dx$

13. $\displaystyle\int t \operatorname{sen}^{-1} t\,dt$

14. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(x-1)^2}\,dx$

15. $\displaystyle\int (x+1)^3(x-2)\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^3(x-2)}\,dx$

17. $\displaystyle\int \ln(x^2+4)\,dx$

18. $\displaystyle\int 8te^{2t^2}\,dt$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+10x^3+25x^2}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+8x+25}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+3x^2-9x-27}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2-x)(x^2+3)}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}\,dt$

24. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{(\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta$

25. $\displaystyle\int \tan^{10} x \sec^4 x\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x \tan x}{\cos x}\,dx$

27. $\displaystyle\int y \cos y\,dy$

28. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x^3\,dx$

29. $\displaystyle\int (1+\operatorname{sen}^2 t)\cos^3 t\,dt$

30. $\displaystyle\int \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta}\,d\theta$

31. $\displaystyle\int e^w(1+e^w)^5\,dw$

32. $\displaystyle\int (x-1)e^{-x}\,dx$

33. $\displaystyle\int \cot^3 4x\,dx$

34. $\displaystyle\int (3-\sec x)^2\,dx$

35. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^2 x \tan x\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^4 x \tan x\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$

39. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$

40. $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 2} \sqrt{e^x+1}\,dx$

41. $\displaystyle\int e^x \cos 3x\,dx$

42. $\displaystyle\int x(x-5)^9\,dx$

43. $\int \cos(\ln t)\, dt$

44. $\int \sec^2 x \ln(\tan x)\, dx$

45. $\int \cos \sqrt{x}\, dx$

46. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

47. $\int \cos x \operatorname{sen} 2x\, dx$

48. $\int (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\, dx$

49. $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx$

50. $\int \frac{1}{(8 - 2x - x^2)^{3/2}}\, dx$

51. $\int \tan^5 x \sec^3 x\, dx$

52. $\int \cos^4 \frac{x}{2}\, dx$

53. $\int \frac{t^5}{1 + t^2}\, dt$

54. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

55. $\int \frac{5x^3 + x^2 + 6x + 1}{(x^2 + 1)^2}\, dx$

56. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x^2}\, dx$

57. $\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx$

58. $\int (t + 1)^2 e^{3t}\, dt$

59. $\int e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} 2x\, dx$

60. $\int e^x \tan^2 e^x\, dx$

61. $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\, dx$

62. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx$

63. $\int \operatorname{senh}^{-1} t\, dt$

64. $\int x \cot x^2\, dx$

65. $\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x + 1}}\, dx$

66. $\int \frac{t + 3}{t^2 + 2t + 1}\, dt$

67. $\int \frac{\sec^4 3u}{\cot^{12} 3u}\, du$

68. $\int_0^2 x^5\sqrt{x^2 + 4}\, dx$

69. $\int \frac{3 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$

70. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{5 + \cos^2 x}\, dx$

71. $\int x(1 + \ln x)^2\, dx$

72. $\int x \cos^2 x\, dx$

73. $\int e^x e^{e^x}\, dx$

74. $\int \frac{1}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}}\, dx$

75. $\int \frac{2t}{1 + e^{t^2}}\, dt$

76. $\int \cos x \cos 2x\, dx$

77. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - (5x + 2)^2}}\, dx$

78. $\int (\ln 2x) \ln x\, dx$

79. $\int \cos x \ln|\operatorname{sen} x|\, dx$

80. $\int \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) dx$

En los problemas 81-92, evalúe la integral dada o demuestre que diverge.

81. $\int_0^3 x(x^2 - 9)^{-2/3}\, dx$

82. $\int_0^5 x(x^2 - 9)^{-2/3}\, dx$

83. $\int_{-\infty}^0 (x + 1)e^x\, dx$

84. $\int_0^{\infty} \frac{e^{2x}}{e^{4x} + 1}\, dx$

85. $\int_3^{\infty} \frac{1}{1 + 5x}\, dx$

86. $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4)^2}\, dx$

87. $\int_0^e \ln \sqrt{x}\, dx$

88. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 t}{\tan^3 t}\, dt$

89. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - \cos x}\, dx$

90. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x + 1}\, dx$

91. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}\, dx$

92. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}\, dx$

En los problemas 93 y 94, demuestre el resultado que se proporciona.

93. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1 + x)^2}\, dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

94. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x + 1)}\, dx = \pi$

En los problemas 95 y 96, use el hecho de que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{t^2}\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^{x} e^{t^2}\, dt = \infty$ para evaluar el límite dado.

95. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x\displaystyle\int_0^{x} e^{t^2}\, dt}{e^{x^2}}$

96. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^{x} e^{t^2}\, dt}{xe^{x^2}}$

97. Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y = e^{-x}$ y $y = e^{-3x}$ sobre $[0, \infty)$.

98. Considere la región acotada por las gráficas de $y = 1/\sqrt[3]{1 - x}$ y $y = 0$ en el intervalo $[0, 1]$.

a) Encuentre el área de la región.

b) Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región alrededor del eje x.

c) Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región alrededor de la recta $x = 1$.

99. Considere la gráfica de $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$ dada en la FIGURA 7.R.1.

a) Determine si la región R_1, que está acotada entre las gráficas de f y su asíntota horizontal, es finita.

b) Determine si las regiones R_2 y R_3 tienen áreas finitas.

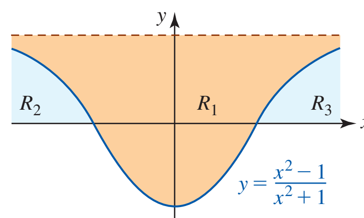


FIGURA 7.R.1 Gráfica para el problema 99

100. Use el método de Newton para encontrar el número x^* para el cual la región sombreada R en la FIGURA 7.R.2 es 99% del área total bajo la gráfica de $y = xe^{-x}$ sobre $[0, \infty)$.

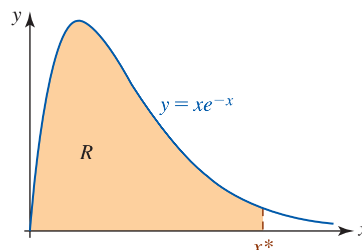


FIGURA 7.R.2 Gráfica para el problema 100

101. Una fuerza variable continua $f(x)$ actúa sobre el intervalo $[0, 1]$, donde F se mide en newtons y x en metros. Empíricamente se ha determinado que

x (m)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$F(x)$ (N)	0	50	90	150	210	260

Use una técnica numérica idónea para aproximar el trabajo realizado sobre el intervalo.

102. En la FIGURA 7.R.3 se muestra la gráfica de una fuerza variable F.

a) Use elementos rectangulares de área para encontrar una aproximación al trabajo realizado por la fuerza al mover una partícula desde $x = 1$ hasta $x = 5$.

b) Use la regla trapezoidal para aproximar el trabajo realizado.

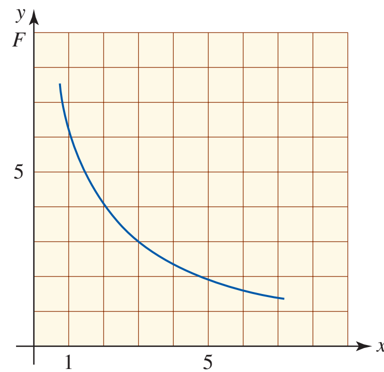
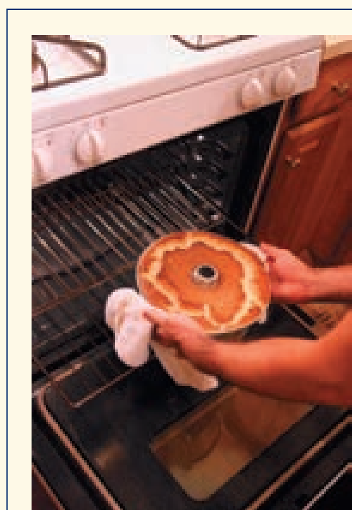


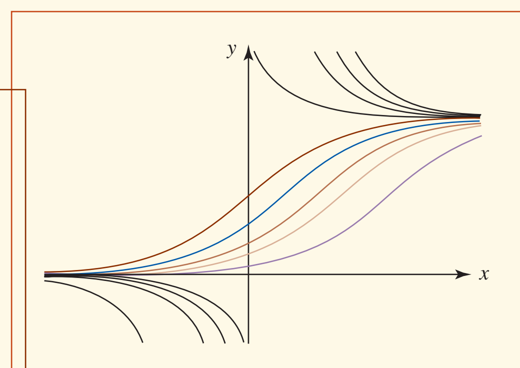
FIGURA 7.R.3 Gráfica para el problema 102

Capítulo 8

Ecuaciones diferenciales de primer orden







En este capítulo Ahora estudiaremos ecuaciones diferenciales que tienen la forma $dy/dx = F(x, y)$. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones diferenciales de primer orden*. Analizaremos dos métodos de solución y algunas aplicaciones de estas ecuaciones. Las ecuaciones diferenciales de orden superior se considerarán en el capítulo 16.

8.1 Ecuaciones separables

Introducción En varios conjuntos de ejercicios previos se pidió comprobar que una función dada satisface una **ecuación diferencial**. En términos generales, una ecuación diferencial es una ecuación que implica una función y desconocida y una o más derivadas de y. Las ecuaciones diferenciales se clasifican por el **orden** de la derivada más alta que aparece en la ecuación. Por ejemplo, la ecuación

derivada de orden más alto
↓
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 8y = 0 \tag{1}$$

Por supuesto, a menudo se usan símbolos diferentes. Por ejemplo,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \text{sen}\, 2t$$

también es una ecuación diferencial de segundo orden.

es un ejemplo de ecuación diferencial de **segundo orden**, mientras que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{2}$$

es una ecuación diferencial de **primer orden**. Al usar la notación "primada", las ecuaciones diferenciales en (1) y (2) pueden escribirse como $y'' + 4y' + 8y = 0$ y $y' = -x/y$, respectivamente. Aunque esta notación es más fácil de escribir e imprimir, la notación de Leibniz usada en (1) y (2) suele preferirse a menudo porque muestra con claridad la variable independiente.

La exploración del tema de las ecuaciones diferenciales suele comenzar con el estudio de cómo *resolverlas*. Una **solución** de una ecuación diferencial es una función $y(x)$ suficientemente diferenciable, definida de manera explícita o implícita que, cuando se sustituye en la ecuación, se reduce a una identidad sobre algún intervalo. La forma natural de denominar la gráfica $y(x)$ es **curva solución**.

Como se mencionó al inicio del capítulo, aquí estudiaremos métodos de solución y algunas aplicaciones de ecuaciones diferenciales de *primer orden*. A partir de este momento establecemos la hipótesis de que una ecuación diferencial se escribe como

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \tag{3}$$

Las funciones de dos variables se analizarán en detalle en el capítulo 13.

donde F es una función de dos variables x y y. La función F se denomina **función pendiente** y (3) se denomina **forma normal** de la ecuación diferencial. En un punto (x, y) sobre la curva solución de la ecuación diferencial, el valor $F(x, y)$ proporciona la pendiente de una recta tangente.

Una definición En la sección 5.1 ya se ha resuelto un tipo simple de ecuación diferencial de primer orden. Recuerde que la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{4}$$

puede resolverse al encontrar la antiderivada más general de g; es decir,

$$y = \int g(x)\, dx.$$

Por ejemplo, una solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = 2x + e^{-3x}$$

está dada por

$$y = \int (2x + e^{-3x})\, dx = x^2 - \frac{1}{3}e^{-3x} + C.$$

Ecuaciones de la forma en (4) son justo un caso especial de una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = F(x, y)$, donde la función F se puede factorizar en un producto de una función x por una función de y.

Definición 8.1.1 Ecuación diferencial separable

Se dice que una **ecuación diferencial separable de primer orden** es cualquier ecuación $dy/dx = F(x, y)$ que puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y). \tag{5}$$

EJEMPLO 1 Una ecuación diferencial separable

La ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{6}$$

es separable, puesto que el miembro derecho de la igualdad puede reescribirse de nuevo como el producto de una función de x por una función de y:

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{-x}^{g(x)} \cdot \overbrace{\frac{1}{y}}^{f(y)}.$$

■

Observe que cuando $f(y) = 1$ en (5) se obtiene (4). De manera análoga a las ecuaciones diferenciales de la forma (4), una ecuación diferencial separable también puede resolverse por integración.

Antes de resolver una ecuación separable, la reescribimos en términos de diferenciales; por ejemplo, la ecuación (6) puede escribirse en la forma diferencial

$$y\,dy = -x\,dx.$$

Asimismo, al dividir entre $f(y)$, (5) puede volver a escribirse como

$$p(y)\,dy = g(x)\,dx,$$

donde por razones de conveniencia en la notación hemos escrito $p(y) = 1/f(y)$. Luego, si $y = \phi(x)$ denota una solución de (5), debemos tener

$$p(\phi(x))\,\phi'(x) = g(x)$$

y entonces, por integración,

$$\int p(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx = \int g(x)\,dx. \tag{7}$$

Pero $dy = \phi'(x)\,dx$, de modo que (7) es lo mismo que

$$\int p(y)\,dy = \int g(x)\,dx \qquad \text{o bien,} \qquad H(y) = G(x) + C,$$

donde $H(y)$ y $G(x)$ son antiderivadas de $p(y) = 1/f(y)$ y $g(x)$, respectivamente, y C es una constante. Puesto que C es arbitraria, $H(y) = G(x) + C$ representa una **familia de soluciones de un parámetro**. El parámetro es la constante arbitraria C.

Nota: En la integración de una ecuación separable no es necesario usar dos constantes, porque si se escribe $H(y) + C_1 = G(x) + C_2$, entonces la diferencia $C_2 - C_1$ puede sustituirse por una sola constante C.

A continuación resumimos el análisis.

Directrices para resolver una ecuación diferencial separable

i) Primero, determine si una ecuación diferencial de primer orden es en realidad separable. Es decir, ¿la ecuación diferencial puede escribirse en la forma dada en (5)?

ii) Si la ecuación diferencial es separable, entonces vuelva a escribirla en forma diferencial:

$$p(y)\,dy = g(x)\,dx.$$

iii) Integre ambos miembros de la forma diferencial. Integre el miembro izquierdo con respecto a y y el miembro derecho con respecto a x.

Antes de ilustrar el método de solución presentado, debe saber que muchas ecuaciones diferenciales de primer orden no son separables. Por ejemplo, ninguna de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x + y)$$

es separable.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación diferencial separable

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$.

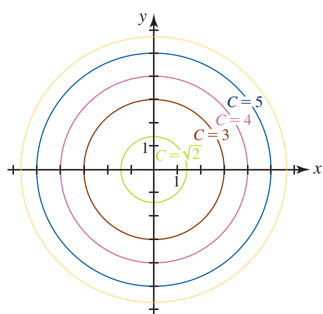


FIGURA 8.1.1 Familia de círculos en el ejemplo 2

Solución La ecuación diferencial dada se vuelve a escribir en la forma

$$y\,dy = -x\,dx$$

y al integrar ambos miembros se obtiene

$$\int y\,dy = -\int x\,dx \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1.$$

Así, una familia de soluciones de un parámetro está definida por $x^2 + y^2 = C^2$. Aquí se ha escogido sustituir la constante arbitraria $2C_1$ por C^2 porque la ecuación $x^2 + y^2 = C^2$ representa una familia de círculos centrados en el origen con radio $C > 0$. Vea la FIGURA 8.1.1.

Las soluciones de la ecuación diferencial son las funciones definidas implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = C^2$, $C > 0$. ■

Problema con valor inicial A menudo tenemos interés por resolver una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = F(x, y)$ sujeta a una condición lateral prescrita $y(x_0) = y_0$, donde x_0 y y_0 son números reales arbitrarios especificados de manera arbitraria. El problema

$$\textit{Resolver:} \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

$$\textit{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0$$

se denomina **problema con valor inicial** (**PVI**). La condición lateral $y(x_0) = y_0$ se denomina **condición inicial**. En términos geométricos, se está buscando por lo menos una solución de la ecuación diferencial sobre un intervalo I que contiene a x_0 tal que la curva solución pase por el punto (x_0, y_0). Desde un punto de vista práctico, a menudo esto conlleva al problema de determinar un valor específico de la constante C en una familia de soluciones.

EJEMPLO 3 Un problema con valor inicial

Resuelva el problema con valor inicial $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$, $\;y(4) = -3$.

Solución Por el ejemplo 2, una familia de soluciones para la ecuación diferencial dada es $x^2 + y^2 = C^2$. Cuando $x = 4$, entonces, $y = -3$, de modo que con $16 + 9 = C^2$ se obtiene $C = 5$. Por tanto, el PVI determina $x^2 + y^2 = 25$. Es a causa de su sencillez que podemos resolver la última ecuación para una función o solución explícita que satisface la condición inicial. Al despejar y se obtiene $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Ya que la gráfica debe ser la de una función y la gráfica de esta función debe contener al punto $(4, -3)$, debemos tomar la raíz cuadrada negativa. En otras palabras, la solución es $y = -\sqrt{25 - x^2}$ definida sobre el intervalo $(-5, 5)$. En la figura 8.1.1, la curva solución es el semicírculo inferior del círculo que se muestra en azul. ■

La ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = ky, \tag{8}$$

donde k es una constante, tiene muchas aplicaciones. La ecuación puede resolverse por separación de variables.

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación diferencial separable

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = ky$, donde $k \neq 0$ es una constante.

Solución La ecuación diferencial se escribe como $\dfrac{1}{y}\,dy = k\,dx$. Al integrar

$$\int \frac{1}{y}\,dy = k\int dx \qquad \text{se obtiene} \qquad \ln|y| = kx + C_1.$$

Luego, al despejar y se obtiene

$$|y| = e^{kx+C_1} = e^{C_1}e^{kx} \qquad \text{o bien,} \qquad y = \pm e^{kx+C_1} = \pm e^{C_1}e^{kx}.$$

Al identificar de nuevo las constantes $\pm e^{C_1}$ como C, una familia de soluciones de un parámetro está dada por $y = Ce^{kx}$. ■

Para resolver ecuaciones diferenciales separables resulta evidente que es imperativo tener conocimientos sobre fórmulas y técnicas de integración. Se recomienda una revisión de las secciones 7.1-7.3 y 7.6.

EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación diferencial separable

Resuelva $(e^{2y} - y)\dfrac{dy}{dx} = e^{y}\operatorname{sen} x$.

Solución Al volver a escribir la ecuación como

$$\frac{e^{2y} - y}{e^{y}}\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x \qquad \text{o bien,} \qquad (e^{y} - ye^{-y})\,dy = \operatorname{sen} x\,dx$$

observamos que la ecuación es separable. A partir de la forma diferencial de la ecuación,

$$\int (e^{y} - ye^{-y})\,dy = \int \operatorname{sen} x\,dx,$$

vemos que para evaluar $\int ye^{-y}\,dy$ es necesario usar integración por partes. El resultado es

$$e^{y} + ye^{-y} + e^{-y} = \cos x + C.$$

La última ecuación define de manera implícita una solución de la ecuación diferencial. En efecto, es imposible resolver la última ecuación para y en términos de x. ■

EJEMPLO 6 Un problema con valor inicial

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = y(1 - y)$, $y(0) = \dfrac{1}{3}$.

Solución La ecuación diferencial vuelve a escribirse como

$$\frac{1}{y(1-y)}\,dy = dx \qquad \text{y se integra} \qquad \int \frac{1}{y(1-y)}\,dy = \int dx.$$

Al usar fracciones parciales en el miembro izquierdo de la igualdad se obtiene

$$\int \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right] dy = \int dx$$

$$\ln|y| - \ln|1 - y| = x + C_1$$

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + C_1$$

$$\left|\frac{y}{1-y}\right| = e^{x+C_1} = e^{C_1}e^x$$

$$\frac{y}{1-y} = C_2e^x. \quad \leftarrow C_2 = \pm e^{C_1}$$

Al resolver para y se obtiene

$$y = \frac{C_2e^x}{1 + C_2e^x} \qquad \text{o bien,} \qquad y = \frac{1}{1 + Ce^{-x}}, \tag{9}$$

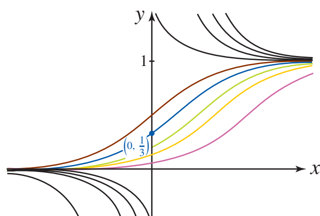


FIGURA 8.1.2 Familia de curvas solución en el ejemplo 6

donde hemos sustituido $1/C_2$ por C. Luego, al sustituir $x = 0$ y $y = \frac{1}{3}$ en la última ecuación se llega a $C = 2$. La solución del problema con valor inicial es

$$y = \frac{1}{1 + 2e^{-x}}. \tag{10}$$

En la FIGURA 8.1.2 se ilustran las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones dadas en (9) para valores positivos y negativos de C. Las gráficas a color representan soluciones de esa ecuación diferencial que están definidas sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. La gráfica de la solución dada en (10) es la curva azul en la figura. ■

Ejercicios 8.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-25.

Fundamentos

En los problemas 1-20, resuelva por separación de variables la ecuación diferencial dada.

1. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 5x$
2. $\frac{dy}{dt} = (t + 1)^2$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x^2}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5y^4}$
5. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1 + x}{1 + y}\right)^2$
6. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 5x^2}{x^2 \operatorname{sen} y}$
8. $\frac{dy}{dx} = y^3 \cos x$
9. $x\frac{dy}{dx} = 4y$
10. $\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$
11. $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$
12. $e^xy\frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$
13. $\left(\frac{y + 1}{x}\right)^2 \frac{dy}{dx} = y \ln x$
14. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2y + 3}{4x + 5}\right)^2$
15. $\frac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$
16. $\frac{dQ}{dt} = k(Q - 70)$
17. $\frac{dP}{dt} = 5P - P^2$
18. $\frac{dX}{dt} = (10 - X)(50 - X)$
19. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$
20. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$

En los problemas 21-26, resuelva el problema con valor inicial dado.

21. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(xy)^2}, \quad y(1) = 3$
22. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + \sec^2 x}{2y}, \quad y(0) = -2$
23. $\frac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1), \quad x(\pi/4) = 1$
24. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{x^2 - 1}, \quad y(2) = 2$
25. $x^2\frac{dy}{dx} = y - xy, \quad y(-1) = -1$
26. $\frac{dy}{dt} + 2y = 1, \quad y(0) = \frac{5}{2}$

En los problemas 27 y 28, resuelva el problema con valor inicial dado. Escriba la solución como una función *algebraica* explícita $y = f(x)$ (vea las *Notas desde el aula* en la sección 1.3). Quizá sea necesario usar una identidad trigonométrica.

27. $\sqrt{1 - x^2}\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
28. $(1 + x^4)\frac{dy}{dx} + x + 4xy^2 = 0, \quad y(1) = 0$

En los problemas 29-32, use el hecho de que $y = k$ sobre $(-\infty, \infty)$ es una función constante si y sólo si $dy/dx = 0$ para determinar si la ecuación diferencial dada tiene soluciones constantes. Resuelva la ecuación diferencial dada. Suponga que k es cualquier número real.

29. $x\frac{dy}{dx} + 6y = 18$
30. $2\frac{dy}{dx} = 5y + 40$
31. $\frac{dy}{dx} = y^2 - y - 20$
32. $x\frac{dy}{dx} = y^2 + 2y + 4$

En los problemas 33 y 34, proceda como en los problemas 29-32 para determinar si la ecuación diferencial dada tiene soluciones constantes. Resuelva la ecuación diferencial y luego encuentre una solución cuya gráfica pase por el punto indicado.

33. $x\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y,$

a) (0, 1) *b*) (0, 0) *c*) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

34. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 9,$

a) (0, 0) *b*) (0, 3) *c*) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

≡ Piense en ello

35. Sin resolver, explique por qué el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \quad y(x_0) = y_0$$

no tiene solución para $y_0 < 0$.

36. Una solución de una ecuación diferencial que no es miembro de la familia de soluciones de la ecuación se denomina **solución singular**. Vuelva a analizar los problemas 29, 31, 33 y 34 y encuentre cualquier solución singular. En el ejemplo 6, ¿cuál sería la solución del PVI si la condición inicial cambia a $y(0) = 1$?

37. En el ejemplo 3 se afirmó que la solución $y = -\sqrt{25 - x^2}$ está definida sobre el intervalo $(-5, 5)$. ¿Por qué sería incorrecto decir que la solución está definida sobre el intervalo cerrado $[-5, 5]$?

8.2 Ecuaciones lineales

Introducción Continuamos la búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden al examinar ecuaciones lineales. Las ecuaciones diferenciales lineales constituyen una familia especialmente "amigable" de ecuaciones diferenciales en el sentido de que, dada una ecuación lineal, ya sea de primer orden o de orden superior, siempre hay una posibilidad aceptable de encontrar alguna clase de solución de la ecuación que se busque. Las ecuaciones diferenciales no lineales, especialmente las ecuaciones de orden mayor que o igual a dos, a menudo son imposibles de resolver en términos de funciones elementales.

La técnica para resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden, como una ecuación separable, consiste en la integración; pero se integra sólo después que la ecuación original se ha multiplicado por una función especial denominada *factor de integración*.

Una definición Empezamos con la definición de ecuación lineal de primer orden. Cuando lea la siguiente definición tenga en cuenta las siguientes propiedades esenciales:

- En una ecuación diferencial lineal la variable dependiente y su derivada son de primer grado; es decir, la potencia de cada término que implica a la variable dependiente es 1, y cada coeficiente depende cuando mucho de una sola variable independiente.

Definición 8.3.1 Ecuación lineal

Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** es una ecuación $dy/dx = F(x, y)$ que puede plantearse en la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{1}$$

Por supuesto, las funciones $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $g(x)$ en (1) pueden ser constantes.

Si una ecuación diferencial de primer orden no es lineal, se dice que es **no lineal**.

EJEMPLO 1 Lineal/no lineal

a) Por comparación directa con (1), vemos que las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 6 \quad \text{y} \quad x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$$

son ecuaciones diferenciales de primer orden.

b) Las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden son no lineales:

la potencia no es 1 ↓ el coeficiente depende de y ↓

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 \quad \text{y} \quad y\frac{dy}{dx} = 2y + \cos x.$$ ■

Es importante observar que no toda ecuación diferencial de primer orden puede resolverse por el método de separación de variables. La ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x$$

no es separable. Por tanto, se requiere un nuevo procedimiento para resolver ecuaciones lineales.

Forma normal o estándar Al dividir (1) entre el coeficiente principal $a_1(x)$ se obtiene la siguiente forma más útil de una ecuación lineal:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{2}$$

La ecuación (2) se denomina **forma normal** o **estándar** de una ecuación diferencial lineal (1). Buscamos soluciones de (2) sobre un intervalo I para el cual P y f sean continuas. La ecuación (2) tiene la propiedad de que cuando se multiplica por la función $e^{\int P(x)\,dx}$, el miembro izquierdo de (2) se convierte en la derivada del producto $e^{\int P(x)\,dx}y$. Para ver esto, observemos que la regla del producto y la regla de la cadena proporcionan

Por la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int P(x)\,dx}\frac{d}{dx}\int P(x)\,dx = e^{\int P(x)\,dx}P(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}y\right] &= e^{\int P(x)\,dx}\frac{d}{dx}y + y\frac{d}{dx}e^{\int P(x)\,dx}\\ &= e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx}P(x)y.\end{aligned} \tag{3}$$

Por tanto, si ambos miembros de (2) se multiplican por $e^{\int P(x)\,dx}$, obtenemos

$$\overbrace{e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx}P(x)y}^{\text{Esto es } \frac{d}{dx}[e^{\int P(x)\,dx}y]} = e^{\int P(x)\,dx}f(x).$$

Al comparar el miembro izquierdo de la última ecuación con el resultado en (3), se concluye que la última ecuación es lo mismo que

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}y\right] = e^{\int P(x)\,dx}f(x). \tag{4}$$

La forma de la ecuación (4) constituye la clave para resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Podemos simplemente integrar ambos miembros de (4) con respecto a x. La función $e^{\int P(x)\,dx}$ que hace posible esto se denomina **factor de integración** para la ecuación diferencial. A continuación se presenta el procedimiento.

Directrices para resolver ecuaciones diferenciales lineales

i) Escriba la ecuación dada en la forma normal (2); es decir, por división haga que el coeficiente de dy/dx sea la unidad.

ii) Identifique $P(x)$ (el coeficiente de y) y encuentre el factor de integración

$$e^{\int P(x)\,dx}.$$

iii) Multiplique la ecuación obtenida en el paso *i*) por el factor de integración.

iv) El miembro izquierdo de la ecuación en el paso *iii*) es la derivada del factor de integración y la variable dependiente:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}y\right] = e^{\int P(x)\,dx}f(x).$$

v) Integre ambos miembros de la ecuación encontrada en el paso *iv*).

En la sección 8.1 resolvimos la ecuación $dy/dx - ky = 0$ por separación de variables, pero puesto que la ecuación diferencial es lineal, también es posible resolverla con el procedimiento anterior.

EJEMPLO 2 Uso de un factor de integración

La ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dx} - ky = 0,$$

k una constante, ya está en forma normal (2). Al identificar $P(x) = -k$, el factor de integración es $e^{\int(-k)\,dx} = e^{-kx}$ y, después de multiplicar la ecuación por este factor, vemos que

$$e^{-kx}\frac{dy}{dx} - ke^{-kx}y = 0 \cdot e^{-kx} \qquad \text{es lo mismo que} \qquad \frac{d}{dx}[e^{-kx}y] = 0.$$

Es necesario usar una constante de integración para calcular $e^{\int P(x)\,dx}$.

Al integrar ambos miembros de la última ecuación con respecto a x, con

$$\int \frac{d}{dx}[e^{-kx}y]\,dx = \int 0\,dx$$

obtenemos $e^{-kx}y = C$. A partir de esta última expresión obtenemos la misma familia de soluciones $y = Ce^{kx}$ que en el ejemplo 4 de la sección 8.1. ■

Recuerde que en el análisis de (2) se afirmó que se buscaba una solución de una ecuación lineal sobre un intervalo I para el cual P y f fueran continuas. A medida que usted trabaje el siguiente ejemplo, observe que P y f son continuas sobre el intervalo $(0, \infty)$.

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación diferencial lineal sobre un intervalo

Resuelva $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$.

Solución Al dividir entre x obtenemos la forma normal

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^x. \tag{5}$$

A partir de esta forma es posible identificar $P(x) = -4/x$ y $f(x) = x^5e^x$ y observar que P y f son continuas para $x > 0$, es decir, sobre $(0, \infty)$. Por tanto, el factor de integración es

puede usarse $\ln x$ en lugar de $\ln|x|$ porque $x > 0$
↓

$$e^{-4\int dx/x} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}.$$

La identidad $e^{\ln N} = N$ es útil para calcular el factor de integración.

Luego, (5) se multiplica por x^{-4},

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^x \qquad \text{y obtenemos} \qquad \frac{d}{dx}[x^{-4}y] = xe^x.$$

Al usar integración por partes en el miembro derecho de

$$\int \frac{d}{dx}[x^{-4}y]\,dx = \int xe^x\,dx$$

obtenemos la solución definida sobre $(0, \infty)$:

$$x^{-4}y = xe^x - e^x + C \qquad \text{o bien,} \qquad y = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4.$$ ■

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación diferencial lineal sobre un intervalo

Resuelva $(x^2 - 9)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$.

Solución La ecuación se escribe en forma normal

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2 - 9}y = 0 \tag{6}$$

y se identifica $P(x) = x/(x^2 - 9)$. Aunque P es continua sobre $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ y sobre $(3, \infty)$, esta ecuación se resolverá sobre los intervalos primero y tercero. Sobre estos intervalos, el factor de integración es

$$e^{\int x\,dx/(x^2-9)} = e^{\frac{1}{2}\int 2x\,dx/(x^2-9)} = e^{\frac{1}{2}\ln(x^2-9)} = e^{\ln\sqrt{x^2-9}} = \sqrt{x^2-9}.$$

Luego de multiplicar la forma normal (6) por este factor, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2-9}\,y\right] = 0 \qquad \text{y al integrar se obtiene} \qquad \sqrt{x^2-9}\,y = C.$$

Para $(-\infty, -3)$ o para $(3, \infty)$, la solución de la ecuación es $y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2-9}}$. ■

EJEMPLO 5 Problema con valor inicial

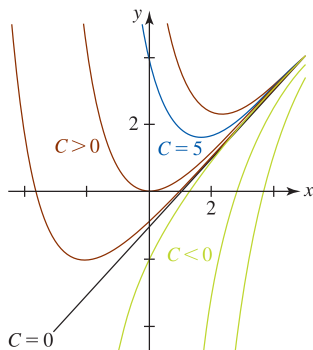


FIGURA 8.2.1 Familia de curvas solución en el ejemplo 5. La solución del PVI se muestra en azul.

Resuelva el problema con valor inicial $\dfrac{dy}{dx} + y = x$, $y(0) = 4$.

Solución La ecuación ya está en forma normal, y $P(x) = 1$ y $f(x) = 1$ son continuas sobre $(-\infty, \infty)$. El factor de integración es $e^{\int dx} = e^x$, de modo que al integrar

$$\frac{d}{dx}[e^x y] = xe^x$$

obtenemos $e^x y = xe^x - e^x + C$. Al resolver esta última ecuación para y obtenemos la familia de soluciones

$$y = x - 1 + Ce^{-x}. \tag{7}$$

Pero por la condición inicial se sabe que $y = 4$ cuando $x = 0$. La sustitución de estos valores en (7) implica $C = 5$. Por tanto, la solución del problema sobre $(-\infty, \infty)$ es $y = x - 1 + 5e^{-x}$ y es la curva azul que se muestra en la FIGURA 8.2.1. ■

Resulta interesante observar que cuando x se vuelve sin límite en la dirección positiva, la gráfica de *todos* los miembros de la familia de soluciones (7) para $C > 0$ o $C < 0$ están próximos a la gráfica de $y = x - 1$, que se muestra en negro en la figura 8.2.1. En efecto, $y = x - 1$ es la solución de la ecuación diferencial en el ejemplo 5 que corresponde a $C = 0$ en (7). Este comportamiento asintótico puede atribuirse al hecho de que el término Ce^{-x} en (7) se vuelve despreciable para valores crecientes de x; es decir, $e^{-x} \to 0$ cuando $x \to \infty$. Se dice que Ce^{-x} es un **término transitorio**. Aunque este comportamiento no es característico de todas las familias de soluciones de ecuaciones lineales (vea el ejemplo 3), el concepto de transitoriedad a menudo es importante en problemas de aplicación.

$\dfrac{dy}{dx} = F(x, y)$ **NOTAS DESDE EL AULA**

Si resolvemos (5) sobre un intervalo en el que P y f son continuas, es posible demostrar que una familia de soluciones de un parámetro de la ecuación produce todas las soluciones de la ecuación diferencial definidas sobre el intervalo. En el ejemplo 3, las funciones $P(x) = -4/x$ y $f(x) = x^5e^x$ son continuas sobre el intervalo $(0, \infty)$. En este caso, *toda* solución de $dy/dx - (4/x)y = x^5e^x$ sobre $(0, \infty)$ puede obtenerse a partir de $y = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4$ para elecciones adecuadas de la constante C. Por ello, la familia de soluciones $y = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4$ se denomina **solución general** de la ecuación diferencial.

Ejercicios 8.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-25.

Fundamentos

En los problemas 1-22, resuelva la ecuación diferencial dada.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 4y$
2. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$
3. $2\dfrac{dy}{dx} + 10y = 1$
4. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$
5. $\dfrac{dy}{dt} + y = e^{3t}$
6. $\dfrac{dy}{dt} = y + e^t$

7. $y' + 3x^2y = x^2$

8. $y' + 2xy = x^3$

9. $x^2\dfrac{dy}{dx} + xy = 1$

10. $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy = 2x$

11. $(1 + e^x)\dfrac{dy}{dx} + e^xy = 0$

12. $(1 - x^3)\dfrac{dy}{dx} = 3x^2y$

13. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 \operatorname{sen} x$

14. $\dfrac{dy}{dx} + y = \cos(e^x)$

15. $\cos x\dfrac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)y = 1$

16. $\operatorname{sen} x\dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = \sec^2 x$

17. $\dfrac{dy}{dx} + (\cot x)y = 2\cos x$

18. $\dfrac{dr}{d\theta} + (\sec\theta)r = \cos\theta$

19. $(x + 2)^2\dfrac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$

20. $\dfrac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$

21. $x^2\dfrac{dy}{dx} + x(x + 2)y = e^x$

22. $x\dfrac{dy}{dx} + (x + 1)y = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$

En los problemas 23-32, resuelva el problema con valor inicial dado.

23. $\dfrac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = -4$

24. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 3y, \quad y(0) = \frac{1}{3}$

25. $x\dfrac{dy}{dx} + y = e^x, \quad y(1) = 2$

26. $x\dfrac{dy}{dx} + y = 4x + 1, \quad y(1) = 8$

27. $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2, \quad y(5) = 1$

28. $x(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + xy = 1, \quad y(1) = 10$

29. $(t + 1)\dfrac{dx}{dt} + x = \ln t, \quad x(1) = 10$

30. $y' + (\tan t)y = \cos^2 t, \quad y(0) = -1$

31. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$, $i(0) = i_0$, L, R y E son constantes

32. $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_m)$, $T(0) = T_0$, k, T_m y T_0 son constantes

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 33 y 34, antes de intentar resolver el problema con valor inicial dado, revise los problemas 71 y 72 en los ejercicios 5.5.

33. ***a***) Exprese la solución del problema con valor inicial dado $y' - 2xy = 2$, $y(0) = 1$, en términos de la **función error**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

b) Use tablas o un SAC para calcular $y(2)$. Use un SAC para graficar la solución sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

34. La **función integral seno** está definida por

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

a) Demuestre que la solución del problema con valor inicial $x^3y' + 2x^2y = 10 \operatorname{sen} x$, $y(1) = 0$ es

$$y = 10x^{-2}[\operatorname{Si}(t) - \operatorname{Si}(1)].$$

b) Use tablas o un SAC para calcular $y(2)$. Use un SAC para graficar la solución sobre el intervalo $(0, \infty)$.

≡ Piense en ello

35. Encuentre una solución continua del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0.$$

Grafique f y la solución del PVI. [*Sugerencia*: Resuelva el problema en dos partes y use continuidad para hacer corresponder las partes de su solución.]

36. Explique por qué no necesitamos usar una constante de integración al calcular un factor de integración $e^{\int P(x)dx}$ para una ecuación diferencial lineal.

37. En el ejemplo 4 resolvimos la ecuación diferencial dada sobre los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(3, \infty)$. Encuentre una solución de la ecuación diferencial sobre el intervalo $(-3, 3)$.

38. Suponga que $P(t)$ representa la población de una especie animal en un entorno en el instante t. Si el símbolo $\propto$ significa "proporcional a", en lenguaje coloquial proporcione una explicación física de la declaración matemática

$$\frac{dP}{dt} \propto P.$$

39. El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales se encuentra en el estudio de un tipo especial de una serie de elementos radiactivos:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x$$

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda_1 x - \lambda_2 y,$$

donde λ_1 y λ_2 son constantes. Resuelva el sistema sujeto a $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

40. La ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

forma parte de una clase de ecuaciones diferenciales no lineales denominada **ecuaciones de Bernoulli**.

a) Use la sustitución $y = u^{-1}$ para demostrar que la ecuación de Bernoulli dada se vuelve

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -x.$$

b) Encuentre una solución de la ecuación de Bernoulli dada al resolver la ecuación diferencial en el inciso *a*).

41. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x + y}$$

no es separable ni lineal en la variable y. Tome el recíproco de ambos miembros de la ecuación. ¿Es posible resolver esta nueva ecuación diferencial?

42. Aunque la ecuación diferencial $y'' + y' = x$ es de segundo orden, es posible resolverla aplicando el método que se analizó en esta sección. Resuelva la ecuación haciendo $Y = y'$.

43. ***a***) Encuentre una familia de soluciones de un parámetro de la ecuación lineal

$$x\frac{dy}{dx} + 3y = 6x^2.$$

b) Encuentre el miembro de la familia de soluciones en el inciso *a*) que satisface la condición inicial $y(-1) = 2$. Proporcione el intervalo sobre el cual esta solución es válida.

c) Encuentre el miembro de la familia de soluciones en el inciso *a*) que satisface la condición inicial $y(1) = 2$. Proporcione el intervalo sobre el cual esta solución es válida.

d) Encuentre una condición inicial de modo que el miembro correspondiente de la familia de soluciones en el inciso *a*) pase por el origen y sea válido sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

8.3 Modelos matemáticos

Introducción Hasta el momento la experiencia que tenemos sobre ecuaciones diferenciales ha estado limitada a resolverlas o comprobar que una función dada es una solución. Pero las matemáticas constituyen un lenguaje, así como una herramienta. Como usted seguramente recordará por el álgebra de la sección 1.7, cuando se resuelve un problema de la "vida real", el lenguaje coloquial se traduce a un lenguaje matemático. De la misma manera, es posible interpretar palabras, leyes empíricas, observaciones, o simplemente suposiciones, en términos matemáticos. Cuando intentamos describir algo, denominado *sistema*, en términos matemáticos se construye un *modelo* de ese sistema. Si algunas veces el sistema cambia con el tiempo, por ejemplo creciendo o decreciendo a cierta *razón* —y la razón de cambio es una derivada—, entonces un **modelo matemático** del sistema puede ser una ecuación diferencial.

En esta sección se consideran unos cuantos modelos matemáticos simples y sus soluciones.

Crecimiento de una población Uno de los primeros intentos por modelar el crecimiento de una población humana por medio de las matemáticas fue hecho por el economista inglés **Thomas Malthus** (1776-1834) en 1798. Básicamente la idea del modelo de Malthus es la suposición de que la razón a la que *aumenta o* crece la población de un país es proporcional a la población total $P(t)$ del país en el instante t. En otras palabras, mientras más personas haya en el instante t, más habrá en el futuro. En términos matemáticos esta suposición puede expresarse como

símbolo de proporcionalidad ↓

$$\frac{dP}{dt} \propto P \qquad \text{o} \qquad \frac{dP}{dt} = kP, \tag{1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Este modelo simple, que fracasa en tomar en cuenta muchos factores (inmigración y migración, por ejemplo) que pueden influir en el crecimiento o decrecimiento de poblaciones humanas, no obstante resultó bastante preciso en la predicción de Estados Unidos durante los años de 1790 a 1860. La ecuación diferencial dada en (1) a menudo se usa para modelar, durante breves periodos, las poblaciones de bacterias o animales pequeños.

La constante de proporcionalidad k en (1) puede determinarse a partir de la solución del problema con valor inicial $dP/dt = kP$, $P(t_0) = P_0$ usando una medición subsecuente de P en un instante $t_1 > t_0$.

EJEMPLO 1 Crecimiento de bacterias

Inicialmente en un cultivo hay P_0 número de bacterias. En $t = 1$ h, se mide que el número de bacterias presentes es $\frac{3}{2}P_0$. Si la tasa de crecimiento es proporcional al número de bacterias $P(t)$ que hay en el instante t, determine el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique.

Solución Primero resolvemos la ecuación diferencial en (1) sujeta a la condición inicial $P(0) = P_0$. Luego usamos la observación empírica de que $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ para determinar la constante de

proporcionalidad k. Ahora ya ha visto que la ecuación $dP/dt = kP$ es separable y lineal. Por el ejemplo 2 de la sección 8.2, donde los símbolos P y t, a la vez, desempeñan las partes de y y x, una familia de soluciones de la ecuación diferencial es

$$P(t) = Ce^{kt}.$$

En $t = 0$, se concluye que $P_0 = Ce^0 = C$, de modo que $P(t) = P_0e^{kt}$. En $t = 1$, tenemos $\frac{3}{2}P_0 = P_0e^k$ o $e^k = \frac{3}{2}$. Por la última ecuación, $k = \ln\frac{3}{2} = 0.4055$. Así,

$$P(t) = P_0e^{0.4055t}.$$

Para encontrar el momento en que el número de bacterias se triplica, resolvemos $3P_0 = P_0e^{0.4055t}$ para t. Se concluye que $0.4055t = \ln 3$, de modo que

$$t = \frac{\ln 3}{0.4055} \approx 2.71 \text{ h}.$$

Vea la FIGURA 8.3.1. ■

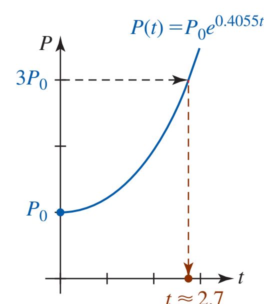


FIGURA 8.3.1 Gráfica de la solución en el ejemplo 1

Nota: La función $P(t)$ obtenida en el ejemplo precedente puede escribirse en forma alterna. Por la ley de los exponentes,

$$P(t) = P_0e^{kt} = P_0(e^k)^t = P_0\left(\frac{2}{3}\right)^t,$$

puesto que $e^k = \frac{3}{2}$. Esta última solución es una forma idónea para calcular $P(t)$ para valores enteros positivos pequeños de t; también muestra con claridad la influencia de observaciones experimentales subsecuentes en $t = 1$ en la solución durante todo el tiempo. Asimismo, observamos que el número verdadero de bacterias presentes inicialmente, en el instante $t = 0$, es bastante irrelevante para encontrar el tiempo requerido para triplicar el número de bacterias en el cultivo. El tiempo necesario para triplicar, por ejemplo, 100 e incluso 100 000 bacterias sigue siendo aproximadamente de 2.7 h.

Decaimiento radiactivo El núcleo de un átomo consta de una combinación de protones y neutrones. Muchas de estas combinaciones de protones y neutrones son inestables; es decir, los átomos decaen o transmutan en átomos de otra sustancia. Se dice que tales núcleos son *radiactivos*. Por ejemplo, con el paso del tiempo el radio altamente radiactivo, Ra-226, transmuta en el gas radón radiactivo, Rn-222. Para modelar el fenómeno del decaimiento radiactivo se supone que la razón dA/dt a que decaen los núcleos de una sustancia es proporcional a la cantidad de sustancia (más precisamente, al número de núcleos) $A(t)$ que quedan en el instante t:

$$\frac{dA}{dt} \propto A \qquad \text{o} \qquad \frac{dA}{dt} = kA. \tag{2}$$

El modelo de decaimiento (2) también ocurre en un experimento biológico, como determinar el tiempo necesario para que 50% de un medicamento sea eliminado del cuerpo por excreción o por el metabolismo. La cuestión de (1) y (2) simplemente es:

- Una sola ecuación diferencial puede servir como un modelo matemático para muchos fenómenos diferentes.

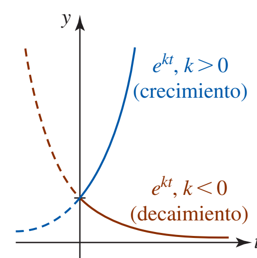


FIGURA 8.3.2 Crecimiento y decaimiento exponencial

Por supuesto, las ecuaciones (1) y (2) son exactamente las mismas; sus soluciones son exactamente las mismas (a saber, Ce^{kt}); la diferencia radica sólo en los símbolos y su interpretación. Como se muestra en la FIGURA 8.3.2, la función exponencial e^{kt} crece cuando t crece para $k > 0$ y decrece cuando t decrece para $k < 0$. Por tanto, los problemas para describir el crecimiento (ya sea de una población animal, de bacterias e incluso de capital) son caracterizados por un valor positivo k, mientras que los problemas para describir el decaimiento producen un valor k negativo. En consecuencia, se dice que k es una **constante de crecimiento** ($k > 0$) o una **constante de decaimiento** ($k < 0$).

Vida media En física, la **vida media** es una medida de la estabilidad de una sustancia radiactiva. La vida media es simplemente el tiempo necesario para que la mitad de átomos en una cantidad inicial A_0 se desintegre, o transmute, en los átomos de otro elemento. En términos de la solución $A(t) = Ce^{kt}$ de (2), la vida media de un elemento que decae es el tiempo t para el cual

$A(t) = \frac{1}{2}A_0$. Mientras más larga sea la vida media de una sustancia, más estable es. Por ejemplo, la vida media del radio altamente radiactivo, Ra-226, es alrededor de 1 700 años. En 1 700 años la mitad de una cantidad dada de Ra-226 se transmuta en radón, Rn-222. El isótopo más común del uranio, U-238, tiene una vida media aproximada de 4 500 millones de años. Aproximadamente en ese tiempo, la mitad de una cantidad de U-238 se transmuta en plomo, Pb-206.

Datación con carbono En la década de 1940 el químico Willard Libby concibió un método para usar carbono radiactivo como un medio para determinar la edad aproximada de los fósiles. La teoría de **datación con carbono** se basa en el hecho de que el isótopo radiactivo de carbono 14 se produce en la atmósfera por la acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. La proporción de la cantidad de C-14 al carbono normal en la atmósfera parece ser constante y, como consecuencia, la cantidad proporcional del isótopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atmósfera. Cuando un organismo muere, la absorción de C-14, por respiración o alimentación, se detiene. Así, al comparar la cantidad proporcional de C-14 presente, por ejemplo, en un fósil con la razón constante encontrada en la atmósfera, es posible obtener una estimación razonable de su edad. El método se basa en el conocimiento de que la vida media del C-14 es aproximadamente 5 730 años. Por su obra, Libby fue galardonado con el premio Nobel de Química en 1960. El método de Libby se ha usado para datar el mobiliario de madera en tumbas egipcias, la cubierta de lino tejido de los rollos del Mar Muerto y el controvertido manto de Turín.

EJEMPLO 2 Edad de un fósil

Se encontró que un hueso fosilizado contiene $\frac{1}{1\,000}$ de la cantidad original de C-14. Determine la edad del fósil.

Solución El punto de partida es la ecuación diferencial $dA/dt = kA$, donde $A(t)$ es la cantidad de C-14 restante en el instante t. Si A_0 es la cantidad inicial de C-14 en el hueso, como en el ejemplo 1 se concluye que

$$A(t) = A_0e^{kt}.$$

Podemos usar el hecho de que $A(5\,730) = \frac{1}{2}A_0$ para determinar la constante de decaimiento k. Hacer $t = 5\,730$ en $A(t)$ implica $\frac{1}{2}A_0 = A_0e^{5\,730k}$ y entonces de $5\,730k = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ se encuentra que

$$k = -\frac{1}{5\,730}\ln 2 = -0.00012097.$$

En consecuencia, $A(t) = A_0e^{-0.00012097t}$. Entonces, la edad del fósil se determina a partir de la ecuación $A(t) = \frac{1}{1\,000}A_0$. Es decir, $\frac{1}{1\,000}A_0 = A_0e^{-0.00012097t}$ y así $-0.00012097t = \ln\frac{1}{1\,000} = -\ln 1\,000$ produce

$$t = \frac{\ln 1\,000}{0.00012097} \approx 57\,103 \text{ años.}$$ ■

La fecha encontrada en el ejemplo 2 está en realidad en la frontera de la precisión para este método. La técnica de costumbre del carbono 14 está limitada a alrededor de 9 vidas medias o aproximadamente 50 000 años. Una razón es que el análisis químico necesario para obtener una medición precisa del C-14 restante se vuelve formidable alrededor del punto de $\frac{1}{1\,000}A_0$. Además, este análisis demanda la destrucción de una muestra más bien grande del espécimen. Si esta medición se logra indirectamente, con base en la radiactividad verdadera del espécimen, entonces resulta muy difícil distinguir entre la radiación del fósil y la radiación normal del entorno.

En desarrollos recientes, geólogos han demostrado que en algunos casos fechas determinadas por datación de carbono pueden ser hasta de 3 500 años. Una conjetura para este error posible es el hecho de que se sabe que los niveles de C-14 en el aire varían con el tiempo. Los mismos científicos han inventado otra técnica de datación basada en el hecho de que los organismos vivos ingieren trazas de uranio. Al medir las cantidades relativas de uranio y torio (el isótopo en el que decae el uranio), y al conocer las vidas medias de estos elementos, los científicos pueden determinar la edad de un fósil. La ventaja de este método es que con él es posible fechar fósiles de hasta 500 000 años; la desventaja es que su efectividad se reduce en su mayor parte a fósiles marinos. Otra técni-

ca isotópica, en la que se usan potasio 40 y argón 40, cuando es aplicable, puede proporcionar fechas de varios millones de años. Vea el problema 37 en los ejercicios 8.3. Algunas veces también son posibles métodos no isotópicos basados en el uso de aminoácidos.

Enfriamiento La ley de enfriamiento de Newton establece que la razón a que la temperatura $T(t)$ cambia en un cuerpo que se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura en el cuerpo y la temperatura constante T_m del medio circundante; es decir,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \tag{3}$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

EJEMPLO 3 Enfriamiento de un pastel

Cuando un pastel se retira del horno, su temperatura es de 300 °F. Tres minutos después su temperatura es de 200 °F. Determine la temperatura del pastel en cualquier instante después que se ha sacado del horno si la temperatura ambiente es de 70 °F.

Solución La temperatura ambiente (70 °F) se identifica como T_m. Para encontrar la temperatura del pastel en el instante t, es necesario resolver el problema con valor inicial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70), \quad T(0) = 300$$

y determinar el valor de k de modo que $T(3) = 200$. La ecuación diferencial es separable y lineal. En el supuesto de que $T > 70$, por separación de variables se concluye que

$$\frac{1}{T-70}\,dT = k\,dt$$

$$\int \frac{1}{T-70}\,dT = \int k\,dt$$

$$\ln(T - 70) = kt + C_1$$

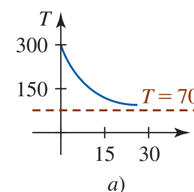
$$T - 70 = Ce^{kt} \quad \leftarrow C = e^{C_1}$$

$$T = 70 + Ce^{kt}.$$

Cuando $t = 0$, $T = 300$, de modo que $300 = 70 + C$ proporciona $C = 230$ y en consecuencia $T(t) = 70 + 230e^{kt}$. A partir de $T(3) = 200$ se encuentra $e^{3k} = \frac{13}{23}$ y así, hasta cuatro cifras decimales, con una calculadora da

$$k = \frac{1}{3}\ln\frac{13}{23} = -0.1902.$$

Entonces, $T(t) = 70 + 230e^{-0.1902t}$. En la FIGURA 8.3.3 se muestra la gráfica de T junto con algunos valores calculados. ■



a)

t (minutos)	$T(t)$
20.1	75°
21.3	74°
22.8	73°
24.9	72°
28.6	71°
32.3	70.5°

b)

FIGURA 8.3.3 Gráfica de la solución en el ejemplo 3

Mezclas La mezcla de dos líquidos a menudo origina una ecuación diferencial de primer orden. En el ejemplo siguiente se considera la mezcla de dos soluciones salinas de concentraciones diferentes.

EJEMPLO 4 Mezcla de una solución salina

Inicialmente, 50 lb de sal se disuelven en un gran tanque que contiene 300 gal de agua. Una solución de salmuera se bombea hacia el tanque a razón de 3 gal/min, y luego la solución bien mezclada se extrae al mismo ritmo. Vea la FIGURA 8.3.4. Si la concentración de la solución que entra es 2 gal/lb, determine la cantidad de sal en el tanque en el instante t. ¿Cuánta sal hay después de 50 min? ¿Y después de un gran tiempo?

Solución Sea $A(t)$ la cantidad de sal (en libras) en el tanque en el instante t. Para problemas de esta clase, la razón neta a la que $A(t)$ cambia está dada por

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix}\text{razón de la sustancia}\\ \text{que entra}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{razón de la sustancia}\\ \text{que sale}\end{pmatrix} = R_1 - R_2. \tag{4}$$

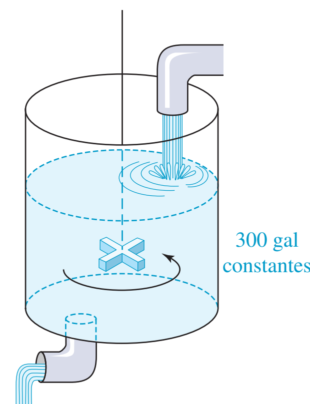


FIGURA 8.3.4 Tanque de mezclado en el ejemplo 4

Luego, la razón a la que la sal entra al tanque, en libras por minuto, es

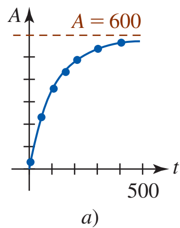
$$R_1 = (3 \text{ gal/min}) \cdot (2 \text{ lb/gal}) = 6 \text{ lb/min},$$

mientras que la razón a la que la sal sale es

$$R_2 = (3 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{A}{300} \text{ lb/gal}\right) = \frac{A}{100} \text{ lb/min}.$$

Por tanto, la ecuación (4) se vuelve

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100} \quad \text{o} \quad \frac{dA}{dt} + \frac{1}{100}A = 6. \tag{5}$$



a)

t (minutos)	*A*(*t*)
50	266.41
100	397.67
150	477.27
200	525.57
300	572.62
400	589.93

b)

FIGURA 8.3.5 Gráfica de la solución en el ejemplo 4

Resolvemos la última ecuación sujeta a la condición inicial $A(0) = 50$.

Puesto que el factor de integración es $e^{t/100}$, podemos escribir (5) como

$$\frac{d}{dt}[e^{t/100}A] = 6e^{t/100}$$

y por tanto $e^{t/100}A = 600e^{t/100} + C$ o $A = 600 + Ce^{-t/100}$. Cuando $t = 0$, $A = 50$, de modo que $C = -550$. Por último, obtenemos

$$A(t) = 600 - 550e^{-t/100}. \tag{6}$$

En $t = 50$ se encuentra $A(50) = 266.41$ lb. También, cuando $t \to \infty$ por (6) y la FIGURA 8.3.5 vemos que $A \to 600$. Por supuesto, esto es lo que esperábamos; durante un largo periodo el número de libras de sal en la solución debe ser (300 gal)(2 lb/gal) = 600 lb. ■

En el ejemplo 4 se asumió que la razón a que se bombeaba la solución era la misma que la razón a que se extraía la solución. Sin embargo, esto no necesariamente es así; la solución de salmuera mezclada puede bombearse a una razón más rápida o más lenta que la razón a que se bombea a otra solución. Por ejemplo, si la solución bien mezclada se extrae a la razón más lenta de 2 gal/min, entonces la solución se acumula a razón de $(3 - 2)$ gal/min = 1 gal/min. Al cabo de t minutos hay $300 + t$ gal de salmuera en el tanque. Entonces, la razón a la que emerge la sal es

$$R_2 = (2 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{A}{300 + t} \text{lb/gal}\right) = \frac{2A}{300 + t} \text{ lb/min}.$$

En este caso, la ecuación (4) se vuelve

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{2A}{300 + t} \quad \text{o} \quad \frac{dA}{dt} + \frac{2}{300 + t}A = 6. \tag{7}$$

Al analizar la última ecuación se observa que es lineal. Dejamos su solución como ejercicio. Vea los problemas 18-20 en los ejercicios 8.3.

Segunda ley de movimiento de Newton Para construir un modelo matemático del movimiento de un cuerpo en un campo de fuerza, el punto de partida de costumbre es la segunda ley de movimiento de Newton. Recuerde que la **primera ley de movimiento de Newton** establece que un cuerpo permanece en reposo o continúa moviéndose a velocidad constante a menos que sobre él actúe una fuerza externa. En cualquiera de estos dos casos, lo anterior es equivalente a afirmar que cuando la suma de las fuerzas $F = \Sigma F_k$ (es decir, la fuerza neta o resultante), que actúan sobre el cuerpo es cero, entonces la aceleración a del cuerpo es cero. La **segunda ley de movimiento de Newton** indica que cuando la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo *no* es cero, entonces la fuerza neta es proporcional a su aceleración a, o más precisamente, $F = ma$, donde m es la masa del cuerpo.

Cuerpos que caen y resistencia del aire Se ha establecido experimentalmente que cuando un cuerpo se mueve a través de un medio resistivo como el aire (o agua), la fuerza retardadora debida al medio, denominada **fuerza de arrastre**, actúa en dirección opuesta a la del movimiento y es proporcional a la potencia de la velocidad del cuerpo, es decir, kv^{α}. Aquí k es una constante de proporcionalidad y α es constante en el intervalo $1 \leq \alpha \leq 2$. En términos generales, para velocidades más lentas se toma $\alpha = 1$. Ahora, suponga que en un cuerpo de masa m que cae la resistencia del aire es proporcional a su velocidad instantánea v. Si en estas circunstancias tomamos la dirección positiva orientada hacia abajo, entonces la fuerza neta que actúa sobre la

masa está dada por $mg - kv$, donde el peso mg del cuerpo es una fuerza que actúa en la dirección positiva y la resistencia del aire es una fuerza que actúa en la dirección opuesta o hacia arriba. Vea la FIGURA 8.3.6. Luego, puesto que v está relacionada con la aceleración a por $dv/dt = a$, la segunda ley de Newton se vuelve $F = ma = m\,dv/dt$. Al igualar la fuerza neta con esta forma de la segunda ley de Newton obtenemos una ecuación diferencial lineal para la velocidad v del cuerpo en el instante t,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv, \tag{8}$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

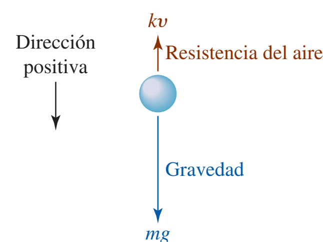


FIGURA 8.3.6 Fuerzas que actúan sobre un cuerpo que cae de masa m

Para movimiento a gran velocidad, como un paracaidista que cae libremente antes de abrir su paracaídas, suele suponerse que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea; en otras palabras, $\alpha = 2$. Si de nuevo la dirección positiva se toma hacia abajo, entonces un modelo para la velocidad v de un cuerpo que cae está dado por la ecuación diferencial no lineal

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \tag{9}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Vea el problema 22 en los ejercicios 8.3.

EJEMPLO 5 Velocidad de un cuerpo que cae

Resuelva (8) sujeta a la condición inicial $v(0) = v_0$.

Solución La ecuación (8) es lineal y tiene la forma normal

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g. \tag{10}$$

Al multiplicar (10) por el factor de integración $e^{kt/m}$ es posible escribir la ecuación como

$$\frac{d}{dt}\left[e^{kt/m}v\right] = g\,e^{kt/m}.$$

Luego, al integrar y despejar v obtenemos $v(t) = mg/k + Ce^{-kt/m}$. La condición inicial $v(0) = v_0$ implica $C = v_0 - mg/k$ y así la función velocidad para el cuerpo que cae es

$$v(t) = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}. \tag{11}$$ ■

Dos observaciones son pertinentes con respecto a la solución en el ejemplo 5. Si deseamos encontrar la función posición $s(t)$ del cuerpo que cae, entonces se trata simplemente de integrar la ecuación

$$\frac{ds}{dt} = v(t),$$

donde $v(t)$ está dada en (11). Vea el problema 21 en los ejercicios 8.3. También, debido a la resistencia del aire, la solución (11) muestra claramente que la velocidad de un cuerpo que cae a una gran distancia no aumenta de manera indefinida. Debido a que el término $(v_0 - mg/k)e^{-kt/m}$ en (11) es *transitorio* (vea la página 448), vemos que $v(t) \to mg/k$ cuando $t \to \infty$. Este valor limitante de la velocidad $v_{ter} = mg/k$ se denomina **velocidad terminal** del cuerpo. Se deja como ejercicio encontrar $v(t)$ y v_{ter} cuando el modelo matemático para la velocidad está dado por (9). Vea el problema 22 en los ejercicios 8.3.

Ejercicios 8.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-25.

≡ Fundamentos

1. Se sabe que la población de cierta comunidad crece en razón proporcional al número de personas que hay en el instante t. Si la población se duplica en 5 años, ¿en cuánto tiempo se triplica? ¿Y en cuánto cuadruplica?

2. Suponga que sabe que la población de la comunidad en el problema 1 es 10 000 después de 3 años. ¿Cuál era la población original? ¿Cuál será la población en 10 años?

3. La población de una ciudad crece a razón proporcional a la población en el instante t. La población inicial de 500

aumenta 15% en 10 años. ¿Cuál será la población en 30 años?

4. La población de bacterias en un cultivo crece en razón proporcional al número de bacterias presentes en el instante t. Después de 3 h se observa que hay 400 bacterias presentes. Al cabo de 10 h hay 2 000 bacterias presentes. ¿Cuál era el número inicial de bacterias?

5. El isótopo radiactivo del plomo, Pb-209, decae en razón proporcional a la cantidad presente en el instante t y tiene una vida media de 3.3 h. Si inicialmente hay 1 g de plomo, ¿en cuánto tiempo decae 90% del plomo?

6. Inicialmente había 100 mg de una sustancia radiactiva. Después de 6 h la masa disminuyó 3%. Si la razón de decaimiento es proporcional a la cantidad de sustancia presente en el instante t, encuentre lo que queda después de 24 h.

7. Determine la vida media de la sustancia radiactiva descrita en el problema 6.

8. Determine la vida media de una sustancia radiactiva si, en general,

$$t = \frac{(t_2 - t_1)\ln 2}{\ln(A_1/A_2)},$$

donde $A_1 = A(t_1)$ y $A_2 = A(t_2)$, $t_1 < t_2$.

9. Cuando un haz vertical de luz pasa a través de una sustancia transparente, la razón a que decrece su intensidad I es proporcional a $I(e)$, donde e representa el espesor del medio (en pies). En agua de mar clara, la intensidad 3 pies por abajo de la superficie es 25% de la intensidad inicial I_0 del haz incidente. ¿Cuál es la intensidad de haz 15 pies por abajo de la superficie?

10. Cuando el interés es compuesto continuo, la cantidad de dinero aumenta en razón proporcional a la cantidad S que hay en el instante t: $dS/dt = rS$, donde r es la tasa de interés anual.

a) Encuentre la cantidad de dinero acumulada al cabo de 5 años cuando se depositan \$5 000 en una cuenta de ahorro que paga $5\frac{3}{4}$% de interés compuesto continuo.

b) ¿En cuántos años se duplicará la suma inicial depositada?

c) Use una calculadora para comparar el número obtenido en el inciso *a*) con el valor

$$S = 5\,000\left(1 + \frac{0.0575}{4}\right)^{5(4)}.$$

Este valor representa la cantidad acumulada cuando el interés se compone trimestralmente.

11. En un trozo de madera quemada, o carbón, se encontró que 85.5% del C-14 había decaído. Use la información en el ejemplo 2 para determinar la edad aproximada de la madera. (Se trata precisamente de los datos que usaron los arqueólogos para fechar pinturas prehistóricas en una cueva en Lascaux, Francia.)

12. Un termómetro se saca de una habitación interior a una exterior donde la temperatura del aire es 5 °F. Después de 1 min la lectura del termómetro es de 55 °F, y después de 5 min, es de 30 °F. ¿Cuál es la temperatura inicial de la habitación?

13. Un termómetro se saca de una habitación donde la temperatura del aire es de 70 °F a una habitación exterior donde la temperatura es de 10 °F. Después de $\frac{1}{2}$ min la lectura del termómetro es de 50 °F. ¿Cuál es la lectura en $t = 1$ min? ¿Cuánto tiempo es necesario para que el termómetro llegue a 15 °F?

14. La ecuación (3) también se cumple cuando un objeto absorbe calor del medio circundante. Si una pequeña barra metálica cuya temperatura inicial es de 20 °C se deja caer en un contenedor de agua hirviendo, ¿en cuánto tiempo la barra alcanza 90 °C si se sabe que su temperatura aumentó 2° en 1 s? ¿En cuánto tiempo la barra alcanza 98 °C?

15. Un tanque contiene 200 L de fluido en el que se disolvieron 30 g de sal. Luego, salmuera que contiene 1 g de sal por litro se bombea hacia el tanque a razón de 4 L/min; la solución bien mezclada se extrae a la misma razón. Encuentre el número de gramos de sal $A(t)$ que hay en el tanque en el instante t.

16. Resuelva el problema 15 en el supuesto de que hacia el tanque se bombea agua pura.

17. Un gran tanque está lleno de 500 gal de agua pura. La salmuera que contiene 2 lb de sal por galón se bombea hacia el tanque a razón de 5 gal/min. Encuentre el número de libras de sal $A(t)$ que hay en el tanque en el instante t.

18. Resuelva la ecuación diferencial (7) sujeta a la condición inicial $A(0) = 50$ lb.

19. Vuelva a leer el análisis a continuación del ejemplo 4. Luego resuelva el problema 17 en el supuesto de que la solución se extrae a la razón más rápida de 10 gal/min. Determine cuándo está vacío el tanque.

20. Un gran tanque contiene 100 gal de un fluido en el cual se han disuelto 10 lb de sal. Salmuera que contiene $\frac{1}{2}$ lb de sal por galón se bombea hacia el tanque a razón de 6 gal/min. Luego, la solución bien mezclada se bombea hacia fuera a una razón más lenta de 4 gal/min. Encuentre el número de libras de sal que hay en el tanque después de 30 min.

21. Vuelva a leer el análisis a continuación del ejemplo 5. Luego encuentre la función posición $s(t)$ para el cuerpo que cae en el ejemplo 5. Puesto que se asumió que la dirección positiva es hacia abajo, suponga que $s(0) = 0$.

22. Resuelva la ecuación diferencial (9) sujeta a $v(0) = v_0$. Exprese la función velocidad $v(t)$ en términos de la función tangente hiperbólica. Con ayuda de la figura 3.10.2*a*) determine la velocidad terminal v_{ter} de un cuerpo que cae.

Modelos matemáticos adicionales

23. La razón en que un medicamento se disemina en el torrente sanguíneo está regida por la ecuación diferencial

$$\frac{dX}{dt} = A - BX,$$

donde A y B son constantes positivas. La función $X(t)$ describe la concentración del medicamento en el torrente sanguíneo en el instante t. Encuentre $X(t)$. ¿Cuál es el valor limitante de $X(t)$ cuando $t \to \infty$? ¿En qué instante la concentración es la mitad de su valor limitante? Suponga que $X(0) = 0$.

24. Suponga que una célula está suspendida en una solución que contiene un soluto de concentración constante C_s. Además, suponga que el volumen V de la célula es constante y que el área de su membrana permeable es la constante A. Por la **ley de Fick**, la razón de cambio de su masa m es directamente proporcional al área A y a la diferencia $C_s - C(t)$, donde $C(t)$ es la concentración del soluto dentro de la célula en el instante t. Encuentre $C(t)$ si $m = VC(t)$ y $C(0) = C_0$. Vea la FIGURA 8.3.7.

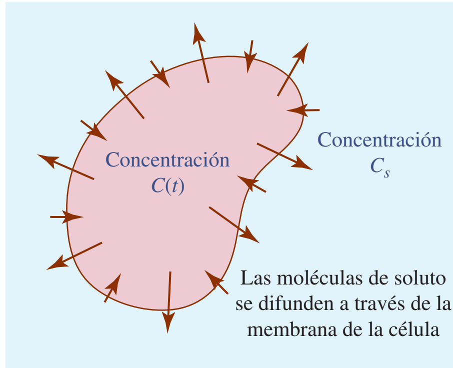


FIGURA 8.3.7 Célula en el problema 24

25. Un marcapasos, mostrado en la FIGURA 8.3.8, consta de una batería, un capacitor y el corazón como resistor. Cuando el interruptor S está en P, el capacitor se carga; cuando S está en Q, el capacitor se descarga, enviando un estímulo eléctrico al corazón. Durante este tiempo, la tensión E aplicada al corazón está dada por la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E, \quad t_1 < t < t_2,$$

donde R y C son constantes. Determine $E(t)$ si $E(t_1) = E_0$. (Por supuesto, la apertura y el cierre del interruptor son periódicos a fin de simular el latido cardiaco natural.)

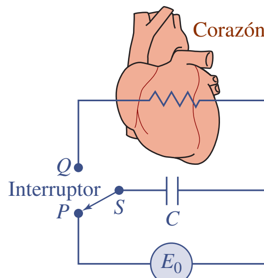


FIGURA 8.3.8 Marcapasos en el problema 25

26. En un circuito en serie que contiene un solo resistor y un inductor, la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de la caída de voltaje a través del inductor $(L(di/dt))$ y la caída de voltaje a través del resistor (iR) es igual al voltaje aplicado (E) al circuito. Vea la FIGURA 8.3.9. Así, obtenemos la ecuación diferencial para la corriente $i(t)$:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E,$$

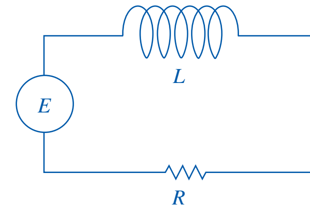


FIGURA 8.3.9 Circuito en serie en el problema 26

donde L y R son constantes como la inductancia y la resistencia, respectivamente. Determine la corriente $i(t)$ si E es 12 volts, la inductancia es $\frac{1}{2}$ henry, la resistencia es 10 ohms e $i(0) = 0$.

27. Una batería de 30 volts está conectada a un circuito en serie donde la inductancia es 0.1 henrys y la resistencia es 50 ohms. Encuentre la corriente $i(t)$ si $i(0) = 0$. Determine el comportamiento de la corriente para grandes valores de tiempo. (Vea el problema 26.)

28. Suponga que un tanque de agua tiene la forma de un cilindro circular recto. Si se permite una fuga de agua bajo el efecto de la gravedad a través de un orificio en el fondo del tanque, entonces la altura h del agua en el instante t está dada por la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{dh}{dt} = -c\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh},$$

donde A_w y A_h son las áreas de la sección transversal del agua y el orificio, respectivamente, y c es un factor de fricción/contracción en el orificio. Vea la FIGURA 8.3.10.

a) Resuelva la ecuación si la altura inicial del agua es 20 pies y $A_w = 50$ pies^2 y $A_h = \frac{1}{4}$ pie^2.
b) Si $c = 1$, ¿en cuánto tiempo se vacía el tanque?
c) ¿En cuánto tiempo se vacía el tanque si el factor de fricción/contracción es $c = 0.6$?

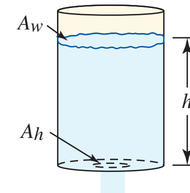


FIGURA 8.3.10 Tanque en el problema 28

29. Alrededor de 1840, el biólogo matemático belga P. F. Verhulst trabajaba en modelos matemáticos para pronosticar la población humana de los países. Una de las ecuaciones estudiadas era

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP),$$

donde $a > 0$, $b > 0$. Esta ecuación diferencial ahora se conoce como **ecuación logística**; la gráfica de una solución de la ecuación diferencial se denomina **curva logística**. Demuestre que una solución de esta ecuación diferencial sujeta a la condición inicial $P(0) = P_0$ es

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}.$$

30. La población $P(t)$ en el instante t en un suburbio de una gran ciudad se modela por el problema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7}P), \quad P(0) = 5\,000,$$

donde t se mide en meses. Encuentre $P(t)$ y determine el valor limitante de la población sobre un largo periodo. ¿En qué momento la población es igual a la mitad de este valor limitante?

31. Suponga que un estudiante portador de un virus de influenza regresa al campus aislado de una universidad de 1 000 estudiantes. Si se supone que la razón a la que el virus se propaga es proporcional no sólo al número x de estudiantes contagiados sino también el número $1\,000 - x$ de estudiantes no contagiados, entonces un modelo matemático del número de estudiantes contagiados es

$$\frac{dx}{dt} = kx(1\,000 - x),$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad y t se mide desde el día en que el estudiante contagiado regresa al campus. Si $x(0) = 1$ y se observa que $x(4) = 50$, entonces según este modelo, ¿cuántos estudiantes están contagiados después de 6 días? Trace una gráfica de la curva solución.

32. Cuando dos productos químicos A y B se combinan, se forma un compuesto C. La reacción de segundo orden resultante entre los dos productos químicos es modelada por la ecuación diferencial

$$\frac{dX}{dt} = k(250 - X)(40 - X),$$

donde $X(t)$ denota el número de gramos del compuesto C presente en el instante t.

a) Determine $X(t)$ si se sabe que $X(0) = 0$ g y $X(10) = 30$ g.
b) ¿Qué cantidad del compuesto C hay a los 15 minutos?
c) Las cantidades de productos químicos A y B restantes en el instante t son $50 - \frac{1}{5}X$ y $32 - \frac{4}{5}X$, respectivamente. ¿Cuántos gramos del compuesto C se forman cuando $t \to \infty$? ¿Cuántos gramos de los productos químicos A y B quedan cuando $t \to \infty$?

Piense en ello

33. Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial v_0. Vea la FIGURA 8.3.11. Si la dirección positiva se toma hacia arriba, entonces cuando no hay resistencia del aire, la ecuación diferencial para la velocidad v después del momento de ignición es

$$v\frac{dv}{dy} = -\frac{k}{y^2},$$

donde k es una constante positiva.

a) Resuelva la ecuación diferencial.
b) Si $k = gR^2$ y $g = 32$ pies/s^2, $R = 4\,000$ mi, use una calculadora para demostrar que la "velocidad de escape" de un cohete es aproximadamente $v_0 = 25\,000$ mi/h.

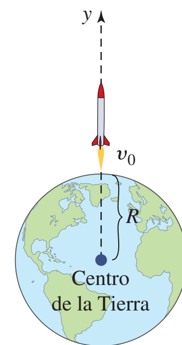


FIGURA 8.3.11 Cohete en el problema 33

34. Suponga que una esfera de hielo se funde a una razón proporcional a su área superficial. Determine el volumen V de la esfera en el instante t.

35. En un modelo para el crecimiento de tejido, sea $A(t)$ el área del cultivo de tejido en el instante t. Vea la FIGURA 8.3.12. Puesto que la mayoría de divisiones celulares se llevan a cabo en la porción periférica de tejido, el número de células en la periferia es proporcional a $\sqrt{A(t)}$. Si se supone que la razón de crecimiento del área es conjuntamente proporcional a $\sqrt{A(t)}$ y $M - A(t)$, entonces un modelo matemático para A está dado por

$$\frac{dA}{dt} = k\sqrt{A}(M - A),$$

donde M es el área final de tejido cuando se ha completado el crecimiento.

a) Resuelva la ecuación diferencial por separación de variables. [*Sugerencia*: Use una sustitución como en la sección 7.2 para efectuar la integración con respecto a A.]
b) Encuentre $\lim_{t\to\infty} A(t)$.

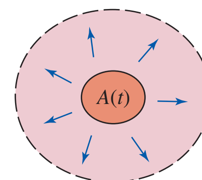


FIGURA 8.3.12 Crecimiento de tejido en el problema 35

Proyectos

36. Un clásico matemático: Instante de fallecimiento El siguiente problema aparece en casi todos los textos sobre ecuaciones diferenciales.

En una habitación de una casa donde la temperatura era constante de 70 °F se encontró un cuerpo sin vida. Al medir la temperatura del cuerpo al momento de su descubrimiento, la lectura fue de 85 °F. Una segunda medición, una hora después, mostró que la temperatura del cuerpo era de 80 °F. Use el hecho de que si $t = 0$ corresponde al instante de fallecimiento, entonces la temperatura del cuerpo en ese instante era de 98.6 °F. Determine cuántas horas transcurrieron entre el fallecimiento y el descubri-

miento del cuerpo. [*Sugerencia*: Sea $t_1 > 0$ el instante en que se descubrió el cuerpo.]

37. Fechamiento con potasio/argón El mineral potasio, cuyo símbolo químico es K, es el octavo elemento más abundante en la corteza terrestre, constituye alrededor de 2% del peso de ésta, y uno de sus isótopos naturales, el K-40 es radiactivo. El decaimiento radiactivo del K-40 es más complicado que el del carbono 14 porque cada uno de sus átomos decae a través de una o dos reacciones de decaimiento en una de dos sustancias: el mineral calcio 40 (Ca-40) o el gas argón 40 (Ar-40). Se han desarrollado métodos de fechamiento con estos dos productos de decaimiento. En cada caso, la edad de una muestra se calcula usando la razón entre dos números: la cantidad del isótopo *padre* K-40 en la muestra y la cantidad del isótopo *hijo* (Ca-40 o Ar-40) en la muestra que es **radiogénico**, en otras palabras, la sustancia que se origina a partir del decaimiento del isótopo padre después de la formación de la roca.

La cantidad de K-40 en la muestra es fácil de calcular. El K-40 incluye 1.17% de potasio natural existente, y este pequeño porcentaje está distribuido de manera bastante uniforme, de modo que la masa de K-40 en la muestra es justo 1.17% de la masa total de potasio en la muestra, que puede medirse. Pero por varias razones resulta complicado, y algunas veces problemático, determinar cuánto de Ca-40 en una muestra es radiogénico. En contraste, cuando una roca ígnea se forma debido a actividad volcánica, todo el gas argón (y otros gases) previamente atrapado en la roca es dispersado por el calor intenso. Cuando la roca se enfría y solidifica, el gas atrapado dentro de la roca tiene la misma composición que la atmósfera. Hay tres isótopos estables del argón, y en la atmósfera aparecen en las abundancias relativas siguientes: 0.063% Ar-38, 0.337% Ar-36 y 99.60% Ar-40. De éstos, justo uno, el Ar-36, no es creado radiogénicamente por el decaimiento de cualquier elemento, de modo que cualquier Ar-40 que exceda 99.60/(0.337) = 295.5 veces la cantidad de Ar-36 debe ser radiogénico. Así, la cantidad de Ar-40 radiogénico en la muestra puede determinarse a partir de las cantidades de Ar-38 y Ar-36 en la muestra, que es posible medir.

En el supuesto de que tenemos una muestra de roca para la cual se han determinado la cantidad de K-40 y la cantidad de Ar-40 radiogénico, ¿cómo puede calcularse la edad de la roca? Sean $P(t)$ la cantidad de K-40, $A(t)$ la cantidad de Ar-40 radiogénico y $C(t)$ la cantidad de Ca-40 radiogénico en la muestra como funciones del tiempo t en años desde la formación de la roca. Entonces un modelo matemático para el decaimiento de K-40 es el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$\frac{dA}{dt} = k_A P$$
$$\frac{dC}{dt} = k_C P$$
$$\frac{dP}{dt} = -(k_A + k_C)P,$$

donde $k_A = 0.581 \times 10^{-10}$ y $k_C = 4.962 \times 10^{-10}$.

a) Encuentre una fórmula para $P(t)$. ¿Cuál es la vida media del K-40?

b) Demuestre que

$$A(t) = \frac{k_A}{k_A + k_C}P(t)(e^{(k_A + k_C)t} - 1).$$

c) Después de mucho tiempo (es decir, sea $t \to \infty$), ¿qué porcentaje del K-40 originalmente presente en la muestra decae en Ar-40? ¿Qué porcentaje decae en Ca-40?

d) Demuestre que la edad t de la roca como una función de las cantidades presentes $P(t)$ de K-40 y $A(t)$ de Ar-40 radiogénico en la muestra es

$$t = \frac{1}{k_A + k_C}\ln\left[\frac{A(t)}{P(t)}\left(\frac{k_A + k_C}{k_A}\right) + 1\right].$$

e) Suponga que se descubre que cada gramo de una muestra de roca contiene 8.6×10^{-7} gramos de Ar-40 radiogénico y 5.3×10^{-6} gramos de K-40. ¿Cuál es la edad de la roca?

8.4 Curvas solución sin solución

Introducción La mayor parte de las ecuaciones diferenciales no pueden resolverse. Quizá la última oración deba equilibrarse al mencionar que *muchas* ecuaciones diferenciales tienen solución, pero el problema consiste en encontrarlas. Cuando se afirma que una solución de una ecuación diferencial existe no quiere decirse que también existe un método para encontrarla en el sentido de poder mostrar la solución exacta; a saber, una solución dada por una función explícita o como una función definida implícitamente. Tal vez lo mejor que puede hacerse es analizar una ecuación diferencial *cualitativamente* o *numéricamente*.

En esta sección abordaremos dos formas de analizar cualitativamente una ecuación diferencial de primer orden. Empezamos con un concepto fundamental: la derivada dy/dx proporciona la pendiente.

Una ecuación diferencial de primer orden define la pendiente Debido a que la solución $y(x)$ de una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = F(x, y)$ es una función diferenciable sobre algún intervalo I, también debe ser continua sobre I. Así, la curva solución correspondiente sobre I no tiene interrupciones y debe poseer una recta tangente en cada punto $(x, y(x))$. La pendiente de la recta tangente en $(x, y(x))$ sobre una curva solución es el valor de la primera derivada dy/dx en

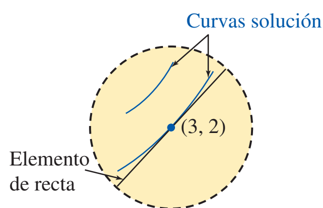


FIGURA 8.4.1 Vecindad del punto (3, 2)

este punto, y esto se conoce a partir de la **función pendiente** F de la ecuación diferencial: $F(x, y(x))$. Luego, suponga que (x, y) representa cualquier punto en el plano xy en que está definida la función F. La función pendiente F asigna un valor $F(x, y)$ al punto; el valor es la pendiente de una recta. Un segmento de recta corto, denominado **elemento de recta**, se traza a través de (x, y) con pendiente $F(x, y)$. Por ejemplo, considere la ecuación $dy/dx = x - y$, donde $F(x, y) = x - y$. En el punto (3, 2), por ejemplo, la pendiente de un elemento de recta es $F(3, 2) = 1$. Como se muestra en la FIGURA 8.4.1, una curva solución que pase cerca de (3, 2) tiene una forma semejante al elemento de recta; una curva solución diferente que pase cerca de (3, 2) tiene una forma semejante en una *pequeña* vecindad del punto.

Campos de dirección Ahora suponga que $F(x, y)$ se evalúa de manera sistemática sobre una retícula rectangular de puntos en el plano xy y que se traza un elemento de recta en cada punto donde se evalúa F. La colección de todos estos elementos de recta se denomina **campo de dirección** o **campo de pendientes** de la ecuación diferencial $dy/dx = F(x, y)$. Visualmente, el campo de dirección sugiere la apariencia de una forma de una familia de curvas solución de la ecuación diferencial y en consecuencia es posible observar ciertos aspectos cualitativos (por ejemplo, crecimiento, decrecimiento y concavidad) de una curva solución. Una sola curva solución que lentamente recorre el campo de dirección debe seguir el patrón del campo; es tangente a un elemento de recta cuando corta un punto en la retícula.

Curvas solución sin solución Trazar un campo de dirección manualmente es algo que se hace en forma directa, pero consume tiempo; tal vez sea una de las tareas sobre las que puede argumentarse que es algo que sólo debe hacerse una vez en la vida, pero en general se realiza de manera más eficiente por medio de software de computadora. La FIGURA 8.4.2 se obtuvo usando una aplicación de software de campo de dirección con $dy/dx = x - y$ y una región rectangular de 5×5, donde los puntos en esa región tiene una separación horizontal y vertical de $\frac{1}{2}$ unidad; es decir, en los puntos (mh, nh), $h = \frac{1}{2}$, m y n enteros tales que $-10 \le m \le 10$, $-10 \le n \le 10$.

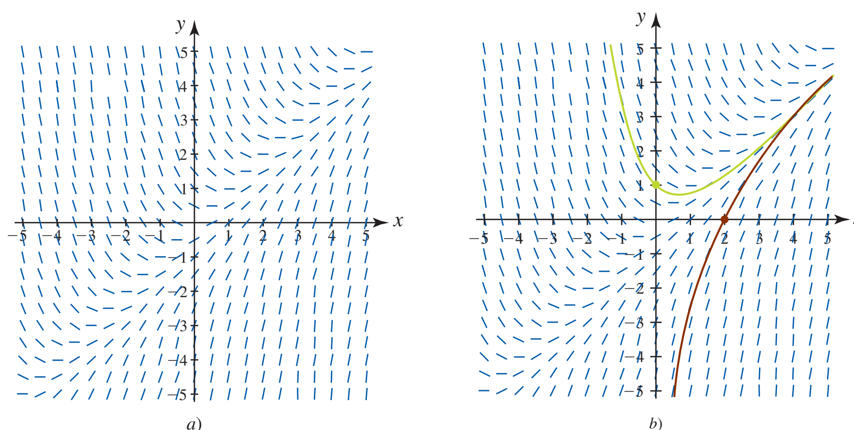


FIGURA 8.4.2 Campo de dirección en *a*); curvas solución de la ecuación diferencial sobrepuesta en el campo de dirección en *b*)

En la figura 8.4.2*a*) observe que en cualquier punto a lo largo de la recta $y = x$, las pendientes son $F(x, x) = 0$, de modo que los elementos de recta son horizontales. Además, la recta $y = x$ divide el plano en dos regiones, por arriba de la recta $(y > x)$ los elementos de recta tienen pendiente negativa, mientras que por abajo de la recta $(y < x)$ los elementos de recta tienen pendiente positiva. Al leer de izquierda a derecha, imagine una curva solución que empieza en un punto en el segundo cuadrante que al ir hacia abajo se aplana cuando pasa por la recta $y = x$ y después se dirige para arriba hacia el primer cuadrante; en otras palabras, su forma se vuelve cóncava hacia arriba. La familia de soluciones de esta ecuación diferencial se ha visto en el ejemplo 5 de la sección 8.2. Usted debe comparar las gráficas muestra en la figura 8.2.1 con el campo de dirección en la figura 8.4.2*a*). En la figura 8.4.2*b*) se proporcionan las dos curvas solución correspondientes a la solución de $dy/dx = x - y$ que pasan por (0, 1) (en verde) y (2, 0) (en rojo).

EJEMPLO 1 Campo de dirección

Trace el campo de dirección para $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Solución Ésta es la ecuación diferencial del ejemplo 2 en la sección 8.1.

a) Si usamos una retícula de puntos (x, y) con coordenadas enteras para $-5 \le x \le 5$, $-5 \le y \le 5$ entonces es directo calcular a mano las pendientes de los elementos de recta en los cuatro cuadrantes. Para $x > 0$, $y > 0$ (primer cuadrante) las pendientes $F(x, y) = -x/y$ se proporcionan en la tabla siguiente.

$F(x, y)$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$	$y = 5$
$x = 1$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$
$x = 2$	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$
$x = 3$	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{5}$
$x = 4$	-4	-2	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{4}{5}$
$x = 5$	-5	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	-1

Por ejemplo, $F(3, 4) = -\frac{3}{4}$ es la pendiente del elemento de recta en $(3, 4)$ y se muestra en rojo en la tabla en la intersección del renglón identificado por $x = 3$ y la columna identificada por $y = 4$.

Puesto que el signo algebraico del cociente x/y en (x, y), $x > 0$, $y > 0$ es el mismo que en (x, y), $x < 0$, $y < 0$, las pendientes en los puntos correspondientes en el tercer cuadrante son las mismas que las pendientes en el primer cuadrante. En forma semejante, resulta fácil ver que las pendientes de los segmentos de recta en los cuadrantes segundo y cuarto son los negativos de las pendientes en la tabla. Al trazar elementos de recta por los puntos con las pendientes determinadas a partir de la tabla obtenemos el campo de dirección en la FIGURA 8.4.3*a*).

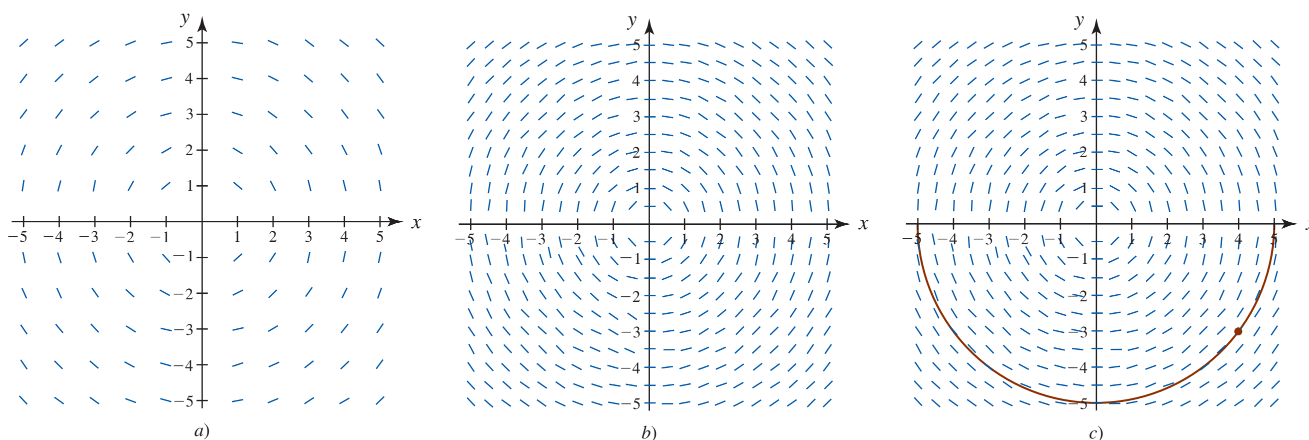


FIGURA 8.4.3 Campos de dirección en el ejemplo 1

b) Con ayuda de un SAC y la retícula de puntos definidos nuevamente por (mh, nh), $h = \frac{1}{2}$, m y n enteros, $-10 \le m \le 10$, $-10 \le n \le 10$, obtenemos el campo de dirección en la figura 8.4.3*b*). Visualmente, el flujo del campo es circular. En la figura 8.4.3*c*) hemos sobrepuesto la curva solución (en rojo) del PVI,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \qquad y(4) = -3$$

que se obtuvo en el ejemplo 3 de la sección 8.1 sobre el campo de dirección generado por computadora. ■

Al usar más puntos reticulares se obtiene una mejor idea de las formas de las curvas solución.

Por supuesto, el objetivo principal de construir un campo de dirección es obtener un bosquejo aproximado de una curva solución cuando resolver exactamente una ecuación diferencial resulta imposible.

EJEMPLO 2 Campo de dirección

Use un campo de dirección para describir una curva solución aproximada para el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x + \cos y, \qquad y(-4) = 4.$$

Solución Señalamos el punto inicial (−4, 4) en el campo de dirección generado por computadora en la FIGURA 8.4.4*a*); al moverse hacia la izquierda y a la derecha intentamos trazar una curva lo más larga posible que contenga el punto inicial. Cuando hacemos un movimiento hacia la derecha del punto inicial, los segmentos de recta casi inmediatamente hacen que la gráfica se dirija hacia abajo (aproximadamente para $-3 < x < -0.5$), y luego hacia arriba cuando la gráfica cruza el eje y (aproximadamente para $-0.5 < x < 2.5$), lo cual es seguido de inmediato por otro movimiento hacia abajo (aproximadamente para $x > 2.5$). La curva solución que acabamos de describir tiene la forma aproximada que se muestra en la figura 8.4.4*b*).

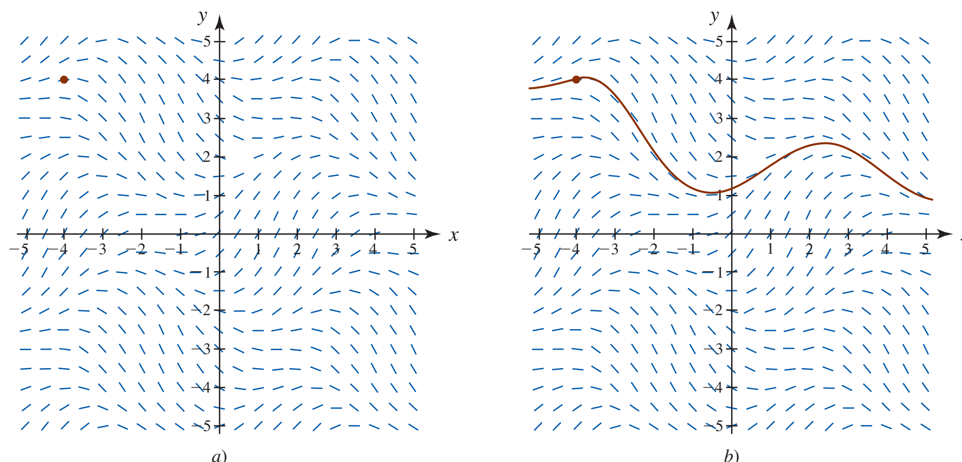


FIGURA 8.4.4 Campo de dirección y curva solución aproximada en el ejemplo 2 ■

Retratos y estabilidad de fase La interpretación de la derivada dy/dx como una función que proporciona la pendiente desempeñó un papel crucial en la construcción de los campos de dirección. En el siguiente análisis usamos otra propiedad de la primera derivada; a saber, si $y(x)$ es una función diferenciable, y si $dy/dx > 0$ (o $dy/dx < 0$) para toda x en un intervalo I, entonces $y(x)$ es creciente (o decreciente) sobre I.

Ecuaciones diferenciales autónomas Se dice que una ecuación diferencial de primer orden donde la variable independiente x no aparece en forma explícita es una **ecuación diferencial autónoma**. Por tanto, una ecuación diferencial autónoma de primer orden es una cuya forma normal es

$$\frac{dy}{dx} = f(y). \tag{1}$$

En todo momento se supondrá que f y su derivada f' son funciones continuas de x sobre algún intervalo I. Las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{1 + y^2}^{f(y)} \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = \overbrace{2xy}^{F(x,\,y)}$$

son autónoma y no autónoma, respectivamente. Muchas ecuaciones diferenciales de primer orden encontradas en aplicaciones son autónomas y de la forma (1). En la sección 8.3, todos los modelos matemáticos, excepto uno, son autónomos; la ecuación (7) de esa sección es no autónoma. Por supuesto, los diferentes símbolos en la sección 8.3 forman parte de x y y en este análisis.

Puntos críticos Los ceros de la función f en (1) son de interés especial. Se dice que un número real c es un **punto crítico** de la ecuación diferencial autónoma (1) si es un cero de f, es decir, si

$f(c) = 0$. Los puntos críticos también se denominan **puntos de equilibrio** y **puntos estacionarios**. Además, al sustituir $y = c$ en (1) ambos miembros de la ecuación se vuelven cero, de modo que:

- Si c es un punto crítico de (1), entonces $y(x) = c$ es una solución constante de la ecuación autónoma.

Una solución constante $y(x) = c$ de (1) se denomina **solución de equilibrio** y:

- Las soluciones de equilibrio son las únicas soluciones de (1).

Puede afirmarse cuándo una solución no constante $y(x)$ de (1) es creciente o decreciente al determinar el signo algebraico de la derivada dy/dx, lo cual se hace al identificar los intervalos sobre los cuales $f(y)$ es positiva o negativa.

EJEMPLO 3 Ecuación diferencial autónoma de primer orden

Al analizar la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y(a - by) \qquad (2)$$

Ésta es la ecuación diferencial en el problema 29, ejercicios 8.3. Aquí el símbolo y desempeña la parte de P, y x la de la parte de t.

$a > 0$, $b > 0$, se observa que es autónoma. A partir de $f(y) = y(a - by) = 0$ también vemos que 0 y a/b son puntos críticos de la ecuación. Al escribir estos dos números en una columna, la dividimos en tres intervalos determinados por las desigualdades:

$$-\infty < x < 0, \qquad 0 < x < a/b, \qquad a/b < x < \infty.$$

Las flechas en la línea mostrada en la FIGURA 8.4.5 indican el signo algebraico de $f(y) = y(a - by)$ sobre estos intervalos, y si una solución $y(x)$ es creciente o decreciente. La tabla siguiente explica la figura.

Intervalo	Signo de $f(y)$	$y(x)$	Flecha
$(-\infty, 0)$	menos	decreciente	apunta hacia abajo
$(0, a/b)$	más	creciente	apunta hacia arriba
$(a/b, \infty)$	menos	decreciente	apunta hacia abajo

Las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial son $y = 0$ y $y = a/b$. ■

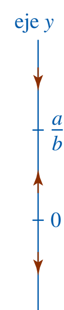


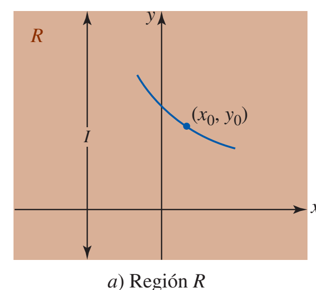
FIGURA 8.4.5 Dos puntos críticos determinan tres intervalos en el ejemplo 3

La figura 8.4.5 se denomina **retrato de fase unidimensional**, o simplemente **retrato de fase**, de la ecuación diferencial $dy/dx = y(a - by)$. La recta vertical o eje y se denomina **recta de fase**. Un retrato de fase como éste también puede interpretarse en términos del movimiento de una partícula que se desplaza. Si imagina que $y(x)$ denota la posición de una partícula en el *instante* x sobre una recta vertical cuya dirección positiva y es hacia arriba, entonces la razón de cambio dy/dx representa la velocidad de la partícula. Una velocidad positiva indica movimiento hacia arriba y una velocidad negativa indica que la partícula se está moviendo hacia abajo. Si una partícula se coloca en un punto crítico, entonces debe permanecer ahí todo el tiempo. De ahí el nombre alterno de *punto estacionario*.

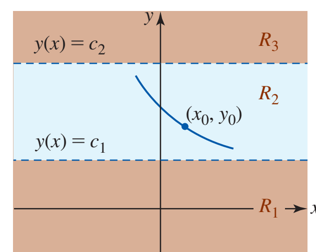
Curvas solución sin solución

Sin resolver una ecuación diferencial autónoma, por lo general es posible decir bastantes cosas sobre sus curvas solución. Al relacionar esto con el primer tema de esta sección, observe que un campo de dirección de una ecuación diferencial autónoma (1) es independiente de x, de modo que en cualquier punto sobre una recta paralela al eje x todas las pendientes son iguales. Por tanto, si $y(x)$ es una solución de (1), entonces cualquier traslación horizontal $y(x - k)$, k una constante, también es una solución. Puesto que la función f en (1) es independiente de la variable x, podemos considerar que está definida para $-\infty < x < \infty$ o $0 \leq x < \infty$. También, puesto que f y su derivada f' son funciones continuas de x sobre algún intervalo I, es posible demostrar que en alguna región o banda horizontal R en el plano xy correspondiente a I, por cualquier punto (x_0, y_0) en R pasa sólo una curva solución de (1). Vea la FIGURA 8.4.6*a*). Para abreviar el análisis se supondrá que (1) posee exactamente dos puntos críticos c_1 y c_2 y que $c_1 < c_2$. Las gráficas de las soluciones en equilibrio $y(x) = c_1$ y $y(x) = c_2$ son rectas horizontales, y estas rectas parten la región R en las tres subregiones R_1, R_2 y R_3 como se ilustra en la figura 8.4.6*b*). Sin demostrar, a continuación se presentan algunas conclusiones que pueden extraerse sobre una solución no constante $y(x)$ de (1):

- Si (x_0, y_0) está en una subregión R_i, $i = 1, 2, 3$ y $y(x)$ es una solución cuya gráfica pasa por este punto, entonces $y(x)$ permanece en la subregión para toda x. Como se ilustra en



a) Región R



b) Subregiones R_1, R_2 y R_3 de R

FIGURA 8.4.6 Dos soluciones de equilibrio determinan tres subregiones en el plano

la figura 8.4.6*b*), la solución $y(x)$ en R_2 está acotada por c_1 por arriba y por c_2 por abajo; es decir, $c_1 < y(x) < c_2$ para toda x. La curva solución permanece en R_2 para toda x porque la gráfica de una solución no constante de (1) no puede cruzar la gráfica de una solución de equilibrio.

- Por continuidad de f, entonces debe tenerse $f(y) > 0$ o $f(y) < 0$ para toda y en una subregión R_i, $i = 1, 2, 3$. En otras palabras, $f(y)$ no puede cambiar de signo en una subregión.
- Puesto que $dy/dx = f(y(x))$ es positiva o negativa en una subregión, una solución $y(x)$ es creciente o decreciente en una subregión R_i, $i = 1, 2, 3$. En consecuencia, $y(x)$ no puede ser oscilatoria, y tampoco puede tener un extremo relativo (máximo o mínimo).
- Si $y(x)$ está *acotada por arriba* por un punto crítico c_1 (como en la subregión R_1, donde $y(x) < c_1$ para toda x), entonces la gráfica de $y(x)$ debe tender a la gráfica de la solución de equilibrio $y(x) = c_1$ cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. Si $y(x)$ está *acotada*, es decir, acotada por arriba y por abajo por dos puntos críticos consecutivos (como en la subregión R_2, donde $c_1 < y(x) < c_2$ para toda x), entonces la gráfica de $y(x)$ debe tender a las gráficas de las soluciones de equilibrio $y(x) = c_1$ y $y(x) = c_2$, a una cuando $x \to \infty$ y a la otra cuando $x \to -\infty$. Si $y(x)$ está *acotada por abajo* por un punto crítico (como en la subregión R_3, donde $c_2 < y(x)$ para toda x), entonces la gráfica de $y(x)$ debe tender a la gráfica de la solución de equilibrio $y(x) = c_2$ cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$.

Con estos hechos en mente se volverá a analizar la ecuación diferencial en el ejemplo 3.

EJEMPLO 4 Otro repaso al ejemplo 3

Los tres intervalos determinados sobre el eje y o recta de fase por los puntos críticos 0 y a/b ahora corresponden en el plano xy a tres subregiones definidas por:

$$R_1:\quad -\infty < y < 0, \qquad R_2:\quad 0 < y < a/b, \qquad R_3:\quad a/b < y < \infty,$$

donde $-\infty < x < \infty$. El retrato de fase en la figura 8.4.5 indica que $y(x)$ es decreciente en R_1, creciente en R_2 y decreciente en R_3. Si $y(0) = y_0$ es un valor inicial, entonces en R_1, R_2 y R_3 tenemos, respectivamente:

i) Para $y_0 < 0$, $y(x)$ está acotada por arriba. Puesto que $y(x)$ es decreciente, $y(x)$ decrece sin límite para x creciente y así $y(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$. Esto significa que el eje x negativo, $y = 0$, es una asíntota horizontal para una curva solución.

ii) Para $0 < y_0 < a/b$, $y(x)$ está acotada. Puesto que $y(x)$ es creciente, $y(x) \to a/b$ cuando $x \to \infty$, y $y(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$. Las dos rectas $y = 0$ y $y = a/b$ son asíntotas horizontales para cualquier curva solución que empiece en esta subregión.

iii) Para $y_0 > a/b$, $y(x)$ está acotada por abajo. Puesto que $y(x)$ es decreciente, $y(x) \to a/b$ cuando $x \to \infty$. Esto significa que $y = a/b$ es una asíntota horizontal para una curva solución.

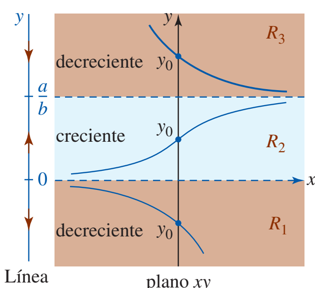


FIGURA 8.4.7 Retrato de fase y curvas solución en cada una de las tres subregiones en el ejemplo 4

En la FIGURA 8.4.7 se reproduce el retrato de fase original a la izquierda del plano xy donde se han sombreado las subregiones R_1, R_2 y R_3. Las gráficas de las soluciones de equilibrio $y = a/b$ y $y = 0$ se muestran en la figura 8.4.7 como líneas discontinuas; las gráficas sólidas representan gráficas típicas de $y(x)$ que ilustran los tres casos que acaban de analizarse. ■

En una subregión como R_1 en el ejemplo 4, donde $y(x)$ es decreciente y no está acotada por abajo, necesariamente debe tenerse $y(x) \to -\infty$. *No* interprete esta última declaración como $y(x) \to -\infty$ cuando $x \to \infty$; podría tenerse $y(x) \to -\infty$ cuando $x \to a$, donde $a > 0$ es un número finito que depende de la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Al pensar en términos dinámicos, $y(x)$ podría "explotar" en un tiempo finito; o pensando gráficamente, $y(x)$ podría tener una asíntota vertical en $x = a > 0$. Una observación semejante sigue siendo válida para la subregión R_3. Esos conceptos se ilustran en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Curvas solución

La ecuación autónoma $dy/dx = (y - 1)^2$ posee el único punto crítico 1 y por tanto sólo tiene una solución constante $y(x) = 1$. A partir del retrato de fase en la FIGURA 8.4.8*a*), concluimos que una solución no constante $y(x)$ es una función creciente en las dos subregiones definidas por $-\infty < y < 1$ y $1 < y < \infty$, donde $-\infty < x < \infty$. Para una condición inicial $y(0) = y_0 < 1$, una solución $y(x)$ es creciente y acotada por arriba por 1, y así $y(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$; para $y(0) = y_0 > 1$, una solución $y(x)$ es creciente y no acotada.

Usted debe comprobar por separación de variables que una familia de soluciones de un parámetro de la ecuación diferencial es $y(x) = 1 - 1/(x + C)$. Para una condición inicial dada, por ejemplo, $y(0) = -1 < 1$, encontramos que $C = \frac{1}{2}$ y $y(x) = 1 - 1/\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Observe que $x = -\frac{1}{2}$ es una asíntota vertical y que $y(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\frac{1}{2}^{+}$. Vea la figura 8.4.8*b*). Para una condición inicial diferente $y(0) = 2 > 1$, hallamos que $C = -1$ y $y(x) = 1 - 1/(x - 1)$. La última función tiene una asíntota vertical en $x = 1$ y en la figura 8.4.8*c*) vemos que $y(x) \to \infty$ cuando $x \to 1^{-}$. Las curvas solución son las porciones de las gráficas en las figuras 8.4.8*b*) y 8.4.8*c*) que se muestran en azul. Como se pronosticó con el retrato de fase en la figura 8.4.8*a*), para la curva solución en la figura 8.4.8*b*), $y(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$, mientras que para la curva solución en la figura 8.4.8*c*), $y(x) \to \infty$ cuando $x \to 1^{-}$.

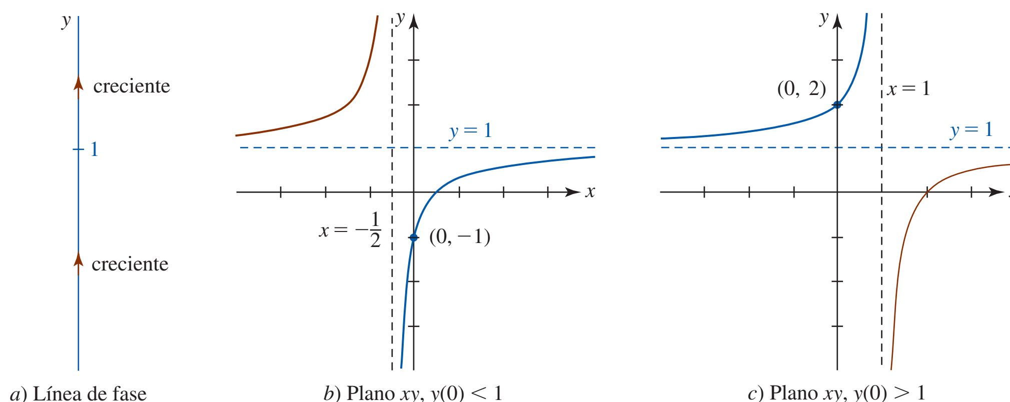


FIGURA 8.4.8 Comportamiento de las soluciones cerca de $y = 1$ en el ejemplo 5

Atractores y repelentes Suponga que $y(x)$ es una solución no constante de la ecuación diferencial autónoma (1) y que c es un punto crítico de la ecuación diferencial. Hay básicamente tres tipos de comportamiento que $y(x)$ puede mostrar cerca de c. En la FIGURA 8.4.9 se ha colocado c en cuatro rectas de fase verticales. Cuando las dos puntas de flecha a ambos lados del punto azul identificado por c apuntan hacia c, como en la figura 8.4.9*a*), todas las soluciones $y(x)$ de (1) que empiezan desde un punto inicial (x_0, y_0) suficientemente cerca de c presentan el comportamiento asintótico $\lim_{x\to\infty} y(x) = c$. Por esta razón se dice que el punto crítico c es **asintóticamente estable**. Al usar una analogía física, una solución que empieza cerca de c es como una partícula cargada que, con el tiempo, es atraída por otra partícula de carga opuesta, de modo que c a menudo se menciona como **atractor**. Cuando las dos puntas de flecha a ambos lados del punto azul identificado por c apuntan alejándose de c, como en la figura 8.4.9*b*), todas las soluciones $y(x)$ de (1) que empiezan desde un punto inicial (x_0, y_0) se alejan de c cuando x crece. En este caso se dice que el punto crítico c es **inestable**. Un punto crítico inestable se denomina **repelente**, por razones obvias. El punto crítico que se ilustra en las figuras 8.4.9*c*) y 8.4.9*d*) no es atractor ni repelente. Pero puesto que c presenta características *tanto* de un atractor *como* de un repelente, una solución que empieza desde un punto inicial (x_0, y_0) suficientemente cerca de c es atraída hacia c y repelida desde el otro lado, se dice que el punto crítico c es **semiestable**. En el ejemplo 3, el punto crítico a/b es asintóticamente estable (un atractor) y el punto crítico 0 es inestable (un repelente). El punto crítico en el ejemplo 5 es semiestable.

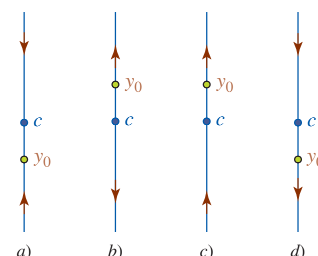


FIGURA 8.4.9 El punto crítico es: un atractor en *a*), un repelente en *b*), y semiestable en *c*) y *d*)

Ejercicios 8.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-25.

Fundamentos

En los problemas 1-8, use el campo de dirección generado por computadora para trazar una curva solución aproximada para la ecuación diferencial indicada que pase por cada uno de los puntos dados.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

***a*)** $y(0) = 3$ ***b*)** $y(3) = 3$

***c*)** $y\left(-\frac{3}{2}\right) = 2$ ***d*)** $y(-2) = -3$

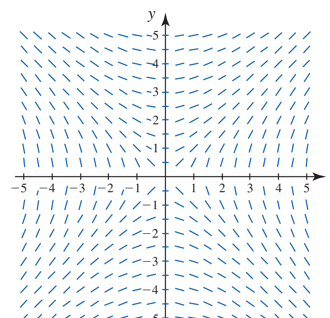


FIGURA 8.4.10 Campo de dirección para el problema 1

2. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-0.01xy^3}$

a) $y(-4) = 0$ *b*) $y(3) = -2$
c) $y(0) = -2$ *d*) $y(0) = 1$

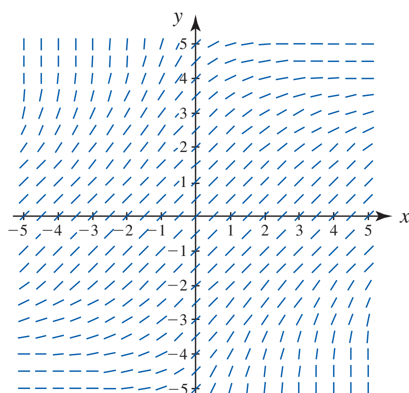


FIGURA 8.4.11 Campo de dirección para el problema 2

3. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - xy$

a) $y(0) = 0$ *b*) $y(-1) = 0$
c) $y(2) = 0$ *d*) $y(0) = -4$

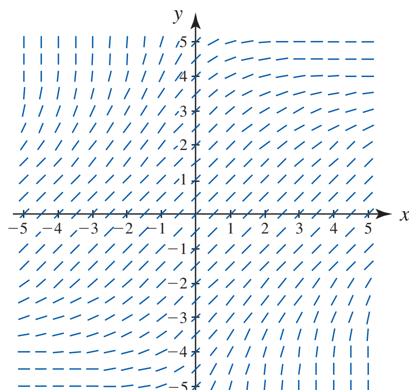


FIGURA 8.4.12 Campo de dirección para el problema 3

4. $\dfrac{dy}{dx} = (\operatorname{sen} x)\cos y$

a) $y(0) = 0$ *b*) $y(0) = 2$
c) $y(-3) = 0$ *d*) $y(4) = 0$

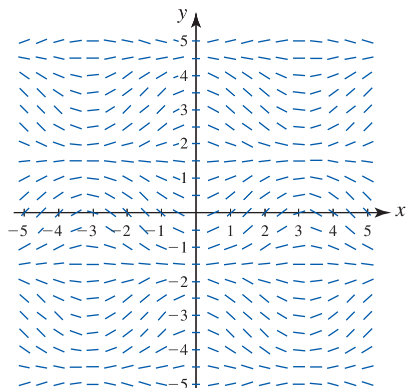


FIGURA 8.4.13 Campo de dirección para el problema 4

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y^2$

a) $y(0) = -2$ *b*) $y(0) = 2$
c) $y(-1) = 0$ *d*) $y(-4) = 0$

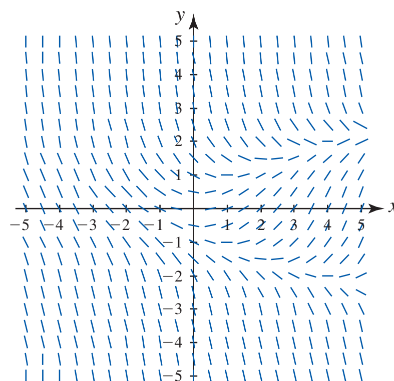


FIGURA 8.4.14 Campo de dirección para el problema 5

6. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-\operatorname{sen} y}$

a) $y(0) = 0$ *b*) $y(0) = 2$
c) $y(-2) = 0$ *d*) $y(4) = 0$

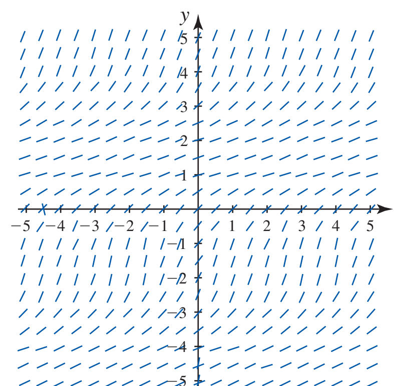


FIGURA 8.4.15 Campo de dirección para el problema 6

7. $\dfrac{dy}{dx} = y \operatorname{sen} x$

a) $y(0) = 1$ *b*) $y(-3) = -2$
c) $y(4) = 1$ *d*) $y(2) = 2$

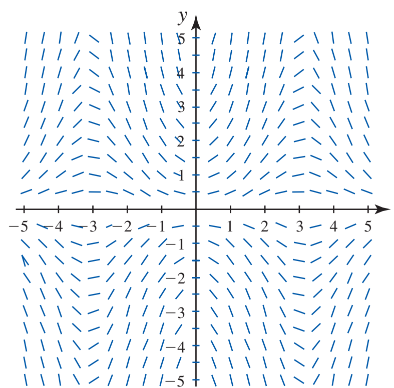


FIGURA 8.4.16 Campo de dirección para el problema 7

8. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2$

a) $y(-2) = 0$ ***b***) $y(0) = -2$
c) $y(0) = 0$ ***d***) $y(3) = 0$

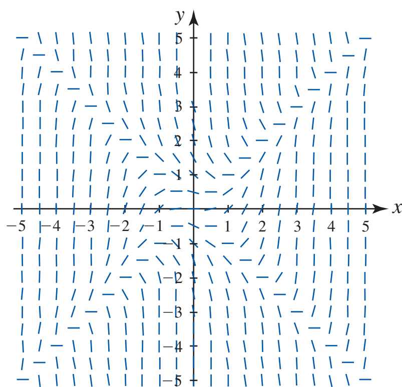


FIGURA 8.4.17 Campo de dirección para el problema 8

En los problemas 9-12, use un software de computadora para obtener un campo de dirección para la ecuación diferencial dada. A mano, trace una curva solución aproximada que pase por cada uno de los puntos dados.

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y}$

a) $y(0) = 3$
b) $y(2) = -2$

10. $\dfrac{dy}{dx} = x + y$

a) $y(0) = -1$
b) $y(3) = 0$

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{5}x^2 + y$

a) $y(0) = 1$
b) $y(4) = 0$

12. $\dfrac{dy}{dx} = y - 2\cos \pi x$

a) $y(0) = 0$
b) $y(2) = -4$

En los problemas 13-20, encuentre los puntos críticos y el retrato de fase de la ecuación diferencial de primer orden autónoma dada. Clasifique cada punto crítico como asintóticamente estable (atractor), inestable (repelente) o semiestable.

13. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 3y$ **14.** $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y^3$

15. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 2)^2$ **16.** $\dfrac{dy}{dx} = 10 + 3y - y^2$

17. $\dfrac{dy}{dx} = y^2(4 - y^2)$ **18.** $\dfrac{dy}{dx} = y(2 - y)(4 - y)$

19. $\dfrac{dy}{dx} = y\ln(y + 2)$ **20.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ye^y - 9y}{e^y}$

En los problemas 21 y 22, considere la ecuación diferencial de primer orden autónoma dada y la condición inicial $y(0) = y_0$. A mano, trace una gráfica de una solución típica $y(x)$ cuando y_0 tiene los valores:

a) $y_0 > 1$ ***b***) $0 < y_0 < 1$
c) $-1 < y_0 < 0$ ***d***) $y_0 < -1$

21. $\dfrac{dy}{dx} = y - y^3$ **22.** $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y^4$

En los problemas 23 y 24, considere la ecuación diferencial autónoma $dy/dx = f(y)$, donde se proporciona la gráfica de f. Use la gráfica para localizar los puntos críticos de cada ecuación diferencial. Trace un retrato de fase de cada ecuación. A mano, trace curvas solución en las subregiones del plano xy determinadas por las gráficas de las soluciones de equilibrio.

23.

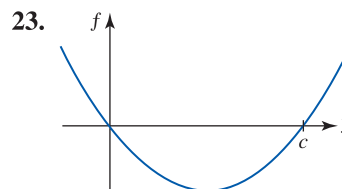


FIGURA 8.4.18 Gráfica para el problema 23

24.

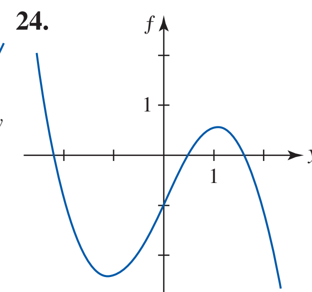


FIGURA 8.4.19 Gráfica para el problema 24

Aplicaciones

25. En la sección 8.3 vimos que la ecuación diferencial *lineal* autónoma

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

es un modelo matemático para la velocidad de un cuerpo que cae cuando se toma en cuenta la resistencia del aire. Use sólo un retrato de fase para determinar la velocidad del cuerpo que cae.

26. En la sección 8.3 también vimos que la ecuación diferencial *no lineal* autónoma

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

es un modelo matemático para la velocidad de un cuerpo que cae cuando se toma en cuenta la resistencia del aire. Use sólo un retrato de fase para determinar la velocidad terminal del cuerpo que cae.

27. En el problema 26 de los ejercicios 8.3 vimos que la corriente $i(t)$ en un circuito en serie está descrita por

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Si la inductancia L, la resistencia R y el voltaje aplicado E son constantes positivas, demuestre que cuando $t \to \infty$ la corriente obedece la ley de Ohm de que $E = iR$.

28. Cuando se combinan dos productos químicos, la razón a la que se forma un nuevo compuesto está regida por la ecuación diferencial

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X),$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad y $\beta > \alpha > 0$. Aquí $X(t)$ denota el número de gramos del nuevo compuesto formado en el tiempo t.

a) Describa el comportamiento de X cuando $t \to \infty$.

b) Considere el caso en que $\alpha = \beta$. ¿Cuál es el comportamiento de X cuando $t \to \infty$ si $X(0) < \alpha$? A partir del retrato de fase de la ecuación diferencial, ¿puede pronosticar el comportamiento de X cuando $t \to \infty$ si $X(0) > \alpha$?

c) Compruebe que una solución explícita de la ecuación diferencial en el caso en que $k = 1$ y $\alpha = \beta$ es $X(t) = \alpha - 1/(t + c)$. Encuentre una solución que cumpla $X(0) = \alpha/2$. Encuentre una solución que cumpla $X(0) = 2\alpha$. Grafique las dos soluciones. ¿El comportamiento de las soluciones $t \to \infty$ coincide con sus respuestas en el inciso *b*)?

☰ Piense en ello

29. Para una ecuación diferencial $dy/dx = F(x, y)$, cualquier miembro de la familia de curvas $F(x, y) = c$, donde c es una constante, se denomina una **isoclina** de la ecuación. En un campo de dirección de la ecuación diferencial $dy/dx = x^2 + y^2$, ¿qué es cierto sobre los segmentos de recta en puntos sobre la isoclina $dy/dx = x^2 + y^2 = 1$? Identifique las isoclinas de la ecuación diferencial $dy/dx = x + y$.

30. Para una ecuación diferencial $dy/dx = F(x, y)$, una curva en el plano definida por $F(x, y) = 0$ se denomina una **nulclina** de la ecuación. En un campo de dirección de la ecuación diferencial $dy/dx = x^2 + y^2 - 1$, ¿qué es cierto sobre los segmentos de recta en puntos sobre una nulclina? Identifique las nulclinas de la ecuación diferencial $dy/dx = x^2 - y^2$ e indíquelas en el campo de dirección proporcionado en la figura 8.4.17.

31. El número 0 es un punto crítico de la ecuación diferencial autónoma $dy/dt = y^n$, donde n es un entero positivo. ¿Para qué valores de n es 0 asintóticamente estable? ¿Inestable? Repita lo anterior para la ecuación $dy/dx = -y^n$.

8.5 Método de Euler

Introducción Ahora pasemos de los métodos de visualización analizados en la sección precedente a un método numérico. Al usar la ecuación diferencial es posible construir un procedimiento simple para obtener aproximaciones a los valores numéricos de las coordenadas y de puntos sobre una curva solución.

Método de Euler Una de las técnicas más simples para aproximar una solución de un problema con valor inicial de primer orden

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

se denomina **método de Euler**, o **método de las rectas tangentes**. En esta técnica usamos el hecho de que la derivada de una función $y(x)$ en un número x_0 determina una linealización de $y(x)$ en $x = x_0$:

$$L(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0).$$

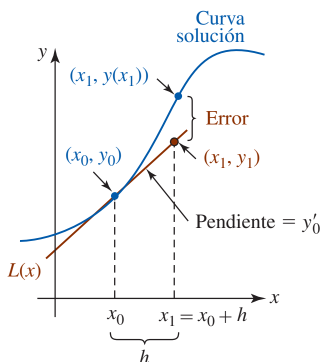


FIGURA 8.5.1 Aproximación a un punto sobre una curva solución por un punto sobre la recta tangente

Recuerde de la sección 4.9 que la linealización de $y(x)$ en x_0 es simplemente una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = y(x)$ en el punto (x_0, y_0). Ahora dejamos que h represente un incremento positivo sobre el eje x, como se muestra en la FIGURA 8.5.1. Luego, para $x_1 = x_0 + h$ tenemos

$$L(x_1) = y_0 + y'(x_0)(x_0 + h - x_0) = y_0 + hy'_0,$$

donde $y'_0 = y'(x_0) = F(x_0, y_0)$. Al hacer $y_1 = L(x_1)$ obtenemos

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0).$$

El punto (x_1, y_1), que se muestra en la figura 8.5.1 como un punto sobre la recta tangente, es una aproximación al punto $(x_1, y(x_1))$ sobre la verdadera curva solución; es decir, $L(x_1) \approx y(x_1)$ o $y_1 \approx y(x_1)$ es una aproximación de $y(x)$ en x_1. Por supuesto, la precisión de la aproximación depende bastante del tamaño del incremento h. Por lo general, este **tamaño de paso** debe escogerse *razonablemente pequeño*. Si repetimos el proceso, usando (x_1, y_1) y la nueva pendiente $F(x_1, y_1)$ como el nuevo punto inicial, entonces obtenemos la aproximación

$$y(x_2) = y(x_0 + 2h) = y(x_1 + h) \approx y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1).$$

En general, se concluye que

$$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n), \tag{2}$$

donde $x_n = x_0 + nh$.

En el siguiente ejemplo se aplica el método de Euler (2) a una ecuación diferencial para la que se conoce una solución explícita; de esta forma es posible comparar los valores estimados y_n con los valores verdaderos $y(x_n)$.

EJEMPLO 1 Método de Euler

Considere el problema con valor inicial $y' = 0.2xy$, $y(1) = 1$. Use el método de Euler para aproximar $y(1.5)$ usando primero $h = 0.1$ y luego $h = 0.05$.

Solución Con la identificación de que $F(x, y) = 0.2xy$, (2) se vuelve

$$y_{n+1} = y_n + h(0.2x_ny_n).$$

Luego, para $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ y $h = 0.1$ encontramos

$$y_1 = y_0 + (0.1)(0.2x_0y_0) = 1 + (0.1)[0.2(1)(1)] = 1.02,$$

que es un estimado al valor de $y(1.1)$. No obstante, si usamos $h = 0.05$, se requieren *dos* pasos para llegar a $x = 1.1$. A partir de

$$y_1 = 1 + (0.05)[0.2(1)(1)] = 1.01$$
$$y_2 = 1.01 + (0.05)[0.2(1.05)(1.01)] = 1.020605$$

tenemos $y_1 \approx y(1.05)$ y $y_2 \approx y(1.1)$. El resto de los cálculos se llevó a cabo usando software de computadora. Los resultados se resumen en las TABLAS 8.5.1 y 8.5.2. Cada entrada se ha redondeado hasta cuatro cifras decimales. Observe que para llegar a $x = 1.5$ se requieren cinco pasos con $h = 0.1$ y 10 pasos con $h = 0.05$.

TABLA 8.5.1 **Método de Euler con $h = 0.1$**

x_n	y_n	Valor verdadero	Error absoluto	Error porcentual relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.0200	1.0212	0.0012	0.12
1.20	1.0424	1.0450	0.0025	0.24
1.30	1.0675	1.0714	0.0040	0.37
1.40	1.0952	1.1008	0.0055	0.50
1.50	1.1259	1.1331	0.0073	0.64

TABLA 8.5.2 **Método de Euler con $h = 0.05$**

x_n	y_n	Valor verdadero	Error absoluto	Error porcentual relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.05	1.0100	1.0103	0.0003	0.03
1.10	1.0206	1.0212	0.0006	0.06
1.15	1.0318	1.0328	0.0009	0.09
1.20	1.0437	1.0450	0.0013	0.12
1.25	1.0562	1.0579	0.0016	0.16
1.30	1.0694	1.0714	0.0020	0.19
1.35	1.0833	1.0857	0.0024	0.22
1.40	1.0980	1.1008	0.0028	0.25
1.45	1.1133	1.1166	0.0032	0.29
1.50	1.1295	1.1331	0.0037	0.32

■

En el ejemplo 1, los valores verdaderos en las tablas se calcularon a partir de la solución conocida $y = e^{0.1(x^2-1)}$. También, el **error absoluto** se define como

◀ Compruebe esta solución al resolver la ecuación diferencial por separación de variables.

$$|\textit{valor verdadero} - \textit{aproximación}|.$$

El **error relativo** y el **error porcentual** son, a su vez,

$$\frac{\textit{error absoluto}}{|\textit{valor verdadero}|} \quad \text{y} \quad \frac{\textit{error absoluto}}{|\textit{valor verdadero}|} \times 100.$$

Al comparar las tablas 8.5.1 y 8.5.2 resulta evidente que la precisión de las aproximaciones mejora a medida que disminuye el tamaño h del paso. También vemos que incluso cuando el error porcentual relativo crece, no parece ser tan malo. Sin embargo, no debe decepcionarse por un ejemplo. Observe lo que ocurre en el siguiente ejemplo, cuando simplemente se cambia de 0.2 a 2 el coeficiente del miembro derecho de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 2 Comparación de valores exactos/aproximados

Use el método de Euler para aproximar $y(1.5)$ para la solución del problema con valor inicial $y' = 2xy$, $y(1) = 1$.

Solución Usted debe comprobar que la solución exacta del PVI es ahora $y = e^{x^2-1}$. Al proceder como en el ejemplo 1, obtenemos los resultados que se muestran en las tablas 8.5.3 y 8.5.4.

En este caso, con un tamaño de paso $h = 0.1$, un error relativo de 16% en el cálculo de la aproximación a $y(1.5)$ es totalmente inaceptable. A costa de duplicar el número de cálculos, se obtiene una ligera mejora en la precisión al reducir a la mitad el tamaño del paso a $h = 0.05$.

TABLA 8.5.3 Método de Euler con $h = 0.1$

x_n	y_n	Valor verdadero	Error absoluto	Error porcentual relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2000	1.2337	0.0337	2.73
1.20	1.4640	1.5527	0.0887	5.71
1.30	1.8154	1.9937	0.1784	8.95
1.40	2.2874	2.6117	0.3244	12.42
1.50	2.9278	3.4904	0.5625	16.12

TABLA 8.5.4 Método de Euler con $h = 0.05$

x_n	y_n	Valor verdadero	Error absoluto	Error porcentual relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.05	1.1000	1.1079	0.0079	0.72
1.10	1.2155	1.2337	0.0182	1.47
1.15	1.3492	1.3806	0.0314	2.27
1.20	1.5044	1.5527	0.0483	3.11
1.25	1.6849	1.7551	0.0702	4.00
1.30	1.8955	1.9937	0.0982	4.93
1.35	2.1419	2.2762	0.1343	5.90
1.40	2.4311	2.6117	0.1806	6.92
1.45	2.7714	3.0117	0.2403	7.98
1.50	3.1733	3.4904	0.3171	9.08

■

$\dfrac{dy}{dx} = F(x, y)$ **NOTAS DESDE EL AULA**

El método de Euler constituye sólo una de muchas formas en que es posible aproximar una solución de una ecuación diferencial. Aunque es atractivo por su sencillez, este método se usa raramente en cálculos serios. Este tema se ha presentado tan sólo para proporcionarle una introducción a los métodos numéricos. Debe hurgar con más detalle en un curso formal de ecuaciones diferenciales y examinar métodos que proporcionan una precisión significativamente mayor.

Ejercicios 8.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-26.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, use el método de Euler (2) para obtener una aproximación de cuatro cifras decimales al valor indicado. Haga manualmente la recursión de (2), usando primero $h = 0.1$ y luego $h = 0.05$.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 3y + 1, y(1) = 5;\quad y(1.2)$

2. $\dfrac{dy}{dx} = x + y^2, y(0) = 0;\quad y(0.2)$

En los problemas 3 y 4, use el método de Euler para obtener una aproximación de cuatro cifras decimales al valor indicado. Use primero $h = 0.1$ y luego $h = 0.05$. Encuentre una solución explícita para cada problema con valor inicial y luego elabore tablas semejantes a las tablas 8.5.1 y 8.5.2.

3. $y' = y, y(0) = 1;\quad y(1.0)$

4. $y' = 4x - 2y, y(0) = 2;\quad y(0.5)$

En los problemas 5-10, use el método de Euler para obtener una aproximación de cuatro cifras decimales al valor indicado. Use primero $h = 0.1$ y luego $h = 0.05$.

5. $y' = e^{-y}, y(0) = 0;\quad y(0.5)$

6. $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1;\quad y(0.5)$

7. $y' = (x - y)^2, y(0) = 0.5;\quad y(0.5)$

8. $y' = xy + \sqrt{y}, y(0) = 1;\quad y(0.5)$

9. $y' = xy^2 - \dfrac{y}{x}, y(1) = 1;\quad y(1.5)$

10. $y' = y - y^2, y(0) = 0.5;\quad y(0.5)$

Revisión del capítulo 8

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-26.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-4, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. La ecuación diferencial $dy/dx = x + xy$ es separable y lineal. _____

2. La ecuación diferencial $dy/dx = \text{sen}\, y$ es no lineal. _____

3. $y = 0$ es una solución del problema con valor inicial $dy/dx = x^2y$, $y(0) = 0$. _____

4. Una solución de la ecuación diferencial $dy/dx = x^2y^2 + 4$ es creciente sobre $(-\infty, \infty)$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-8, llene los espacios en blanco.

1. Una familia de soluciones de un parámetro de $dy/dx = 1 - 6x + 12e^{3x}$ es ________.

2. El orden de la ecuación diferencial $(y'')^3 + y^4 = 1$ es ________.

3. Un factor de integración para la ecuación lineal $dy/dx - y = e^{3x}$ es ________.

4. En el campo de dirección de la ecuación diferencial $dy/dx = x^2 - y^2$, la pendiente de un elemento de recta en (2, 4) es ________.

5. El tiempo necesario para que una sustancia que decae por radiactividad pase de su cantidad inicial A_0 a $\frac{1}{2}A_0$ se denomina su ________.

6. Si una población inicial de P_0 bacterias se duplica en 2 h, entonces el número de bacterias presentes después de 32 h es ________.

7. Si $P(t) = P_0e^{0.16t}$ proporciona la población en un entorno en el instante t, entonces $P(t)$ satisface el problema con valor inicial ________.

8. Proporcione un ejemplo de una ecuación diferencial de primer orden que sea tanto separable como lineal. ________

C. Ejercicios

En los problemas 1-10, resuelva la ecuación diferencial dada.

1. $\text{sen}\, x \dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0$

2. $\dfrac{dx}{dt} + x = e^{-t} \cos 2t$

3. $t \dfrac{dy}{dt} - 5y = t$

4. $\dfrac{y}{x^2} \dfrac{dy}{dx} + e^{2x^3+y^2} = 0$

5. $(x^2 + 4) \dfrac{dy}{dx} = 2x - 8xy$

6. $y \sec^2 x \dfrac{dy}{dx} = y^2 + 1$

7. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1 - y^2}$

8. $(e^x + e^{-x}) \dfrac{dy}{dx} = y^2$

9. $y' - 2y = x(e^{3x} - e^{2x})$

10. $\dfrac{dy}{dx} + y = \sqrt{1 + e^x}$

En los problemas 11-20, resuelva los problemas con valor inicial dados.

11. $\dfrac{dP}{dt} = 0.05P, \quad P(0) = 1\,000$

12. $\dfrac{dA}{dt} = -0.015A, \quad A(0) = 5$

13. $t \dfrac{dy}{dt} + y = t^4 \ln t, \quad y(1) = 0$

14. $x \dfrac{dy}{dx} = 10y, \quad y(1) = -3$

15. $\dfrac{dy}{dx} = 2y + y^2, \quad y(0) = 3$

16. $\dfrac{dy}{dx} = y(10 - 2y), \quad y(0) = 7$

17. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y(\pi/3) = -1$

18. $x \dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1, \quad y(2) = 2$

19. $\dfrac{dy}{dx} = -8x^3y^2, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}$

20. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}, \quad y(0) = 1$

En los problemas 21 y 22, encuentre una función cuya gráfica pase por el punto dado y tenga la pendiente indicada en un punto (x, y) sobre su gráfica.

21. $(0, 2)$; $2x/3y^3$ **22.** $(0, 1)$; $x + y$

23. Si P_0 es la población inicial de una comunidad, muestre que si la población P se modela por $dP/dt = kP$, entonces

$$\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{t_2} = \left(\frac{P_2}{P_0}\right)^{t_1},$$

donde $P_1 = P(t_1)$ y $P_2 = P(t_2)$, $t_1 < t_2$.

24. Una barra metálica se saca de un horno cuya temperatura es 150 °C y se coloca en un tanque de agua cuya temperatura se mantiene a 30 °C constantes. Después de $\frac{1}{4}$ h en el tanque, la temperatura de la barra es 90 °C. ¿Cuál es la temperatura de la barra en $\frac{1}{2}$ h? ¿En 1 h?

25. Cuando la mala memoria se toma en cuenta, la razón a la que una persona puede memorizar un tema está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dA}{dt} = k_1(M - A) - k_2A,$$

donde k_1 y k_2 son constantes positivas, $A(t)$ es la cantidad de material memorizado en el tiempo t, M es la cantidad total a memorizar y $M - A$ es la cantidad que queda por memorizar.

a) Despeje $A(t)$ si $A(0) = 0$.
b) Encuentre el valor limitante de A cuando $t \to \infty$ e interprete el resultado.
c) Grafique la solución.

26. Suponga que un circuito en serie contiene un capacitor y un resistor variable. Si la resistencia en el instante t está dada por $R = k_1 + k_2t$, donde k_1 y k_2 son constantes positivas conocidas, entonces la carga q sobre el capacitor es descrita por la ecuación diferencial de primer orden

$$(k_1 + k_2t)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t),$$

donde C es una constante denominada **capacitancia** y $E(t)$ es el **voltaje aplicado**. Muestre que si $E(t) = E_0$ y $q(0) = q_0$ son constantes, entonces

$$q(t) = E_0C + (q_0 - E_0C)\left(\frac{k_1}{k_1 + k_2t}\right)^{1/Ck_2}.$$

27. La ecuación diferencial $dP/dt = (k \cos t)\,P$, donde k es una constante positiva, a menudo se usa como modelo de una población que experimenta variaciones estacionales anuales.

a) Despeje $P(t)$ si $P(0) = P_0$.
b) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función encontrada en el inciso *a*).

28. Un proyectil se dispara verticalmente en el aire con una velocidad inicial de v_0 pies/s. En el supuesto de que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, el movimiento es descrito por el par de ecuaciones diferenciales:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2, \quad k > 0$$

el eje y positivo hacia arriba y el origen a nivel del suelo, de modo que $v = v_0$ y $y = 0$, y

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad k > 0$$

el eje y positivo hacia abajo y el origen a la máxima altura, de modo que $v = 0$ en $y = h$. Vea la FIGURA 8.R.1. Las ecuaciones primera y segunda describen el movimiento del proyectil cuando sube y baja, respectivamente. Demuestre que la velocidad de impacto v_1 es menor que la velocidad inicial v_0. [*Sugerencia*: Por la regla de la cadena, $dv/dt = v\,dv/dy$.]

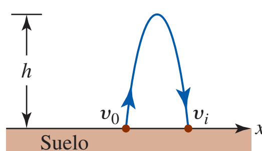


FIGURA 8.R.1 Velocidades inicial y de impacto en el problema 28

29. ***a*)** Use un SAC para obtener el campo de dirección para la ecuación diferencial $dy/dx = e^{-x} - 3y$ usando una retícula rectangular de 3×3 con puntos (mh, nh), $h = 0.25$, $-12 \leq m \leq 12$, $-12 \leq n \leq 12$.

***b*)** En el campo de dirección, trace a mano una curva solución que corresponda a cada una de las condiciones iniciales: $y(0) = 1$, $y(-2) = 0$, $y(-1) = -2$.

***c*)** Con base en el campo de dirección y las curvas solución, establezca una conjetura sobre el comportamiento de todas las soluciones $y(x)$ cuando $x \to \pm\infty$.

30. Construya una ecuación diferencial autónoma $dy/dx = f(y)$ cuyo retrato de fase sea consistente con el inciso *a*) de la FIGURA 8.R.2. Con el inciso *b*) de la figura 8.R.2.

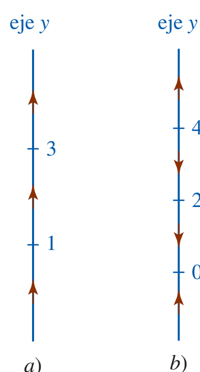


FIGURA 8.R.2 Retratos de fase para el problema 30

31. Considere la ecuación diferencial autónoma $dy/dx = f(y)$, donde

$$f(y) = -0.5y^3 - 1.7y + 3.4.$$

En la FIGURA 8.R.3 vemos que la función $f(y)$ tiene un cero. Sin intentar despejar $y(x)$ en la ecuación diferencial, estime el valor de $\lim_{x \to \infty} y(x)$.

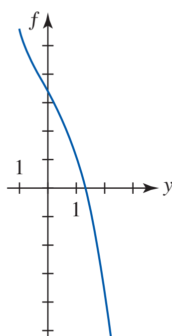


FIGURA 8.R.3 Retrato de fase para el problema 31

32. Use el método de Euler con tamaño de paso $h = 0.1$ para aproximar $y(1.2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valor inicial $dy/dx = 1 + x\sqrt{y}$, $y(1) = 9$.

33. Se dice que dos curvas son **ortogonales** en un punto si y sólo si sus rectas tangentes L_1 y L_2 son perpendiculares en el punto de intersección. Muestre que las curvas definidas por $y = x^3$ y $x^2 + 3y^2 = 4$ son ortogonales en $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

34. Cuando todas las curvas en una familia de curvas $F(x, y, C_1) = 0$ cortan ortogonalmente a todas las curvas de otra familia $G(x, y, C_2) = 0$, entonces se dice que las familias son **trayectorias ortogonales** entre sí.

a) Encuentre las ecuaciones diferenciales de las familias $xy = C_1$ y $y^2 - x^2 = C_2$. Muestre que las dos familias de curvas son trayectorias ortogonales entre sí.

b) Trace las gráficas de algunos miembros de cada familia en el inciso *a*) en el mismo eje de coordenadas.

Capítulo 9

Sucesiones y series



En este capítulo La experiencia cotidiana brinda un sentimiento intuitivo de la noción de una sucesión. Las palabras *sucesión de eventos* o *sucesión de números* sugiere un arreglo en el que los eventos E o los números n se establecen en algún orden: $E_1, E_2, E_3, \ldots$ o $n_1, n_2, n_3, \ldots$

Cualquier estudiante de matemáticas también está familiarizado con el hecho de que cualquier número real puede escribirse como un decimal. Por ejemplo, el número racional $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$, donde los misteriosos tres puntos (una elipsis) significan que los tres dígitos se repiten eternamente. Esto quiere decir que el decimal 0.333… es una suma infinita o la *serie infinita*

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots.$$

En este capítulo observaremos que los conceptos de sucesión y serie infinita están relacionados.

9.1 Sucesiones

Introducción Si el dominio de una función f es el conjunto de enteros positivos, entonces los elementos $f(n)$ en el rango pueden arreglarse en un orden correspondiente a los valores crecientes de n:

$$f(1),\ f(2),\ f(3), \ldots,\ f(n), \ldots$$

En la discusión que sigue sólo se considerarán funciones cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos y cuyos elementos del rango son números reales.

EJEMPLO 1 Función con los enteros positivos como dominio

Si n es un entero positivo, entonces los primeros elementos en el rango de la función $f(n) = (1 + 1/n)^n$ son

$$f(1) = 2, \qquad f(2) = \frac{9}{4}, \qquad f(3) = \frac{64}{27}, \ldots$$ ■

Una función cuyo dominio es el conjunto completo de enteros positivos recibe un nombre especial.

Definición 9.1.1 Sucesión

Una **sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.

Algunos textos utilizan las palabras *sucesión infinita*. Cuando el dominio de la función es un subconjunto finito del conjunto de los enteros positivos, obtenemos una *sucesión finita*. Todas las sucesiones en este capítulo serán infinitas.

Notación y términos En lugar de la notación de función usual $f(n)$, una sucesión suele denotarse mediante $\{a_n\}$ o $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. El entero n algunas veces recibe el nombre de **índice** de a_n. Los **términos** de la sucesión se forman dejando que el índice n tome los valores 1, 2, 3, . . . ; el número a_1 es el *primer término*, a_2 es el *segundo término*, y así en lo sucesivo. El número a_n se denomina el *término* n-*ésimo* o el **término general** de la sucesión. De tal modo, $\{a_n\}$ es equivalente a

$$\begin{array}{ccccc} a_1, & a_2, & a_3, \ldots, & a_n, \ldots & \leftarrow \text{números en el rango} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 1 & 2 & 3 & n & \leftarrow \text{números en el dominio} \end{array}$$

Por ejemplo, la sucesión definida en el ejemplo 1 sería escrita $\{(1 + 1/n)^n\}$.

En algunas circunstancias es conveniente tomar el primer término de una sucesión como a_0 y la sucesión es entonces

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n, \ldots$$

EJEMPLO 2 Términos de una sucesión

Escriba los primeros cuatro términos de las sucesiones

a) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ ***b)*** $\{n^2 + n\}$ ***c)*** $\{(-1)^n\}$.

Solución Al sustituir $n = 1, 2, 3, 4$ en el término general respectivo de cada sucesión, obtenemos

a) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \ldots$ ***b)*** $2, 6, 12, 20, \ldots$ ***c)*** $-1, 1, -1, 1, \ldots$ ■

Sucesión convergente Para la sucesión del inciso *a)* del ejemplo 2, se ve que a medida que el índice n se vuelve progresivamente más grande, los valores $a_n = \frac{1}{2^n}$ no se incrementan sin límite. En realidad, observamos que cuando $n \to \infty$, los términos

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots$$

se aproximan al valor límite 0. Se afirma que la sucesión $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ **converge** a 0. En contraste, los términos de las sucesiones en los incisos *b)* y *c)* no se aproximan a un valor límite cuando $n \to \infty$. En general se tiene la siguiente definición.

Definición 9.1.2 Sucesión convergente

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ **converge** a un número real L si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ siempre que } n > N. \tag{1}$$

El número L se llama el **límite** de la sucesión.

Compare esta definición con la redacción en la definición 2.6.5.

Si una sucesión $\{a_n\}$ converge, entonces su límite L es único.

Sucesión convergente Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, (1) significa que los términos a_n pueden hacerse arbitrariamente cercanos a L para n suficientemente grande. Se indica que una sucesión converge a un número L escribiendo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Cuando $\{a_n\}$ no converge, esto es, cuando $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe, la sucesión **diverge**.

La FIGURA 9.1.1 ilustra varias maneras en las cuales una sucesión $\{a_n\}$ puede converger a un número L. Las partes *a*), *b*), *c*) y *d*) de la figura 9.1.1 muestran que para cuatro sucesiones convergentes diferentes $\{a_n\}$, *al menos un número finito* de términos de a_n están en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Los términos de la sucesión $\{a_n\}$ que están en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ para $n > N$ se representan por medio de puntos rojos en la figura.

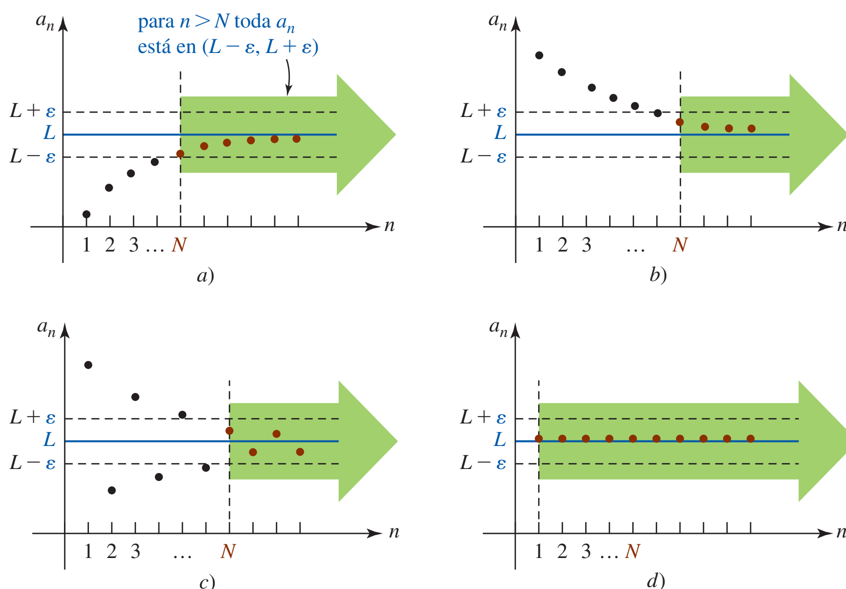


FIGURA 9.1.1 Cuatro maneras en las que una sucesión puede converger a L

EJEMPLO 3 Sucesión convergente

Use la definición 9.1.2 para demostrar que la sucesión $\{1/\sqrt{n}\}$ converge a 0.

Solución Intuitivamente, es posible ver a partir de los términos

$$1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \ldots$$

que cuando el índice n aumenta sin límite los términos tienden al valor límite 0. Para probar la convergencia, suponemos primero que $\varepsilon > 0$ está dado. Puesto que los términos de la sucesión son positivos, la desigualdad $|a_n - 0| < \varepsilon$ es la misma que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Esto es equivalente a $\sqrt{n} > 1/\varepsilon$ o $n > 1/\varepsilon^2$. En consecuencia, sólo se necesita elegir N como el primer entero positivo mayor o igual que $1/\varepsilon^2$. Por ejemplo, si se elige $\varepsilon = 0.01$, entonces $|1/\sqrt{n} - 0| = 1/\sqrt{n} < 0.01$ siempre que $n > 10\,000$. Esto es, se elige $N = 10\,000$. ■

En la práctica, para determinar si una sucesión $\{a_n\}$ converge o diverge, debemos trabajar directamente con $\lim_{n\to\infty} a_n$ y proceder igual que al examinar el $\lim_{n\to\infty} f(x)$. Si a_n aumenta o disminuye sin límite cuando $n \to \infty$, entonces $\{a_n\}$ es necesariamente divergente y escribimos, respectivamente,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty. \tag{2}$$

En el primer caso en (2) afirmamos que $\{a_n\}$ **diverge a infinito** y en el segundo que $\{a_n\}$ **diverge a infinito negativo**. Una sucesión tal vez diverja de manera distinta a la que se indica en (2). El siguiente ejemplo ilustra dos sucesiones; cada una diverge de un modo diferente.

EJEMPLO 4 Sucesiones divergentes

a) La sucesión $\{n^2 + n\}$ diverge a infinito, ya que $\lim_{n\to\infty}(n^2 + n) = \infty$.

b) La sucesión $\{(-1)^n\}$ es divergente puesto que $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ no existe. El término general de la sucesión no se aproxima a una constante cuando $n \to \infty$; como puede verse en el inciso *c*) del ejemplo 2, el término $(-1)^n$ se alterna entre 1 y -1 cuando $n \to \infty$. ■

EJEMPLO 5 Determinación de la convergencia

Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{3n(-1)^n}{n+1}\right\}$ converge o diverge.

Solución Al dividir el numerador y el denominador del término general entre n se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n(-1)^n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(-1)^n}{1 + 1/n}.$$

Aunque $3/(1 + 1/n) \to 3$ cuando $n \to \infty$, el límite anterior sigue sin existir. Debido al factor $(-1)^n$, se observa que cuando $n \to \infty$,

$$a_n \to 3, \quad n \text{ par}, \qquad \text{y} \qquad a_n \to -3, \quad n \text{ impar}.$$

La sucesión diverge. ■

Una sucesión, como aquella del inciso *b*) del ejemplo 4 y la del ejemplo 5, para la cual

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -L,$$

$L \neq 0$, se dice que **diverge por oscilación**.

Sucesión de constantes Una sucesión de constantes

$$c, c, c, \ldots$$

se escribe $\{c\}$. El sentido común indica que esta sucesión converge y que su límite es c. Vea la figura 9.1.1*d*). Por ejemplo, la sucesión $\{\pi\}$ converge a π.

Al determinar el límite de una sucesión resulta muchas veces útil sustituir la variable discreta n por una variable continua x. Si una función es f tal que $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$ y el valor de f en los enteros positivos, $f(1), f(2), f(3), \ldots$, concuerda con los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de $\{a_n\}$, esto es,

$$f(1) = a_1, \qquad f(2) = a_2, \qquad f(3) = a_3, \ldots,$$

entonces necesariamente la sucesión $\{a_n\}$ converge al número L. La validez de este resultado se ilustra en la FIGURA 9.1.2.

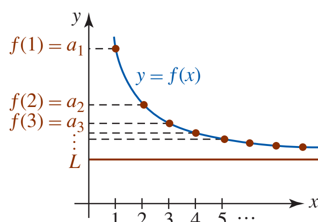


FIGURA 9.1.2 Si $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$, entonces $f(n) = a_n \to L$ cuando $n \to \infty$

Teorema 9.1.1 Límite de una sucesión

Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión y f es una función tal que $f(n) = a_n$ para $n \geq 1$. Si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \text{entonces} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = L. \tag{3}$$

EJEMPLO 6 Empleo de la regla de L'Hôpital

Muestre que la sucesión $\{(n+1)^{1/n}\}$ converge.

Solución Si definimos $f(x) = (x+1)^{1/x}$, entonces reconocemos que $\lim_{n\to\infty} f(x)$ tiene la forma indeterminada ∞^0 cuando $x \to \infty$. Por tanto, y utilizando la regla de L'Hôpital,

Vea la sección 4.5 para un repaso de cómo manejar la forma ∞^0.

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty} \ln f(x) = \ln[\lim_{n\to\infty} f(x)] = 0$ y que $\lim_{n\to\infty} f(x) = e^0 = 1$. Por tanto, por (3) tenemos $\lim_{n\to\infty} (n+1)^{1/n} = e^0 = 1$. La sucesión converge a 1. ■

EJEMPLO 7 Sucesión convergente

Demuestre que la sucesión $\left\{\dfrac{n(4n+1)(5n+3)}{6n^3+2}\right\}$ converge.

Solución Si $f(x) = \dfrac{x(4x+1)(5x+3)}{6x^3+2} = \dfrac{20x^3+17x^2+3x}{6x^3+2}$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x)$ tiene la forma indeterminada ∞/∞. Por la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x(4x+1)(5x+3)}{6x^3+2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{20x^3+17x^2+3x}{6x^3+2} \\
&\overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{60x^2+34x+3}{18x^2} \\
&\overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{120x+34}{36x} \\
&\overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{120}{36} = \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

De (3) del teorema 9.1.1, la sucesión dada converge a $\frac{10}{3}$. ■

EJEMPLO 8 Determinación de convergencia

Determine si la sucesión $\left\{\sqrt{\dfrac{n}{9n+1}}\right\}$ converge.

Solución Se continúa con la aplicación de la regla de L'Hôpital, se divide el numerador y el denominador entre x y resulta que $x/(9x+1) \to \frac{1}{9}$ cuando $x \to \infty$. De tal modo, podemos escribir

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{9n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{9n+1}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

La sucesión converge a $\frac{1}{3}$. ■

Propiedades Las siguientes **propiedades** de sucesiones son análogas a las que se indicaron en los teoremas 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3.

Teorema 9.1.2 Límite de una sucesión

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$, entonces

i) $\lim_{n\to\infty} c = c$, c un número real

ii) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = kL_1$, k un número real

iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 + L_2$

iv) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 \cdot L_2$

v) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0.$

EJEMPLO 9 Determinación de convergencia

Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{2 - 3e^{-n}}{6 + 4e^{-n}}\right\}$ converge.

Solución Observe que $2 - 3e^{-n} \to 2$ y $6 + 4e^{-n} \to 6 \neq 0$ cuando $n \to \infty$. De acuerdo con el teorema 9.1.2*v*), tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 - 3e^{-n}}{6 + 4e^{-n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(2 - 3e^{-n})}{\lim_{n\to\infty}(6 + 4e^{-n})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

La sucesión converge a $\frac{1}{3}$. ■

Revise la sección 1.6, específicamente la figura 1.6.2.

El primero de los siguientes dos teoremas debe ser verosímil de acuerdo con su conocimiento del comportamiento de la función exponencial. Recuerde que, para $0 < b < 1$, $b^x \to 0$ cuando $x \to \infty$, en tanto que para $b > 1$, $b^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$.

Teorema 9.1.3 Sucesiones de la forma $\{r^n\}$

Suponga que r es una constante distinta de cero. La sucesión $\{r^n\}$ converge a 0 si $|r| < 1$ y diverge si $|r| > 1$.

Teorema 9.1.4 Sucesiones de la forma $\{1/n^r\}$

La sucesión $\left\{\dfrac{1}{n^r}\right\}$ converge a 0 para r cualquier número racional positivo.

EJEMPLO 10 Aplicaciones de los teoremas 9.1.3 y 9.1.4

a) La sucesión $\{e^{-n}\}$ converge a 0 por el teorema 9.1.3, ya que $e^{-n} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ y $r = 1/e < 1$.

b) La sucesión $\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right\}$ diverge por el teorema 9.1.3, ya que $r = \frac{3}{2} > 1$.

c) La sucesión $\left\{\dfrac{4}{n^{5/2}}\right\}$ converge a 0 por el teorema 9.1.2*ii*) y el teorema 9.1.4, ya que $r = \frac{5}{2}$ es un número racional positivo. ■

EJEMPLO 11 Determinación de convergencia

Del teorema 9.1.2*iii*) y el teorema 9.1.4 observamos que la sucesión $\left\{10 + \dfrac{4}{n^{3/2}}\right\}$ converge a 10. ■

Sucesión definida recursivamente Como el siguiente ejemplo indica, una sucesión puede definirse especificando el primer término a_1 junto con una regla para obtener los términos subsecuentes a partir de los términos precedentes. En este caso se dice que la sucesión está definida **recursivamente**. La regla de definición se denomina **fórmula de recursión**. Vea los problemas 59 y 60 en los ejercicios 9.1. El método de Newton, dado en (3) en la sección 4.10, constituye un ejemplo de una sucesión definida recursivamente.

EJEMPLO 12 Una sucesión definida recursivamente

Suponga que una sucesión se define recursivamente mediante $a_{n+1} = 3a_n + 4$, donde $a_1 = 2$. Sustituyendo entonces $n = 1, 2, 3, \ldots$ se obtiene

el número está dado como 2



$$\begin{aligned} a_2 &= 3a_1 + 4 = 3(2) + 4 = 10 \\ a_3 &= 3a_2 + 4 = 3(10) + 4 = 34 \\ a_4 &= 3a_3 + 4 = 3(34) + 4 = 106 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. ■

Teorema de compresión El siguiente teorema es el equivalente de la sucesión del teorema 2.4.1.

Teorema 9.1.5 Teorema de compresión

Suponga que $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sucesiones tales que

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

para todos los valores de n mayores que algún índice N (esto es, $n > N$). Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen a un límite común L, entonces $\{c_n\}$ también converge a L.

Factorial Antes de presentar un ejemplo que ilustre el teorema 9.1.5 necesitamos revisar un símbolo que aparece con frecuencia en este capítulo. Si n es un entero positivo, el símbolo $n!$, que se lee "n factorial", es el producto de los primeros n enteros positivos:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n. \tag{4}$$

Por ejemplo, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Una propiedad importante del factorial está dada por

$$n! = (n-1)!n.$$

Para ver esto, considere el caso cuando $n = 6$:

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = \overbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)}^{5!}\,6 = 5!6.$$

Enunciada de una manera un poco diferente, la propiedad $n! = (n-1)!n$ es equivalente a

$$(n+1)! = n!(n+1). \tag{5}$$

Un último punto: por propósitos de conveniencia y para asegurar que la fórmula $n! = (n-1)!n$ es válida cuando $n = 1$, se define $0! = 1$.

EJEMPLO 13 Determinación de convergencia

Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ converge.

Solución La convergencia o divergencia de la sucesión dada no es evidente ya que $2^n \to \infty$ y $n! \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Aun cuando la forma límite de $\lim_{n\to\infty} (2^n/n!)$ es ∞/∞ no es posible que utilicemos la regla de L'Hôpital puesto que no hemos estudiado ninguna función $f(x) = x!$ Sin embargo, podemos recurrir al teorema 9.1.5 manipulando algebraicamente el término general de la sucesión. En vista de (4), el término general puede escribirse

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}^{n \text{ factores de } 2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} = \overbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{2}{n}}^{n \text{ fracciones}}$$

De la línea anterior se obtiene la desigualdad

$$0 \le \frac{2^n}{n!} = \overbrace{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdots\frac{2}{n}}^{n\ \text{fracciones}} \le 2\cdot 1\cdot \overbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{3}}^{n-2\ \text{fracciones}} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \tag{6}$$

Las $n - 2$ fracciones de $\frac{2}{3}$ en el lado derecho de (6) resultan del hecho de que después del segundo factor en el producto de n fracciones, 3 es el denominador más pequeño que hace $\frac{2}{3}$ más grande que $\frac{2}{4}$, más grande que $\frac{2}{5}$, y así sucesivamente hacia abajo hasta el último factor $\frac{2}{n}$. Por las leyes de los exponentes (6) es lo mismo que

$$0 \le \frac{2^n}{n!} \le \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{o} \qquad a_n \le c_n \le b_n,$$

donde se han identificado las sucesiones $\{a_n\} = \{0\}$, $\{b_n\} = \left\{\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ y $\{c_n\} = \{2^n/n!\}$. La sucesión $\{a_n\}$ es una de ceros y por ello converge a 0. La sucesión $\{b_n\} = \left\{\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ también converge a 0 al invocar el teorema 9.1.2*ii*) y el teorema 9.1.3 con $r = \frac{2}{3} < 1$. De tal manera que por el teorema 9.1.5, $\{c_n\} = \{2^n/n!\}$ también debe converger a 0. ■

El resultado $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ muestra que $n!$ crece mucho más rápido que 2^n cuando $n \to \infty$. Por ejemplo, para $n = 10$, $2^{10} = 1\,024$, en tanto que $10! = 3\,628\,800$.

La sucesión en el ejemplo anterior también puede definirse recursivamente. Para $n = 1$, $a_1 = 2^1/1! = 2$. Entonces por (5) y las leyes de los exponentes,

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2\cdot 2^n}{(n+1)\cdot n!} = \frac{2}{n+1}\cdot \underbrace{\frac{2^n}{n!}}_{\text{esto es } a_n}.$$

Así, $\{2^n/n!\}$ es lo mismo que

$$a_{n+1} = \frac{2}{n+1}a_n, \qquad a_1 = 2. \tag{7}$$

Es posible usar la fórmula de recursión (7) como un medio alterno de encontrar el límite L de la sucesión $\{2^n/n!\}$. Puesto que se mostró que la sucesión es convergente tenemos $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Este último enunciado es equivalente también a $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$. Haciendo que $n \to \infty$ en (7) y usando las propiedades de límites podemos escribir

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1}a_n\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right). \tag{8}$$

En la última línea se ve que $L = 0 \cdot L$, lo cual implica que el límite de la sucesión es $L = 0$.

El último teorema para esta sección es una consecuencia inmediata del teorema 9.1.5.

Teorema 9.1.6 Sucesión de valores absolutos

Si la sucesión $\{|a_n|\}$ converge a 0, entonces $\{a_n\}$ converge a 0.

DEMOSTRACIÓN Por la definición de valor absoluto, $|a_n| = a_n$ si $a_n \ge 0$ y $|a_n| = -a_n$ si $a_n < 0$. Se sigue que

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|. \tag{9}$$

Por suposición, $\{|a_n|\}$ converge a 0 y por ello $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$. De la desigualdad (9) y el teorema 9.1.5 se concluye que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por tanto, $\{a_n\}$ converge a 0. ■

EJEMPLO 14 Empleo del teorema 9.1.6

La sucesión $\left\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\}$ converge a 0 puesto que ya se ha demostrado en el ejemplo 3 que la sucesión de valores absolutos $\{|(-1)^n/\sqrt{n}|\} = \{1/\sqrt{n}\}$ converge a 0. ■

Ejercicios 9.1 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-26.

Fundamentos

En los problemas 1-10, liste los primeros cuatro términos de la sucesión cuyo término general es a_n.

1. $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$

2. $a_n = \dfrac{3}{4n-2}$

3. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

4. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{n+1}$

5. $a_n = 10^n$

6. $a_n = 10^{-n}$

7. $a_n = 2n!$

8. $a_n = (2n)!$

9. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

10. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$

En los problemas 11-14, emplee la definición 9.1.2 para demostrar que cada sucesión converge al número dado L.

11. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}; \quad L = 0$

12. $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}; \quad L = 0$

13. $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}; \quad L = 1$

14. $\left\{\dfrac{e^n+1}{e^n}\right\}; \quad L = 1$

En los problemas 15-46, determine si la sucesión dada converge. Si la sucesión converge, entonces encuentre su límite.

15. $\left\{\dfrac{10}{\sqrt{n+1}}\right\}$

16. $\left\{\dfrac{1}{n^{3/2}}\right\}$

17. $\left\{\dfrac{1}{5n+6}\right\}$

18. $\left\{\dfrac{4}{2n+7}\right\}$

19. $\left\{\dfrac{3n-2}{6n+1}\right\}$

20. $\left\{\dfrac{n}{1-2n}\right\}$

21. $\{20(-1)^{n+1}\}$

22. $\left\{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

23. $\left\{\dfrac{n^2-1}{2n}\right\}$

24. $\left\{\dfrac{7n}{n^2+1}\right\}$

25. $\{ne^{-n}\}$

26. $\{n^3e^{-n}\}$

27. $\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}\right\}$

28. $\left\{\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}\right\}$

29. $\{\cos n\pi\}$

30. $\{\operatorname{sen} n\pi\}$

31. $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$

32. $\left\{\dfrac{e^n}{\ln(n+1)}\right\}$

33. $\left\{\dfrac{5-2^{-n}}{7+4^{-n}}\right\}$

34. $\left\{\dfrac{2^n}{3^n+1}\right\}$

35. $\left\{\dfrac{e^n+1}{e^n}\right\}$

36. $\left\{4 + \dfrac{3^n}{2^n}\right\}$

37. $\left\{n \operatorname{sen}\left(\dfrac{6}{n}\right)\right\}$

38. $\left\{\left(1 - \dfrac{5}{n}\right)^n\right\}$

39. $\left\{\dfrac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}\right\}$

40. $\left\{\dfrac{\pi}{4} - \arctan(n)\right\}$

41. $\{n^{2/(n+1)}\}$

42. $\{10^{(n+1)/n}\}$

43. $\left\{\ln\left(\dfrac{4n+1}{3n-1}\right)\right\}$

44. $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 3n}\right\}$

45. $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$

46. $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\}$

En los problemas 47-52, encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión. Determine si la sucesión dada converge. Si la sucesión converge, entonces encuentre su límite.

47. $\dfrac{2}{1}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{7}, \ldots$

48. $1 + \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}, \ldots$

49. $3, -5, 7, -9, \ldots$

50. $-2, 2, -2, 2, \ldots$

51. $2, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{27}, \ldots$

52. $\dfrac{1}{1\cdot 4}, \dfrac{1}{2\cdot 8}, \dfrac{1}{3\cdot 16}, \dfrac{1}{4\cdot 32}, \ldots$

En los problemas 53-56, para la sucesión dada definida recursivamente, escriba los siguientes cuatro términos después del (de los) término(s) inicial(es) indicado(s).

53. $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n, \quad a_1 = -1$

54. $a_{n+1} = 2a_n - 1, \quad a_1 = 2$

55. $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3$

56. $a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1}, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4$

En los problemas 57 y 58, se sabe que la sucesión definida recursivamente converge para un valor inicial dado $a_1 > 0$. Suponga que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, y proceda como en (8) de esta sección para encontrar el límite L de la sucesión.

57. $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + 6$

58. $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{5}{a_n}\right)$

En los problemas 59 y 60, encuentre una fórmula de recursión que defina la sucesión dada.

59. $\left\{\dfrac{5^n}{n!}\right\}$

60. $\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \ldots$

En los problema 61-64, utilice el teorema de compresión para establecer la convergencia de la sucesión dada.

61. $\left\{\dfrac{\operatorname{sen}^2 n}{4^n}\right\}$

62. $\left\{\sqrt{16 + \dfrac{1}{n^2}}\right\}$

63. $\left\{\dfrac{\ln n}{n(n+2)}\right\}$

64. $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$ $\left[\textit{Sugerencia: } a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{3}{n}\cdot\dfrac{4}{n}\cdots\dfrac{n}{n}\right).\right]$

65. Demuestre que para cualquier número real x, la sucesión $\{(1 + x/n)^n\}$ converge a e^x.

66. Se sabe que la sucesión

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$$

converge a un número γ llamado **constante de Euler**. Calcule los primeros 10 términos de la sucesión.

Aplicaciones

67. Una pelota se deja caer desde una altura inicial de 15 pies sobre una plancha de concreto. Cada vez que rebota, alcanza una altura de $\frac{2}{3}$ de su altura precedente. ¿A qué altura llegará en su tercer rebote? ¿En su n-ésimo rebote? Vea la FIGURA 9.1.3.

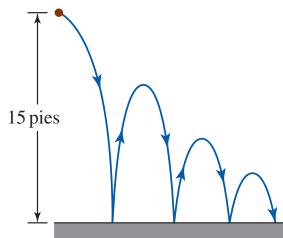


FIGURA 9.1.3 Rebote de la pelota del problema 67

68. Una pelota, que cae desde una gran altura, recorre 16 pies durante el primer segundo, 48 pies durante el segundo, 80 pies durante el tercero, y así en lo sucesivo. ¿Cuál es la distancia recorrida por la pelota durante el sexto segundo?

69. Un paciente toma 15 mg de un fármaco cada día. Suponga que 80% del fármaco acumulado es excretado cada día por las funciones corporales. Escriba los primeros seis términos de la sucesión $\{A_n\}$, donde A_n es la cantidad de fármaco presente en el cuerpo del paciente inmediatamente después de la dosis n-ésima.

70. Se deposita un dólar en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés anual r. Si no se extrae dinero, ¿cuál es la cantidad de dinero acumulado en la cuenta después del primero, segundo y tercer años?

71. Cada persona tiene dos padres. Determine cuántos tatatatarabuelos tiene cada persona.

72. La sucesión definida recursivamente

$$p_{n+1} = 3p_n - \frac{p_n^2}{400}, \quad p_0 = 450$$

se denomina **ecuación logística discreta**. Una sucesión de este tipo se utiliza a menudo para modelar una población p_n en un ambiente; aquí p_0 es la población inicial en el ambiente. Determine la **capacidad de transporte** $K = \lim_{n\to\infty} p_n$ del ambiente. Calcule los siguientes nueve términos de la sucesión y demuestre que estos términos oscilan alrededor de K.

Piense en ello

73. Considere la sucesión $\{a_n\}$ cuyos primeros cuatro términos son

$$1, \quad 1 + \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \ldots$$

a) Con $a_1 = 1$, encuentre una fórmula de recursión que defina a la sucesión.

b) ¿Cuáles son el quinto y el sexto términos de la sucesión?

c) Se sabe que la sucesión $\{a_n\}$ converge. Encuentre el límite de la sucesión.

74. Conjeture respecto al límite de la sucesión convergente $\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \ldots$

75. Si converge la sucesión $\{a_n\}$, ¿diverge la sucesión $\{a_n^2\}$? Apoye su respuesta con argumentos matemáticos sólidos.

76. En la FIGURA 9.1.4 el cuadrado que se muestra en rojo es de 1 unidad por lado. Un segundo cuadrado azul se construye dentro del primer cuadrado conectando los puntos medios del primero. Un tercer cuadrado verde se construye conectando los puntos medios de los lados del segundo cuadrado, y así en lo sucesivo.

a) Encuentre una fórmula para el área A_n del n-ésimo cuadrado inscrito.

b) Considere la sucesión $\{S_n\}$, donde $S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$. Calcule los valores numéricos de los primeros diez términos de esta sucesión.

c) Conjeture acerca de la convergencia de $\{S_n\}$.

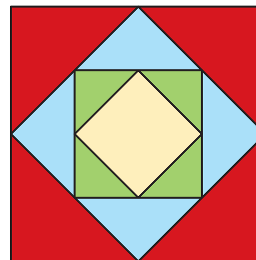


FIGURA 9.1.4 Cuadrados incrustados del problema 76

Proyectos

77. Un clásico matemático Considere un triángulo equilátero con lados de longitud 1 como se muestra en la FIGURA 9.1.5*a*). Como se muestra en la figura 9.1.5*b*), sobre cada uno de los tres lados del triángulo se construye otro triángulo equilátero con lados de longitud $\frac{1}{3}$. Como se señala en las figuras 9.1.5*c*) y 9.1.5*d*), se continúa esta construcción: se construyen triángulos equiláteros sobre los lados de cada nuevo triángulo previo de modo tal que la longitud de los lados del nuevo triángulo es $\frac{1}{3}$ la longitud de los lados del triángulo anterior. Considere que el perímetro de la primera figura es P_1, el perímetro de la segunda figura P_2, y así en lo sucesivo.

a) Encuentre los valores de P_1, P_2, P_3 y P_4.

b) Encuentre la fórmula para el perímetro P_n de la n-ésima figura.

c) ¿Cuál es el $\lim_{n\to\infty} P_n$? El perímetro de la región similar a un copo de nieve que se obtuvo dejando $n \to \infty$ se llama **curva del copo de nieve de Koch** y fue inventada en 1904 por el matemático sueco **Helge von Koch** (1870-1924). La curva de Koch aparece en la teoría de **fractales**.

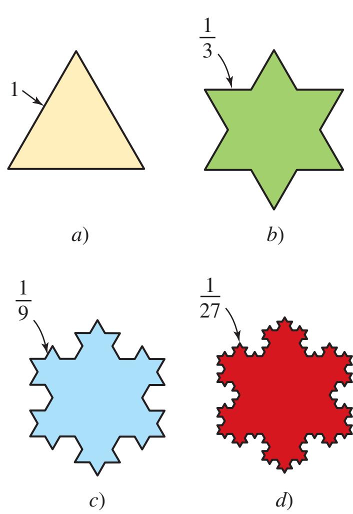


FIGURA 9.1.5 Regiones de copos de nieve del problema 77

78. Un poco de historia: ¿Cuántos conejos? Además de su famosa torre inclinada, la ciudad de Pisa, Italia, se



conoce también como el lugar natal de **Leonardo Pisano**, alias **Leonardo Fibonacci** (1170-1250). Fibonacci fue el primero en Europa en introducir el sistema de lugares decimales hindú-árabe y el uso de los numerales arábigos. Su libro *Liber Abacci*, publicado en 1202, es básicamente un texto acerca de cómo hacer aritmética en este sistema decimal. Sin embargo, en el capítulo 12 de *Liber Abacci*, Fibonacci plantea y resuelve el siguiente problema sobre la reproducción de conejos:

> *¿Cuántos pares de conejos se reproducirán en un año empezando con un solo par, si cada mes cada par tiene un nuevo par que se vuelve fértil a partir del segundo mes en adelante?*

Distinga el patrón de la solución de este problema y complete la siguiente tabla.

	Inicios	Después de cada mes											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Parejas adultas	1	1	2	3	5	8	13	21					
Parejas de bebés	0	1	1	2	3	5	8	13					
Total de parejas	1	2	3	5	8	13	21	34					

79. Escriba cinco términos, después de los dos iniciales, de la sucesión definida recursivamente por medio de $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. Reexamine el problema 78.

80. Razón áurea Si la fórmula de recursión del problema 79 se divide entre F_n, entonces

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Si se define $a_n = F_{n+1}/F_n$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente por medio de

$$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}, \quad a_1 = 1, n \geq 2.$$

Se sabe que la sucesión $\{a_n\}$ converge en la **razón áurea** $\phi = \lim_{n\to\infty} a_n$.

a) Encuentre ϕ.

b) Escriba un pequeño informe acerca del significado del número ϕ que incluya la relación entre este número y la forma del caparazón de cámaras múltiples del nautilo. Vea la foto en el inicio del capítulo 9 en la página 475.

9.2 Sucesiones monótonas

Introducción En la sección anterior se demostró que una sucesión $\{a_n\}$ convergía al determinar $\lim_{n\to\infty} a_n$. Sin embargo, no siempre es fácil o incluso posible determinar si una sucesión $\{a_n\}$ converge buscando el valor exacto de $\lim_{n\to\infty} a_n$. Por ejemplo, ¿la sucesión

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$$

converge? Resulta que es posible demostrar que esta sucesión converge, pero no utilizando las ideas básicas de la última sección. En esta sección se considera un tipo especial de sucesión cuya convergencia puede establecerse sin determinar el valor de $\{a_n\}$.

Empezamos con una definición.

Definición 9.2.1 Sucesión monótona

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que será

i) **creciente** si $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geq 1$,
ii) **no decreciente** si $a_{n+1} \geq a_n$ para toda $n \geq 1$,
iii) **decreciente** si $a_{n+1} < a_n$ para toda $n \geq 1$,
iv) **no creciente** si $a_{n+1} \leq a_n$ para toda $n \geq 1$,

Si una sucesión $\{a_n\}$ es de alguno de los tipos anteriores, se dice entonces que es **monótona**.

En otras palabras, sucesiones del tipo

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$
$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots,$$

son crecientes y decrecientes, respectivamente. Mientras,

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$$
$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots,$$

son sucesiones no decrecientes y no crecientes, respectivamente. Las nociones de *no decreciente* y *no creciente* permiten que algunos términos adyacentes en una sucesión resulten iguales.

EJEMPLO 1 Monótona/no monótona

a) Las tres sucesiones

$$4, 6, 8, 10, \ldots \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \qquad \text{y} \qquad 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, \ldots$$

son monótonas. Éstas son, respectivamente, creciente, decreciente y no creciente.

b) La sucesión $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$ es no monótona. ■

No siempre resulta evidente si una sucesión es creciente, decreciente, y así en lo sucesivo. Las siguientes guías ilustran algunas de las maneras en que puede demostrarse la monotonía.

Guías para demostrar la monotonía

i) Formar una **función** $f(x)$ tal que $f(n) = a_n$. Si $f'(x) > 0$, entonces $\{a_n\}$ es creciente. Si $f'(x) < 0$, entonces $\{a_n\}$ es decreciente.

ii) Formar el **cociente** a_{n+1}/a_n donde $a_n > 0$ para toda n. Si $a_{n+1}/a_n > 1$ para toda n, entonces $\{a_n\}$ es creciente. Si $a_{n+1}/a_n < 1$ para toda n, entonces $\{a_n\}$ es decreciente.

iii) Formar la **diferencia** $a_{n+1} - a_n$. Si $a_{n+1} - a_n > 0$ para toda n, entonces $\{a_n\}$ es creciente. Si $a_{n+1} - a_n < 0$ para toda n, entonces $\{a_n\}$ es decreciente.

EJEMPLO 2 Una sucesión monótona

Demuestre que $\left\{\dfrac{n}{e^n}\right\}$ es una sucesión monótona.

Solución Si se define $f(x) = x/e^x$, entonces $f(n) = a_n$. En este caso,

$$f'(x) = \frac{1 - x}{e^x} < 0$$

para $x > 1$ implica que f es decreciente sobre $[1, \infty)$. De ese modo se concluye que

$$f(n + 1) = a_{n+1} < f(n) = a_n.$$

Por la definición 9.2.1, la sucesión dada es decreciente.

Solución alterna Del cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n} = \frac{n+1}{ne} = \frac{1}{e} + \frac{1}{ne} \leq \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} < 1$$

vemos que $a_{n+1} < a_n$ para toda $n \geq 1$. Esto demuestra que la sucesión es decreciente. ■

EJEMPLO 3 Una sucesión monótona

La sucesión $\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}$ o $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots$ *parece* ser creciente. De

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

se concluye que $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geq 1$. Eso demuestra que la sucesión es creciente. ■

Definición 9.2.2 Sucesión acotada

i) Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está **acotada por arriba** si hay un número positivo M tal que $a_n \leq M$ para toda n.
ii) Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está **acotada por abajo** si hay un número positivo m tal que $a_n \geq m$ para toda n.
iii) Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está **acotada** si está acotada por arriba y acotada por abajo.

Desde luego, si una sucesión $\{a_n\}$ no está acotada, entonces se afirma que es **no acotada**. Una sucesión no acotada es divergente. La sucesión de Fibonacci (vea los problemas 78 y 79 en los ejercicios 9.1)

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

es no decreciente y es un ejemplo de una sucesión no acotada.

La sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ en el ejemplo 1 es acotada puesto que $0 \leq a_n \leq 1$ para toda n. Cualquier número más pequeño que una cota inferior m de una sucesión también es una cota inferior y cualquier número mayor que una cota superior M es una cota superior; en otras palabras, los números m y M en la definición 9.2.2 no son únicos. Para la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ es igualmente cierto que $-2 \leq a_n \leq 2$ para toda $n \geq 1$.

EJEMPLO 4 Una sucesión acotada

La sucesión $\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}$ está acotada por arriba por 2, ya que la desigualdad

$$\frac{2n+1}{n+1} \leq \frac{2n+2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} = 2$$

muestra que $a_n \leq 2$ para $n \geq 1$. Además,

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1} \geq 0$$

para $n \geq 1$ muestra que la sucesión está acotada por abajo por 0. De tal modo, $0 \leq a_n \leq 2$ para toda n implica que la sucesión está acotada. ■

◀ En realidad, del ejemplo 3 advertimos que los términos de la sucesión están acotados por abajo por el primer término de la sucesión.

El siguiente resultado será útil en las secciones subsecuentes de este capítulo.

Teorema 9.2.1 Condición suficiente para la convergencia

Una sucesión monótona acotada $\{a_n\}$ converge.

La existencia de una *cota superior mínima*, esto es, una cota superior que es más pequeña que todas las demás cotas superiores de la sucesión, es uno de los axiomas básicos en matemáticas. Recibe el nombre de **propiedad de completez** del sistema de números reales.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos el teorema en el caso de una sucesión no decreciente. Por suposición, $\{a_n\}$ está acotada y por ello $m \le a_n \le M$ para toda n. A su vez, esto significa que el conjunto infinito de términos $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ está acotado por arriba y por tanto tiene una cota superior mínima o más pequeña L. La sucesión en realidad converge a L. Para $\varepsilon > 0$ sabemos que $L - \varepsilon < L$, y consecuentemente $L - \varepsilon$ no es una cota superior de S (no hay cotas superiores más pequeñas que la cota superior mínima). En consecuencia, existe un entero positivo N tal que $a_N > L - \varepsilon$. Pero, puesto que $\{a_n\}$ es no decreciente,

$$L - \varepsilon \le a_N \le a_{N+1} \le a_{N+2} \le a_{N+3} \le \cdots \le L + \varepsilon.$$

Se concluye que para $n > N$, $L - \varepsilon \le a_n \le L + \varepsilon$ o $|a_n - L| < \varepsilon$. De la definición 9.1.2 determinamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. ■

EJEMPLO 5 Acotada y monótona

Se demostró que la sucesión $\left\{\dfrac{2n+1}{n+1}\right\}$ es monótona (ejemplo 3) y acotada (ejemplo 4). Por consiguiente, por el teorema 9.2.1 la sucesión es convergente. ■

EJEMPLO 6 Determinación de convergencia

Demuestre que la sucesión $\left\{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right\}$ converge.

Solución Primero, el cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

muestra que $a_{n+1} < a_n$ para toda n. La sucesión es monótona puesto que es decreciente. Luego, de la desigualdad

¿Por qué el producto $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{2n-1}{2n}$ es menor que 1?

$$0 < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{2n-1}{2n} < 1$$

se observa que la sucesión está acotada. Se concluye del teorema 9.2.1 que la sucesión es convergente. ■

El teorema 9.2.1 es útil para probar que la sucesión $\{a_n\}$ converge, esto es, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, pero el teorema no brinda el número específico L. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra cómo determinar L cuando la sucesión se define recursivamente.

EJEMPLO 7 Determinación de convergencia

Demuestre que la sucesión $\{a_n\}$ definida por la fórmula de recursión $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 6$, $a_1 = 1$, converge.

Esto puede probarse utilizando un método llamado *inducción matemática.*

Solución Primero, la sucesión $\{a_n\}$ está acotada. Puede demostrarse que $a_n < 8$, para toda n. Este hecho se sugiere al calcular a_n para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_2 = \frac{1}{4}a_1 + 6 = \frac{1}{4}(1) + 6 = \frac{25}{4} = 6.25 < 8$$

$$a_3 = \frac{1}{4}a_2 + 6 = \frac{1}{4}\left(\frac{25}{4}\right) + 6 = \frac{121}{16} = 7.5625 < 8$$

$$a_4 = \frac{1}{4}a_3 + 6 = \frac{1}{4}\left(\frac{121}{16}\right) + 6 = \frac{505}{64} = 7.890625 < 8$$

$$\vdots$$

Como $a_n > 0$ para toda n, se tiene que $0 < a_n < 8$ para toda n. De tal modo, $\{a_n\}$ está acotada.

Luego, demostraremos que la sucesión $\{a_n\}$ es monótona. Debido a que $a_n < 8$ necesariamente $\frac{3}{4}a_n < \frac{3}{4}\cdot 8 = 6$. Por tanto, de la fórmula de recursión,

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 6 > \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}a_n = a_n.$$

Esto demuestra que $a_{n+1} > a_n$ para toda n, y por ello la sucesión es creciente.

Como $\{a_n\}$ es acotada y monótona, se sigue del teorema 9.2.1 que la sucesión converge. Puesto que debemos tener $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = L$, el límite de la sucesión se determina a partir de la fórmula de recursión:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}a_n + 6\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} a_n + 6$$

$$L = \frac{1}{4}L + 6.$$

Al resolver la última ecuación para L encontramos que $\frac{3}{4}L = 6$ o $L = 8$. ■



NOTAS DESDE EL AULA

i) Toda sucesión convergente $\{a_n\}$ está necesariamente acotada. Vea el problema 31 en los ejercicios 9.2. No obstante, no se concluye que toda sucesión acotada es convergente. Se le pedirá que dé un ejemplo que ilustre este último enunciado en el problema 30 de los ejercicios 9.2.

ii) Algunas sucesiones $\{a_n\}$ no exhiben comportamiento monótono hasta algún punto en la sucesión, esto es, hasta que el índice satisface $n \geq N$, donde N es algún entero positivo. Por ejemplo, los términos de la sucesión $\{5^n/n!\}$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ son:

$$5, \frac{25}{2}, \frac{125}{6}, \frac{625}{24}, \frac{625}{24}, \frac{3\,125}{144}, \ldots \tag{1}$$

Para observar mejor lo que está ocurriendo en (1), se aproximarán los términos utilizando números redondeados hasta dos decimales:

$$5, 12.5, 20.83, 26.04, 26.04, 21.70, \ldots \tag{2}$$

En (2) vemos que los primeros cuatro términos de $\{5^n/n!\}$ aumentan de manera evidente, pero empezando con el *cuarto término* los términos parecen empezar a no crecer. Esto se prueba a partir de la versión definida recursivamente de la sucesión. Procediendo como se hizo al obtener la fórmula de recurrencia en (7) en la sección 9.1, $\{5^n/n!\}$ es la misma que $a_{n+1} = \dfrac{5}{n+1}a_n$, $a_1 = 5$. Puesto que $\dfrac{5}{n+1} \leq 1$ para $n \geq 4$ observamos que $a_{n+1} \leq a_n$, esto es, $\{5^n/n!\}$ es no creciente sólo para $n \geq 4$. De la misma manera, es fácil demostrar que $\{100^n/n!\}$ se vuelve a la larga no creciente sólo cuando $n \geq 99$. Tomando el límite de la fórmula de recursión como $n \to \infty$, como en el ejemplo 7, es posible demostrar que tanto $\{5^n/n!\}$ como $\{100^n/n!\}$ convergen a 0.

Ejercicios 9.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-26.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-12, determine si la sucesión dada es monótona. Si es así, indique si es creciente, decreciente o no decreciente o no creciente.

1. $\left\{\dfrac{n}{3n+1}\right\}$

2. $\left\{\dfrac{10+n}{n}\right\}$

3. $\{(-1)^n\sqrt{n}\}$

4. $\{(n-1)(n-2)\}$

5. $\left\{\dfrac{e^n}{n}\right\}$

6. $\left\{\dfrac{e^n}{n^5}\right\}$

7. $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$

8. $\left\{\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right\}$

9. $\left\{n + \dfrac{1}{n}\right\}$

10. $\{n^2 + (-1)^n n\}$

11. $\{(\text{sen } 1)(\text{sen } 2)\cdots(\text{sen } n)\}$

12. $\left\{\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)\right\}$

En los problemas 13-24, utilice el teorema 9.2.1 para demostrar que la sucesión dada converge.

13. $\left\{\dfrac{4n-1}{5n+2}\right\}$

14. $\left\{\dfrac{6-4n^2}{1+n^2}\right\}$

15. $\left\{\dfrac{3^n}{1+3^n}\right\}$

16. $\{n5^{-n}\}$

17. $\{e^{1/n}\}$

18. $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$

19. $\left\{\dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right\}$

20. $\left\{\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\right\}$

21. $\{\tan^{-1}n\}$

22. $\left\{\dfrac{\ln(n+3)}{n+3}\right\}$

23. $(0.8), (0.8)^2, (0.8)^3, \ldots$

24. $\sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}, \ldots$

En los problemas 25 y 26, use el teorema 9.2.1 para demostrar que la sucesión definida recursivamente converge. Encuentre el límite de la sucesión.

25. $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 5, a_1 = 1$

26. $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, a_1 = 0$

27. Exprese

$$\sqrt{7}, \sqrt{7\sqrt{7}}, \sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}, \ldots$$

como una sucesión $\{a_n\}$ definida recursivamente. Utilice el hecho de que la sucesión está acotada, $0 < a_n < 7$ para toda n, para demostrar que $\{a_n\}$ es creciente. Encuentre el límite de la sucesión.

28. Recurra al teorema 9.2.1 para demostrar que la sucesión definida recursivamente

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)a_n, \quad a_1 = 2, a_2 = 1, n \geq 2$$

es acotada y monótona y en consecuencia converge. Explique por qué la fórmula de recursión no es de ayuda para determinar el límite de la sucesión.

≡ Aplicaciones

29. Ciertos estudios en administración pesquera argumentan que el tamaño de una población de peces no perturbada cambia de un año al siguiente de acuerdo con la fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}, \quad n \geq 0,$$

donde $p_n > 0$ es la población después de n años, y a y b son parámetros positivos que dependen de las especies y de su ambiente. Suponga que el tamaño de una población p_0 se introduce en el año 0.

a) Emplee la fórmula de recursión para demostrar que los únicos valores límite posibles para la sucesión $\{p_n\}$ son 0 y $b - a$.

b) Demuestre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.

c) Utilice el resultado del inciso *b*) para demostrar que si $a > b$, entonces la población muere; esto es, $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

d) Suponga ahora $a < b$. Demuestre que si $0 < p_0 < b - a$, entonces la sucesión $\{p_n\}$ es creciente y está acotada por arriba por $b - a$. Demuestre que si $0 < b - a < p_0$, entonces la sucesión $\{p_n\}$ es decreciente y acotada por abajo por $b - a$. Concluya que $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$ para cualquier $p_0 > 0$. [*Sugerencia*: Examine $|b - a - p_{n+1}|$, la cual es la distancia entre p_{n+1} y $|b - a|$.]

≡ Piense en ello

30. Proporcione un ejemplo de una sucesión acotada que no es convergente.

31. Demuestre que toda sucesión convergente $\{a_n\}$ está acotada. [*Sugerencia*: Puesto que $\{a_n\}$ es convergente, se sigue de la definición 9.1.2 que existe una N tal que $|a_n - L| < 1$ siempre que $n > N$.]

32. Demuestre que $\left\{\int_1^n e^{-t^2}dt\right\}$ converge. [*Sugerencia*: Para $x > 1, e^{-x^2} \leq e^{-x}$.]

33. Un clásico matemático Demuestre que la sucesión

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$$

es acotada y monótona, y, en consecuencia, convergente. El límite de la sucesión se denota por medio de γ y se llama **constante de Euler** en honor al notable matemático suizo **Leonhard Euler** (1707-1783). Del problema 66 del ejercicio 9.1, $\gamma \approx 0.5772\ldots$ [*Sugerencia*: Primero demuestre la desigualdad

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

considerando el área bajo la gráfica de $y = 1/x$ sobre el intervalo $[1, n]$.]

9.3 Series

Introducción El concepto de una *serie* se relaciona estrechamente con el concepto de *sucesión*. Si $\{a_n\}$ es la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, entonces la suma de los términos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

se llama **serie infinita**, o simplemente una **serie**. Las a_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, se denominan los **términos** de la serie y a_n se llama el **término general**. Escribimos (1) de manera compacta utilizando la notación de sumatoria como

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{o por conveniencia} \quad \sum a_k.$$

La pregunta que deseamos responder en ésta y en varias de las secciones siguientes es:

- ¿Cuándo una serie infinita de constantes "suma" un número?

EJEMPLO 1 Una serie infinita

En los comentarios de inicio de este capítulo se advirtió que la representación decimal de un número racional $\frac{1}{3}$ es, de hecho, una serie infinita

$$0.333\cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}.$$

■

De manera intuitiva, esperamos que $\frac{1}{3}$ sea la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$. Sin embargo, de manera intuitiva, esperamos que una serie infinita tal como

$$100 + 1\,000 + 10\,000 + 100\,000 + \cdots$$

donde los términos se vuelven más y más grandes, no tenga suma. En otras palabras, no se espera que la serie última "sume" o *converja* a un número cualquiera. El concepto de convergencia de una serie infinita se define en términos de la convergencia de un tipo especial de sucesión.

Sucesión de sumas parciales Asociada con toda serie finita $\sum a_k$, existe una **sucesión de sumas parciales** $\{S_n\}$ cuyos términos están definidos por

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

El término general $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ de esta sucesión se denomina la **suma parcial n-ésima** de la serie.

EJEMPLO 2 Una serie infinita

La sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ para la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$ es

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{3}{10} = 0.3 \\ S_2 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} = 0.33 \\ S_3 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} = 0.333 \\ &\vdots \\ S_n &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} = 0.\overbrace{333\ldots3}^{3\ n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

■

En el ejemplo 2, cuando n es muy grande, S_n dará una buena aproximación a $\frac{1}{3}$, de modo que parece razonable escribir

$$\frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}.$$

Esto lleva a la siguiente definición.

Definición 9.3.1 Serie convergente

La serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se dice que es **convergente** si su sucesión de sumas parciales $\{S_n\} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ converge; esto es,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S.$$

El número S se dice que es la **suma** de la serie. Si $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe, entonces se dice que la serie es **divergente**.

EJEMPLO 3 Empleo de la sucesión de sumas parciales

Demuestre que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+4)(k+5)}$ es convergente.

Solución Por fracciones parciales el término general a_n de la serie puede escribirse como

$$a_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}.$$

De tal modo, la suma parcial n-ésima de la serie es

$$S_n = \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right] + \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right] + \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right] + \left[\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right]$$

$$= \frac{1}{5} \overbrace{- \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+4}}^{0} - \frac{1}{n+5}$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{n+5}.$$

De la última línea observamos que $\lim_{n\to\infty} 1/(n+5) = 0$, y por ello

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{n+5}\right] = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}.$$

En consecuencia, la serie converge y se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \frac{1}{5}.$$

■

Serie telescópica Debido a la manera en la cual el término general de la sucesión de sumas parciales "colapsa" hasta dos términos, la serie en el ejemplo 3 se dice que es una **serie telescópica**. Vea los problemas 11-14 en los ejercicios 9.3.

Serie geométrica Otro tipo de serie que puede probarse como convergente o divergente a partir directamente de su sucesión de sumas parciales tiene la forma

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}, \tag{2}$$

donde $a \neq 0$ y r son números reales fijos. Una serie de la forma (2) se llama **serie geométrica**. Advierta en (2) que cada término después del primero se obtiene al multiplicar el término precedente por r. El número r se denomina la **razón común** y, como se ve en el siguiente teorema, su magnitud determina si una serie geométrica converge o diverge.

Teorema 9.3.1 Suma de una serie geométrica

i) Si $|r| < 1$, entonces una serie geométrica converge y su suma es

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}, \quad a \neq 0.$$

ii) Si $|r| \geq 1$, entonces una serie geométrica diverge.

DEMOSTRACIÓN La prueba del teorema 9.3.1 se dará en dos partes. En cada parte se supone que $a \neq 0$.

Empezaremos con el caso en el que $|r| = 1$. Para $r = 1$, la serie es

$$\sum_{k=1}^{\infty} a = a + a + a + \cdots$$

y por ello la suma parcial n-ésima $S_n = \overbrace{a + a + \cdots + a}^{n\,a}$ es simplemente $S_n = na$. En este caso, $\lim_{n\to\infty} S_n = a \cdot \lim_{n\to\infty} n = \infty$. De tal modo, la serie diverge. Para $r = -1$, la serie es

$$\sum_{k=1}^{\infty} a(-1)^{k-1} = a + (-a) + a + (-a) + \cdots$$

y por ello la sucesión de sumas parciales es

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, \ldots \qquad \text{o} \qquad a, 0, a, 0, a, 0, \ldots,$$

la cual es divergente,

Considere ahora el caso $|r| \neq 1$, el cual significa que $|r| < 1$ o $|r| > 1$. Considere el término general de la sucesión de sumas parciales de (2):

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}. \tag{3}$$

Multiplicando ambos lados de (3) por r, se obtiene

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \tag{4}$$

Después se resta (4) de (3) y se resuelve para S_n:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$
$$(1 - r)S_n = a(1 - r^n)$$
$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1. \tag{5}$$

Ahora, de acuerdo con el teorema 9.1.3 sabemos que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ para $|r| < 1$. En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1.$$

Si $|r| > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n$ no existe y por ello el límite de (5) tampoco existe. ■

EJEMPLO 4 Serie geométrica

a) En la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$$

se identifica $a = 1$ y la razón común $r = -\frac{1}{3}$. Puesto que $|r| = |-\frac{1}{3}| = \frac{1}{3} < 1$, la serie converge. Del teorema 9.3.1, la suma de la serie es entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}.$$

b) La razón común en la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = 5 + \frac{15}{2} + \frac{45}{4} + \frac{135}{8} + \cdots$$

es $r = \frac{3}{2}$. La serie diverge debido a $r = \frac{3}{2} > 1$. ■

Todo número racional p/q, donde p y $q \neq 0$ son enteros, se puede expresar como un decimal interrumpido o como un decimal repetido. De tal modo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$ en el ejemplo 1 converge puesto que es una serie geométrica con $r = \frac{1}{10} < 1$. Con $a = \frac{3}{10}$ encontramos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

En general:

- Todo decimal repetido es una serie geométrica convergente.

EJEMPLO 5 Número racional

Exprese el decimal repetido 0.121212 . . . como un cociente de enteros.

Solución Se escribe primero el número dado como una serie geométrica

$$\begin{aligned} 0.121212\ldots &= \frac{12}{100} + \frac{12}{10\,000} + \frac{12}{1\,000\,000} + \cdots \\ &= \frac{12}{10^2} + \frac{12}{10^4} + \frac{12}{10^6} + \cdots \end{aligned}$$

y se hacen las identificaciones $a = \frac{12}{100}$ y $r = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$. Por el teorema 9.3.1, la serie converge pues $r = \frac{1}{100} < 1$ y su suma es

$$0.121212\ldots = \frac{\frac{12}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}.$$ ■

EJEMPLO 6 Observación de una pelota que rebota

Si una pelota se deja caer desde una altura de s pies sobre el suelo, entonces el tiempo t que tarda en llegar al suelo se relaciona con s por medio de $s = \frac{1}{2}gt^2$. En otras palabras, la pelota tarda $t = \sqrt{2s/g}$ s para llegar al suelo. Suponga que la pelota rebota siempre hasta cierta fracción fija $\beta\,(0 < \beta < 1)$ de su altura previa. Encuentre una fórmula para el tiempo T que la pelota tarda en llegar al reposo. Vea la FIGURA 9.3.1.

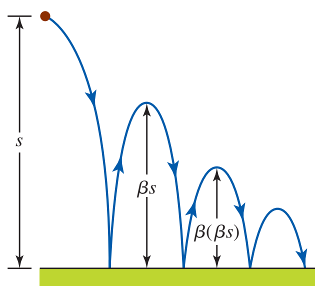


FIGURA 9.3.1 Pelota que rebota del ejemplo 6



Foto estroboscópica de una pelota de basquetbol rebotando

Solución El tiempo para caer desde una altura de s pies hasta el suelo es: $\sqrt{2s/g}$; el tiempo para ascender βs pies y después caer βs pies hasta el suelo es: $2\sqrt{2\beta s/g}$; el tiempo para ascender $\beta(\beta s)$ pies y después caer $\beta(\beta s)$ pies hasta el suelo es $2\sqrt{2\beta^2 s/g}$; y así sucesivamente. De esta manera, el tiempo total T está dado por la serie infinita

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{2s/g} + 2\sqrt{2\beta s/g} + 2\sqrt{2\beta^2 s/g} + \cdots + 2\sqrt{2\beta^n s/g} + \cdots \\ &= \sqrt{2s/g}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{\beta})^k\right]. \end{aligned}$$

Como $0 < \beta < 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{\beta})^k$ es una serie geométrica convergente con $a = \sqrt{\beta}$ y $r = \sqrt{\beta}$. En consecuencia, de acuerdo con el teorema 9.3.1,

$$T = \sqrt{2s/g}\left[1 + 2\frac{\sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}}\right] \quad \text{o} \quad T = \sqrt{2s/g}\left[\frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}}\right].$$ ■

Serie armónica Una de las series más famosas es también un ejemplo de una serie divergente. La **serie armónica** es la suma de los recíprocos de los enteros positivos:

Recuerde esta serie. Será importante en las secciones subsecuentes de este capítulo.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}. \tag{6}$$

El término general de la sucesión de las sumas parciales para (6) está dado por

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

De tal modo,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq S_n + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{\text{términos de } n \ \frac{1}{2n}} = S_n + n \cdot \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La desigualdad $S_{2n} \geq S_n + \frac{1}{2}$ implica que la sucesión de sumas parciales para la serie armónica no está acotada. Para ver lo anterior, observe que

$$\begin{aligned} S_2 &\geq S_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ S_4 &\geq S_2 + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \\ S_8 &\geq S_4 + \frac{1}{2} \geq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ S_{16} &\geq S_8 + \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. En consecuencia, se concluye que la serie armónica es divergente.

Una consecuencia de convergencia Si a_n y S_n son los términos generales de una serie y la sucesión correspondiente de sumas parciales, respectivamente, entonces de la resta

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = a_n$$

vemos que $a_n = S_n - S_{n-1}$. En este caso, si la serie $\sum a_k$ converge a un número S, se tiene que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ y $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Hemos establecido el siguiente teorema.

Teorema 9.3.2 Condición necesaria para convergencia

Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Prueba para una serie divergente El teorema 9.3.2 establece simplemente que si una serie infinita converge, es necesario que el término n-ésimo, o general, tienda a cero. De modo equivalente, se concluye:

- Si el n-ésimo término a_n de una serie infinita **no** tiende a cero cuando $n \to \infty$, entonces la serie **no** converge.

Formalizamos este resultado como una prueba para la divergencia.

Teorema 9.3.3 Prueba del término n-ésimo para divergencia

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

El teorema 9.3.3 corrobora de inmediato la parte *ii*) de la prueba del teorema 9.3.1, a saber, una serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$, $a \neq 0$, diverge cuando $r = \pm 1$. Por ejemplo, cuando $r = 1$, $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} a \neq 0$.

EJEMPLO 7 Serie divergente

a) Considere la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k-1}{5k+3}$. De

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{5n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{1}{n}}{5+\frac{3}{n}} = \frac{4}{5} \neq 0$$

se concluye del teorema 9.3.3 que la serie diverge.

b) Considere la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

Puesto que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}$ no existe, es posible afirmar que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. ¿La serie diverge por el teorema 9.3.3? ■

En este momento se le recomienda leer (y recordar) *iii*) de las *Notas desde el aula*. Se enuncian los siguientes tres teoremas sin demostración.

Teorema 9.3.4 Múltiplo constante de una serie

Si c es cualquier constante distinta de cero, entonces las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ convergen ambas o divergen ambas.

Teorema 9.3.5 Suma de dos series convergentes

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen a S_1 y S_2, respectivamente, entonces

i) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ converge a $S_1 + S_2$, y

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ converge a $S_1 - S_2$.

El teorema 9.3.5 indica que cuando $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Teorema 9.3.6 Suma de una serie convergente y una divergente

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ diverge.

EJEMPLO 8 Suma de dos series convergentes

Con la ayuda del teorema 9.3.1, se observa que las series geométricas $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ y $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ convergen a 2 y $\frac{3}{2}$, respectivamente. En consecuencia, del teorema 9.3.5, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right]$ converge y

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$ ■

EJEMPLO 9 Suma de dos series

Del ejemplo 3 se sabe que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+4)(k+5)}$ converge. Puesto que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ es la serie armónica divergente, se sigue del teorema 9.3.6 que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(k+4)(k+5)} + \frac{1}{k}\right]$$

diverge. ■

NOTAS DESDE EL AULA

i) El término *n*-ésimo de la sucesión de sumas parciales de la serie armónica a menudo se denota mediante $H_n = \sum_{k=1}^{n}(1/k)$. Los términos de la sucesión $H_1 = 1$, $H_2 = \frac{3}{2}$, $H_3 = \frac{11}{6}, \ldots$ se denominan **números armónicos**. Vea el problema 71 en los ejercicios 9.3.

ii) Cuando se escribe en términos de notación de sumatoria, una serie geométrica quizá no se reconozca de inmediato, o si lo es, los valores de a y r tal vez no sean manifiestos. Por ejemplo, para ver si $\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ es una serie geométrica es buena idea escribir dos o tres términos:

$$\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}^{a} + \overbrace{4\left(\frac{1}{4}\right)^{6}}^{ar} + \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{7}}^{ar^2} + \cdots.$$

Del lado derecho de la última igualdad, es posible hacer las identificaciones $a = 4\left(\frac{1}{2}\right)^5$ y $r = \frac{1}{2} < 1$. En consecuencia, la suma de la serie es $\dfrac{4\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}$. Si se desea, aunque no hay una necesidad real para hacer esto, puede expresarse $\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ en la forma más familiar $\sum_{k=1}^{\infty}ar^{k-1}$ haciendo $k = n - 2$. El resultado es

$$\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \sum_{k=1}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{k+4} = \sum_{k=1}^{\infty}\overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}^{a}\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}^{r^{k-1}}.$$

iii) Observe con cuidado cómo se enuncian los teoremas 9.3.2 y 9.3.3. En específico, el teorema 9.3.3 *no* dice si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum a_k$ converge. En otras palabras, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no es *suficiente* para garantizar que $\sum a_k$ converge. De hecho, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie puede ser convergente o divergente. Por ejemplo, en la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)$, $a_n = 1/n$ y $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$, pero la serie diverge.

iv) Cuando se determina la convergencia, es posible, y algunas veces conveniente, borrar o ignorar varios de los primeros términos de la serie. En otras palabras, las series infinitas $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$, $N > 1$ difieren a lo sumo por un número finito de términos y son ambas convergentes o ambas divergentes. Desde luego, eliminar los primeros $N - 1$ términos de una serie convergente suele no afectar la suma de la serie.

Ejercicios 9.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-27.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-10, escriba los primeros cuatro términos de cada serie.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k}$ **2.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$ **4.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k3^k}$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ **6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^2+1}$

7. $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2m)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}$ **8.** $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{m!}$

9. $\displaystyle\sum_{j=3}^{\infty} \frac{\cos j\pi}{2j+1}$ **10.** $\displaystyle\sum_{i=5}^{\infty} i \operatorname{sen}\frac{i\pi}{2}$

En los problemas 11-14, proceda como en el ejemplo 3 para encontrar la suma de la serie telescópica dada.

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ **12.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$ **14.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+7k+12}$

En los problemas 15-24, determine si la serie geométrica dada converge o diverge. Si es convergente, encuentre la suma de la serie.

15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$ **16.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 10\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

17. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}$ **18.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \pi^k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

19. $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} 5^r 4^{-r}$ **20.** $\displaystyle\sum_{s=1}^{\infty} (-3)^s 7^{-s}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1\,000(0.9)^n$ **22.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1.1)^n}{1\,000}$

23. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^k}$ **24.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^k$

En los problemas 25-30, escriba cada número decimal que se repite como un cociente de enteros.

25. 0.222 . . . **26.** 0.555 . . .

27. 0.616161 . . . **28.** 0.393939 . . .

29. 1.314314 . . . **30.** 0.5262626 . . .

En los problemas 31 y 32, encuentre la suma de las series dadas.

31. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right]$ **32.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k-1}{4^k}$

En los problemas 33-42, muestre que la serie dada es divergente.

33. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 10$ **34.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (5k+1)$

35. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$ **36.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^2+2k+3}$

37. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ **38.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{3k+1}\right)$

39. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{k}$ **40.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6k}$

41. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{k}\right]$ **42.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{sen}\frac{1}{k}$

En los problemas 43-46, determine los valores de x para los cuales la serie dada converge.

43. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}$ **44.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1}$

45. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (x+1)^k$ **46.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2k}$

≡ Aplicaciones

47. Se deja caer una pelota desde una altura inicial de 15 pies sobre una plancha de concreto. Cada vez que la pelota rebota, alcanza una altura de $\frac{2}{3}$ de su altura precedente. Recurra a la serie geométrica para determinar la distancia que la pelota recorre antes de quedar en reposo.

48. En el problema 47 determine el tiempo que tarda la pelota en llegar al reposo.

49. Para erradicar plagas agrícolas (como la mosca de la fruta), se liberan moscas macho esterilizadas dentro de la población general en intervalos de tiempo regulares. Considere que N_0 es el número de moscas liberadas cada día y que s es la proporción de las que sobreviven en un día determinado. De los N_0 machos esterilizados originales, $N_0 s^n$ sobrevivirán en n semanas sucesivas. En consecuencia, el número total de tales machos que sobreviven n semanas después de que se ha iniciado el programa es $N_0 + N_0 s + N_0 s^2 + \cdots + N_0 s^n$. ¿A qué se aproxima esta suma cuando $n \to \infty$? Suponga $s = 0.9$ y que se necesitan 10 000 machos esterilizados para controlar la pobla-

ción en cierta área. Determine el número de moscas macho que debe ser liberado cada día.

50. En algunas circunstancias la cantidad de un fármaco que se acumularía en el cuerpo de un paciente después de un largo periodo es $A_0 + A_0e^{-k} + A_0e^{-2k} + \cdots$, donde $k > 0$ es una constante y A_0 es la dosis diaria del fármaco. Encuentre la suma de la serie.

51. Un paciente toma 15 mg de un fármaco diariamente. Si 80% del fármaco acumulado se excreta cada día mediante las funciones corporales, ¿qué cantidad del fármaco se acumulará después de un largo periodo, esto es, cuando $n \to \infty$? (Suponga que la medición de la acumulación se hace inmediatamente después de cada dosis. Vea el problema 69 en los ejercicios 9.1.)

52. Se aplica una fuerza a una partícula, que se mueve en una línea recta, de tal manera que después de cada segundo la partícula sólo se mueve la mitad de la distancia que recorrió en el segundo anterior. Si la partícula se mueve 20 cm en el primer segundo, ¿cuánto se desplazará?

≡ Piense en ello

53. Suponga que la sucesión $\{a_n\}$ converge a un número $L \neq 0$. Explique por qué la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

54. Determine si la serie

$$\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.11} + \frac{1}{1.111} + \cdots$$

converge o diverge.

55. Determine si la suma de dos series divergentes es necesariamente divergente.

56. Considere la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Puesto que $k^2 = k \cdot k$, la n-ésima suma parcial de la serie es

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot n}.$$

Explique por qué las siguientes desigualdades son ciertas y por qué pueden usarse para demostrar que una serie dada converge:

$$0 < S_n < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

o

$$0 < S_n < 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

57. Encuentre la suma de la serie

$$\frac{1+9}{25} + \frac{1+27}{125} + \frac{1+81}{625} + \cdots.$$

58. Encuentre la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_k^{k+1} xe^{-x}\, dx \right).$$

59. Encuentre todos los valores de x en $(-\pi/2, \pi/2)$ para los cuales

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 - \tan x} - \sum_{k=0}^{n} \tan^k x \right) = 0.$$

60. Muestre que si $\lim_{n\to\infty} f(n+1) = L$, donde L es un número, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} [f(k+1) - f(k)] = L - f(1)$.

61. Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$ converge o diverge.

62. Muestre que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ es divergente demostrando que $S_n \geq \sqrt{n}$.

63. Vimos que la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge puesto que el término general S_n de la sucesión de sumas parciales puede hacerse tan grande como se quiera tomando a n lo suficientemente grande ($S_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$). No obstante, la serie armónica diverge *muy lentamente*.

a) Use la gráfica de $f(x) = 1/x$ para $x \geq 1$ a fin de establecer la desigualdad

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$

b) Emplee una calculadora y la desigualdad del inciso *a*) para estimar el valor de n para el cual $S_n \geq 10$. Estime el valor de n para el cual $S_n \geq 100$.

64. En el problema 77 en los ejercicios 9.1 se consideraron los perímetros de las regiones acotadas por las curvas de Koch que se muestran en la figura 9.1.5. En el inciso *c*) del problema usted debe haber demostrado que el perímetro de la región límite es infinito. En este problema se consideran las *áreas* de las figuras sucesivas. Considere que el área de la primera figura es A_1, el área de la segunda figura A_2, y así en lo sucesivo.

a) Utilizando el hecho de que el área de un triángulo equilátero con lados de longitud s es $\frac{1}{4}\sqrt{3}s^2$, encuentre los valores de A_1, A_2, A_3 y A_4.

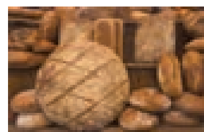
b) Demuestre que el área de la figura n-ésima es

$$A_n = \frac{1}{20}\sqrt{3}\left[8 - 3\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right].$$

c) ¿Cuál es $\lim_{n\to\infty} A_n$?

≡ Proyectos

65. Un poco de historia: Muerte por pan En 1972, un brote de envenenamiento por metilmercurio en Irak produjo 459 muertes entre 6 530 casos de envenenados admitidos en hospitales. El brote epidémico fue provocado por el consumo de pan casero preparado a partir de trigo que había sido tratado con un fungicida de metilmercurio. Los primeros síntomas de *parestesia* (pérdida de sensaciones en la boca, manos y pies) empezaron a ocurrir cuando el nivel acumulado de mercurio alcanzó 25 mg. Los síntomas de *ataxia* (pérdida de coordinación al andar) iniciaron con 55 mg, la *dysarthia* (arrastrar las palabras) con 90 mg y la sordera con 170 mg. La muerte se volvió una posibilidad cuando el nivel de mercurio acumulado superó 200 mg. Se esti-



Pan casero

mó que una barra de pan típica elaborada a partir de trigo contaminado contenía 1.4 mg de mercurio, y también que el cuerpo elimina sólo alrededor de 0.9% del mercurio acumulado diariamente.

a) Suponga que una persona recibió una dosis d de mercurio al día, y que el cuerpo eliminó una fracción p del mercurio acumulado diariamente. Encuentre una fórmula para L_n, el nivel acumulado después de comer en el n-ésimo día, y una fórmula para el nivel límite, $\lim_{n\to\infty} L_n$.

b) Empleando $d = 1.4$ y $p = 0.009$, encuentre el valor límite del mercurio y determine qué día empezaron a ocurrir los diversos síntomas.

c) ¿Cuál sería la dosis diaria para que la muerte fuera posible en el día 100? (Utilice $p = 0.009$.)

66. Un poco de historia: La paradoja de Zenón El filósofo griego **Zenón de Elea** (c. 490 a.C.) fue discípulo del filósofo presocrático Parménides, que afirmaba que el cambio o el movimiento era una ilusión. De las paradojas de Zenón que apoyaban esta filosofía, la más famosa es su argumento acerca de que Aquiles, conocido por su habilidad de correr rápido, no podría superar a una tortuga en movimiento. La forma usual de la historia es como se narra a continuación:

Aquiles empieza desde el punto S, y exactamente en el mismo instante una tortuga empieza desde un punto A adelante de S. Después de cierta cantidad de tiempo, Aquiles alcanza el punto de inicio A de la tortuga, pero durante este tiempo la tortuga ha avanzado a un nuevo punto B. Durante el tiempo que tarda Aquiles en alcanzar B, la tortuga se ha movido hacia delante otra vez hasta un nuevo punto C. Al continuar de esta manera, eternamente, Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.

Vea la FIGURA 9.3.2. Utilice una serie infinita para resolver esta aparente paradoja. Suponga que cada uno se mueve con una velocidad constante. Ayudaría inventar valores razonables para ubicar en el inicio la cabeza de la tortuga y para las dos velocidades.

S A B C

FIGURA 9.3.2 Aquiles y la tortuga en el problema 66

67. Números primos Escriba un breve informe en el cual defina un número primo. Incluya en el informe una demostración acerca de si la serie de los recíprocos de primos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots$$

converge o diverge.

68. Longitud de una trayectoria en zigzag En la FIGURA 9.3.3*a*), el triángulo azul ABC es un triángulo recto isósceles. El segmento de línea AP_1 es perpendicular a BC, el segmento de línea P_1P_2 es perpendicular a AC, y así en lo sucesivo. Encuentre la longitud de la trayectoria en zigzag roja $AP_1P_2P_3 \ldots$

B, 2, P_1, P_3, P_5, A, P_2, P_4, P_6, C

a) Trayectoria en zigzag

L_3, y, L_4, L_2, P_3, P_2, L_5, L_1, P_4, P_1, P_5, L_6, P_6, 1, A, x L_0, L_7, L_{11}, L_8, L_{10}, L_9

b) Trayectoria poligonal

FIGURA 9.3.3 Trayectorias en zigzag y poligonal de los problemas 68 y 69

69. Longitud de una trayectoria poligonal En la figura 9.3.3*b*), hay doce rayos azules que emanan del origen y el ángulo entre cada par de rayos consecutivos es 30°. El segmento de recta AP_1 es perpendicular al rayo L_1, el segmento de recta P_1P_2 es perpendicular al rayo L_2, y así en lo sucesivo. Encuentre la longitud de la trayectoria poligonal roja $AP_1P_2P_3 \ldots$

70. Una integral impropia Al final de la sección 7.7 se dejó pendiente la pregunta de si $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ es un requisito necesario para la convergencia de una integral impropia $\int_a^\infty f(x)\,dx$. A continuación se presenta la respuesta. Observe que la función f cuya grafica está dada en la FIGURA 9.3.4 *no* se aproxima a 0 cuando $x \to \infty$. Demuestre que $\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge.

y, 1, $y = f(x)$, x, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$, 2, $\frac{9}{4}$, $\frac{23}{8}$, 3, $\frac{25}{8}$, n, ...

FIGURA 9.3.4 Gráfica del problema 70

71. Un problema de apilamiento Tómese su tiempo para hacer su tarea y efectúe un experimento. Necesitará un suministro de n objetos rectangulares idénticos, por ejemplo, libros, aunque también pueden ser tableros, cartas, fichas de dominó, etc. Suponga que la longitud de cada libro es L. A continuación encontrará un enunciado burdo del problema:

¿Qué tanto puede sobresalir una pila de n libros colocada sobre el borde de una mesa sin que se caiga?

Intuitivamente la pila *no* caerá siempre que su centro de masa permanezca por arriba de la cubierta de la mesa. Empleando la regla de apilamiento que se ilustra en la FIGURA 9.3.5, observe que lo que sobresale del libro mostrado en la figura 9.3.5*a*) alcanza su máximo $d_1 = L/2$ cuando su centro de masa está ubicado directamente en el borde de la mesa.

a) Calcule las distancias que sobresalen los libros d_2, d_3 y d_4 del borde de la mesa para la pila de libros de la figura 9.3.5*b*), 9.3.5*c*) y 9.3.5*d*), respectivamente.

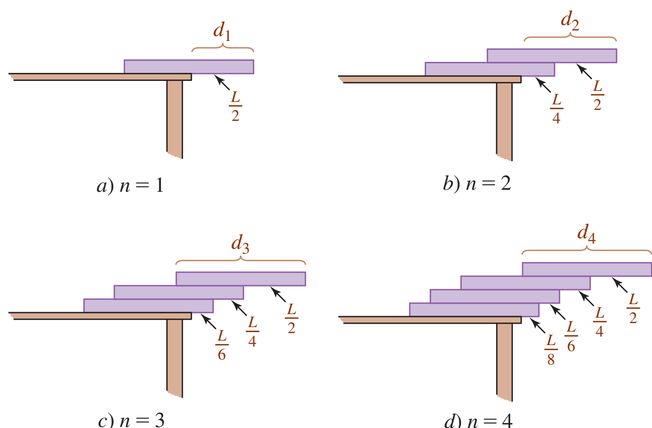


FIGURA 9.3.5 Método de apilamiento de libros del problema 71

Luego utilice (1) de la sección 6.10 para demostrar que el centro de masa de cada pila está en el borde de la mesa. [*Sugerencia*: Para n libros ponga el eje x a lo largo de la cubierta horizontal de la mesa con el origen O en el borde izquierdo del primer libro, o del fondo, en la pila.]

b) ¿Qué indica el valor de d_4 en el inciso *a*) acerca del cuarto libro, o superior, en la pila?

c) Siguiendo el patrón de apilamiento que se indica en la figura 9.3.5, para n libros la parte que sobresale del primer libro desde el borde de la mesa sería $L/2n$, lo que sobresale del segundo libro desde el borde del primer libro sería $L/2(n-1)$, lo que sobresale del tercer libro desde el borde del segundo correspondería a $L/2(n-2)$, y así en lo sucesivo. Encuentre una fórmula para d_n, lo que sobresalen n libros desde el borde de la mesa. Demuestre que el centro de masa de la pila de n libros está en el borde de la mesa.

d) Utilice la fórmula d_n para encontrar la distancia que sobresale un libro en el inciso *c*) y encuentre el valor más pequeño de n de manera que lo que sobresalen n libros apilados en la manera descrita en el inciso *c*) es mayor que el doble de la longitud de un libro.

e) En teoría, utilizando la regla de apilamiento del inciso *c*), ¿hay alguna limitación acerca del número de libros en una pila?

72. Un clásico matemático: Los trenes y la mosca En un tiempo específico dos trenes T_1 y T_2, separados por 20 millas sobre el mismo riel, inician un curso de choque a una velocidad de 10 mph. Suponga que en el preciso instante en que parten los trenes, una mosca sale del frente del tren T_1, vuela a una velocidad de 20 mph en línea recta hacia el frente del motor del tren T_2, después vuela de regreso hacia T_1 a 20 mph, después regresa a T_2, y así en lo sucesivo. Recurra a una serie geométrica para encontrar la distancia total recorrida por la mosca cuando los trenes chocan (y la mosca es aplastada). Después use el sentido común para determinar la distancia total que vuela la mosca. Vea la FIGURA 9.3.6.

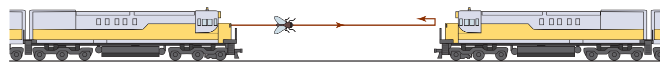


FIGURA 9.3.6 Trenes y mosca en el problema 72

9.4 Prueba de la integral

Introducción A menos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sea una serie telescópica o una serie geométrica, es una tarea difícil, si no inútil, demostrar la convergencia o divergencia directamente de la sucesión de sumas parciales. Sin embargo, suele ser posible determinar si una serie converge o diverge por medio de una *prueba* que utiliza sólo los términos de la serie. En ésta y en las dos secciones que siguen se examinarán cinco de tales pruebas que son aplicables a series infinitas de *términos positivos*.

Prueba de la integral La primera prueba que se considerará relaciona los conceptos de convergencia y divergencia de una integral impropia con la convergencia y divergencia de una serie infinita.

Teorema 9.4.1 Prueba de la integral

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos y f es una función continua que es no negativa y decreciente sobre $[1, \infty)$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$.

i) Si $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

ii) Si $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

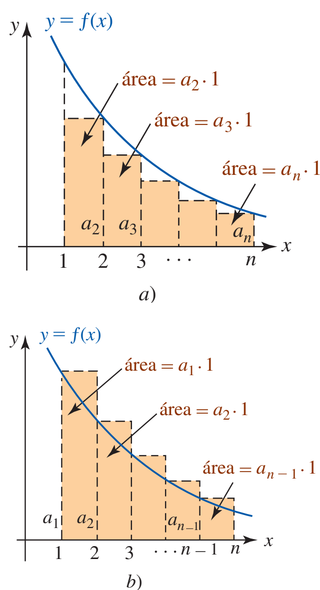


FIGURA 9.4.1 Rectángulos en la prueba del teorema 9.4.1

DEMOSTRACIÓN Si la grafica de f está dada como en la FIGURA 9.4.1, entonces considerando las áreas de los rectángulos que se muestran en la figura, observamos que

$$0 \leq a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$$

o

$$S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}.$$

De la desigualdad $S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)\,dx$, es claro que $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe siempre que exista $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx$. Por otro lado, de la desigualdad $S_{n-1} \geq \int_1^n f(x)\,dx$, concluimos que $\lim_{n\to\infty} S_{n-1}$ no existe siempre que $\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverja. ■

EJEMPLO 1 Empleo de la prueba de la integral

Demuestre la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$.

Solución La función $f(x) = 1/(1+x^2)$ es continua, no negativa y decreciente para $x \geq 1$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$. De

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \tan^{-1}x \Big]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(\tan^{-1}b - \tan^{-1}1\right) \quad \leftarrow \tan^{-1}1 = \pi/4 \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(\tan^{-1}b - \frac{\pi}{4}\right) \quad \leftarrow \text{vea la figura 1.5.15} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

es claro que la integral impropia es convergente. Del teorema 9.4.1*i*) se concluye que la serie dada también converge. ■

En la prueba de la integral, si la serie de términos positivos es de la forma $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$, usamos entonces

$$\int_N^\infty f(x)\,dx \quad \text{donde} \quad f(k) = a_k.$$

EJEMPLO 2 Empleo de la prueba de la integral

Pruebe la convergencia de $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$.

$f'(x) < 0$ sobre el intervalo $[3, \infty)$.

Solución La función $f(x) = (\ln x)/x$ satisface la hipótesis de la prueba de la integral sobre el intervalo $[3, \infty)$. En este caso,

$$\begin{aligned}\int_3^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{\ln x}{x}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}(\ln x)^2 \Big]_3^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\left[(\ln b)^2 - (\ln 3)^2\right] = \infty\end{aligned}$$

muestra que la integral impropia diverge. Se concluye del teorema 9.4.1*ii*) que la serie dada también diverge. ■

Serie *p* La prueba de la integral es particularmente útil en cualquier serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots, \tag{1}$$

donde p es cualquier número real fijo. La serie infinita (1) se conoce como la **serie *p*** o **hiperarmónica**. El siguiente teorema indica los valores de p para los cuales converge (diverge) la serie p.

Teorema 9.4.2 Convergencia de la serie p

La serie p $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN Se distinguen cuatro casos: $p > 1$, $p = 1$, $0 < p < 1$ y $p \leq 0$. En el primero y tercer casos usamos la prueba de la integral con $f(x) = 1/x^p = x^{-p}$.

i) Si $p > 1$, entonces $p - 1 > 0$ y por ello

$$\int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right] = \frac{1}{1-p}[0-1] = \frac{1}{p-1}.$$

La serie p es convergente por el teorema 9.4.1*i*).

ii) Si $p = 1$, entonces se reconoce a la serie p como la serie armónica divergente.

iii) Si $0 < p < 1$, entonces $-p + 1 > 0$ y por ello

$$\int_1^{\infty} x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty}[b^{-p+1} - 1] = \infty.$$

La serie p es divergente por el teorema 9.4.1*ii*).

iv) Por último, si $p \leq 0$, entonces $-p \geq 0$ y así $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) = \lim_{n\to\infty} n^{-p} \neq 0$. La serie p es divergente por la prueba del término n-ésimo, teorema 9.3.3. ■

EJEMPLO 3 Serie p

a) Del teorema 9.4.2, la serie p $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ diverge, ya que $p = \frac{1}{2} < 1$.

b) Del teorema 9.4.2, la serie p $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, ya que $p = 2 > 1$. ■

Σ NOTAS DESDE EL AULA

i) Cuando se aplica la prueba de la integral, es necesario tener la seguridad de que el valor de la integral impropia convergente $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ no se relaciona con la suma real de la serie infinita correspondiente. De tal modo, la serie en el ejemplo 1 *no* converge a $\pi/4$. Vea el problema 36 en los ejercicios 9.4.

ii) Los resultados de la prueba de la integral para $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ se cumplen incluso si la función no negativa continua f no empieza a decrecer hasta que $x \geq N \geq n$. Para la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (\ln k)/k$ la función $f(x) = (\ln x)/x$ disminuye sobre el intervalo $[3, \infty)$. De cualquier manera, en la prueba de la integral es posible utilizar $\int_1^{\infty}(\ln x\,dx)/x$.

Ejercicios 9.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-27.

Fundamentos

En los problemas 1-30, determine si la serie dada converge o diverge. Recurra a la prueba de la integral en los casos en que sea apropiado.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.1}}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{0.99}}$

3. $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots$

4. $\frac{1}{100} + \frac{1}{100\sqrt{2}} + \frac{1}{100\sqrt{3}} + \cdots$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+7}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3k+1}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+5k^2}$

8. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k}{k^2+5}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$

12. $\sum_{k=2}^{\infty} k^2 e^{-k}$

13. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$

14. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\ln k}$

15. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{10}{k(\ln k)^2}$

16. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{1+k^2}$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^4}$

19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+k}}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^3}$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^{3/2}}$

23. $\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$

24. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{3}k\right)$

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k(k+1)}$

27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k^2+1)}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{e^k+e^{-k}}$

30. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{e^{3k}}}$

En los problemas 31-34, sin hacer ningún trabajo determine si la serie dada converge o diverge. Enuncie sus razones.

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k}+\frac{3}{k^2}\right)$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(5k^{-1.6}-10k^{-1.1}\right)$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2^k}\right)$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+4\sqrt{k}}{k^2}$

En los problemas 35 y 36, determine los valores de p para los cuales la serie dada converge.

35. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$

36. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k [\ln(\ln k)]^p}$

Piense en ello

37. Determine los valores de p para los cuales la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^p \ln k$$

es convergente.

38. Suponga que f es una función continua que es positiva y decreciente para $x \geq 1$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$. Demuestre que

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx.$$

39. Demuestre que

$$\frac{\pi}{4} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

40. Se demostró que la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)$ es divergente debido a que la sucesión de sumas parciales diverge. Recuerde de la página 495 que $S_n = \sum_{k=1}^{n}(1/k) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

a) Use el resultado del problema 38 para estimar la suma de los primeros 10 mil millones de términos de la serie armónica.

b) ¿Cuántos términos de la serie armónica son necesarios para garantizar que $S_n \geq 100$?

41. Deje que S denote la suma de la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y S_n el término general en su sucesión de sumas parciales. Defina el **residuo**, o el error, que se efectúa cuando S_n se aproxima a S, como

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots.$$

Suponga que f es una función continua que es positiva y decreciente para $x \geq 1$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$ y que $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge. Demuestre que

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx.$$

42. La suma S de la serie p convergente $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$ se sabe que es igual a $\pi^2/6$. Recurra al problema 41 para determinar n de manera que S_n dará una aproximación a S que es exacta hasta tres lugares decimales.

9.5 Pruebas de comparación

Introducción A menudo es posible determinar la convergencia o divergencia de una serie de términos positivos $\sum a_k$ *comparando* sus términos con los términos de una *serie de prueba* $\sum b_k$ que se sabe que es convergente o divergente. En esta sección se considerarán dos pruebas de comparación para la convergencia y la divergencia.

Prueba de comparación directa La demostración de la siguiente prueba utilizará dos propiedades importantes de las sucesiones. Recuerde de la sección 9.2 que si una sucesión está acotada y es monótona debe converger. También que si los términos de una sucesión se vuelven no acotados entonces ésta diverge. Aplicamos estos resultados a la sucesión de sumas parciales de una serie.

Teorema 9.5.1 Prueba de comparación directa

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son series de términos positivos.

i) Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge y $a_k \le b_k$ para todo entero positivo k, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

ii) Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge y $a_k \ge b_k$ para todo entero positivo k, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

DEMOSTRACIÓN Sea $a_k > 0$ y $b_k > 0$ para $k = 1,2, \ldots$ y considere que

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad \text{y} \qquad T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

son los términos generales de las sucesiones de sumas parciales para $\sum a_k$ y $\sum b_k$, respectivamente.

i) Si $\sum b_k$ es una serie convergente para la cual $a_k \le b_k$, entonces $S_n \le T_n$. Puesto que $\lim_{n\to\infty} T_n$ existe, $\{S_n\}$ es una sucesión creciente acotada y, en consecuencia, convergente por el teorema 9.2.1. Por tanto, $\sum a_k$ es convergente.

ii) Si $\sum b_k$ diverge y $a_k > b_k$, entonces $S_n > T_n$. Puesto que T_n aumenta sin cota, así lo hace S_n. Por consiguiente, $\sum a_k$ es divergente. ■

En general, si $\sum c_k$ y $\sum d_k$ son dos series para las cuales $c_k \le d_k$ para toda k, se afirma que la serie $\sum c_k$ está **dominada** por la serie $\sum d_k$. De tal modo que para series de términos positivos, los incisos *i*) y *ii*) del teorema 9.5.1 pueden reenunciarse de la siguiente manera:

- Una serie $\sum a_k$ es convergente si está dominada por una serie convergente $\sum b_k$.
- Una serie $\sum a_k$ diverge si domina a una serie divergente $\sum b_k$.

Los siguientes dos ejemplos ilustran el método. Desde luego, no señalan que para recurrir a las series de prueba $\sum b_k$ es necesario estar familiarizado con algunas series que convergen y con algunas que divergen.

Sería buena idea en este punto revisar la noción de serie p en la sección 9.4.

EJEMPLO 1 Empleo de la prueba de comparación directa

Pruebe la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 4}$.

Solución Se observa que al reducirse el denominador en los términos generales se obtiene una fracción mayor:

$$\frac{k}{k^3 + 4} \le \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}.$$

Debido a que la serie dada es dominada por una serie p convergente $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$, se concluye del teorema 9.5.1*i*) que la serie dada también es convergente. ■

EJEMPLO 2 Uso de la prueba de comparación directa

Pruebe la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k + 2)}{k}$.

Solución Puesto que $\ln(k+2) > 1$ para $k \ge 1$, se tiene

$$\frac{\ln(k + 2)}{k} > \frac{1}{k}.$$

En este caso se ha demostrado que la serie dada domina a la serie armónica divergente $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)$. En consecuencia, por el teorema 9.5.1*ii*) la serie dada diverge. ■

Prueba de comparación del límite Otro tipo de prueba de comparación implica tomar el límite del cociente entre el término general de la serie $\sum a_k$ y el término general de la serie de prueba $\sum b_k$ que se sabe que es convergente o divergente.

Teorema 9.5.2 Prueba de comparación del límite

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son series de términos positivos. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

donde L es finita y $L > 0$, entonces las dos series son ya sea ambas convergentes o ambas divergentes.

DEMOSTRACIÓN Puesto que $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = L > 0$, es posible elegir n tan grande, como $n \geq N$ para algún entero positivo N, que

$$\frac{1}{2}L \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}L.$$

Puesto que $a_n > 0$, la desigualdad implica que $a_n \leq \frac{3}{2}Lb_n$ para $n \geq N$. Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, se concluye de la prueba de comparación directa que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y, en consecuencia, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente. Además, puesto que $\frac{1}{2}Lb_n \leq a_n$ para $n \geq N$, se observa que si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen. ■

La prueba de comparación del límite es aplicable a menudo a series $\sum a_k$ para las cuales no es conveniente la prueba de comparación directa.

EJEMPLO 3 Uso de la prueba de comparación del límite

El propio lector debe convencerse de que es difícil aplicar la prueba de comparación directa a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 - 5k^2 + 1}$. Sin embargo, se sabe que $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^3)$ es una serie p convergente $(p = 3 > 1)$. En consecuencia, con

$$a_n = \frac{1}{n^3 - 5n^2 + 1} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{n^3}$$

tenemos
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3 - 5n^2 + 1} = 1.$$

Del teorema 9.5.2 se concluye que la serie dada converge. ■

Si el término general a_n de la serie $\sum a_k$ es un cociente ya sea de potencias racionales de n o de raíces de polinomios en n, es posible distinguir el término general b_n de la serie de prueba $\sum b_k$ examinando el "comportamiento de grado" de a_n para valores grandes de n. En otras palabras, para encontrar un candidato correspondiente a b_n sólo se necesita examinar el cociente de las *potencias más altas de n* en el numerador y en el denominador de a_n.

EJEMPLO 4 Uso de la prueba de comparación del límite

Pruebe la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt[3]{8k^5 + 7}}$.

Solución Para valores grandes de n, el término general de la serie $a_n = n/\sqrt[3]{8n^5 + 7}$ "se comporta de manera similar" a un múltiplo constante de

$$\frac{n}{\sqrt[3]{n^5}} = \frac{n}{n^{5/3}} = \frac{1}{n^{2/3}}.$$

De tal modo, se ensaya la serie p divergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2/3}}$ como una serie de prueba:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n}{\sqrt[3]{8n^5+7}}}{\dfrac{1}{n^{2/3}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^5}{8n^5+7}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = \frac{1}{2}.$$

Así, de acuerdo con el teorema 9.5.2, la serie dada diverge. ■

NOTAS DESDE EL AULA

i) La hipótesis en la prueba de comparación directa también puede debilitarse, al considerar un teorema más fuerte. Para una serie con términos positivos, sólo se requiere que $a_k \leq b_k$ o $a_k \geq b_k$ para k suficientemente grande y no para todos los enteros positivos.

ii) En la aplicación de la prueba de comparación directa, a menudo es fácil alcanzar un punto en que la serie dada está dominada por una serie divergente. Por ejemplo,

$$\frac{1}{5^k+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

es realmente cierto y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge. Este tipo de razonamiento no prueba nada a cerca de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k+\sqrt{k}}$. Desde luego, la última serie converge. ¿Por qué? De manera similar, no puede llegarse a una conclusión al mostrar que una serie dada domina a una serie convergente.

La siguiente tabla resume la **prueba de comparación directa**. Sea $\sum a_k$ una serie de términos positivos y $\sum b_k$ una serie que se sabe que converge o diverge (una serie de pruebas).

Comparación de términos	**Serie de prueba $\sum b_k$**	**Conclusión sobre $\sum a_k$**
$a_k \leq b_k$	converge	converge
$a_k \leq b_k$	diverge	ninguna
$a_k \geq b_k$	diverge	diverge
$a_k \geq b_k$	converge	ninguna

Ejercicios 9.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-27.

Fundamentos

En los problemas 1-14 utilice la prueba de comparación directa para determinar si la serie dada converge.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+5}$

3. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}-1}$

4. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k^2+1}{k^3-k}$

5. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$

6. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k^5}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+3^k}{2^k}$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+8^k}{3+10^k}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen} k}{\sqrt[3]{k^4+1}}$

10. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+1}{k \ln k}$

11. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j + e^{-j}}{5^j(j + 9)}$

12. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{ie^{-i}}{i + 1}$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}$

14. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 27} + \frac{1}{4 \cdot 81} + \cdots$

En los problemas 15-28, utilice la prueba de comparación del límite para determinar si la serie dada converge.

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k + 7}$

16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10 + \sqrt{k}}$

17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + 2}{3n^5 + n^2}$

20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(4n + 1)^{3/2}}$

21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt[3]{64k^9 + 40}}$

22. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5k^2 - k}{2k^3 + 2k^2 - 8}$

23. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k + \ln k}{k^3 + 2k - 1}$

24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{e^k - 2}$

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$

26. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)$

27. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right)^k$

28. $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \cdots$

En los problemas 29-40, utilice cualquier prueba apropiada para determinar si la serie dada converge.

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{100\sqrt{k^2 + 1}}$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \sqrt{k}}$

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(5 + \frac{k}{5}\right)$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{3^k}\right)$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2 + 1)^2}$

34. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k-1}\sqrt[3]{k^2 - 2}}$

35. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9 + \operatorname{sen}^2 k}$

36. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{3^{2k} - 1}$

37. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2 + k2^k}$

38. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2 + k2^{-k}}$

39. $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

40. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(0.9)^k}{k}$

≡ Piense en ello

41. Vuelva a leer *ii*) de las *Notas desde el aula* en la página 507 y discuta las razones por las que el siguiente enunciado es cierto:

Si $a_k > 0$ para todo k y $\sum a_k$ converge, entonces $\sum a_k^2$ converge.

42. Suponga que p y q son funciones polinomiales sin factores comunes de grado n y m, respectivamente, y que $p(x)/q(x) > 0$ para $x > 0$. Discuta: ¿Bajo qué condiciones convergerá la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p(k)/q(k)$?

43. Analice si el siguiente enunciado es verdadero o falso:

Si $a_k < b_k$ para todo k y $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge.

44. Demuestre que si la serie $\sum a_k$ de términos positivos converge, entonces $\sum \ln(1 + a_k)$ converge.

En los problemas 45 y 46, determine si la serie dada converge.

45. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+1/k}}$

46. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2 + 3 + \cdots + k}$

47. La representación decimal de un número real positivo es una serie infinita:

$$0.a_1a_2a_3a_4\ldots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \cdots,$$

donde a_i representa uno de los 10 enteros no negativos 0, 1, 2, . . . , 9. Demuestre que la serie de la forma

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

siempre es convergente.

≡ Proyecto

48. **¿Cuán grande es infinito?** La prueba de la integral puede usarse para verificar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.0001}}$ converge, en tanto que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ diverge. Sin embargo, con la ayuda de un SAC se observa a partir de las gráficas de $y = 1/x^{1.0001}$ (en rojo) $y = 1/(x \ln x)$ (en azul) en la FIGURA 9.5.1 que

$$\frac{1}{k \ln k} < \frac{1}{k^{1.0001}}$$

para $2 \le k \le 15\,000$. De hecho, la desigualdad anterior es cierta para $2 \le k \le 99\,999\,999 \times 10^{99}$. ¿Entonces por qué $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ no converge por la prueba de comparación directa?

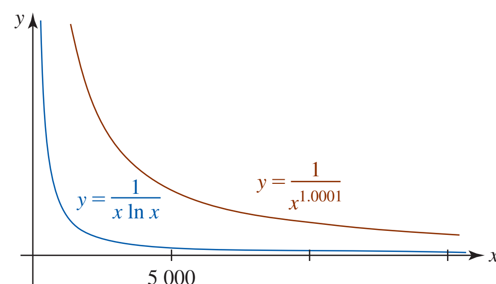


FIGURA 9.5.1 Gráfica para el problema 48

9.6 Pruebas de las proporciones y de la raíz

Introducción En esta sección, como en la anterior, las pruebas que se consideran son aplicables a series infinitas de *términos positivos*.

Prueba de las proporciones La primera de estas pruebas emplea el límite del cociente entre el primer término $(n + 1)$ y el término n-ésimo de la serie. Esta prueba es especialmente útil cuando a_k implica factoriales, potencias k-ésimas de una constante y, algunas veces, potencias k-ésimas de k.

Teorema 9.6.1 Prueba de las proporciones

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

i) Si $L < 1$, la serie es convergente.
ii) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.
iii) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

DEMOSTRACIÓN

i) Sea r un número positivo tal que $0 \leq L \leq r \leq 1$. Para n suficientemente grande, $n \geq N$ para algún entero positivo N, $a_{n+1}/a_n < r$; esto es, $a_{n+1} < ra_n$, $n \geq N$. La última desigualdad implica

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< ra_N \\ a_{N+2} &< ra_{N+1} < a_N r^2 \\ a_{N+3} &< ra_{N+2} < a_N r^3, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. De tal modo la serie $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ converge por comparación con la serie geométrica convergente $\sum_{k=1}^{\infty} a_N r^k$. Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ difiere de $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ a lo sumo un número finito de términos, se concluye que la primera serie también converge.

ii) Sea r un número finito tal que $1 < r < L$. Entonces para n suficientemente grande, $n \geq N$ para algún entero positivo N, $a_{n+1}/a_n > r$ o $a_{n+1} > ra_n$. Para $r > 1$ esta última desigualdad implica $a_{n+1} > a_n$, y por ello $\lim_{x\to\infty} a_n \neq 0$. Del teorema 9.3.3 concluimos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge. ■

En el caso en el que $L = 1$, debemos aplicar otra prueba a la serie para determinar su convergencia o divergencia.

EJEMPLO 1 Empleo de la prueba de las proporciones

Pruebe la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$.

Solución Se identifica que $a_n = 5^n/n!$ y por ello $a_{n+1} = 5^{n+1}/(n + 1)!$. Luego se forma el cociente de a_{n+1} y a_n, se simplifica y se toma el límite cuando $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 5 \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} 5 \frac{n!}{n!(n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Repase las propiedades del factorial en la sección 9.1. Vea (4) y (5) en esa sección.

Puesto que $L = 0 < 1$, se concluye del teorema 9.6.1*i*) que la serie es convergente. ■

EJEMPLO 2 Empleo de la prueba de las proporciones

Examinar la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$.

Solución En este caso se tiene que $a_n = n^n/n!$ y $a_{n+1} = (n+1)^{n+1}/(n+1)!$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad \leftarrow \text{Este límite es (3) de la sección 1.6.}\end{aligned}$$

Puesto que $L = e > 1$, se concluye del teorema 9.6.1*ii*) que la serie es divergente. ■

Prueba de la raíz Si los términos de una serie $\sum a_k$ consisten sólo en potencias k-ésimas, entonces puede aplicarse la siguiente prueba, la cual implica tomar la raíz n-ésima del término n-ésimo.

Teorema 9.6.2 Prueba de la raíz

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = L.$$

i) Si $L < 1$, la serie es convergente.
ii) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.
iii) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

La demostración de la prueba de la raíz es muy similar a la prueba de las proporciones y no se presentará.

EJEMPLO 3 Empleo de la prueba de la raíz

Examinar la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{k}\right)^k$.

Solución Se identifica primero $a_n = (5/n)^n$, y después se calcula el límite cuando $n \to \infty$ de la raíz n-ésima de a_n:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{5}{n}\right)^n\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0.$$

Puesto que $L = 0 < 1$, se concluye del teorema 9.6.2*i*) que la serie converge. ■



NOTAS DESDE EL AULA

i) La prueba de las proporciones siempre producirá un caso no conclusivo cuando se aplique a una serie p. Inténtelo con la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ y vea lo que ocurre.

ii) Las pruebas examinadas en ésta y en las dos secciones anteriores indican cuando una serie tiene una suma, pero ninguna de estas pruebas da alguna pista respecto a lo que es la suma real. Sin embargo, al saber que una serie converge, es posible sumar cinco, cien o mil términos en una computadora para obtener una aproximación de la suma.

Ejercicios 9.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-27.

Fundamentos

En los problemas 1-16, recurra a la prueba de las proporciones para determinar si la serie dada converge.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ **2.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1\,000^k}$ **4.** $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^k$

5. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{10}}{(1.1)^j}$ **6.** $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^5(0.99)^j}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{n3^{n-2}}$ **8.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 2^{n+3}}{7^{n-1}}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!}$ **10.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(2k)^k}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{99^k(k^3+1)}{k^2 10^{2k}}$ **12.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{e^{k^2}}$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^k}$ **14.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!3^k}{k^k}$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{k!}$ **16.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}$

En los problemas 17-24, utilice la prueba de la raíz para determinar si la serie dada converge.

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ **18.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{ke}{k+1}\right)^k$

19. $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{\ln k}\right)^k$ **20.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$

21. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ **22.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{k}\right)^{k^2}$

23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^{2k+1}}{k^k}$ **24.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{e^{k+1}}$

En los problemas 25-32, use cualquier prueba apropiada para determinar si la serie dada converge.

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k}{k^3+2k+1}$ **26.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k}{2k+1}\right)^k$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$ **28.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{e^n}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k k!}{(k+1)!}$ **30.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k+k}$

31. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k+4^k}$ **32.** $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} + \cdots$

En los problemas 33 y 34, recurra a la prueba de las proporciones para determinar los valores no negativos de p para los cuales la serie dada converge.

33. $\sum_{k=1}^{\infty} kp^k$ **34.** $\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{2}{p}\right)^k$

En los problemas 35 y 36, determine todos los valores reales de p para los cuales la serie dada converge.

35. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p}{k!}$ **36.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^p}$

37. En los problemas 78 y 79 de los ejercicios 9.1 se vio que la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}$,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots,$$

está definida por la fórmula de recursión $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, donde $F_1 = 1$, $F_2 = 1$.

a) Verifique que el término general de la sucesión es

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

mostrando que este resultado satisface la fórmula de recursión.

b) Utilice el término general en el inciso *a*) para calcular F_1, F_2, F_3, F_4 y F_5.

38. Sea F_n el término general de la sucesión de Fibonacci dada en el problema 37. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

39. Explique cómo el resultado del problema 38 demuestra que la serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$$

converge.

40. Un poco de historia En 1985, William Gosper utilizó la siguiente identidad para calcular los primeros 17 millones de dígitos de π:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9\,801} \sum_{n=0}^{\infty} (1\,103 + 26,390n) \frac{(4n)!}{(n!)^4(4 \cdot 99)^{4n}}.$$

Esta identidad fue descubierta en 1920 por el matemático indio **Srinivasa Ramanujan** (1887-1920). Ramanujan fue notable por su excepcional conocimiento en el manejo de manipulaciones y cálculos algebraicos extremadamente complejos.

a) Verifique que la serie infinita converge.

b) ¿Cuántos lugares decimales correctos de π produce el primer término de la serie?

c) ¿Cuántos lugares decimales correctos de π producen los dos primeros términos de la serie?

9.7 Series alternantes

Introducción En las últimas tres secciones se consideraron pruebas para la convergencia que resultaron aplicables sólo para series con términos positivos. En la presente discusión se consideran series en las cuales los términos se alternan entre números positivos y negativos, esto es, las series tienen la forma

Una serie geométrica tal como $\sum_{k=1}^{\infty}(-\frac{1}{3})^{k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$ es una serie alternante. Vea el ejemplo 4 en la sección 9.3.

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \tag{1}$$

o

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^{n}a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k, \tag{2}$$

donde $a_k > 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ Las series (1) y (2) se dice que son **series alternantes**. Ya se encontró un tipo especial de serie alternante en la sección 9.3, pero en esta sección se examinarán las propiedades de series alternantes generales y las pruebas de su convergencia. Debido a que la serie (2) es sólo un múltiplo de (1), se confinará la discusión a la última serie.

EJEMPLO 1 Serie alternante

Las series

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

y

$$\frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln 3}{8} + \frac{\ln 4}{16} - \frac{\ln 5}{32} + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\ln k}{2^k}$$

son ejemplos de series alternantes. ■

Prueba de la serie alternante La primera serie en el ejemplo 1, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$, se denomina **serie armónica alternante**. Aunque la serie armónica

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

es divergente, la introducción de términos positivos y negativos en la sucesión de sumas parciales para la serie armónica alternante es suficiente para producir una serie convergente. Se demostrará que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge por medio de la siguiente prueba.

La condición $0 < a_{k+1} \le a_k$ significa que $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_k \ge a_{k+1} \ge \cdots$

Teorema 9.7.1 Prueba de la serie alternante

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $0 < a_{k+1} \le a_k$ para todo entero positivo k, entonces la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ converge.

DEMOSTRACIÓN Considere las sumas parciales que contienen $2n$ términos:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}). \end{aligned} \tag{3}$$

Puesto que la suposición $0 < a_{k+1} \le a_k$ implica $a_k - a_{k+1} \ge 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ tenemos

$$S_2 \le S_4 \le S_6 \le \cdots \le S_{2n} \le \cdots.$$

De tal modo, la sucesión $\{S_{2n}\}$, cuyo término general S_{2n} contiene un número par de términos de la serie, es una sucesión monótona. Al reescribir (3) como

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - a_{2n}$$

demuestre que $S_{2n} < a_1$ para todo entero positivo n. En consecuencia, $\{S_{2n}\}$ está acotada. Por el teorema 9.2.1 se concluye que $\{S_{2n}\}$ converge a un límite S. Ahora,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

implica que $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S$. Esto muestra que la sucesión de sumas parciales $\{S_{2n+1}\}$, cuyo término general S_{2n+1} contiene un número impar de términos, también converge a S. Como $\{S_{2n}\}$ y $\{S_{2n+1}\}$ convergen a S, se concluye que $\{S_n\}$ converge a S. ■

EJEMPLO 2 Serie armónica alternante

Demuestre que la serie armónica alternante $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge.

Solución Con la identificación $a_n = 1/n$ tenemos de inmediato

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Además, puesto que

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$$

para $k \geq 1$ se tiene $0 < a_{k+1} \leq a_k$. Se concluye del teorema 9.7.1 que la serie armónica alternante converge. ■

EJEMPLO 3 Serie alternante divergente

La serie alternante $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{3k-1}$ diverge, ya que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}.$$

Este último resultado indica que

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3n-1}$$

no existe. Recuerde del teorema 9.3.2 que es necesario que el último límite sea 0 para la convergencia de la serie. ■

Aunque demostrar que $a_{k+1} \leq a_k$ quizá sea una tarea directa, éste muchas veces no es el caso.

EJEMPLO 4 Uso de la prueba de la serie alternante

Pruebe la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{k}}{k+1}$.

Solución Para demostrar que los términos de la serie satisfacen las condiciones $a_{k+1} \leq a_k$, se considerará la función $f(x) = \sqrt{x}/(x+1)$ para la cual $f(k) = a_k$. De la derivada, se observa que

$$f'(x) = -\frac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)^2} < 0 \quad \text{para} \quad x > 1,$$

y, en consecuencia, la función f decrece para $x > 1$. De tal modo, $a_{k+1} \leq a_k$ es cierta para $k \geq 1$. Además, la regla de L'Hôpital muestra que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \text{y por ello} \qquad \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Por consiguiente, la serie dada converge por el método de la serie alternante. ■

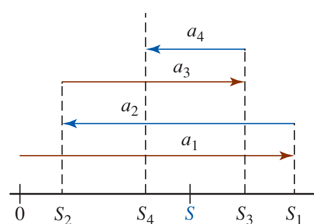


FIGURA 9.7.1 Sumas parciales sobre la recta numérica

Aproximación de la suma de una serie alternante Suponga que la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ converge al número S. Las sumas parciales

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 - a_2, \quad S_3 = a_1 - a_2 + a_3, \quad S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4, \ldots$$

pueden representarse sobre una línea numérica como se muestra en la FIGURA 9.7.1. La sucesión $\{S_n\}$ converge de la manera ilustrada en la figura 9.1.1*c*); esto es, los términos S_n se acercan a S cuando $n \to \infty$ aunque oscilan a ambos lados de S. Como se indica en la figura 9.7.1, las sumas parciales con número par son menores que S y las sumas parciales con número impar son mayores que S. De manera aproximada, las sumas parciales numeradas par se incrementan hacia el número S y, a su vez, las sumas parciales numeradas impar disminuyen hacia S. Debido a ello, *la suma S de la serie debe ubicarse entre sumas parciales consecutivas S_n y S_{n+1}*:

$$S_n \le S \le S_{n+1}, \quad \text{para } n \text{ par,} \tag{4}$$

y

$$S_{n+1} \le S \le S_n, \quad \text{para } n \text{ impar.} \tag{5}$$

En este caso (4) produce $0 \le S - S_n \le S_{n+1} - S_n$ para n par, y (5) implica que $0 \le S_n - S \le S_n - S_{n+1}$ para n impar. De este modo, en cualquier caso $|S_n - S| \le |S_{n+1} - S_n|$.

Pero $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ para n par y $S_{n+1} - S_n = -a_{n+1}$ para n impar. Así, $|S_n - S| \le a_{n+1}$ para toda n. Se enuncia este resultado como el siguiente teorema.

Teorema 9.7.2 Cota de error para una serie alternante

Suponga que la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$, $a_k > 0$, converge hacia un número S. Si S_n es la suma parcial n-ésima de la serie y $a_{k+1} \le a_n$ para todo k, entonces

$$|S_n - S| \le a_{n+1}$$

para toda n.

El teorema 9.7.2 es útil para aproximar la suma de una serie alternante convergente. Señala que el **error** $|S_n - S|$ entre la n-ésima suma parcial y la serie es menor que el valor absoluto del primer término $(n + 1)$ de la serie.

EJEMPLO 5 Aproximación de la suma de una serie

Aproxime la suma de la serie convergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}$ hasta cuatro lugares decimales.

Solución Primero, observamos que $a_n = 1/(2n)!$. El teorema 9.7.2 indica que debe tenerse

$$a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)!} < 0.00005$$

para aproximar la suma de la serie hasta cuatro lugares decimales. Ahora a partir de

$$n = 1, \qquad a_2 = \frac{1}{4!} \approx 0.041667$$

$$n = 2, \qquad a_3 = \frac{1}{6!} \approx 0.001389$$

$$n = 3, \qquad a_4 = \frac{1}{8!} \approx 0.000025 < 0.00005$$

se ve que $|S_3 - S| \le a_4 < 0.00005$. Por tanto,

$$S_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} \approx 0.4597$$

tiene la exactitud deseada. ■

Convergencia absoluta y condicional Una serie que contiene signos mezclados tal como

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 - - + + \cdots \tag{6}$$

no es estrictamente de la forma dada en (1) y por ello no se clasifica como una serie alternante. El teorema 9.7.1 no es aplicable a este tipo de serie. No obstante, veremos que la serie (6) es convergente *debido a que* la serie de valores absolutos

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \cdots \tag{7}$$

Dé un vistazo adelante y lea las dos oraciones que siguen inmediatamente al ejemplo 7.

es convergente (una serie geométrica con $r = \frac{2}{3} < 1$). La serie (6) es un ejemplo de una serie que es **absolutamente convergente**.

En la siguiente definición se está dejando que el símbolo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ represente *cualquier* serie (los términos a_k podrían alternar como en (1) o contener signos mezclados); los signos pueden seguir cualquier regla (como en (6)) o no.

Definición 9.7.1 Convergencia absoluta

Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se dice que es **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge.

EJEMPLO 6 Convergencia absoluta

La serie alternante $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{1+k^2}$ es absolutamente convergente, puesto que se mostró que la serie de valores absolutos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{1+k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$$

era convergente por la prueba de la integral en el ejemplo 1 de la sección 9.4. ■

Definición 9.7.2 Convergencia condicionada

Se dice que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es **convergente de manera condicional** si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge pero la serie de valores absolutos $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverge.

EJEMPLO 7 Convergencia condicional

En el ejemplo 2 vimos que la serie armónica alternante $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ es convergente. Pero al tomar el valor absoluto de cada término se obtiene la serie armónica divergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Por ello, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ es convergente de manera condicional. ■

El siguiente resultado muestra que toda serie absolutamente convergente es también convergente. Por esta razón es que la serie en (6) converge.

Teorema 9.7.3 La convergencia absoluta implica convergencia

Si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

DEMOSTRACIÓN Si se define $c_k = a_k + |a_k|$, entonces $c_k \leq 2|a_k|$. Puesto que $\sum|a_k|$ converge, se sigue de la prueba de comparación que $\sum c_k$ converge. Además, $\sum(c_k - |a_k|)$ converge, ya que tanto $\sum c_k$ como $\sum|a_k|$ convergen. Pero

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - |a_k|).$$

Por tanto, $\sum a_k$ converge. ■

Advierta que $\sum|a_k|$ es una serie de términos positivos, y por ello las pruebas de la sección anterior pueden utilizarse para determinar si una serie converge absolutamente.

EJEMPLO 8 La convergencia absoluta implica convergencia

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2} = \frac{\operatorname{sen} 1}{1} + \frac{\operatorname{sen} 2}{4} + \frac{\operatorname{sen} 3}{9} + \frac{\operatorname{sen} 4}{16} + \cdots$$

contiene términos positivos y negativos puesto que

$$\operatorname{sen} 1 > 0, \quad \operatorname{sen} 2 > 0, \quad \operatorname{sen} 3 > 0, \quad \operatorname{sen} 4 < 0, \quad \operatorname{sen} 5 < 0, \quad \operatorname{sen} 6 < 0,$$

y así sucesivamente. De la trigonometría se sabe que $|\operatorname{sen} k| \leq 1$ para todo k. Por tanto,

$$\left|\frac{\operatorname{sen} k}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$$

para todo k. Por la prueba de comparación directa, teorema 9.5.1, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2}$ converge puesto que es dominada por la serie p convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Por consiguiente, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2}$ es absolutamente convergente, y en virtud de ello por el teorema 9.7.3 converge. ■

Pruebas de las proporciones y de la raíz Las siguientes formas modificadas de la prueba de las proporciones y de la prueba de la raíz se aplican directamente a una serie alternante.

Teorema 9.7.4 Prueba de las proporciones

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos distintos de cero tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L.$$

i) Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente.
ii) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.
iii) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

EJEMPLO 9 Empleo de la prueba de las proporciones

Examine la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1}}{k3^k}$.

Solución Con $a_n = (-1)^{n+1} 2^{2n-1}/(n3^n)$, observamos que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+2} 2^{2n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \cdot \frac{n3^n}{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3(n+1)} = \frac{4}{3}.$$

Puesto que $L = \frac{4}{3} > 1$, veremos por el teorema 9.7.4*ii*) que la serie alternante diverge. ■

Teorema 9.7.5 Prueba de la raíz

Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = L.$$

i) Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente.
ii) Si $L > 1$, o si $L = \infty$, la serie es divergente.
iii) Si $L = 1$, la prueba no es conclusiva.

Rearreglo de términos Cuando trabajamos con una serie *finita* de términos tales como

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6, \tag{8}$$

cualquier rearreglo del orden de los términos, tal como

$$-a_2 + a_1 - a_4 + a_3 - a_6 + a_5$$

o

$$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6)$$

tiene la misma suma que la original (8). Este tipo de manipulación despreocupada de términos no lleva a una serie *infinita*:

- Si los términos de una serie convergente de manera condicional se escriben en un orden diferente, la nueva serie puede diverger o converger hacia un número por completo diferente.

De hecho, es posible demostrar que mediante un rearreglo adecuado de sus términos, una serie convergente de manera condicional puede hacerse converger a un número real r predeterminado.

En contraste, un rearreglo de los términos de una serie absolutamente convergente no efecta su suma:

- Si una serie $\sum a_k$ es absolutamente convergente, entonces los términos de la serie pueden rearreglarse en cualquier manera y la serie resultante convergerá al mismo número que la serie original.

Por ejemplo, la serie geométrica $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$ es absolutamente convergente y su suma es $\frac{3}{4}$. El rearreglo $-\frac{1}{3} + \frac{1}{1} - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \cdots$ de la serie geométrica *no* es una serie geométrica, aunque la serie rearreglada converge y su suma es $\frac{3}{4}$. Vea los problemas 53-56 en los ejercicios 9.7.



NOTAS DESDE EL AULA

i) La conclusión del teorema 9.7.1 sigue siendo válida cuando la hipótesis "$a_{k+1} \leq a_k$ para todo k positivo" se sustituye con el enunciado "$a_{k+1} \leq a_k$ para k suficientemente grande". Para la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}(\ln k)/k^{1/3}$, se muestra de inmediato por medio del procedimiento utilizado en el ejemplo 4 que $a_{k+1} \leq a_k$ para $k \geq 21$. Además, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. En consecuencia, la serie converge por la prueba de la serie alternante.

ii) Si la serie de valores absolutos $\sum |a_k|$ resulta divergente, entonces no es posible establecer ninguna conclusión relativa a la convergencia o divergencia de la serie $\sum a_k$.

Ejercicios 9.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-27.

Fundamentos

En los problemas 1-14 utilice la prueba de la serie alternante para determinar si la serie dada converge.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{k}{k+1}$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k}\frac{k}{k^2+1}$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{k^2+2}{k^3}$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{3k-1}{k+5}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{3^k}\right)$

8. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k+1}{4^k}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4\sqrt{n}}{2n+1}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$

11. $\sum_{n=2}^{\infty}(\cos n\pi)\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$

12. $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\sqrt{k^2+1}}{k^3}$

13. $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k}{\ln k}$

14. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{\ln k}$

En los problemas 15-34, determine si la serie dada es absolutamente convergente, convergente de manera condicional o divergente.

15. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$

16. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k+5}}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$

18. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k}}{3^k}$

19. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k}{5^k}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}(k2^{-k})^2$

21. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k!}$

22. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$

23. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k!}{100^k}$

24. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{5^{2k-3}}{10^{k+2}}$

25. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{k}{1+k^2}$

26. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{1+k^4}$

27. $\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\pi$

28. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)}{\sqrt{k+1}}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$

30. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$

31. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\left[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right]$

32. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\left[\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right]$

33. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\left(\frac{2k}{k+50}\right)^k$

34. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{6^{3k}}{k^k}$

En los problemas 35 y 36, aproxime la suma de la serie convergente al número indicado de lugares decimales.

35. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}$; cinco

36. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}$; tres

En los problemas 37 y 38, encuentre el entero positivo n más pequeño de modo que S_n aproxime la suma de la serie convergente al número indicado de lugares decimales.

37. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^3}$; dos

38. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$; tres

En los problemas 39 y 40, aproxime la suma de la serie convergente de manera que el error sea menor que la cantidad indicada.

39. $1-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{4^4}+\cdots;\quad 10^{-3}$

40. $1-\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}-\frac{4}{5^4}+\cdots;\quad 10^{-4}$

En los problemas 41 y 42, estime el error de usar la suma parcial indicada como una aproximación a la suma de la serie convergente.

41. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$; S_{100}

42. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k2^k}$; S_6

En los problemas 43-48, indique por qué la prueba de la serie alternante no es aplicable a la serie dada. Determine si la serie converge.

43. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(k\pi/6)}{\sqrt{k^4+1}}$

44. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{100+(-1)^k2^k}{3^k}$

45. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}--++\cdots$

46. $\frac{1}{1}-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}---+++\cdots$

47. $\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\cdots$

[*Sugerencia*: Considere las sumas parciales S_{2n} para $n = 1, 2, 3, \ldots$]

48. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-----\cdots$

En los problemas 49-52, determine si la serie dada converge.

49. $1-1+1-1+\cdots$

50. $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$

51. $1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots$

52. $1+(-1+1)+(-1+1-1)+\cdots$

≡ Piense en ello

53. Vuelva a leer la discusión previa a *Notas desde el aula* de esta sección. Explique después por qué el siguiente enunciado es cierto:

Si una serie de términos positivos $\sum a_k$ *es convergente, entonces los términos de la serie pueden rearreglarse de cualquier manera y la serie que resulta converge al mismo número que la serie original.*

54. Suponga que S es la suma de la serie armónica alternante convergente $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

Demuestre que el rearreglo de la serie

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\cdots$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\right)-\cdots,$$

produce $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$.

55. Utilice $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$ y el resultado del problema 54 en la forma

$$\frac{1}{2}S=0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots$$

para demostrar que la suma de otro rearreglo de términos de la serie armónica alternante es

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

56. La serie $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$ es una serie geométrica absolutamente convergente. Demuestre que su rearreglo $-\frac{1}{3} + \frac{1}{1} - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \cdots$ es convergente. Intente con la prueba de las proporciones y con la prueba de la raíz. [*Sugerencia*: Examine $3^{k+(-1)^k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$]

57. Si $\sum a_k$ es absolutamente convergente, pruebe que $\sum a_k^2$ converge. [*Sugerencia*: Para n suficientemente grande, $|a_n| < 1$. ¿Por qué?]

58. Proporcione un ejemplo de una serie convergente $\sum a_k$ para la cual $\sum a_k^2$ diverge.

59. Proporcione un ejemplo de una serie convergente $\sum a_k$ para la cual $\sum a_k^2$ converge.

60. Dé un ejemplo de una serie divergente $\sum a_k$ para la cual $\sum a_k^2$ converge.

61. Explique por qué la serie

$$e^{-x}\operatorname{sen} x + e^{-2x}\operatorname{sen} 2x + e^{-3x}\operatorname{sen} 3x + \cdots$$

converge para todo valor positivo de x.

9.8 Series de potencias

Introducción En matemáticas aplicadas es común trabajar con la serie infinita de funciones,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k(x) = c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots. \tag{1}$$

Los coeficientes c_k son constantes que dependen de k y las funciones $u_k(x)$ podrían ser diversos tipos de polinomios o incluso funciones seno y coseno. Cuando se especifica la variable x, por ejemplo $x = 1$, entonces la serie se reduce a una serie de constantes. La convergencia de una serie tal como (1) dependerá, desde luego, de la variable x, con la serie convergiendo usualmente para algunos valores de x mientras que divergirá para otros valores. En ésta y en la siguiente sección se considerarán series infinitas (1) donde las funciones $u_k(x)$ son polinomios $(x - a)^k$. Estudiaremos las propiedades de este tipo de series y se demostrará cómo determinar los valores de x para los cuales la serie converge.

Series de potencias Una serie que contiene potencias enteras no negativas de $(x - a)^k$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots, \tag{2}$$

recibe el nombre de **serie de potencias en $x - a$**. Se dice que la serie de potencias (2) está **centrada en a** o tiene **centro a**. Un importante caso especial de (2), cuando $a = 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots, \tag{3}$$

se denomina serie de **potencias en x**. La serie de potencias en (3) está centrada en 0. Un problema que enfrentaremos en esta sección es:

- Encontrar los valores de x para los cuales una serie de potencias converge.

Observe que (2) y (3) convergen a c_0 cuando $x = a$ y $x = 0$, respectivamente.

Es conveniente definir $(x - a)^0 = 1$ y $x^0 = 1$ incluso cuando $x = a$ y $x = 0$, respectivamente.

EJEMPLO 1 Serie de potencias centrada en 0

La serie de potencias en x donde los coeficientes $c_k = 1$ para todo k,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

se reconoce como una serie geométrica con el mismo cociente común $r = x$. Por el teorema 9.3.1, la serie converge para aquellos valores de x que satisfacen $|x| < 1$ o $-1 < x < 1$. La serie diverge para $|x| \geq 1$, esto es, para $x \leq -1$ o $x \geq 1$. ■

En general, la prueba de las proporciones, como se establece en el teorema 9.7.4, es especialmente útil al determinar los valores de x para los cuales una serie de potencias converge. La prueba de la raíz, en la forma del teorema 9.7.5, también es útil pero en menor grado.

EJEMPLO 2 Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k(k+1)^2}$.

Solución Con la identificación de que $a_n = x^n/(2^n(n+1)^2)$ se usa la prueba de las proporciones, teorema 9.7.4,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)^2}\cdot\frac{2^n(n+1)^2}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\frac{|x|}{2} \quad \leftarrow \text{divida entre } n \text{ el numerador y el denominador del primer término}$$

$$= \frac{|x|}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+1/n}{1+2/n}\right)^2 = \frac{|x|}{2}.$$

Del inciso *i*) del teorema 9.7.4, se tiene convergencia absoluta siempre que este límite sea estrictamente menor que 1. De tal modo, la serie es absolutamente convergente para aquellos valores de x que satisfacen $|x|/2 < 1$ o $|x| < 2$. Puesto que la desigualdad de valor absoluto $|x| < 2$ es equivalente a $-2 < x < 2$, advertimos que la serie dada convergerá para cualquier número x en el intervalo abierto $(-2, 2)$. Sin embargo, si $|x|/2 = 1$, o $|x| = 2$, o cuando $x = 2$ o $x = -2$, entonces la prueba de las proporciones no brinda información. Es necesario efectuar verificaciones independientes de la serie dada para la convergencia en estos puntos extremos. Al sustituir 2 por x la serie se convierte en

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2},$$

que es convergente por comparación directa con la serie p convergente $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$. De manera similar, al sustituir -2 por x se obtiene

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2},$$

que es convergente por la prueba de la serie alternante, teorema 9.7.1. Concluimos que la serie dada converge para toda x en el intervalo cerrado $[-2, 2]$. La serie diverge para $x < -2$ y $x > 2$, o equivalentemente, para $|x| > 2$. ■

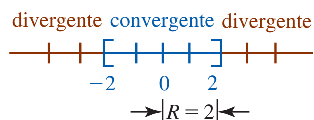


FIGURA 9.8.1 El conjunto de números x para los cuales la serie en el ejemplo 2 converge se muestra en azul

Intervalo de convergencia En la FIGURA 9.8.1 se ha ilustrado en azul el conjunto $[-2, 2]$ de todos los números reales x para los cuales la serie en el ejemplo 2 converge y en rojo el conjunto $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ de números x para los cuales la serie diverge. El conjunto de números para los cuales la serie converge es un intervalo centrado en 0 (el centro de la serie). Como se muestra en la figura, el radio de este intervalo es $R = 2$. En general, el conjunto de *todos* los números reales x para los cuales converge una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ se dice que es su **intervalo de convergencia**. El centro del intervalo de convergencia es el centro a de la serie. El radio R del intervalo de convergencia se denomina **radio de convergencia**.

El siguiente teorema, que se presenta sin demostración, resume todas las maneras posibles en las que puede converger una serie de potencias.

Teorema 9.8.1 Convergencia de una serie de potencias

Para una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ exactamente uno de los siguientes puntos es cierto:

i) La serie converge sólo en el *número* $x = a$.

ii) La serie converge absolutamente para *todos los números reales* x.

iii) La serie converge absolutamente para los *números* x *en un intervalo finito* $(a - R, a + R)$, $R > 0$, y diverge para los números en el conjunto $(-\infty, a - R) \cup (a + R, \infty)$. En un punto extremo del intervalo finito, $x = a - R$ o $x = a + R$, la serie puede converger absolutamente, converger de manera condicional o divergir.

Desde luego en *ii*) y en *iii*), cuando la serie de potencias converge absolutamente a un número x, sabemos, por el teorema 9.7.3, que converge. En *i*) del teorema 9.8.1 el intervalo de convergencia consiste de un elemento $\{a\}$ y afirmamos que la serie tiene **radio de convergencia** $\boldsymbol{R = 0}$. En *ii*) del teorema 9.8.1, el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$ y la serie tiene **radio**

de convergencia $R = \infty$. Por último, en *iii*) del teorema 9.8.1, hay cuatro posibilidades para el intervalo de convergencia con **radio de convergencia $R > 0$**:

$$(a - R, a + R), \quad [a - R, a + R], \quad (a - R, a + R], \quad \text{o} \quad [a - R, a + R).$$

Vea la FIGURA 9.8.2.

Como en el ejemplo 1, si $R > 0$, debe manejarse la cuestión de convergencia en un punto extremo $x = a \pm R$ al sustituir estos números en la serie dada y *reconociendo* después la serie resultante como convergente o divergente o *probando* la serie que resulta respecto a la convergencia mediante una prueba apropiada diferente a la prueba de las proporciones. Recuerde que:

- La prueba de las proporciones siempre es no conclusiva en un punto extremo $x = a \pm R$.

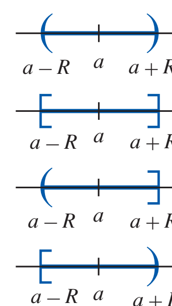


FIGURA 9.8.2 Posibles intervalos finitos de convergencia con $R > 0$

EJEMPLO 3 Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Solución Por la prueba de las proporciones, teorema 9.7.4, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}|x| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}.$$

Puesto que $\lim_{n\to\infty} |x|/(n+1) = 0$ para cualquier elección de x, la serie converge absolutamente para todo número real. De tal modo, el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$ y el radio de convergencia es $R = \infty$. ■

EJEMPLO 4 Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{k3^k}$.

Solución Por la prueba de las proporciones, teorema 9.7.4, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\cdot\frac{n3^n}{(x-5)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{|x-5|}{3} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)\frac{|x-5|}{3} = \frac{|x-5|}{3}.\end{aligned}$$

La serie converge absolutamente si $|x - 5|/3 < 1$ o $|x - 5| < 3$. Esta desigualdad de valores absolutos produce el intervalo abierto $(2, 8)$. En $x = 2$ y $x = 8$, los puntos extremos del intervalo, obtenemos, a su vez,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

La primera serie es un múltiplo de la serie armónica alternante y por ello es convergente, la segunda serie es la serie armónica divergente. Consecuentemente, el intervalo de convergencia es $[2, 8)$. El radio de convergencia es $R = 3$. La serie diverge si $x < 2$ o $x \geq 8$. Vea la FIGURA 9.8.3. ■

La primera serie es

$$-1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \cdots$$

o $\quad (-1)[1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots]$

La serie entre corchetes es la serie armónica alternante convergente.

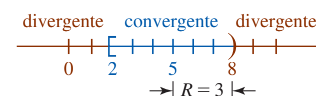


FIGURA 9.8.3 Intervalo de convergencia (azul) del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia para $\sum_{k=1}^{\infty} k!(x + 10)^k$.

Solución De la prueba de las proporciones,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(x+10)^{n+1}}{n!(x+10)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}(n+1)|x+10|\end{aligned}$$

se observa que el límite cuando $n \to \infty$ sólo puede existir si $|x + 10| = 0$, a saber, cuando $x = -10$. De tal manera,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases}\infty, & x \neq -10\\ 0, & x = -10.\end{cases}$$

La serie diverge para todo número real x, *excepto* $x = -10$. En $x = -10$, obtenemos una serie convergente que consta sólo de ceros. El intervalo de convergencia es el conjunto $\{10\}$ y el radio de convergencia es $R = 0$. ■

Ejercicios 9.8

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-27.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-24, recurra a la prueba de las proporciones para encontrar el intervalo y el radio de convergencia de la serie de potencias dada.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k$

4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} x^k$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k^3}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+7)^k}{\sqrt{k}}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{10^k}(x-5)^k$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^2}(x-4)^k$

9. $\sum_{k=0}^{\infty} k!2^k x^k$

10. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{k^{2k}} x^k$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^k}{k^2+k}$

12. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4x-5)^k}{3^k}$

13. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{\ln k}$

14. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k \ln k}$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^{2k}}(x+7)^k$

16. $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 2^{4k}(x-1)^k$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{5k}}{5^{2k}}\left(\frac{x}{3}\right)^k$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\,000^k}{k^k} x^k$

19. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{(k+1)(k+2)}(x-1)^k$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(-2)^k k(k+1)}(x+5)^k$

21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^k$

22. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6-x)^{k+1}}{\sqrt{2k+1}}$

23. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{9^k} x^{2k+1}$

24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{(2k)!} x^{2k}$

En los problemas 25-28, emplee la prueba de la raíz para determinar el intervalo y el radio de convergencia de la serie de potencias dada.

25. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{(\ln k)^k}$

26. $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^k (x+1)^k$

27. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k (x+3)^k$

28. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} (x-e)^k$

En los problemas 29 y 30, encuentre el radio de convergencia de la serie de potencias dada.

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^k$

30. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{3^k k!}(x-1)^k$

En los problemas 31-38, la serie dada no es una serie de potencias. No obstante, encuentre todos los valores de x para los cuales la serie dada converge.

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7^k}{x^{2k}}$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^k$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(\frac{x}{x+2}\right)^k$

35. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+2}{6}\right)^{k^2}$

36. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(kx)^k}$

37. $\sum_{k=0}^{\infty} e^{kx}$

38. $\sum_{k=0}^{\infty} k!e^{-kx^2}$

39. Encuentre todos los valores de x en $[0, 2\pi]$ para los cuales $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^k \operatorname{sen}^k x$ converge.

40. Demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{sen} kx)/k^2$ converge para todos los valores reales de x.

≡ Problemas con calculadora/SAC

41. En los problemas 71 y 72 del ejercicio 5.5 se señaló que algunas funciones importantes en matemáticas aplicadas se definen en términos de integrales no elementales. Algunas de estas funciones especiales de matemáticas aplicadas también se definen mediante series infinitas. La serie de potencias

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}$$

recibe el nombre de **función de Bessel de orden 0**.

a) El dominio de la función $J_0(x)$ es su intervalo de convergencia. Determine el dominio.

b) El valor de $J_0(x)$ se define como la suma de la serie para x en su dominio:

$$J_0(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

donde
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}$$

es el término general de la sucesión de sumas parciales. Emplee una calculadora o SAC y grafique las sumas parciales $S_0(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ y $S_4(x)$.

c) Hay varios tipos de funciones de Bessel de diferentes órdenes. $J_0(x)$ es un caso especial de una función más general $J_\nu(x)$ llamada **función de Bessel de primer tipo de orden ν**. Las funciones de Bessel son funciones incorporadas en sistemas algebraicos computarizados tales como *Mathematica* y *Maple*. Emplee un SAC para obtener la gráfica de $J_0(x)$ y compárela con las gráficas de las sumas parciales en el inciso *b*). [*Sugerencia*: En *Mathematica*, $J_0(x)$ se denota por medio de BesselJ[0, *x*].]

9.9 Representación de funciones mediante series de potencias

Introducción Para cada x en su intervalo de convergencia, una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ converge a un número. Por esta razón, una serie de potencias es en sí misma una función, la cual se denota como f, cuyo *dominio* es su intervalo de convergencia. Entonces para cada x en el intervalo de convergencia se define el elemento correspondiente en el *rango* de la función, el valor $f(x)$, como la suma de la serie:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k.$$

Los dos siguientes teoremas, que se anuncian sin demostración, responden algunas de las preguntas fundamentales acerca de la diferenciabilidad, integrabilidad y continuidad de una función f definida por una serie de potencias.

Diferenciación de una serie de potencias La función f definida por una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ es diferenciable.

Teorema 9.9.1 Diferenciación de una serie de potencias

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ converge sobre un intervalo $(a-R, a+R)$ para el cual el radio de convergencia R es positivo o ∞, entonces f es diferenciable en cada x en $(a-R, a+R)$, y

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}. \tag{1}$$

El radio de convergencia R de (1) es el mismo que el de la serie original.

El resultado de (1) establece simplemente que una serie de potencias puede diferenciarse *término por término* como se haría para una función polinomial:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}c_0 + \frac{d}{dx}c_1(x-a) + \frac{d}{dx}c_2(x-a)^2 + \cdots + \frac{d}{dx}c_n(x-a)^n + \cdots \\ &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Puesto que (1) es una serie de potencias con un radio de convergencia R, es posible aplicar el teorema 9.9.1 a f' definida en (2). Esto es, puede afirmarse que f' es diferenciable en cada x en $(a-R, a+R)$ y f'' está dada por

$$f''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(x-a)^{k-2}.$$

Continuando de esta manera, se concluye que:

- Una función f definida por una serie de potencias sobre $(a-R, a+R)$, $R > 0$, o sobre $(-\infty, \infty)$, posee derivadas de todos los órdenes en el intervalo.

El radio de convergencia R de cada serie derivada es el mismo que el de la serie original. Además, puesto que la diferenciabilidad implica continuidad, también tenemos el resultado:

- Una función f definida por una serie de potencias sobre $(a-R, a+R)$, $R > 0$, o sobre $(-\infty, \infty)$, es continua en cada x en el intervalo.

Integración de una serie de potencias Como en (1), el proceso de integración de una serie de potencias puede llevarse a cabo término por término:

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \int c_0(x-a)^0\,dx + \int c_1(x-a)\,dx + \int c_2(x-a)^2\,dx + \cdots + \int c_n(x-a)^n\,dx + \cdots \\ &= c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \frac{c_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \cdots + C \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + C. \end{aligned}$$

El resultado se resume en el siguiente teorema.

Teorema 9.9.2 Integración de una serie de potencias

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ converge sobre un intervalo $(a - R, a + R)$ para el cual el radio de convergencia R es positivo o ∞, entonces

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + C. \tag{3}$$

El radio de convergencia R de (3) es el mismo que el de la serie original.

Puesto que la función $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ es continua, su integral definida existe y está definida por

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(\int_{\alpha}^{\beta}(x-a)^k\,dx\right)$$

para cualesquiera números α y β en $(a - R, a + R)$, $R > 0$, o en $(-\infty, \infty)$ si $R = \infty$.

Es recomendable que lea este párrafo varias veces.

En los teoremas 9.9.1 y 9.9.2 se estableció que si la función $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ tiene radio de convergencia $R > 0$ o $R = \infty$, entonces la serie obtenida que forma $f'(x)$ e $\int f(x)\,dx$ tiene el mismo radio de convergencia R. Esto *no* significa que la serie de potencias que definen a $f(x)$, $f'(x)$ e $\int f(x)\,dx$ tengan los mismos intervalos de convergencia. Esto no es tan malo como parece. Si el radio de convergencia de la serie que define a $f(x)$, $f'(x)$ e $\int f(x)\,dx$ es $R > 0$, entonces los intervalos de convergencia pueden diferir sólo en los puntos extremos del intervalo. Como regla, al diferenciar una función definida por serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ *es posible perder* convergencia en un punto final del intervalo. Al integrar una función definida por una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ *puede ganarse* convergencia en un punto extremo del intervalo.

EJEMPLO 1 Intervalo de convergencia

Para la función f definida por $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, encuentre los intervalos de convergencia de

a) $f'(x)$ ***b***) $\int f(x)\,dx$.

Solución Se muestra fácilmente de la prueba de las proporciones que el intervalo de convergencia de la serie de potencia que define a f es $[-1, 1)$.

a) La derivada

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{4}$$

se reconoce como una serie geométrica cuyo intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. La serie diferenciada (4) ha perdido convergencia en el punto extremo izquierdo en el intervalo de convergencia de f.

b) La integral de f es

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{x^k}{k}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} + C. \tag{5}$$

En $x = -1$ y $x = 1$, las series en (5) se convierten, respectivamente, en

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

La primera serie converge por la prueba de la serie alternante; la segunda converge por la prueba de comparación directa (la serie es dominada por la serie p convergente $\sum 1/k^2$).

Como ambas series convergen, el intervalo de convergencia de (5) es $[-1, 1]$. En este caso, la serie integrada (5) ha ganado convergencia en el punto extremo derecho del intervalo de convergencia de f. ■

Representación de series de potencias de una función Con frecuencia es posible expresar una función f *conocida* o *dada* (tal como e^x o $\tan^{-1} x$) como la suma de una serie de potencias en algún intervalo. En este caso puede afirmarse que la serie es una **representación de *f* en serie de potencias** sobre el intervalo.

El siguiente ejemplo es importante debido a que conduce a muchos otros resultados.

EJEMPLO 2 Representación de una función por una serie de potencias

Encuentre una representación en serie de potencias de $\dfrac{1}{1-x}$ centrada en 0.

Solución Recuerde que una serie geométrica converge a $a/(1-r)$ si $|r| < 1$:

$$\frac{a}{1-r} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots.$$

identificando $a = 1$ y $r = x$, observamos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k. \tag{6}$$

La serie converge para $|x| < 1$. El intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. En la FIGURA 9.9.1 se ha desplegado la gráfica de $y = 1/(1-x)$ en azul junto con las gráficas de las sumas parciales $S_2(x)$, $S_5(x)$, $S_8(x)$ y $S_9(x)$ de la serie de potencias (6). Al inspeccionar esta figura, ponga atención sólo en el intervalo $(-1, 1)$. La serie no representa la función fuera de este intervalo. ■

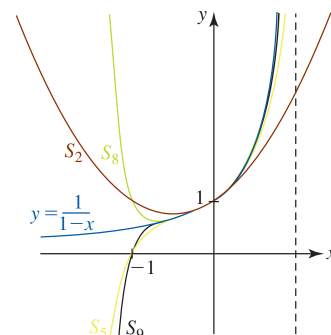


FIGURA 9.9.1 Gráficas de las sumas parciales del ejemplo 2

Al sustituir x por $-x$ en (6), obtenemos una representación de serie de potencias para la función $1/(1+x)$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k. \tag{7}$$

La serie (7) converge para $|-x| < 1$ o $x < 1$. El intervalo de convergencia es otra vez $(-1, 1)$.

Muchas funciones conocidas pueden representarse mediante una serie infinita a través de cierto tipo de manipulación de las series en (6) y en (7). Por ejemplo, podría multiplicarse la serie por una potencia de x, reemplazar x con otra variable o quizá combinar la sustitución de x con otra variable con el proceso de integración (o diferenciación), etcétera.

EJEMPLO 3 Representación de una función por una serie de potencias

Encuentre una representación de serie de potencias de $\dfrac{1}{1+3x}$ centrada en 0.

Solución Al sustituir simplemente el símbolo x por $3x$ en (7) obtenemos

$$\frac{1}{1+3x} = 1 - 3x + (3x)^2 - (3x)^3 + \cdots + (-1)^n(3x)^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 3^k x^k.$$

Esta serie converge cuando $|-3x| < 1$ o $|x| < \frac{1}{3}$. El intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. ■

EJEMPLO 4 Representación de una función por una serie de potencias

Encuentre una representación de series de potencias de $\dfrac{1}{5-x}$ centrada en 0.

Solución Factorizando 5 del denominador,

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5\left(1-\frac{x}{5}\right)} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{5}},$$

estamos en posibilidad de utilizar (6). Al reemplazar el símbolo x en (6) con $x/5$ obtenemos

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5}\left[1 + \frac{x}{5} + \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{x}{5}\right)^5 + \cdots\right]$$

o

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{5^{k+1}}x^k.$$

La serie converge para $|x/5| < 1$ o $|x| < 5$. El intervalo de convergencia es $(-5, 5)$. ■

Con un poco de habilidad, las representaciones en serie de potencias en (6) y (7) muy a menudo se utilizan para encontrar una representación de serie de potencias de una función centrada en un número a diferente de 0.

EJEMPLO 5 Serie de potencias centrada en 3

Determine una representación de serie de potencia de $\dfrac{1}{1+x}$ centrada en 3.

Solución Puesto que el centro de la potencia va a ser 3, deseamos que la serie de potencias contenga sólo potencias de $x - 3$. Con ese fin, sustraemos y sumamos 3 en el denominador:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x-3+3} = \frac{1}{4+(x-3)}.$$

A partir de este punto, procedemos como en el ejemplo 4, a saber: factorizamos 4 del denominador y usamos (7) con x sustituida por $(x-3)/4$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{4+(x-3)}\\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-3}{4}}\\ &= \frac{1}{4}\left[1 - \frac{x-3}{4} + \left(\frac{x-3}{4}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{4}\right)^3 + \cdots\right]\end{aligned}$$

o
$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x-3}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^{k+1}}(x-3)^k.$$

Esta serie converge para $|(x-3)/4| < 1$ o $|x-3| < 4$. La solución de la última desigualdad muestra que el intervalo de convergencia es $(-1, 7)$. ■

EJEMPLO 6 Diferenciación de una serie de potencias

La diferenciación término por término de (7) produce una representación en serie de potencias de $1/(1+x)^2$ sobre el intervalo $(-1, 1)$:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx}1 - \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}x^2 - \frac{d}{dx}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{d}{dx}x^n + \cdots$$

produce
$$\frac{-1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \cdots + (-1)^n nx^{n-1} + \cdots$$
← se multiplican ambos lados por -1

o
$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^{n+1}nx^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}kx^{k-1}.$$ ■

EJEMPLO 7 Integración de una serie de potencias

Encuentre una representación de serie de potencias de $\ln(1+x)$ sobre $(-1, 1)$.

Solución Primero introducimos un cambio de variable de integración al sustituir $x = t$ en (7):

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots.$$

Entonces, para cualquier x dentro del intervalo $(-1, 1)$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt &= \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt - \cdots + (-1)^n\int_0^x t^n\,dt + \cdots\\ &= t\Big]_0^x - \frac{1}{2}t^2\Big]_0^x + \frac{1}{3}t^3\Big]_0^x - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n+1}t^{n+1}\Big]_0^x + \cdots\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots.\end{aligned}$$

Pero
$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+t)\Big]_0^x = \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x)$$

y así

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}. \qquad (8) \ ■$$

Advierta que el intervalo de convergencia de la serie en (8) es ahora $(-1, 1]$, esto es, hemos agregado la convergencia en $x = 1$. Dejando $x = 1$ en (8), la serie en el lado derecho de la igualdad es la serie armónica alternante convergente; sobre el lado izquierdo se obtiene ln 2. De tal manera, hemos obtenido la suma S de la serie armónica alternante:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots. \qquad (9)$$

EJEMPLO 8 Aproximar un valor de ln *x*

Aproxime $\ln(1.2)$ hasta cuatro lugares decimales.

Solución Al sustituir $x = 0.2$ en (8) se obtiene

$$\begin{aligned} \ln(1.2) &= 0.2 - \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{(0.2)^3}{3} - \frac{(0.2)^4}{4} + \frac{(0.2)^5}{5} - \frac{(0.2)^6}{6} + \cdots \qquad (10) \\ &= 0.2 - 0.02 + 0.00267 - 0.0004 + 0.000064 - 0.00001067 + \cdots \\ &\approx 0.1823. \qquad (11) \ ■ \end{aligned}$$

Si la suma de la serie (10) en el ejemplo 8 se denota mediante S, entonces sabemos del teorema 9.7.2 que $|S_n - S| \le a_{n+1}$. El número dado en (11) es exacto hasta cuatro decimales, ya que, para la quinta suma parcial de (10),

$$|S_5 - S| \le 0.00001067 < 0.00005.$$

Aritmética de series de potencias Las dos series de potencias $f(x) = \sum b_k(x-a)^k$ y $g(x) = \sum c_k(x-a)^k$ pueden combinarse mediante las operaciones aritméticas de adición, multiplicación y división. Es factible que calculemos $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$ como en la adición y multiplicación de dos polinomios: agrupamos términos a partir de potencias similares de $x - a$. En cada punto en el cual las series de potencias que definen a f y g convergen absolutamente, las series

$$f(x) + g(x) = (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)(x-a) + (b_2 + c_2)(x-a)^2 + \cdots \qquad (12)$$

y $$f(x)g(x) = b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)(x-a) + (b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0)(x-a)^2 + \cdots \qquad (13)$$

convergen absolutamente. De manera similar, para $c_0 \ne 0$ podemos calcular $f(x)/g(x)$ mediante división larga:

$$\begin{array}{r|l} & \dfrac{b_0}{c_0} + \dfrac{b_1c_0 - b_0c_1}{c_0^2}(x-a) + \cdots \quad \leftarrow \text{cociente} \\ \hline c_0 + c_1(x-a) + \cdots & b_0 + b_1(x-a) + \cdots \\ & b_0 + \dfrac{b_0c_1}{c_0}(x-a) + \cdots \\ \hline & 0 + \dfrac{b_1c_0 - b_0c_1}{c_0}(x-a) + \cdots \\ & \vdots \end{array} \qquad (14)$$

Desde luego, no memorice (12), (13) y (14); sólo aplique el álgebra como lo haría para dos polinomios.

La división es válida en *alguna* vecindad del centro a de las dos series.

En ocasiones es posible que utilicemos las operaciones aritméticas tal como se ilustró junto con los resultados conocidos previamente para obtener una representación de serie de potencias de una función.

EJEMPLO 9 Suma de serie de potencias

Determine una representación de serie de potencias de $\dfrac{4x}{x^2 + 2x - 3}$ centrada en 0.

Solución Para comenzar, descomponemos la función en fracciones parciales

$$\frac{4x}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{3+x} - \frac{1}{1-x}.$$

Después factorizamos 3 del denominador de la primera fracción parcial y usamos (7) con x sustituida por $x/3$:

$$\frac{3}{3+x} = \frac{1}{1+\frac{x}{3}} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^3}{3^3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} x^k. \qquad (15)$$

Esta serie converge para $|x/3| < 1$ o $|x| < 3$. El intervalo de convergencia para (15) es $(-3, 3)$. Ahora sabemos de (6) que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (16)$$

converge para $|x| < 1$. El intervalo de convergencia para (16) es $(-1, 1)$. Por último, la suma de (15) y (16) produce la siguiente representación de serie de potencias para la función dada:

$$\frac{4x}{x^2+2x-3} = \frac{3}{3+x} - \frac{1}{1-x} = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{9}x^2 - \frac{28}{27}x^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{3^k} - 1 \right) x^k. \qquad (17)$$

La serie (17) converge para todas las x comunes a (esto es, la intersección de) los intervalos $(-3, 3)$ y $(-1, 1)$, es decir, para toda x en $(-1, 1)$. ■

El resultado (17) también puede obtenerse al multiplicar dos series de potencias.

EJEMPLO 10 Repaso del ejemplo 9

Si reescribimos la función en el ejemplo 9 como un producto

$$\frac{4x}{x^2+2x-3} = -\frac{4}{3}x \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{1-x}$$

y después usamos (15) y (16), se concluye que

$$\begin{aligned}
\frac{4x}{x^2+2x-3} &= -\frac{4}{3}x \cdot \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^3}{3^3} + \cdots\right) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\
&= -\frac{4}{3}x \cdot \left[1 + 1\left(1 - \frac{1}{3}\right)x + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right)x^2 + \cdots\right] \\
&= -\frac{4}{3}x - \frac{8}{9}x^2 - \frac{28}{27}x^3 - \cdots
\end{aligned}$$

■

Ejercicios 9.9

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-27.

Fundamentos

En los problemas 1-8, utilice (6) y (7) para determinar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función indicada. Proporcione el intervalo de convergencia.

1. $\dfrac{1}{3-x}$

2. $\dfrac{1}{4+x}$

3. $\dfrac{1}{1+2x}$

4. $\dfrac{1}{5+2x}$

5. $\dfrac{1}{1+x^2}$

6. $\dfrac{x}{1+x^2}$

7. $\dfrac{1}{4+x^2}$

8. $\dfrac{4}{4-x^2}$

En los problemas 9-14, utilice la diferenciación de una serie apropiada de los problemas 1-8 para encontrar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función que se indica. Señale el intervalo de convergencia.

9. $\dfrac{1}{(3-x)^2}$

10. $\dfrac{1}{(1+2x)^2}$

11. $\dfrac{1}{(5+2x)^3}$

12. $\dfrac{1}{(4+x)^3}$

13. $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$

14. $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

En los problemas 15-20, utilice la integración de una serie apropiada de los problemas 1-8 para encontrar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función indicada. Proporcione el intervalo de convergencia.

15. $\tan^{-1} x$

16. $\tan^{-1}(x/2)$

17. $\ln(1+x^2)$

18. $\ln(5+2x)$

19. $\ln(4+x)$

20. $\ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$

En los problemas 21-28, utilice (6), (7) o resultados previos para encontrar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función dada. Indique el intervalo de convergencia.

21. $\dfrac{1-x}{1+2x}$

22. $\dfrac{3-x}{1-x}$

23. $\dfrac{x^2}{(1+x)^3}$

24. $\dfrac{x^3}{8+2x}$

25. $x\ln(1+x^2)$

26. $x^2\tan^{-1}x$

27. $\displaystyle\int_0^x \tan^{-1} t\,dt$

28. $\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt$

En los problemas 29-32, proceda como en el ejemplo 5 y encuentre una representación de serie de potencias, centrada en el número dado a, de la función indicada. Señale el intervalo de convergencia.

29. $\dfrac{1}{1-x}$; $a=6$

30. $\dfrac{1}{x}$; $a=-2$

31. $\dfrac{x}{2+x}$; $a=-1$

32. $\dfrac{x-2}{x-1}$; $a=2$

En los problemas 33 y 34, proceda como en el ejemplo 9 y utilice fracciones parciales para encontrar una representación de serie de potencias, centrada en 0, de la función dada. Indique el intervalo de convergencia.

33. $\dfrac{7x}{x^2+x-12}$

34. $\dfrac{3}{x^2-x-2}$

En los problemas 35 y 36, proceda como en el ejemplo 10 y utilice multiplicación de series de potencia para determinar los primeros cuatro términos distintos de cero de una representación de serie de potencias, centrada en 0, para la función dada.

35. $\dfrac{1}{(2-x)(1-x)}$

36. $\dfrac{x}{(1+2x)(1+x^2)}$

En los problemas 37 y 38, encuentre el dominio de la función dada.

37. $f(x)=\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^2}{2\cdot 3^2}+\dfrac{x^3}{3\cdot 3^3}-\dfrac{x^4}{4\cdot 3^4}+\cdots$

38. $f(x)=1+2x+\dfrac{4x^2}{1\cdot 2}+\dfrac{8x^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$

En los problemas 39-44, use la serie de potencias para aproximar la cantidad dada hasta cuatro lugares decimales.

39. $\ln(1.1)$

40. $\tan^{-1}(0.2)$

41. $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{1}{1+x^3}\,dx$

42. $\displaystyle\int_0^{1/3}\frac{x}{1+x^4}\,dx$

43. $\displaystyle\int_0^{0.3} x\tan^{-1}x\,dx$

44. $\displaystyle\int_0^{1/2}\tan^{-1}x^2\,dx$

45. Utilice el problema 15 para demostrar que

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

46. Se sabe que la serie en el problema 45 converge muy lentamente. Demuestre lo anterior encontrando el entero positivo n más pequeño de manera que S_n aproxime $\pi/4$ hasta cuatro lugares decimales.

En los problemas 47 y 48, demuestre que la función definida por la serie de potencias satisface la ecuación diferencial dada.

47. $y=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$; $(x+1)y''+y'=0$

48. $J_0(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k}$; $xy''+y'+xy=0$

Piense en ello

49. ***a)*** Si $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, entonces demuestre que $f'(x)=f(x)$ para toda x en $(-\infty,\infty)$.

b) ¿Qué función tiene la propiedad de que su primera derivada es igual a la función? Conjeture sobre cuál función se representa mediante la serie de potencias del inciso *a*).

50. ***a)*** Si $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, entonces demuestre que $f''(x)=-f(x)$ para toda x en $(-\infty,\infty)$.

b) ¿Qué funciones tienen la propiedad de que su segunda derivada es igual al negativo de la función? Conjeture respecto a cuál función se representa mediante la serie de potencia del inciso *a*). Advierta que las potencias de x en la serie de potencias son enteros positivos impares.

9.10 Serie de Taylor

Introducción Suponga que $\sum c_k(x-a)^k$ es una serie de potencias centrada en a y que tiene un intervalo de convergencia con un radio de convergencia R distinto de cero. Luego, como se vio en la sección anterior, dentro del intervalo de convergencia una serie de potencias es una función continua que posee derivadas de todos los órdenes. También se abordó la idea de usar una serie de potencias para *representar* una función determinada (tal como $1/(1+x)$) sobre un intervalo. En esta sección se va a extender de manera adicional la noción de representar una función mediante una serie de potencias. El problema básico es:

- Suponga que se cuenta con una función f que posee derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto I. ¿Es posible encontrar una serie de potencias que **represente** a f sobre I?

En palabras un poco diferentes: ¿podemos **expandir** una función diferenciable infinitamente (tal como $f(x)=\operatorname{sen}x$, $f(x)=\cos x$ o $f(x)=e^x$) en una serie de potencias $\sum c_k(x-a)^k$ que converge al valor correcto de la función $f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto $(a-R,a+R)$, donde R es $R>0$ o $R=\infty$?

Serie de Taylor para una función f Antes de responder la pregunta del último párrafo, se va a hacer simplemente la *suposición* de que una función f infinitamente diferenciable sobre un intervalo $(a - R, a + R)$ puede representarse mediante una serie de potencias $\sum c_k(x - a)^k$ sobre ese intervalo. En ese caso es relativamente fácil determinar cuáles deben ser los coeficientes c_k. La diferenciación repetida de

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n + \cdots \tag{1}$$

produce

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \cdots \tag{2}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x - a) + \cdots \tag{3}$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1c_3 + \cdots, \tag{4}$$

y así sucesivamente. Al evaluar (1), (2), (3) y (4) en $x = a$, encontramos que

$$f(a) = c_0, \quad f'(a) = 1!c_1, \quad f''(a) = 2!c_2 \quad \text{y} \quad f'''(a) = 3!c_3,$$

respectivamente. En general, se ve que $f^{(n)}(a) = n!c_n$ o

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \; n \geq 0. \tag{5}$$

Cuando $n = 0$, interpretamos la derivada *0*-ésima como $f(a)$ y $0! = 1$. Al Sustituir (5) en (1) se producen los resultados resumidos en el siguiente teorema.

Teorema 9.10.1 Forma de una serie de potencias

Si una función f posee una representación en serie de potencias $f(x) = \sum c_k(x - a)^k$ sobre un intervalo $(a - R, a + R)$, entonces los coeficientes deben ser $c_k = f^{(k)}(a)/k!$.

En otras palabras, si una función f tiene una representación en serie de potencias centrada en a, entonces debe verse como lo siguiente:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k. \tag{6}$$

La serie en (6) se denomina **serie de Taylor de f en a**, o **centrada en a**. La serie de Taylor centrada en $a = 0$,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \tag{7}$$

se denomina **serie de Maclaurin de f**.

La pregunta planteada en la introducción ahora puede reformularse como:

- ¿Es posible expandir una función f infinitamente diferenciable en una serie de Taylor (6)?

Parecería que la respuesta es afirmativa (calculando simplemente los coeficientes como lo indica la fórmula (5)). Por desgracia, no es tan simple el concepto de expandir una función f dada infinitamente diferenciable en una serie de Taylor. Es necesario tener en mente que (5) y (6) se obtuvieron bajo la suposición de que f era representada por una serie de potencias centrada en a. Si no se conoce *a priori* que una función f infinitamente diferenciable tiene una representación en serie de potencias, entonces debe considerarse una serie de potencias obtenidas de (6) o (7) como un resultado *formal*, en otras palabras, una serie de potencias que es simplemente **generada** por la función f. No se sabe si la serie generada de esta manera converge o, incluso si lo hace, si converge a $f(x)$.

EJEMPLO 1 Serie de Taylor de ln x

Encuentre la serie de Taylor de $f(x) = \ln x$ centrada en $a = 1$. Determine su intervalo de convergencia.

Solución La función f, sus derivadas y sus valores en 1 son:

$$\begin{array}{r|l} f(x) = \ln x & f(1) = 0 \\ f'(x) = \dfrac{1}{x} & f'(1) = 1 \\ f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} & f''(1) = -1 \\ f'''(x) = \dfrac{1 \cdot 2}{x^3} & f'''(1) = 2! \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n} & f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)! \end{array}$$

Puesto que $(n-1)!/n! = 1/n$, $n \geq 1$, (6) produce

$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k. \tag{8}$$

La prueba de las proporciones,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^{n-1}(x-1)^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|x-1| = |x-1|, \end{aligned}$$

muestra que la serie (8) converge para $|x-1| < 1$ o sobre el intervalo $(0, 2)$. En los puntos extremos $x = 0$ y $x = 2$, las series

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

son divergente y convergente, respectivamente. El intervalo de convergencia de estas series es $(0, 2]$. El radio de convergencia es $R = 1$. ■

Advierta en el ejemplo 1 que no se escribió la igualdad

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k.$$

En este punto no se ha establecido que la serie dada en (8) representa a $\ln x$ sobre el intervalo $(0, 2]$.

Teorema de Taylor De acuerdo con (5), es claro que para tener una serie de Taylor centrada en a es necesario que una función f posea derivadas de todos los órdenes que estén definidas en a. Así, por ejemplo, $f(x) = \ln x$ no posee una serie de Maclaurin, debido a que $f(x) = \ln x$ y todas sus derivadas no están definidas en 0. Además, es importante notar que incluso si una función f posee derivadas de todos los órdenes y genera una serie de Taylor convergente sobre algún intervalo, es posible que la serie no represente a f sobre el intervalo, esto es, la serie no converge a $f(x)$ en toda x en el intervalo. Vea el problema 63 de los ejercicios 9.10. La pregunta fundamental de si una serie de Taylor representa la función que la generó puede resolverse por medio del **teorema de Taylor**.

Teorema 9.10.2 Teorema de Taylor

Sea f una función tal que $f^{(n+1)}(x)$ existe para toda x en un intervalo que contiene al número a. Entonces para toda x en el intervalo

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{9}$$

(*continúa*)

Existen varias formas del residuo. Esta forma se debe al matemático francés **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813).

recibe el nombre de **polinomio de Taylor de *f* en *a***, de grado *n*-ésimo, y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{10}$$

se llama **forma de Lagrange del residuo**. El número c yace entre a y x.

Puesto que la demostración de este teorema desviaría la principal finalidad de esta discusión, se reserva para el apéndice. La importancia del teorema 9.10.2 radica en el hecho de que los polinomios de Taylor $P_n(x)$ son las sumas parciales de la serie de Taylor (6). El residuo se define como

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \qquad \text{y así} \qquad P_n(x) = f(x) - R_n(x). \tag{11}$$

Si $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$, entonces la función f es la suma de la serie de Taylor que la genera. Sin embargo, de (11) observamos que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

por lo que sí es posible mostrar de algún modo que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, y entonces la sucesión de sumas parciales converge a $f(x)$. Resumimos el resultado.

Teorema 9.10.3 Convergencia de una serie de Taylor

Suponga que f es una función que posee derivadas de todos los órdenes sobre un intervalo centrado en el número a. Si

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para toda x en el intervalo, entonces la serie de Taylor generada por f converge a $f(x)$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

En la práctica, la prueba de que el residuo $R_n(x)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ depende muchas veces del hecho de que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0. \tag{12}$$

Este último resultado sigue de aplicar el teorema 9.3.2 a la serie $\sum_{m=1}^{\infty} x^k/k!$, la cual se sabe que es absolutamente convergente para todos los números reales. (Vea el ejemplo 3 en la sección 9.8.)

EJEMPLO 2 Repaso del ejemplo 1

Demuestre que la serie (8) representa a $f(x) = \ln x$ sobre el intervalo (0, 2].

Solución En la solución para el ejemplo 1 vimos que la derivada n-ésima de $f(x) = \ln x$ está dada por

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

De $f^{(n+1)}(c) = \dfrac{(-1)^n n!}{c^{n+1}}$, obtenemos de (10)

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-1|^{n+1} = \left|\frac{(-1)^n n!}{c^{n+1}(n+1)!} \cdot (x-1)^{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}\left|\frac{x-1}{c}\right|^{n+1},$$

donde c es algún número en el intervalo (0, 2] entre 1 y x.

Si $1 \le x \le 2$, entonces $0 < x - 1 \le 1$. Puesto que $1 < c < x$, debemos tener $0 < x - 1 \le 1 < c$ y, en consecuencia, $(x-1)/c < 1$. Por consiguiente,

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{n+1} \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

En el caso en el que $0 < x < 1$, también puede mostrarse que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Se omite la demostración. En consecuencia,

$$\ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x - 1)^k$$

para todos los valores de x en el intervalo (0, 2]. ■

EJEMPLO 3 Representación de la serie de Maclaurin de cos *x*

Encuentre la serie de Maclaurin de $f(x) = \cos x$. Demuestre que la serie de Maclaurin representa a $\cos x$ para toda x.

Solución Determinamos primero la serie de Maclaurin generada por $f(x) = \cos x$:

$$\begin{array}{r|l} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\text{sen}\, x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \text{sen}\, x & f'''(0) = 0 \end{array}$$

y así sucesivamente. De (7) obtenemos la serie de potencias

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}. \tag{13}$$

La prueba de las proporciones indica que (13) converge absolutamente para todos los valores reales de x, en otras palabras, el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$. En este caso, con el fin de demostrar que $\cos x$ es representada por la serie (13), debemos mostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Para este fin, advertimos que la derivada de f satisface

$$|f^{(n+1)}(x)| = \begin{cases} |\text{sen}\, x|, & n \text{ par} \\ |\cos x|, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

En cualquier caso, $|f^{(n+1)}(c)| \le 1$ para todo número real c, y consecuentemente por (10),

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n + 1)!}|x|^{n+1} \le \frac{|x|^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

En vista de (12), tenemos para cualquier elección fija aunque arbitraria de x,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n + 1)!} = 0.$$

Pero $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ implica que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Por tanto,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

es una representación válida de $\cos x$ para todo número real x. ■

EJEMPLO 4 Representación de la serie de Taylor de sen *x*

Determine la serie de Taylor de $f(x) = \text{sen}\, x$ centrada en $a = \pi/3$. Compruebe que la serie de Taylor representa a $\text{sen}\, x$ para toda x.

Solución Tenemos

$$\begin{array}{r|l} f(x) = \text{sen}\, x & f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f'(x) = \cos x & f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ f''(x) = -\text{sen}\, x & f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ f'''(x) = -\cos x & f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{array}$$

y así sucesivamente. Por consiguiente, la serie de Taylor centrada en $\pi/3$ generada por sen x es

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots. \tag{14}$$

También en este caso, de la prueba de las proporciones se sigue que (14) converge absolutamente para todos los valores reales de x, esto es, su intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$. Para demostrar que

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

para todo valor real x, advertimos que, como en el ejemplo anterior, $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$. Esto implica que

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x - \pi/3|^{n+1}}{(n + 1)!}$$

a partir de lo cual vemos, con la ayuda de (12), que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. ■

Se resumen algunas representaciones importantes de series de Maclaurin y sus intervalos de convergencia:

Series de Maclaurin	Intervalos de convergencia	
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$(-\infty, \infty)$	(15)
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$	$(-\infty, \infty)$	(16)
$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!}x^{2k+1}$	$(-\infty, \infty)$	(17)
$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k + 1}x^{2k+1}$	$[-1, 1]$	(18)
$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$(-\infty, \infty)$	(19)
$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k + 1)!}$	$(-\infty, \infty)$	(20)
$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + 1}x^{k+1}$	$[-1, 1]$	(21)

Se pide al lector demostrar la validez de las representaciones (15), (17), (19) y (20) como ejercicio. Vea los problemas 51-54 en los ejercicios 9.10.

Además, se le recomienda observar con cuidado las series dadas en (16)-(20) y responder después la pregunta del problema 61 de los ejercicios 9.10.

Algunas gráficas de polinomios de Taylor En el ejemplo 3 vimos que la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $a = 0$ representa la función para toda x, ya que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Siempre es de interés ver gráficamente cómo las sumas parciales de la serie de Taylor, las cuales son los polinomios de Taylor definidos en (9), convergen a la función. En la FIGURA 9.10.1*a*) las gráficas de los polinomios de Taylor

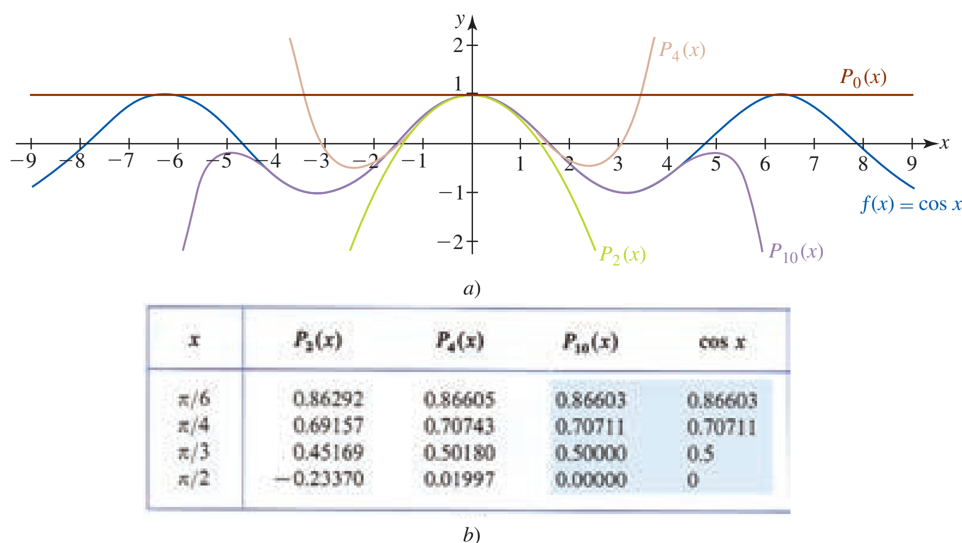
$$P_0(x) = 1, \qquad P_2(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2, \qquad P_4(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4,$$

y

$$P_{10}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10}$$

se comparan con la gráfica de $f(x) = \cos x$ que se muestra en azul.

Una comparación de los valores numéricos se presenta en la figura 9.10.1*b*).



x	$P_2(x)$	$P_4(x)$	$P_{10}(x)$	$\cos x$
$\pi/6$	0.86292	0.86605	0.86603	0.86603
$\pi/4$	0.69157	0.70743	0.70711	0.70711
$\pi/3$	0.45169	0.50180	0.50000	0.5
$\pi/2$	−0.23370	0.01997	0.00000	0

b)

FIGURA 9.10.1 Polinomios de Taylor P_0, P_2, P_4 y P_{10} para cos x

Aproximaciones Cuando el valor de x es cercano al centro a ($x \approx a$) de una serie de Taylor, puede usarse el polinomio de Taylor $P_n(x)$ de una función f en a para aproximar el valor de la función $f(x)$. El error en esta aproximación está dado por

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|.$$

EJEMPLO 5 Aproximación utilizando un polinomio de Taylor

Aproxime $e^{-0.2}$ mediante un polinomio de Taylor $P_3(x)$. Determine la exactitud de la aproximación.

Solución Como el valor $x = -0.2$ es cercano a 0, recurrimos al polinomio de Taylor de $f(x) = e^x$ en $a = 0$:

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{1!}x^2 + \frac{f''(0)}{3!}x^3.$$

Se sigue de

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$$
$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$$

que

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Este polinomio es la cuarta suma parcial de la serie dada en (15). Ahora,

$$P_3(-0.2) = 1 + (-0.2) + \frac{1}{2}(-0.2)^2 + \frac{1}{6}(-0.2)^3 \approx 0.8187$$

y por ello,

$$e^{-0.2} \approx 0.8187. \tag{22}$$

Después de esto, de acuerdo con (10) es posible escribir

$$|R_3(x)| = \frac{e^c}{4!}|x|^4 < \frac{|x|^4}{4!}$$

puesto que $-0.2 < c < 0$ y $e^c < 1$. La desigualdad

$$|R_3(-0.2)| < \frac{|-0.2|^4}{24} < 0.0001$$

implica que el resultado en (22) es exacto hasta tres lugares decimales.

En la FIGURA 9.10.2 hemos comparado las gráficas de los polinomios de Taylor $f(x) = e^x$ centrados en $a = 0$:

$$P_1(x) = 1 + x, \qquad P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{y} \qquad P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Advierta en las figura 9.10.2*b*) y 9.10.2*c*) que las gráficas de los polinomios de Taylor $P_2(x)$ y $P_3(x)$ son indistinguibles de la gráfica de $y = e^x$ en una pequeña vecindad de $x = 0.2$.

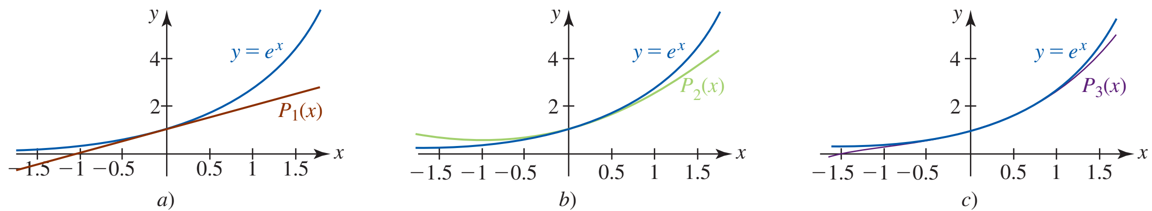


FIGURA 9.10.2 Gráficas de los polinomios de Taylor del ejemplo 5 ■

En las *Notas desde el aula* de la sección 5.5 se introdujo la noción de **integrales no elementales**, a saber: una integral tal como $\int \operatorname{sen} x^2\, dx$, donde $\operatorname{sen} x^2$ no posee una antiderivada en la forma de una función elemental. La serie de Taylor puede ser una ayuda cuando se trabaja con integrales no elementales. Por ejemplo, la serie de Maclaurin que se obtiene al sustituir x por x^2 en (17) converge para $-\infty < x < \infty$, y por ello, de acuerdo con el teorema 9.9.2,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x^2\, dx &= \int\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots\right)dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \cdots + C. \qquad (23)\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Aproximación utilizando una serie de Taylor

Aproxime $\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\, dx$ hasta tres lugares decimales.

Solución De (23) advertimos de inmediato que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\, dx &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \cdots\Bigg]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \cdots. \qquad (24)\end{aligned}$$

Por el teorema de la cota del error para la serie alternante, teorema 9.7.2, el cuarto término en la serie (24) satisface

$$a_4 = \frac{1}{15\cdot 7!} \approx 0.000013 < 0.0005.$$

Por tanto, la aproximación

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\, dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} \approx 0.3103$$

es exacta hasta tres lugares decimales. ■

Límites Una representación de serie de potencias de una función algunas veces es útil en el cálculo de límites. Por ejemplo, en la sección 2.4 se recurrió a un sutil argumento geométrico para demostrar que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Pero si usamos (17) y la división entre x observamos de inmediato que

el límite de cada uno de estos términos es 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \overbrace{\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots}\right) = 1.$$

EJEMPLO 7 Cálculo de un límite

Evalúe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \tan^{-1} x}{x^3}$.

Solución Observe que el límite tiene la forma indeterminada $0/0$. Si revisa el problema 25 en el ejercicio 4.5, tal vez recuerde evaluar este límite mediante la regla de L'Hôpital. Pero en vista de (18), podemos escribir

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots\right)}{x^3}$$

← también vea el problema 15 en los ejercicios 9.9 para la representación de $\tan^{-1} x$ en serie de potencias

$$= \lim_{x\to \infty} \frac{\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} + \cdots}{x^3}$$

← se factoriza x^3 del numerador y se cancela

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5} + \cdots\right) = \frac{1}{3}. \qquad ■$$

Empleo de la aritmética de una serie de potencias En la sección 9.9 se discutió la aritmética de la serie de potencias, esto es, las series de potencias pueden básicamente manipularse de manera aritmética igual que los polinomios. En el caso en que las representaciones de las series de potencia $f(x) = \sum b_k(x-a)^k$ y $g(x) = \sum c_k(x-a)^k$ convergen en el mismo intervalo abierto $(a - R, a + R)$ para $R > 0$ o $(-\infty, \infty)$ para $R = \infty$, pueden obtenerse las representaciones de la serie de potencias para $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$ a su vez, sumando las series y multiplicándolas. La suma y el producto convergen en el mismo intervalo. Si dividimos la serie de potencias de f entre la serie de potencias de g, entonces el cociente representa a $f(x)/g(x)$ en alguna vecindad de a.

EJEMPLO 8 Serie de Maclaurin de tan x

Encuentre los primeros tres términos distintos de cero de la serie de Maclaurin de $f(x) = \tan x$.

Solución De (16) y (17) podemos escribir

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots}$$

Entonces mediante división larga

$$\begin{array}{r|l}
 & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\
1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots & x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots \\
 & x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \cdots \\
 & \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\
 & \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots \\
 & \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\
 & \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\
 & \vdots
\end{array}$$

Por consiguiente, tenemos

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots. \qquad ■$$

Desde luego, el último resultado pudo también obtenerse utilizando (7). Vea el problema 11 en los ejercicios 9.10. Después de trabajar en el ejemplo 8 se le recomienda leer *ii*) en las *Notas desde el aula*.

Polinomios de Taylor (Redux) En la sección 4.9 se introdujo la noción de una **aproximación lineal local** de f en a dada por $f(x) \approx L(x)$, donde

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{25}$$

Esta ecuación representa la línea tangente a la gráfica de f en $x = a$. Como es un polinomio lineal, otro símbolo apropiado para (25) es

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{26}$$

La ecuación se reconoce ahora como el polinomio de Taylor de primer grado de f en a. La idea detrás de (25) es que la línea tangente puede usarse para aproximar el valor de $f(x)$ cuando x está en una pequeña vecindad de a. Pero, puesto que la mayoría de las gráficas tienen concavidad y una línea tangente, no es posible esperar que un polinomio de grado superior proporcionaría una mejor aproximación a $f(x)$ en el sentido de que su gráfica estaría cerca de la gráfica de f sobre un intervalo más grande que contenga a a. Advierta que (26) tiene las propiedades de P_1 y su primera derivada concuerda con f y su primera derivada en $x = a$:

$$P_1(a) = f(a) \qquad \text{y} \qquad P_1'(a) = f'(a).$$

Si deseamos que una función polinomial cuadrática

$$P_2(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2$$

tenga las propiedades análogas, a saber:

$$P_2(a) = f(a), \qquad P_2'(a) = f'(a) \qquad \text{y} \qquad P_2''(a) = f''(a),$$

entonces, siguiendo un procedimiento similar a (1)-(5), se advierte que P_2 debe ser

$P_n(x)$ es el polinomio de grado n definido en (9).



$$P_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2. \tag{27}$$

Gráficamente, esto significa que la gráfica de f y la gráfica de P_2 tienen la misma línea tangente y la misma concavidad en $x = a$. Desde luego, se reconoce (27) como el polinomio de Taylor de segundo grado. Se afirma que $f(x) \approx P_2(x)$ es una **aproximación cuadrática local de f en a**. Al continuar de esta manera se construye $f(x) \approx P_n(x)$, que es una **aproximación local de grado n-ésimo de f en a**. Con esta discusión en mente, el lector necesita prestar mayor atención a las gráficas de $f(x) = \cos x$, P_0, P_2, P_4 y P_{10} cerca de $x = 0$ en la figura 9.10.1*a*) y las aproximaciones en la figura 9.10.1*b*). También debe reexaminar la figura 9.10.2.

Posdata. Un poco de historia El teorema 9.10.2 recibe su nombre en honor del matemático inglés **Brook Taylor** (1685-1731), quien publicó este resultado en 1715. Sin embargo, la fórmula en (6) fue descubierta por Johann Bernoulli casi 20 años antes. La serie en (7) recibe su nombre en honor al matemático escocés y estudiante de Isaac Newton, **Colin Maclaurin** (1698-1746). No es claro por qué el nombre de Maclaurin se asocia con esta serie.

Σ **NOTAS DESDE EL AULA**

i) El método de la serie de Taylor para encontrar la serie de potencias de una función y la prueba posterior de que la serie representa a la función tiene una gran y obvia desventaja. La obtención de una expresión general para la derivada n-ésima de la mayoría de las funciones es casi imposible. De tal modo, se presenta con frecuencia la limitación de determinar sólo algunos de los primeros coeficientes c_n.

ii) Es fácil pasar por alto la importancia de los resultados en (6) y (7). Suponga que se desea encontrar la serie de Maclaurin para $f(x) = 1/(2 - x)$. Es posible, desde luego, utilizar (7), lo cual se le pide al lector en el problema 1 de los ejercicios 9.10. Por otro lado, el lector debe reconocer, de los ejemplos 3-5 de la sección 9.9, que la representación en serie de potencias de f puede obtenerse utilizando series geométricas. El punto es:

- La representación es única. De tal modo que sobre su intervalo de convergencia, una serie de potencias que representa a una función, independientemente de cómo se obtuvo, es la serie de Taylor o de Maclaurin de esa función.

Ejercicios 9.10 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-28.

Fundamentos

En los problemas 1-10, emplee (7) para determinar la serie de Maclaurin de la función dada.

1. $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ **2.** $f(x) = \dfrac{1}{1 + 5x}$

3. $f(x) = \ln(1 + x)$ **4.** $f(x) = \ln(1 + 2x)$

5. $f(x) = \text{sen}\, x$ **6.** $f(x) = \cos 2x$

7. $f(x) = e^{x}$ **8.** $f(x) = e^{-x}$

9. $f(x) = \text{senh}\, x$ **10.** $f(x) = \cosh x$

En los problemas 11 y 12, emplee (7) para determinar los primeros cuatro términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para la función dada.

11. $f(x) = \tan x$ **12.** $f(x) = \text{sen}^{-1} x$

En los problemas 13-24, emplee (6) para determinar la serie de Taylor de la función dada centrada en el valor indicado de a.

13. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}, \quad a = 4$ **14.** $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 1$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = 1$ **16.** $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = -5$

17. $f(x) = \text{sen}\, x, \quad a = \pi/4$ **18.** $f(x) = \text{sen}\, x, \quad a = \pi/2$

19. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/3$ **20.** $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/6$

21. $f(x) = e^{x}, \quad a = 1$ **22.** $f(x) = e^{-2x}, \quad a = \dfrac{1}{2}$

23. $f(x) = \ln x, \quad a = 2$ **24.** $f(x) = \ln(x + 1), \quad a = 2$

En los problemas 25-32, utilice resultados, métodos o problemas previos para determinar la serie de Maclaurin de la función dada.

25. $f(x) = e^{-x^2}$ **26.** $f(x) = x^2 e^{-3x}$

27. $f(x) = x \cos x$ **28.** $f(x) = \text{sen}\, x^3$

29. $f(x) = \ln(1 - x)$ **30.** $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

31. $f(x) = \sec^2 x$ **32.** $f(x) = \ln(\cos x)$

En los problemas 33 y 34, emplee la serie de Maclaurin como una ayuda en la evaluación de límite indicado.

33. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x - \text{sen}\, x}$ **34.** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 + x - e^{x}}{1 - \cos x}$

En los problemas 35 y 36, use adición de series de Maclaurin para e^{x} y e^{-x} para determinar la serie de Maclaurin de la función dada.

35. $f(x) = \cosh x$ **36.** $f(x) = \text{senh}\, x$

En los problemas 37 y 38, use multiplicación para encontrar los primeros cinco términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para la función dada.

37. $f(x) = \dfrac{e^{x}}{1 - x}$ **38.** $f(x) = e^{x}\, \text{sen}\, x$

En los problemas 39 y 40, utilice división para encontrar los primeros cinco términos distintos de cero de la serie de Maclaurin de la función dada.

39. $f(x) = \dfrac{e^{x}}{\cos x}$ **40.** $f(x) = \sec x$

En los problemas 41 y 42, establezca el valor indicado de la integral definida dada.

41. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \cdots$

42. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\text{sen}\, x}{x}\, dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots$

En los problemas 43-46, encuentre la suma de la serie dada.

43. $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ **44.** $\dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} + \cdots$

45. $1 - \dfrac{\pi^2}{2!} + \dfrac{\pi^4}{4!} - \dfrac{\pi^6}{6!} + \cdots$ **46.** $\pi - \dfrac{\pi^3}{3!} + \dfrac{\pi^5}{5!} - \dfrac{\pi^7}{7!} + \cdots$

En los problemas 47-50, aproxime la cantidad indicada utilizando el polinomio de Taylor $P_n(x)$ para los valores señalados de n y a. Determine la exactitud de la aproximación.

47. sen 46°, $n = 2$, $a = \pi/4$ [*Sugerencia*: Convierta 46° a radianes.]

48. cos 29°, $n = 2$, $a = \pi/6$ **49.** $e^{0.3}$, $n = 4$, $a = 0$

50. senh(0.1), $n = 3$, $a = 0$

51. Demuestre que la serie obtenida en el problema 5 representa a $\text{sen}\, x$ para todo valor real de x.

52. Demuestre que la serie obtenida en el problema 7 representa a e^{x} para todo valor real de x.

53. Demuestre que la serie obtenida en el problema 9 representa a $\text{senh}\, x$ para todo valor real de x.

54. Demuestre que la serie obtenida en el problema 10 representa $\cosh x$ para todo valor real de x.

Aplicaciones

55. Al nivelar una larga autopista de longitud L, debe hacerse una compensación con respecto a la curvatura de la Tierra.

a) Demuestre que la corrección de nivelación y indicada en la FIGURA 9.10.3 es $y = R \sec(L/R) - R$, donde R es el radio de la Tierra medido en millas.

b) Si $P_2(x)$ es el polinomio de Taylor de segundo grado para $f(x) = \sec x$ en $a = 0$, utilice $\sec x \approx P_2(x)$ para x cercano a cero con el fin de demostrar que la corrección aproximada del nivelado es $y \approx L^2/(2R)$.

c) Encuentre el número de pulgadas de la corrección del nivelado que se necesita para una autopista de 1 milla. Emplee $R = 4\,000$ mi.

d) Si se usa $\sec x \approx P_4(x)$, entonces demuestre que la corrección de nivelación es

$$y \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}.$$

Repita el cálculo en el inciso *c*) utilizando la última fórmula.

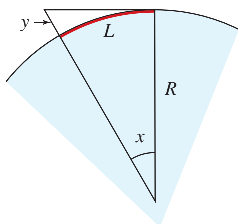


FIGURA 9.10.3 La Tierra en el problema 55

56. Una onda de longitud L viaja de izquierda a derecha a través de agua a una profundidad d (en pies), como se ilustra en la FIGURA 9.10.4. Un modelo matemático que relaciona la velocidad v de la onda con L y d es

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}.$$

a) Para agua profunda demuestre que $v \approx \sqrt{gL/2\pi}$.

b) Utilice (7) para determinar los primeros tres términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para $f(x) = \tanh x$. Demuestre que cuando d/L es pequeña, $v \approx \sqrt{gd}$. En otras palabras, en agua poco profunda la velocidad de una onda es independiente de la longitud de la onda.

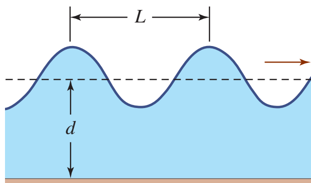


FIGURA 9.10.4 Onda del problema 56

Piense en ello

En los problemas 57 y 58, encuentre dos maneras, aparte de utilizar (7), de determinar la representación de la serie de Maclaurin de la función dada.

57. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

58. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

59. Sin utilizar (6), encuentre la serie de Taylor para la función $f(x) = (x + 1)^2 e^x$ centrada en $a = 1$. [*Sugerencia*: $e^x = e^{x+1-1}$.]

60. Discuta: ¿$f(x) = \cot x$ posee una representación en serie de Maclaurin?

61. Explique por qué resulta lógico que las series de Maclaurin (16) y (17) para $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ contengan sólo potencias pares de x y sólo potencias impares de x, respectivamente. Después reinspeccione la serie de Maclaurin en (18), (19) y (20) y comente.

62. Suponga que se desea calcular $f^{(10)}(0)$ para $f(x) = x^4 \operatorname{sen} x^2$. Desde luego, podría utilizarse el enfoque de fuerza bruta: recurrir a la regla del producto y cuando se obtenga (a la larga) la décima derivada igualar x a 0. Piense en una manera más hábil de determinar el valor de esta derivada.

Proyectos

63. Un clásico matemático La función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

aparece en casi todo texto de cálculo. La función f es continua y posee derivadas de todos los órdenes en todo valor de x.

a) Emplee una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de f.

b) Emplee (7) para determinar la serie de Maclaurin correspondiente a f. Tendrá que recurrir a la definición de la derivada para calcular $f'(0), f''(0), \ldots$ Por ejemplo,

$$f'(0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}.$$

Podría ser de utilidad utilizar $t = \Delta x$ y recordar la regla de L'Hôpital. Demuestre que la serie de Maclaurin de f converge para toda x. ¿La serie representa a la función f que la generó?

9.11 Serie del binomio

Introducción La mayoría de los estudiantes de matemáticas están familiarizados con la expansión binomial en los dos casos:

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$
$$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

En general, si m es un entero positivo, entonces

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots + mx^{m-1} + x^m. \tag{1}$$

La expansión de $(1 + x)^m$ en (1) se denomina **teorema del binomio**. Utilizando la notación de sumatoria, (1) se escribe

$$(1 + x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k, \tag{2}$$

donde el símbolo $\binom{m}{k}$ se define como

por conveniencia este término se define como 1 $\downarrow$ $\quad$ $(m - k + 1) = (m - (k - 1))$ $\downarrow$

$$\binom{m}{0} = 1, \quad k = 0 \qquad \text{y} \qquad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}, \quad k \geq 1.$$

Estos números se llaman **coeficientes binomiales**. Por ejemplo, cuando $m = 3$, los cuatro coeficientes binomiales son

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = \frac{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = \frac{3(3-1)}{2} = 3, \quad \binom{3}{3} = \frac{3(3-1)(3-2)}{6} = 1.$$

Si bien (2) tiene la apariencia de una serie, es una suma finita consistente en $m + 1$ términos que finalizan con x^m. En esta sección se verá que cuando (1) se extiende a potencias m que no son enteros positivos, el resultado es una serie infinita.

Isaac Newton fue el primero que dio en 1665 la extensión del **teorema del binomio** (m un entero positivo) a la **serie del binomio** (m fraccionario y números reales negativos).

Serie del binomio Suponga ahora que $f(x) = (1 + x)^r$, donde r representa cualquier número real. De

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^r & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= r(1+x)^{r-1} & f'(0) &= r \\ f''(x) &= r(r-1)(1+x)^{r-2} & f''(0) &= r(r-1) \\ f'''(x) &= r(r-1)(r-2)(1+x)^{r-3} & f'''(0) &= r(r-1)(r-2) \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= r(r-1)\cdots(r-n+1)(1+x)^{r-n} & f^{(n)}(0) &= r(r-1)\cdots(r-n+1) \end{aligned}$$

advertimos que la serie de Maclaurin generada por f es

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k &= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k. \end{aligned} \tag{3}$$

La serie de potencias dada en (3) se denomina **serie del binomio**. Advierta que (3) termina sólo cuando r es un entero positivo; en este caso, (3) se reduce a (1). De acuerdo con la prueba de las proporciones, la versión dada en el teorema 9.7.4,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)(r-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{r(r-1)\cdots(r-n+1)x^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{|r-n|}{n+1}|x| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{r}{n} - 1\right|}{1 + \frac{1}{n}}|x| = |x| \end{aligned}$$

concluimos que la serie del binomio (3) converge para $|x| < 1$ o $-1 < x < 1$ y diverge para $|x| > 1$, esto es, para $x > 1$ o $x < -1$. La convergencia en los puntos extremos $x = \pm 1$ depende del valor de r.

Desde luego no es una gran sorpresa aprender que la serie (3) representa la función f que la generó. Se enuncia esto como un teorema formal.

Teorema 9.11.1 Serie del binomio

Si $|x| < 1$, entonces para cualquier número real r,

$$(1 + x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k, \tag{4}$$

donde

$$\binom{r}{0} = 1, k = 0 \quad \text{y} \quad \binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}, \quad k \geq 1.$$

EJEMPLO 1 Representación de una función mediante una serie del binomio

Encuentre una representación en serie de potencias para $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

Solución Reescribiendo f como $f(x) = (1 + x)^{1/2}$ identificamos $r = \frac{1}{2}$. Después se deduce de (4) que para $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n}x^n + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \cdots \\
&\qquad + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!}x^n + \cdots.
\end{aligned}$$

La última línea se escribe utilizando la notación de sumatoria como

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{2^k k!}x^k. \qquad \blacksquare$$

Suponga que la función en el ejemplo 1 ha sido $f(x) = \sqrt{4 + x}$. Para obtener la representación en serie del binomio de f tendríamos que reescribir la función en la forma $(1 + x)^r$ factorizando el 4 fuera del radical, esto es,

$$f(x) = \sqrt{4 + x} = \sqrt{4}\left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{1/2} = 2\left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{1/2}.$$

Ahora es posible emplear (4) en la cual el símbolo x es sustituido por $x/4$. La serie resultante convergería entonces para $|x/4| < 1$ o $|x| < 4$.

EJEMPLO 2 Una fórmula de la física

En la teoría de la relatividad de Einstein, la masa de una partícula que se mueve a una velocidad v relativa a un observador está dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{5}$$

donde m_0 es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz.

Muchos de los resultados de la física clásica no se cumplen para partículas, tales como electrones, los cuales se mueven a una velocidad cercana a la de la luz. La energía cinética ya no es $K = \frac{1}{2}m_0 v^2$ sino

$$K = mc^2 - m_0 c^2. \tag{6}$$

Si identificamos $r = -\frac{1}{2}$ y $x = -v^2/c^2$ en (5), tenemos $|x| < 1$, ya que ninguna partícula puede superar la velocidad de la luz. En consecuencia, (6) puede escribirse:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 + x}} - m_0 c^2 \\
&= m_0 c^2\left[(1 + x)^{-1/2} - 1\right]
\end{aligned}$$

$$= m_0c^2\left[\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots\right) - 1\right] \quad \leftarrow \text{ahora se sustituye el valor por } x$$

$$= m_0c^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{v^4}{c^4}\right) + \frac{5}{16}\left(\frac{v^6}{c^6}\right) + \cdots\right]. \tag{7}$$

En el mundo cotidiano donde v es mucho más pequeña que c, son ignorables los términos más allá del primero en (7). Esto conduce al resultado clásico bien conocido

$$K \approx m_0c^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = \frac{1}{2}m_0v^2. \qquad \blacksquare$$

Σ NOTAS DESDE EL AULA

Al llegar al final de la discusión de series infinitas es probable que el lector tenga la fuerte impresión de que las series divergentes son inútiles. Nada de eso. Los matemáticos odian que algo se desperdicie. Las series divergentes se usan en una teoría conocida como *representaciones asintóticas de funciones*. Ocurre algo como lo siguiente; una serie divergente de la forma

$$a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \cdots$$

es una **representación asintótica de la función** f si

$$\lim_{n\to\infty} x^n[f(x) - S_n(x)] = 0,$$

donde $S_n(x)$ es la suma parcial $(n + 1)$ de la serie divergente. Algunas funciones importantes en matemáticas aplicadas se definen de esta manera.

Ejercicios 9.11

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-28.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-10, recurra a (4) para determinar los primeros cuatro términos de una representación en serie de potencias de la función dada. Indique el radio de convergencia.

1. $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$

2. $f(x) = \sqrt{1 - x}$

3. $f(x) = \sqrt{9 - x}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 5x}}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

6. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$

7. $f(x) = (4 + x)^{3/2}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(1 + x)^5}}$

9. $f(x) = \dfrac{x}{(2 + x)^2}$

10. $f(x) = x^2(1 - x^2)^{-3}$

En los problemas 11 y 12, explique por qué el error en la aproximación dada es menor que la cantidad indicada. [*Sugerencia*: Revise el teorema 9.7.2.]

11. $(1 + x)^{1/3} \approx 1 + \dfrac{x}{3}; \quad \dfrac{1}{9}x^2, x > 0$

12. $(1 + x^2)^{-1/2} \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{8}x^4; \quad \dfrac{5}{16}x^6$

13. Encuentre una representación en serie de potencias para $\operatorname{sen}^{-1} x$ utilizando

$$\operatorname{sen}^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,dt.$$

14. ***a***) Demuestre que la longitud de un cuarto de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ está dada por $L = aE(k)$, donde $E(k)$ es

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$$

y $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2 < 1$. Esta integral recibe el nombre de **integral elíptica completa del segundo tipo**.

b) Demuestre que

$$L = a\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}\frac{\pi}{4}k^2 - \frac{a}{8}\frac{3\pi}{16}k^4 - \cdots.$$

15. En la FIGURA 9.11.1 un cable colgante está sostenido en los puntos A y B y soporta una carga distribuida uniformemente (tal como el piso de un puente). Si $y = (4d/l^2)x^2$ es la ecuación del cable, demuestre que su longitud está dada por

$$s = l + \frac{8d^2}{3l} - \frac{32d^4}{5l^3} + \cdots.$$

Vea el problema 22 en los ejercicios 4.10.

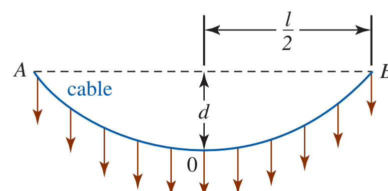


FIGURA 9.11.1 Cable colgante del problema 15

16. Aproxime las siguientes integrales hasta tres lugares decimales.

a) $\int_0^{0.2} \sqrt{1 + x^3}\, dx$ ***b***) $\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1 + x^4}\, dx$

17. Por la ley de los cosenos, el potencial en el punto A en la FIGURA 9.11.2 debido a una carga unitaria en el punto B es $1/R = (1 - 2xr + r^2)^{-1/2}$, donde $x = \cos\theta$. La expresión $(1 - 2xr + r^2)^{-1/2}$ se dice que es la **función generadora** de los **polinomios de Legendre** $P_k(x)$, puesto que

$$(1 - 2xr + r^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) r^k.$$

Recurra a (4) para determinar $P_0(x)$, $P_1(x)$ y $P_2(x)$.

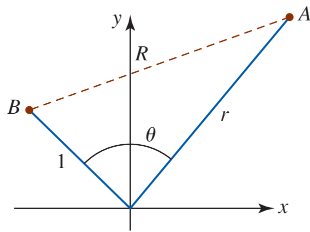


FIGURA 9.11.2 Carga unitaria en el punto B del problema 17

18. ***a***) Suponga que

$$f(x) = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

para $|x| < 1$. Determine $f'(x)$ y $xf'(x)$.

b) Muestre que

$$(n+1)\frac{r(r-1)\cdots(r-n)}{(n+1)!} + n\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} = r\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}.$$

c) Demuestre que $f'(x) + xf'(x) = rf(x)$.

d) Resuelva la ecuación diferencial de primer orden

$$(1 + x)f'(x) = rf(x)$$

sujeta a $f(0) = 1$.

En los problemas 19 y 20, emplee (4) para determinar la representación en serie de potencias en $x - 1$ de la función dada. [*Sugerencia*: $1 + x = 2 + (x - 1)$.]

19. $f(x) = \sqrt{1 + x}$ **20.** $f(x) = (1 + x)^{-2}$

Revisión del capítulo 9

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-28.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-30, indique si el enunciado es verdadero (V) o falso (F).

1. La sucesión $\left\{\frac{(-1)^n n}{2n + 1}\right\}$ converge. _____
2. Toda sucesión acotada converge. _____
3. Si una sucesión es no monótona, es no convergente. _____
4. La sucesión $\left\{\frac{10^n}{2^{n^2}}\right\}$ es no monótona. _____
5. Si $a_n \le B$ para todo n y $a_{n+1}/a_n \ge 1$ para todo n, entonces $\{a_n\}$ converge. _____
6. $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ para todo valor de x. _____
7. Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, entonces $\sum a_k$ siempre converge. _____
8. $0.999999\ldots = 1$ _____
9. Si $\sum a_k = \frac{3}{2}$, entonces $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. _____
10. Si $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces $\sum a_k$ converge. _____
11. Si $\sum a_k^2$ converge, entonces $\sum a_k$ converge. _____
12. Si $\sum a_k$ converge y $\sum b_k$ diverge, entonces $\sum (a_k + b_k)$ diverge. _____
13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge para $p = 1.0001$. _____
14. La serie $\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \cdots$ diverge. _____
15. Si $\sum |a_k|$ diverge, entonces $\sum a_k$ diverge. _____
16. Si $\sum a_k$, $a_k > 0$, converge, entonces $\sum (-1)^{k+1} a_k$ converge. _____
17. Si $\sum (-1)^{k+1} a_k$ converge absolutamente, entonces $\sum (-1)^{k+1} \frac{a_k}{k}$ converge. _____

18. Si $\sum b_k$ converge y $a_k \geq b_k$ para todo entero positivo k, entonces $\sum a_k$ converge. _____

19. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ entonces $\sum a_k$ converge absolutamente. _____

20. Toda serie de potencias tiene un radio de convergencia diferente de cero. _____

21. Una serie de potencias converge absolutamente en todo número x en su intervalo de convergencia. _____

22. Una serie de potencias $\sum c_k x^k$ con un intervalo de convergencia $[-R, R]$, $R > 0$, es una función infinitamente diferenciable dentro de $(-R, R)$. _____

23. Si una serie de potencias $\sum c_k x^k$ converge para $-1 < x < 1$ y es convergente en $x = 1$, entonces la serie también debe converger en $x = -1$. _____

24. Si la serie de potencias $\sum a_k x^k$, $a_k > 0$, tiene el intervalo de convergencia $[-R, R)$, $R > 0$, entonces la serie converge condicionalmente, pero no absolutamente, en $x = -R$. _____

25. Puesto que $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 1$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}$ también converge a 1. _____

26. La serie $1 + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{6^2} - \ - + + \cdots$ converge. _____

27. $f(x) = \ln x$ no puede representarse mediante una serie de Maclaurin. _____

28. Si la serie de potencias $\sum c_k(x - 4)^k$ diverge en $x = 7$, la serie diverge necesariamente en $x = 9$. _____

29. Si la sucesión $\{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ converge a 10, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 10$. _____

30. Si $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} x^{2k-1}$ es la serie de Maclaurin de una función f, entonces $f^{(4)}(0) = 0$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-12, llene los espacios en blanco.

1. Si $\{a_n\}$ converge a 4 y $\{b_n\}$ converge a 5, entonces $\{a_n b_n\}$ converge a __________, $\{a_n + b_n\}$ converge a __________, $\{a_n/b_n\}$ converge a __________ y $\{a_n^2\}$ converge a __________.

2. La sucesión $\{\tan^{-1} n\}$ converge a __________.

3. Para aproximar la suma de la serie alternante $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{10^k}$ a cuatro lugares decimales, sólo se necesita utilizar la suma parcial _____-ésima.

4. La suma de la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 4\left(\tfrac{2}{3}\right)^k$ es __________.

5. Si n es un entero, $1 \leq n \leq 9$, entonces $0.nnn\ldots =$ __________ y por ello como un cociente de enteros, $2.444444\ldots =$ __________.

6. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} [\tan^{-1} k - \tan^{-1}(k + 1)]$ converge a __________.

7. La serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ representa a la función $f(x)$ __________ para toda x.

8. La representación de la serie del binomio de $f(x) = (4 + x)^{1/2}$ tiene el radio de convergencia __________.

9. La serie geométrica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{x}\right)^{k-1}$ converge para los siguientes valores de x: __________.

10. Si $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ para todos los números reales x, entonces una serie de potencias para $e^{-x^3} =$ __________.

11. El intervalo de convergencia de la serie de potencias $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$ es __________.

12. Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 8 - 3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k =$ __________.

C. Ejercicios

En los problemas 1-12, determine si la serie dada converge o diverge.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2+1)^2}$ **2.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^{-k}}$ **3.** $\sum_{k=1}^{\infty} \pi^{-k}$ **4.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2.5)^k}$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}\ln k}{k^4+4}$ **6.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^{3/2}}$ **7.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\sqrt[3]{k^6-4k}}$ **8.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{\sqrt{k}}$ **10.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2)!}{(k!)^2}$ **11.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k^2+4k+6}$ **12.** $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{3k}{k+1}\right)$

En los problemas 13 y 14, encuentre la suma de la serie convergente dada.

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}+3}{(1.01)^{k-1}}$ **14.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+11k+30}$

En los problemas 15-18, encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias dada.

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3}x^k$ **16.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k}(2x-1)^k$ **17.** $\sum_{k=1}^{\infty} k!(x+5)^k$ **18.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2x)^k}{\ln k}$

19. Encuentre el radio de convergencia para la serie de potencias

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4k-1)}x^k.$$

20. Encuentre el valor de x para el cual $\sum_{k=1}^{\infty} (\cos x)^k$ converge.

21. Para $|\alpha| > 1$, encuentre la suma de la serie

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} + \cdots.$$

22. Determine si el siguiente argumento es válido. Si

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots, \qquad \text{entonces} \qquad 2S = 2 + 4 + 8 + \cdots = S - 1.$$

Al resolver $2S = S - 1$ produce $S = -1$.

En los problemas 23-26, determine por cualquier método los primeros tres términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para la función indicada.

23. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}}$ **24.** $f(x) = \frac{x}{2-x}$ **25.** $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ **26.** $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$

27. Encuentre la serie de Taylor para $f(x) = \cos x$ con centro en $a = \pi/2$.

28. Demuestre que la serie del problema 25 representa a la función demostrando que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

29. Una gran convención de matemáticos con gastos pagados aporta 3 millones a la economía de la ciudad de San Francisco. Se estima que cada residente de la ciudad gasta $\frac{2}{3}$ de su ingreso en la ciudad. De modo tal que la cantidad recaudada en la convención, $3(\frac{2}{3}) = \$2$ millones, los gastan las personas de San Francisco en la ciudad. De esta última cantidad, $\frac{2}{3}$ se gasta en la ciudad, y así en lo sucesivo. A largo plazo, ¿cuánto gastan los residentes de San Francisco en su ciudad como resultado de la convención?

30. Si se invierten P dólares a una tasa anual r de interés compuesto anualmente, el rendimiento S después de m años es $S = (1 + r)^m$. La **regla del 70**, que usan a menudo los agentes de préstamos y los analistas de acciones, dice que el tiempo que se requiere para duplicar una inversión ganando una tasa de interés r es aproximadamente $70/(100r)$ años. Por ejemplo, el dinero invertido a una tasa anual de 5% requiere aproximadamente $79/100(0.05) = 14$ años para duplicarse.

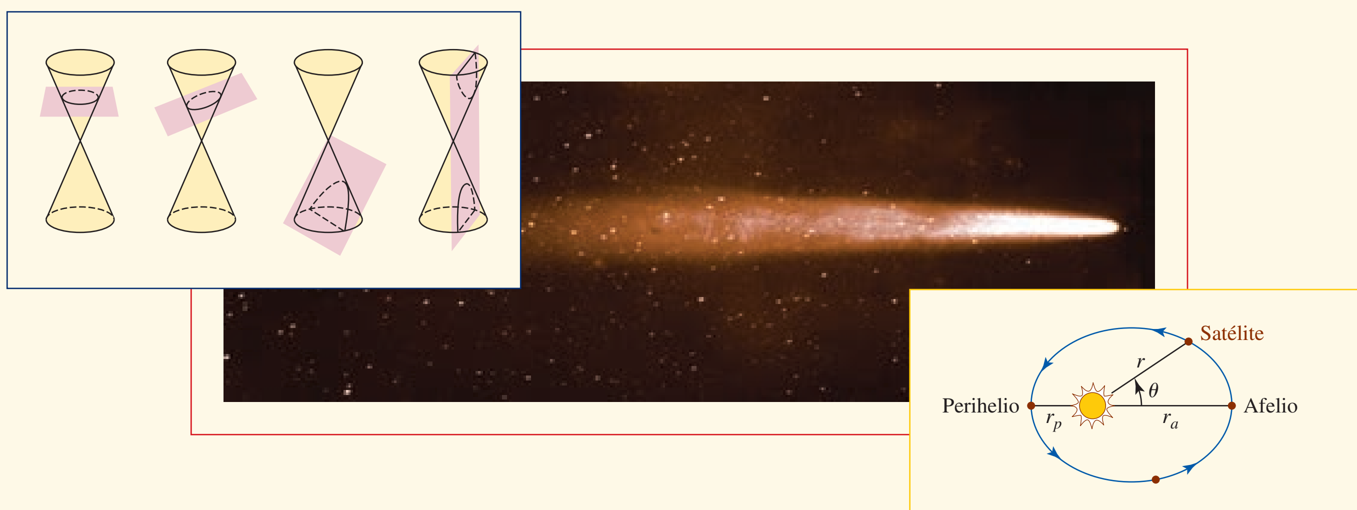
a) Muestre que el verdadero tiempo de duplicación es $\ln 2/\ln(1 + r)$.

b) Utilice la serie de Maclaurin para $\ln(1 + r)$ con el fin de deducir la regla del 70.

c) Use los primeros tres términos de la serie de Maclaurin para $\ln(1 + r)$ con el fin de aproximar esa tasa de interés para la cual la regla del 70 produce el verdadero tiempo de duplicación.

Capítulo 10

Cónicas y coordenadas polares



En este capítulo Una ecuación rectangular o cartesiana no es la única manera, y a menudo tampoco la más conveniente, de describir una curva en el plano. En este capítulo consideraremos dos medios adicionales mediante los cuales puede representarse una curva. Uno de los dos enfoques utiliza un tipo de sistema de coordenadas completamente nuevo.

Empezamos este capítulo con la revisión de la noción de una sección cónica.



Hipatia

10.1 Secciones cónicas

Introducción **Hipatia** es la primera mujer en la historia de las matemáticas sobre la que se tiene un considerable conocimiento. Nacida en 370 d.C., en Alejandría, fue una matemática y filósofa renombrada. Entre sus escritos está *Sobre las cónicas de Apolonio*, el cual popularizó el trabajo de Apolonio (200 a.C.) sobre las curvas que se obtienen al intersecar un doble cono con un plano: el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola. Vea la FIGURA 10.1.1. Al finalizar el periodo griego se desvaneció el interés en las secciones cónicas; después de Hipatia el estudio de estas curvas fue ignorado durante 1 000 años.

Cuando el plano pasa por el vértice del cono obtenemos una *cónica degenerada*: un punto, un par de rectas o una sola recta.

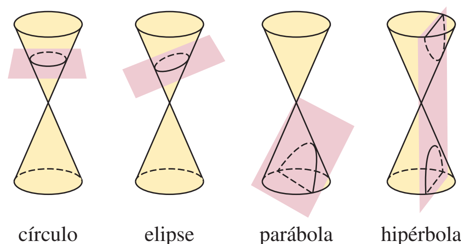


FIGURA 10.1.1 Cuatro secciones cónicas

En el siglo XVII, Galileo demostró que ante la ausencia de resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil sigue un arco parabólico. Casi al mismo tiempo Johannes Kepler propuso la hipótesis de que las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elipses con el Sol en un foco. Esto fue verificado después por Isaac Newton, utilizando los métodos del recién desarrollado cálculo. Kepler experimentó también con las propiedades de reflexión de los espejos parabólicos. Estas investigaciones aceleraron el desarrollo del telescopio reflector. Los griegos supieron poco de estas aplicaciones prácticas: habían estudiado las cónicas por su belleza y propiedades fascinantes. En lugar de utilizar un cono, veremos en esta sección cómo la parábola, la elipse y la hipérbola se definen mediante la distancia. Con el empleo de un sistema de coordenadas rectangular y la fórmula de la distancia, obtendremos ecuaciones para las cónicas. Cada una de estas ecuaciones estará en la forma de una ecuación cuadrática en las variables x y y:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{1}$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes. La **forma estándar** de un círculo con centro (h, k) y radio r,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \tag{2}$$

es un caso especial de (1). La ecuación (2) es un resultado directo de la definición de un círculo:

- Un **círculo** se define como el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano de coordenadas que se encuentran a una distancia fija r dada, denominada **radio**, a partir de un punto fijo dado (h, k), llamado **centro**.

De manera similar, utilizamos la fórmula de la distancia para obtener ecuaciones correspondientes a la parábola, la elipse y la hipérbola.

La gráfica de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es una parábola. Sin embargo, no toda parábola es la gráfica de una función de x. En general, una parábola se define de la siguiente manera:

Definición 10.1.1 Parábola

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano que son equidistantes de una línea fija L, llamada **directriz**, y un punto fijo F, llamado **foco**.

La línea a través del foco perpendicular a la directriz se denomina **eje** de la parábola. El punto de intersección de la parábola y el eje se conoce como **vértice** de la parábola.

Ecuación de una parábola Para describir una parábola analíticamente, supondremos en aras de la discusión que la directriz L es la recta horizontal $y = -p$ y que el foco es $F(0, p)$. Utilizando la definición 10.1.1 y la FIGURA 10.1.2, observamos que $d(F, P) = d(P, Q)$ es la misma que

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = y + p.$$

Al elevar al cuadrado ambos lados y simplificar se llega a

$$x^2 = 4py. \tag{3}$$

FIGURA 10.1.2 Parábola con vértice (0, 0) y foco en el eje y

Afirmamos que (3) es la **forma estándar** de la ecuación de una parábola con foco $F(0, p)$ y directriz $y = -p$. De la misma manera, si la directriz y el foco son, respectivamente, $x = -p$ y $F(p, 0)$, encontramos que la forma estándar para la ecuación de la parábola es

$$y^2 = 4px. \tag{4}$$

Aunque asumimos que $p > 0$ en la figura 10.1.2, esto, desde luego, no necesariamente es el caso. La FIGURA 10.1.3 resume la información acerca de las ecuaciones (3) y (4).

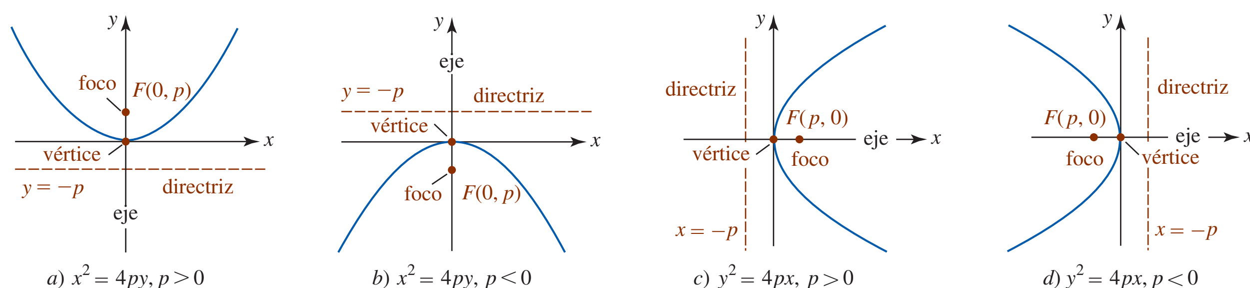


FIGURA 10.1.3 Resumen gráfico de las ecuaciones (3) y (4).

EJEMPLO 1 Foco y directriz

Determine el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es $y = x^2$.

Solución Al comparar la ecuación $y = x^2$ con (3) es factible identificar los coeficientes de y, $4p = 1$ y por ello $p = \frac{1}{4}$. En consecuencia, el foco de la parábola es $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ y su directriz es la recta horizontal $y = -\frac{1}{4}$. La familiar gráfica, junto con el foco y la directriz, se presentan en la FIGURA 10.1.4. ∎

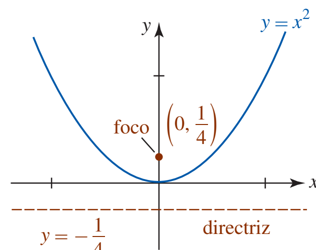


FIGURA 10.1.4 Gráfica de la ecuación del ejemplo 1

Al conocer la forma parabólica básica, lo único que necesitamos saber para dibujar una gráfica *aproximada* de la ecuación (3) o (4) es el hecho de que la gráfica pasa por su vértice (0, 0) y la dirección en la cual se abre la parábola. Para agregar más exactitud a la gráfica es conveniente utilizar el número p determinado por la ecuación en forma estándar para dibujar dos puntos adicionales. Advierta que si se elige $y = p$ en (3), entonces $x^2 = 4p^2$ implica $x = \pm 2p$. De tal modo, $(2p, p)$ y $(-2p, p)$ yacen sobre la gráfica de $x^2 = 4py$. De manera similar, la elección $x = p$ en (2) produce los puntos $(p, 2p)$ y $(p, -2p)$ sobre la gráfica de $y^2 = 4px$. El *segmento de recta* a través del foco con puntos frontera $(2p, p)$, $(-2p, p)$ para las ecuaciones con forma estándar (3), y $(p, 2p)$, $(p, -2p)$ para ecuaciones con la forma estándar (4) recibe el nombre de **cuerda focal**. Por ejemplo, en la figura 10.1.4, si elegimos $y = \frac{1}{4}$, entonces $x^2 = \frac{1}{4}$ implica $x = \pm\frac{1}{2}$. Los puntos frontera de la cuerda focal horizontal para $y = x^2$ son $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

◀ Sugerencia de graficación para las ecuaciones (3) y (4).

EJEMPLO 2 Determinación de la ecuación de una parábola

Determine la ecuación en forma estándar de la parábola con directriz $x = 2$ y foco $(-2, 0)$. Grafique.

Solución En la FIGURA 10.1.5 hemos graficado la directriz y el foco, y nos hemos dado cuenta, por su ubicación, que la ecuación que buscamos es de la forma $y^2 = 4px$. Puesto que $p = -2$, la parábola se abre hacia la izquierda y por ello

$$y^2 = 4(-2)x \qquad \text{o} \qquad y^2 = -8x.$$

Como mencionamos en la discusión precedente a este ejemplo, si sustituye $x = p = -2$ en la ecuación $y^2 = -8x$ es posible que encontremos dos puntos sobre su gráfica. De $y^2 = -8(-2) = 16$

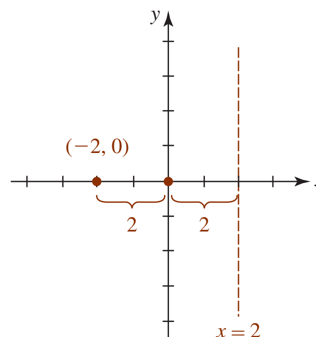


FIGURA 10.1.5 Directriz y foco del ejemplo 2

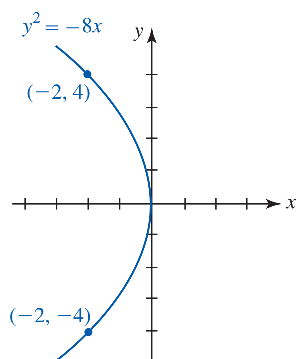


FIGURA 10.1.6 Gráfica de la parábola del ejemplo 2

se obtiene $y = \pm 4$. Como se muestra en la FIGURA 10.1.6, la gráfica pasa por (0, 0) así como a través de los puntos frontera (−2, −4) y (−2, 4) de la cuerda focal. ■

Vértice trasladado a (*h*, *k*) En general, la **forma estándar** de la ecuación de una parábola con vértice (*h*, *k*) está dada por

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \tag{5}$$

o

$$(y - k)^2 = 4p(x - h). \tag{6}$$

Las parábolas definidas por estas ecuaciones son idénticas en forma a las parábolas definidas por las ecuaciones (3) y (4) debido a que las ecuaciones (5) y (6) representan transformaciones rígidas (desplazamientos hacia arriba, abajo, a la izquierda y a la derecha) de las gráficas de (3) y (4). Por ejemplo, la parábola $(x + 1)^2 = 8(y - 5)$ tiene vértice (−1, 5). Su gráfica es la de $x^2 = 8y$ desplazada horizontalmente una unidad hacia la izquierda seguida de un desplazamiento vertical hacia arriba de cinco unidades.

En cada una de las ecuaciones, (3) y (4) o (5) y (6), la *distancia* del vértice al foco, así como la distancia del vértice a la directriz, es $|p|$.

EJEMPLO 3 Determinación completa

Encuentre el vértice, foco, eje, directriz y gráfica de la parábola

$$y^2 - 4y - 8x - 28 = 0. \tag{7}$$

Solución Con el fin de escribir la ecuación en una de las formas estándares, completamos el cuadrado en *y*:

$$y^2 - 4y + 4 = 8x + 28 + 4 \qquad \leftarrow \text{sume 4 a ambos lados}$$
$$(y - 2)^2 = 8(x + 4).$$

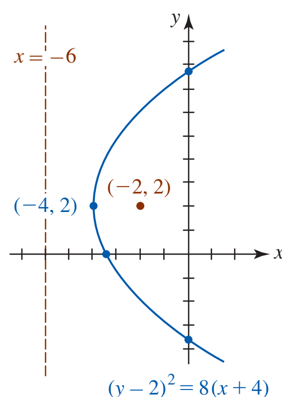


FIGURA 10.1.7 Gráfica de la ecuación del ejemplo 3

Al comparar la última ecuación con (6) concluimos que el vértice es (−4, 2) y que $4p = 8$ o $p = 2$. De acuerdo con $p = 2 > 0$, la parábola se abre hacia la derecha y el foco está a 2 unidades a la derecha del vértice en (−2, 2). La directriz es la recta vertical a 2 unidades a la izquierda del vértice $x = -6$. Una vez que sabemos que la parábola se abre hacia la derecha desde el punto (−4, 2), eso nos indica que la gráfica tiene intersecciones. Para encontrar la intersección con el eje *x* se deja $y = 0$ en (7) y se determina de inmediato que $x = -\frac{7}{2}$. La intersección con *x* es $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$. Para determinar la intersección con *y* dejamos $x = 0$ en (7) y se encuentra a partir de la fórmula cuadrática que $y = 2 \pm 4\sqrt{2}$ o $y \approx 7.66$ y $y \approx -3.66$. Las intersecciones con *y* son $(0, 2 - 4\sqrt{2})$ y $(0, 2 + 4\sqrt{2})$. Al juntar toda esta información obtenemos la gráfica de la FIGURA 10.1.7. ■

La elipse se define como sigue:

Definición 10.1.2 Elipse

Una **elipse** es un conjunto de puntos $P(x, y)$ en el plano tal que la suma de las distancias entre P y dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 se llaman **focos**. El punto medio del segmento de recta que une a F_1 y F_2 se denomina **centro** de la elipse.

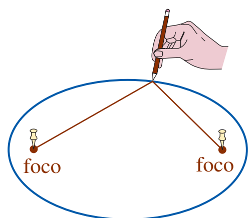


FIGURA 10.1.8 Una manera de dibujar una elipse

Si P es un punto de la elipse y $d_1 = d(F_1, P)$, $d_2 = d(F_2, P)$ son las distancias desde los focos hasta P, entonces la definición 10.1.2 afirma que

$$d_1 + d_2 = k, \tag{8}$$

donde $k > 0$ es una constante.

En un nivel práctico (8) puede utilizarse para dibujar una elipse. La FIGURA 10.1.8 muestra que si una cuerda de longitud *k* se une a un papel por medio de dos tachuelas, entonces puede trazarse una elipse insertando un lápiz contra la cuerda y moviéndolo de tal manera que la cuerda permanezca tirante.

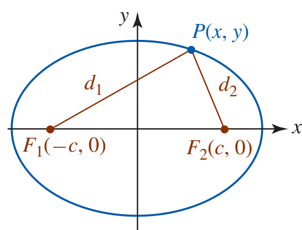


FIGURA 10.1.9 Elipse con centro (0, 0) y focos en el eje *x*

Ecuación de una elipse Por conveniencia elegiremos $k = 2a$ y pondremos los focos sobre el eje *x* con coordenadas $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$. Vea la FIGURA 10.1.9. De (8) se concluye que

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a. \tag{9}$$

Al elevar al cuadrado (9), simplificar y elevar al cuadrado otra vez obtenemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{10}$$

En la figura 10.1.9 advertimos que los puntos F_1, F_2 y P forman un triángulo. Como la suma de las longitudes de cualesquiera dos lados de un triángulo es mayor que el lado restante, tenemos $2a > 2c$ o $a > c$. En consecuencia, $a^2 - c^2 > 0$. Cuando dejamos $b^2 = a^2 - c^2$, entonces (8) se convierte en $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Al dividir esta última ecuación entre $a^2\,b^2$ se llega a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{11}$$

La ecuación (11) se denomina la **forma estándar** de la ecuación de una elipse centrada en (0, 0) con focos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, donde c está definida por $b^2 = a^2 - c^2$ y $a > b > 0$.

Si los focos se ubican sobre el eje y, entonces la repetición del análisis anterior conduce a

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{12}$$

La ecuación (12) se llama la **forma estándar** de la ecuación de una elipse centrada en (0, 0) con focos $(0, -c)$ y $(0, c)$, donde c está definida por $b^2 = a^2 - c^2$ y $a > b > 0$.

Ejes mayor y menor El **eje mayor** de una elipse es el segmento de recta que pasa por su centro, contiene a los focos y con puntos frontera sobre la elipse. Para una elipse con ecuación estándar (11), el eje mayor es horizontal mientras que para (12) el eje mayor es vertical. El segmento de recta que pasa por el centro, perpendicular al eje mayor, y con puntos frontera sobre la elipse recibe el nombre de **eje menor**. Los dos puntos frontera del eje mayor se denominan **vértices** de la elipse. Para (11) los vértices son las intersecciones con el eje x. Si dejamos $y = 0$ en (11) da $x = \pm a$. Los vértices son entonces $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. Para (12) los vértices son las intersecciones con el eje y $(0, -a)$ y $(0, a)$. Para la ecuación (11), los puntos frontera del eje menor son $(0, -b)$ y $(0, b)$; para (12) los puntos frontera son $(-b, 0)$ y $(b, 0)$. Para (11) o (12), la **longitud del eje mayor** es $a - (-a) = 2a$; la longitud del eje menor corresponde a $2b$. Puesto que $a > b$, el eje mayor de una elipse es siempre mayor que el eje menor.

Un resumen de esta información para las ecuaciones (11) y (12) aparece en la FIGURA 10.1.10.

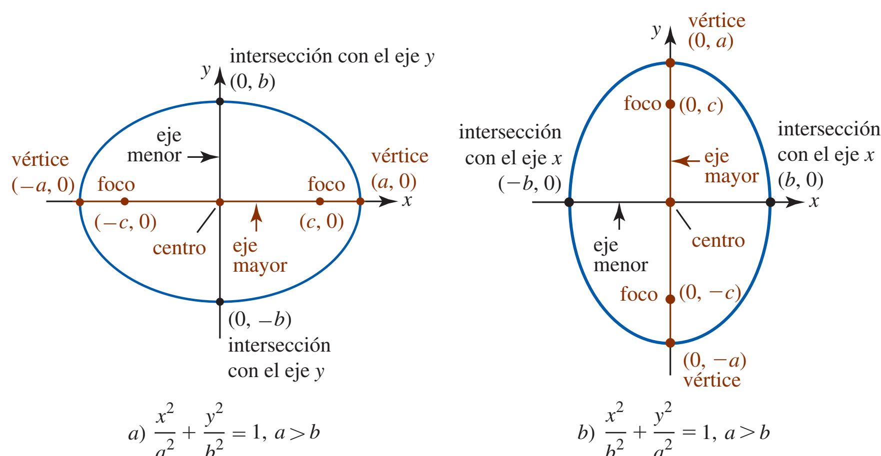


FIGURA 10.1.10 Resumen gráfico de las ecuaciones (11) y (12)

EJEMPLO 4 Vértices, focos, gráfica

Determine los vértices y focos de la elipse cuya ecuación es $9x^2 + 3y^2 = 27$. Grafique.

Solución Si divide ambos lados de la igualdad entre 27, la forma estándar de la ecuación es

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Advierta que $9 > 3$ y por ello se identifica la ecuación con (12). De $a^2 = 9$ y $b^2 = 3$ obtenemos $a = 3$ y $b = \sqrt{3}$. El eje mayor es vertical con puntos frontera o vértices $(0, -3)$ y $(0, 3)$. El eje

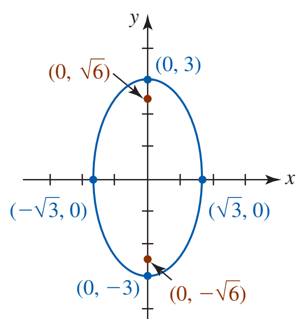


FIGURA 10.1.11 Elipse del ejemplo 4

menor es horizontal con puntos frontera $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$. Desde luego, los vértices también se encuentran en las intersecciones con el eje y y los puntos frontera del eje menor son las intersecciones con el eje x. En este caso, para encontrar los focos recurrimos a $b^2 = a^2 - c^2$ o $c^2 = a^2 - b^2$ para escribir $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Con $a = 3$, $b = \sqrt{3}$, obtenemos $c = \sqrt{6}$. En consecuencia, los focos están sobre el eje y en $(0, -\sqrt{6})$ y $(0, \sqrt{6})$. La gráfica se presenta en la FIGURA 10.1.11. ■

Centro trasladado a (*h, k*) Cuando el centro está en (h, k), la forma estándar de la ecuación de una elipse es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{13}$$

o

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1. \tag{14}$$

Las elipses definidas por estas ecuaciones son idénticas en forma a las elipses definidas por las ecuaciones (11) y (12) puesto que las ecuaciones (13) y (14) representan transformaciones rígidas de las gráficas (11) y (12). Por ejemplo, la gráfica de la elipse

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

con centro $(1, -3)$ es la gráfica de $x^2/9 + y^2/16 = 1$ desplazada horizontalmente 1 unidad hacia la derecha seguida por un desplazamiento vertical hacia abajo de 3 unidades.

No es una buena idea memorizar fórmulas para los vértices y focos de una elipse con centro (h, k). Todo es lo mismo que antes, a, b y c son positivos, $a > b$, $a > c$ y $c^2 = a^2 - b^2$. Usted puede ubicar los vértices, focos y puntos frontera del eje menor utilizando el hecho de que a es la distancia del centro al vértice, b es la distancia del centro a un punto extremo sobre el eje menor y c es la distancia del centro a un foco.

EJEMPLO 5 Determinación completa

Encuentre los vértices y focos de la elipse $4x^2 + 16y^2 - 8x - 96y + 84 = 0$. Grafique.

Solución Para escribir la ecuación dada en una de las formas estándares (13) o (14) se completa el cuadrado en x y en y. Para hacerlo, recuerde que se desean los coeficientes de los términos cuadráticos x^2 y y^2 iguales a 1. Si factoriza 4 de los términos x y 16 de los términos y, obtiene

$$4(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 - 6y + 9) = -84 + 4 \cdot 1 + 16 \cdot 9$$

o $4(x-1)^2 + 16(y-3)^2 = 64$. La última ecuación produce la forma estándar

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1. \tag{15}$$

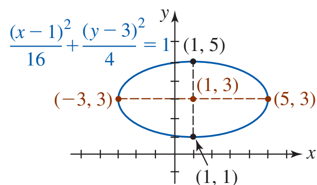


FIGURA 10.1.12 Elipse del ejemplo 5

En (15) identificamos $a^2 = 16$ o $a = 4$, $b^2 = 4$ o $b = 2$, y $c^2 = a^2 - b^2 = 12$, o $c = 2\sqrt{3}$. El eje mayor es horizontal y yace sobre la recta horizontal $y = 3$ que pasa por el centro $(1, 3)$. Corresponde al segmento de recta horizontal punteado con rojo de la FIGURA 10.1.12. Al medir $a = 4$ unidades a la izquierda y luego a la derecha del centro a lo largo de la recta $y = 3$, llegamos a los vértices $(-3, 3)$ y $(5, 3)$. Al medir $b = 2$ unidades tanto arriba como abajo de la recta vertical $x = 1$ a través del centro llegamos a los puntos frontera $(1, 1)$ y $(1, 5)$ del eje menor. El eje menor es el segmento de recta vertical punteada en negro de la figura 10.1.12. Por último, al medir $c = 2\sqrt{3}$ unidades a la izquierda y a la derecha del centro a lo largo de $y = 3$ obtenemos los focos $(1 - 2\sqrt{3}, 3)$ y $(1 + 2\sqrt{3}, 3)$. ■

La definición de una hipérbola es básicamente la misma que la definición de la elipse con sólo una excepción: la palabra *suma* se sustituye por la palabra *diferencia*.

Definición 10.1.3 Hipérbola

Una **hipérbola** es un conjunto de puntos $P(x, y)$ en el plano tal que la diferencia de las distancias entre P y los puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 reciben el nombre de **focos**. El punto medio del segmento de recta que une los puntos F_1 y F_2 se denomina **centro** de la hipérbola.

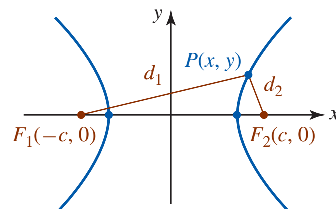


FIGURA 10.1.13 Hipérbola con centro (0, 0) y focos en el eje x

Si P es un punto sobre la hipérbola, entonces

$$|d_1 - d_2| = k, \tag{16}$$

donde $d_1 = d(F_1, P)$ y $d_2 = d(F_2, P)$. Al proceder como para la elipse, ubicamos los focos sobre el eje x en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ como se muestra en la FIGURA 10.1.13 y se elige la constante k igual a $2a$ por conveniencia algebraica. Como se ilustra en la figura, la gráfica de una hipérbola consta de dos **ramas**.

Hipérbola con centro (0, 0) Si aplica la fórmula de la distancia y el álgebra usuales a (16) se obtiene la **forma estándar** de la ecuación de una hipérbola centrada en (0, 0) con focos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$,

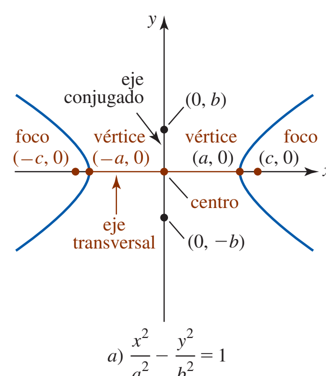
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{17}$$

Cuando los focos yacen sobre el eje x, la **forma estándar** de la ecuación de una hipérbola centrada en (0, 0) con focos $(0, -c)$ y (0, c) es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{18}$$

Tanto en (17) como en (18), c está definida por $b^2 = c^2 - a^2$ y $c > a$.

Para la hipérbola (a diferencia de la elipse) tenga en mente que en (17) y (18) no hay relación entre los tamaños relativos de a y b; en vez de eso, a^2 siempre es el denominador del *término positivo* y la ordenada al origen *siempre* tiene $\pm a$ como una coordenada.



Ejes transversal y conjugado El segmento de recta con puntos frontera sobre la hipérbola y que yace sobre la recta que pasa por los focos se denomina **eje transversal**; sus puntos frontera reciben el nombre de **vértices** de la hipérbola. Para la hipérbola descrita por la ecuación (17), el eje transversal yace sobre el eje x. Por tanto, las coordenadas de los vértices son las intersecciones con el eje x. Si deja $y = 0$ obtiene $x^2/a^2 = 1$, o $x = \pm a$. De tal manera, como se muestra en la FIGURA 10.1.14, los vértices son $(-a, 0)$ y $(a, 0)$; la **longitud del eje transversal** es $2a$. Advierta que dejando $y = 0$ en (18) obtenemos $-y^2/b^2 = 1$ o $y^2 = -b^2$, la cual no tiene soluciones reales. En consecuencia, la grafica de cualquier ecuación en esa forma no tiene intersecciones con el eje y. De cualquier modo, los números $\pm b$ son importantes. El segmento de recta que pasa por el centro de la hipérbola perpendicular al eje transversal y con puntos frontera $(0, -b)$ y $(0, b)$ se llama **eje conjugado**. De manera similar, la gráfica de una ecuación en forma estándar (18) no tiene intersecciones con el eje x. El eje conjugado (18) es el segmento de recta con puntos frontera $(-b, 0)$ y $(b, 0)$.

Esta información para las ecuaciones (17) y (18) se resume en la figura 10.1.14.

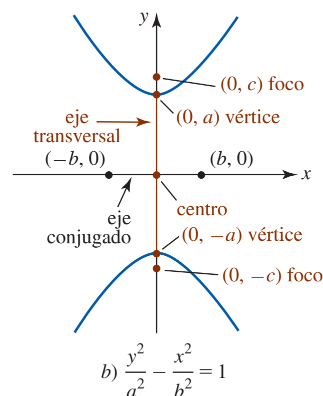


FIGURA 10.1.14 Resumen gráfico de las ecuaciones (17) y (18)

Asíntotas Toda hipérbola posee un par de asíntotas inclinadas que pasan por su centro. Estas asíntotas son indicativas del comportamiento final, y como tales son una ayuda invaluable en el trazado de la gráfica de una hipérbola. Al resolver (17) con respecto a y en términos de x obtenemos

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, $a^2/x^2 \to 0$, entonces $\sqrt{1 - a^2/x^2} \to 1$. Por tanto, para valores grandes de $|x|$, los puntos sobre la gráfica de la hipérbola son cercanos a los puntos sobre estas rectas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x. \tag{19}$$

Por un análisis similar encontramos que las asíntotas inclinadas para (18) son

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{a}{b}x. \tag{20}$$

Cada par de asíntotas se interseca en el origen, que es el centro de la hipérbola. Advierta, también, en la FIGURA 10.1.15*a*) que las asíntotas son simplemente las *diagonales extendidas* de un rectángulo de ancho $2a$ (la longitud del eje transversal) y altura $2b$ (la longitud del eje conjugado) en la figura 10.1.15*b*) las asíntotas son las diagonales extendidas de un rectángulo de ancho $2b$ y altura $2a$.

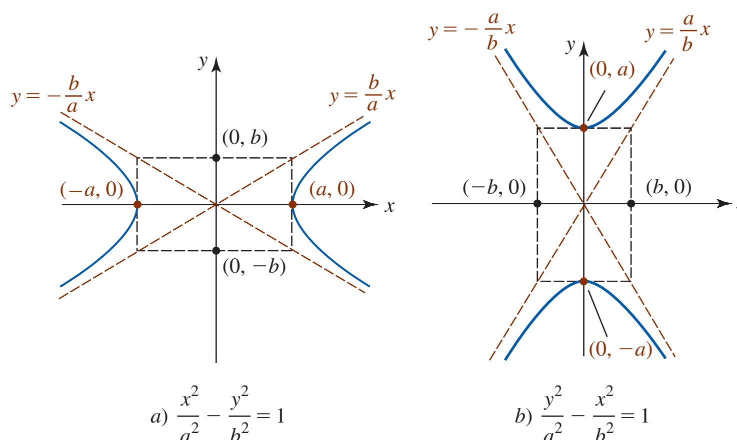


FIGURA 10.1.15 Hipérbolas (17) y (18) con asíntotas inclinadas

Recomendamos al lector que *no* memorice las ecuaciones (19) y (20). Hay un método sencillo para obtener las asíntotas de una hipérbola. Por ejemplo, puesto que $y = \pm\frac{b}{a}x$ es equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \quad \text{o} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{21}$$

Note que la última ecuación en (21) se factoriza como la diferencia de dos cuadrados:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Éste es un dispositivo mnemónico o de memoria. No tiene importancia geométrica.

Al igualar a cero cada factor y resolver para y obtenemos una ecuación de una asíntota. La ecuación (21) es simplemente el lado izquierdo de la forma estándar de la ecuación de una hipérbola dada en (17). De manera similar, para obtener la asíntota de (18) sólo se sustituye 1 por 0 en la forma estándar, se factoriza $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 0$, y se resuelve para y.

EJEMPLO 6 Vértices, focos, asíntotas, gráficas

Determine los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 25y^2 = 225$. Grafique.

Solución Primero escribimos la ecuación en forma estándar al dividir ambos lados de la igualdad entre 225:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1. \tag{22}$$

A partir de esta ecuación se advierte que $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$, y por ello $a = 5$ y $b = 3$. Por tanto, los vértices son $(-5, 0)$ y $(5, 0)$. Puesto que $b^2 = c^2 - a^2$ implica $c^2 = a^2 + b^2$, tenemos $c^2 = 34$ y por ello los focos son $(-\sqrt{34}, 0)$ y $(\sqrt{34}, 0)$. Para determinar las asíntotas inclinadas se recurre a la forma estándar (22) con 1 sustituido por 0:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 0 \quad \text{se factoriza como} \quad \left(\frac{x}{5} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{5} + \frac{y}{3}\right) = 0.$$

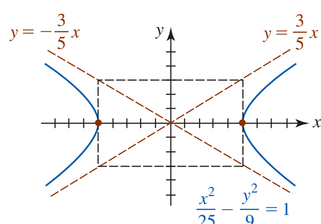


FIGURA 10.1.16 Hipérbola del ejemplo 6

Al igualar a 0 cada factor y resolver para y obtenemos las asíntotas $y = \pm 3x/5$. Trazamos los vértices y la gráfica de las dos rectas que pasan por el origen. Ambas ramas de la hipérbola deben volverse arbitrariamente cercanas a las asíntotas cuando $x \to \pm\infty$. Vea la FIGURA 10.1.16. ■

Centro trasladado a (h, k) Cuando el centro de la hipérbola es (h, k), los análogos de la **forma estándar** de las ecuaciones (17) y (18) son, a su vez,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{23}$$

y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1. \tag{24}$$

Como en (17) y (18), los números a^2, b^2 y c^2 están relacionados mediante $b^2 = c^2 - a^2$.

El lector puede localizar los vértices y focos utilizando el hecho de que a es la distancia del centro a un vértice y c es la distancia del centro a un foco. Es posible obtener las asíntotas inclinadas de (23) factorizando

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0 \qquad \text{como} \qquad \left(\frac{x-h}{a} - \frac{y-k}{b}\right)\left(\frac{x-h}{a} + \frac{y-k}{b}\right) = 0.$$

De manera similar, las asíntotas de (24) se obtienen al factorizar $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 0$, al igualar cada factor a cero y resolver para y en términos de x. Como una verificación de su trabajo, recuerde que (h, k) debe ser un punto que yace en cada asíntota.

EJEMPLO 7 Determinación completa

Encuentre el centro, vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$. Grafique.

Solución Antes de completar el cuadrado en x y y, factorizamos el 4 de los dos términos en x y -1 de los dos términos en y de manera que el coeficiente en cada expresión es 1. Entonces tenemos

$$4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) = 4 + 4\cdot 1 + (-1)\cdot 4$$
$$4(x-1)^2 - (y+2)^2 = 4$$
$$\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Ahora vemos que el centro es $(1, -2)$. Puesto que el término en la forma estándar que implica a x tiene el coeficiente positivo, el eje transversal es horizontal a lo largo de la recta $y = -2$ e identificamos $a = 1$ y $b = 2$. Los vértices están a una unidad a la izquierda y a la derecha del centro en $(0, -2)$ y $(2, -2)$, respectivamente. De $b^2 = c^2 - a^2$ resulta $c^2 = a^2 + b^2 = 5$, por lo que $c = \sqrt{5}$. En consecuencia, los focos están a $\sqrt{5}$ unidades a la izquierda y a la derecha del centro $(1, -2)$ en $(1 - \sqrt{5}, -2)$ y $(1 + \sqrt{5}, -2)$.

Para encontrar las asíntotas, resolvemos

$$\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} = 0 \qquad \text{o} \qquad \left(x - 1 - \frac{y+2}{2}\right)\left(x - 1 + \frac{y+2}{2}\right) = 0$$

para y. De $y + 2 = \pm 2(x-1)$ encontramos que las asíntotas son $y = -2x$ y $y = 2x - 4$. Observe que al sustituir $x = 1$, ambas ecuaciones producen $y = -2$, lo que muestra que ambas rectas pasan por el centro. Ahora ubicamos el centro, trazamos los vértices y graficamos las asíntotas. Como se muestra en la FIGURA 10.1.17, la gráfica de la hipérbola pasa por los vértices y se vuelve cada vez más cercana a las asíntotas conforme $x \to \pm\infty$. ■

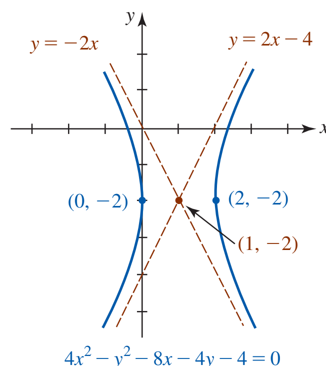


FIGURA 10.1.17 Hipérbola del ejemplo 7

Excentricidad

A cada sección cónica se asocia un número e llamado **excentricidad**.

Definición 10.1.4 Excentricidad

La **excentricidad** de una elipse y una hipérbola es

$$e = \frac{c}{a}.$$

Desde luego, debe tener en mente que para una elipse $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ y para una hipérbola $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. A partir de las desigualdades $0 < \sqrt{a^2 - b^2} < a$ y $0 < a < \sqrt{a^2 + b^2}$, observamos, a su vez, que

- la excentricidad de una elipse satisface $0 < e < 1$, y
- la excentricidad de una hipérbola satisface $e > 1$.

La excentricidad de una parábola se discutirá en la sección 10.7.

EJEMPLO 8 Excentricidad

Determine la excentricidad de

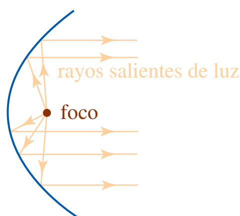
a) la elipse en el ejemplo 5, ***b***) la hipérbola en el ejemplo 7.

Solución

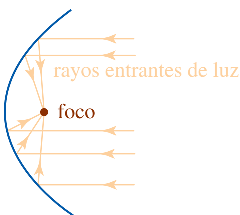
a) En la solución de ejemplo 5 encontramos que $a = 4$ y $c = 2\sqrt{3}$. En consecuencia, la excentricidad de una elipse es $e = (2\sqrt{3})/4 = \sqrt{3}/2 \approx 0.87$.

b) En el ejemplo 7 encontramos que $a = 1$ y $c = \sqrt{5}$. Por consiguiente, la excentricidad de la hipérbola es $e = \sqrt{5}/1 \approx 2.23$. ■

La excentricidad es un indicador de la forma de una elipse o una hipérbola. Si $e \approx 0$, entonces $c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 0$ y en consecuencia $a \approx b$. Esto significa que la elipse es casi circular. Por otro lado, si $e \approx 1$, entonces $c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx a$ y por ello $b \approx 0$. Esto quiere decir que cada foco es cercano a un vértice y debido a ello la elipse es elongada. Vea la FIGURA 10.1.18. Las formas de una hipérbola en los dos casos extremos $e \approx 1$ y e mucho mayor que 1 se ilustran en la FIGURA 10.1.19.

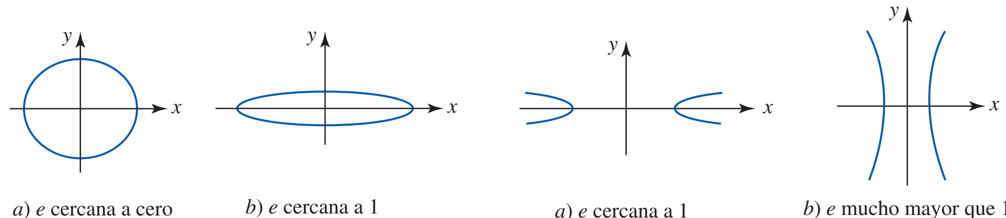


a) Los rayos emitidos en el foco se reflejan como rayos paralelos



b) Los rayos entrantes se reflejan en el foco

FIGURA 10.1.20 Superficie reflectora parabólica



a) *e* cercana a cero *b*) *e* cercana a 1

FIGURA 10.1.18 Efecto de excentricidad en la forma de una elipse

a) *e* cercana a 1 *b*) *e* mucho mayor que 1

FIGURA 10.1.19 Efecto de excentricidad sobre la forma de una hipérbola

Aplicaciones La parábola tiene muchas propiedades que la hacen apropiada en ciertas aplicaciones. Las superficies reflectoras se diseñan para aprovechar la propiedad de reflexión de las parábolas. Estas superficies, llamadas **paraboloides**, son tridimensionales y se forman rotando una parábola alrededor de su eje. Como se ilustra en la FIGURA 10.1.20, los rayos de luz (o señales electrónicas) provenientes de una fuente puntual ubicada en el foco de una superficie reflectora parabólica se reflejarán a lo largo de líneas paralelas al eje. Ésta es la idea detrás del diseño de reflectores de búsqueda, algunas luces de destellos y los platos satelitales de ubicación. En sentido inverso, si los rayos de luz entrantes son paralelos al eje de una parábola, se reflejarán en la superficie a lo largo de líneas que pasan por el foco. Los haces de luz de un objeto distante tal como una galaxia son esencialmente paralelos, y por eso cuando estos haces entran a un telescopio reflector son reflejados por un espejo parabólico hacia el foco, donde suele ubicarse una cámara para capturar la imagen a lo largo del tiempo. Un disco parabólico satelital doméstico opera bajo el mismo principio que el telescopio reflector; la señal digital de un satélite de televisión es capturada en el foco del disco por un receptor.

Las elipses tienen una propiedad de reflexión análoga a la parábola. Es posible demostrar que si una fuente luminosa o sonora se ubica en uno de los focos de una elipse, entonces todos los rayos u ondas se reflejarán desde la elipse hacia el otro foco. Vea la FIGURA 10.1.21. Por ejemplo, si un techo es elíptico con dos focos sobre (o cerca) del piso, pero con una considerable distancia entre ellos, entonces cualquier susurro en uno de los focos se escuchará en el otro. Algunas



Disco de satélite de TV

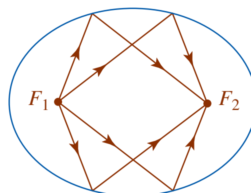


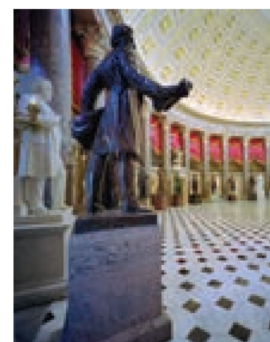
FIGURA 10.1.21 Propiedad de reflexión de una elipse



Telescopio reflector de 200 pulg en Monte Palomar

famosas “galerías de los susurros” son el Statuary Hall en el Capitolio en Washington, D.C., el Mormon Tabernacle en Salt Lake City y la Catedral de San Pablo en Londres.

Mediante su ley de la gravitación universal, Isaac Newton fue el primero en demostrar la primera ley del movimiento planetario de Kepler. La órbita de cada planeta alrededor del Sol es una elipse con el Sol en uno de los focos.



Statuary Hall en Washington, D.C.

EJEMPLO 9 Excentricidad de la órbita terrestre

La distancia del perihelio de la Tierra (la distancia mínima entre la Tierra y el Sol) es aproximadamente de 9.16×10^7 mi, y su distancia del afelio (la distancia más grande entre la Tierra y el Sol) es casi de 9.46×10^7 mi. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita elíptica de la Tierra?

Solución Asumimos que la órbita de la Tierra es como se ilustra en la FIGURA 10.1.22. De acuerdo con la figura advertimos que

$$a - c = 9.16 \times 10^7$$
$$a + c = 9.46 \times 10^7.$$

La solución de este sistema de ecuaciones produce $a = 9.31 \times 10^7$ y $c = 0.15 \times 10^7$. De tal modo, la excentricidad $e = c/a$ es

$$e = \frac{0.15 \times 10^7}{9.31 \times 10^7} \approx 0.016. \quad ■$$

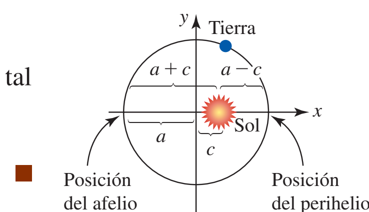


FIGURA 10.1.22 Interpretación gráfica de datos en el ejemplo 9

Las órbitas de siete de los planetas tienen excentricidades menores que 0.1 y, en consecuencia, las órbitas no son muy alejadas de la circular. Mercurio es una excepción. Muchos de los asteroides y cometas tienen órbitas altamente excéntricas. La órbita del asteroide Hidalgo es una de las más excéntricas, con $e = 0.66$. Otro notable caso es la órbita del cometa Halley. Vea el problema 79 en los ejercicios 10.1.

La hipérbola tiene varias aplicaciones importantes que implican técnicas de sonido. En particular, varios sistemas de navegación utilizan a las hipérbolas de la siguiente manera: dos transmisores de radio fijos a una distancia conocida uno del otro transmiten señales sincronizadas. La diferencia en los tiempos de recepción por parte de un navegante determina la diferencia $2a$ de las distancias del navegante a los dos transmisores. Esta información ubica al navegante en algún lugar sobre la hipérbola con focos en los transmisores y fija la diferencia en distancias desde los focos en una cantidad igual a $2a$. Al utilizar dos conjuntos de señales obtenidas de una estación maestra apareada con cada una de dos estaciones secundarias, el sistema de navegación de largo alcance LORAN ubica a un barco o a un avión en la intersección de las dos hipérbolas. Vea la FIGURA 10.1.23.

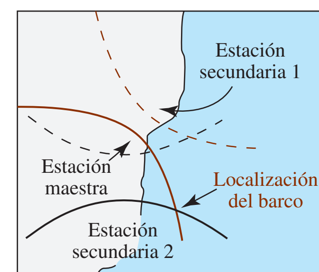
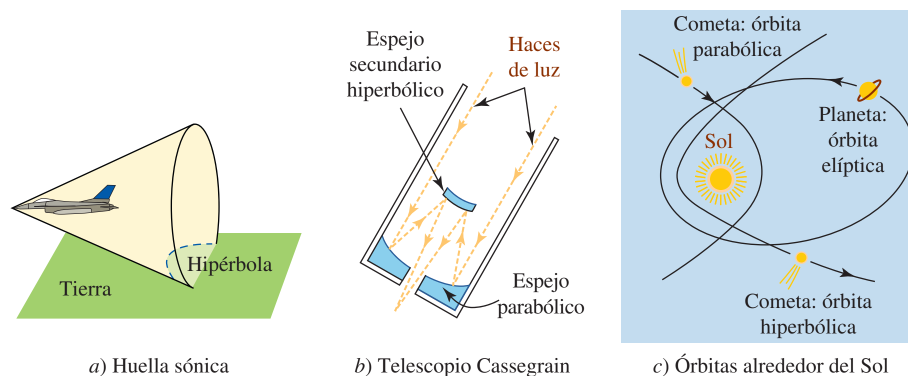


FIGURA 10.1.23 La idea detrás de LORAN

Hay muchas otras aplicaciones de la hipérbola. Como se muestra en la FIGURA 10.1.24*a*), un avión que vuela a una velocidad supersónica paralela al nivel del suelo deja una “huella” sónica hiperbólica sobre el suelo. Al igual que la parábola y la elipse, una hipérbola también posee una propiedad reflectora. El telescopio reflector Cassegrain presentado en la figura 10.1.24*b*) utiliza un espejo secundario hiperbólico convexo para reflejar un rayo de luz de regreso a través de un hoyo en un ocular (o cámara) detrás del espejo primario parabólico. Esta construcción del teles-



a) Huella sónica *b*) Telescopio Cassegrain *c*) Órbitas alrededor del Sol

FIGURA 10.1.24 Aplicaciones de hipérbolas

copio aprovecha el hecho de que un rayo de luz dirigido a lo largo de una línea a través de uno de los focos de un espejo hiperbólico se reflejará sobre una línea que pasa por el otro foco.

Las órbitas de objetos en el Universo pueden ser parabólicas, elípticas o hiperbólicas. Cuando un objeto pasa cerca del Sol (o un planeta), no necesariamente es capturado por el campo gravitacional del cuerpo más grande. Bajo ciertas condiciones, el objeto toma una cantidad fraccionaria de la energía orbital de este cuerpo mucho mayor y la órbita de "honda" resultante del objeto cuando pasa por el Sol es hiperbólica. Vea la figura 10.1.24*c*).

Ejercicios 10.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-29.

Fundamentos

En los problemas 1-14, encuentre el vértice, el foco, la directriz y el eje de la parábola dada. Grafique la parábola.

1. $y^2 = 4x$
2. $y^2 = \frac{7}{2}x$
3. $x^2 = -16y$
4. $x^2 = \frac{1}{10}y$
5. $(y - 1)^2 = 16x$
6. $(y + 3)^2 = -8(x + 2)$
7. $(x + 5)^2 = -4(y + 1)$
8. $(x - 2)^2 + y = 0$
9. $y^2 + 12y - 4x + 16 = 0$
10. $x^2 + 6x + y + 11 = 0$
11. $x^2 + 5x - \frac{1}{4}y + 6 = 0$
12. $x^2 - 2x - 4y + 17 = 0$
13. $y^2 - 8y + 2x + 10 = 0$
14. $y^2 - 4y - 4x + 3 = 0$

En los problemas 15-22, encuentre una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

15. Foco, (0, 7), directriz $y = -7$
16. Foco $(-4, 0)$, directriz $x = 4$
17. Foco $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, vértice (0, 0)
18. Foco $(0, -10)$, vértice (0, 0)
19. Foco $(1, -7)$, directriz $x = -5$
20. Foco (2, 3), directriz $y = -3$
21. Vértice (0, 0), que pasa por (–2, 8), eje a lo largo del eje y
22. Vértice (0, 0), que pasa por $\left(1, \frac{1}{4}\right)$, eje a lo largo del eje x

En los problema 23 y 24, encuentre las intersecciones con los ejes x y y de la parábola dada.

23. $(y + 4)^2 = 4(x + 1)$
24. $(x - 1)^2 = -2(y - 1)$

En los problemas 25-38, encuentre el centro, foco, vértices, puntos frontera del eje menor y la excentricidad de la elipse dada. Grafique la elipse.

25. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$
26. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
27. $9x^2 + 16y^2 = 144$
28. $2x^2 + y^2 = 4$
29. $\frac{(x-1)^2}{49} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$
30. $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$
31. $(x + 5)^2 + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$
32. $\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y+4)^2}{81} = 1$
33. $4x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4$
34. $36(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 72$
35. $25x^2 + 9y^2 - 100x + 18y - 116 = 0$
36. $9x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 31 = 0$
37. $x^2 + 3y^2 + 18y + 18 = 0$
38. $12x^2 + 4y^2 - 24x - 4y + 1 = 0$

En los problemas 39-48, encuentre una ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones dadas.

39. Vértices $(\pm 5, 0)$, focos $(\pm 3, 0)$
40. Vértices $(\pm 9, 0)$, focos $(\pm 2, 0)$
41. Vértices (–3, –3), (5, –3), puntos frontera del eje menor (1, –1), (1, –5)
42. Vértice (1, –6), (1, 2), puntos frontera del eje menor (–2, –2), (4,–2)
43. Focos $\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$, longitud del eje menor 6
44. Focos $\left(0, \pm\sqrt{5}\right)$, longitud del eje menor 16
45. Focos $(0, \pm 3)$, que pasa por $\left(-1, 2\sqrt{2}\right)$
46. Vértices $(\pm 5, 0)$, que pasa por $\left(\sqrt{5}, 4\right)$
47. Centro (1, 3), un foco (1, 0), un vértice (1, –1)
48. Puntos frontera del eje mayor (2, 4), (13, 4), un foco (4, 4)

En los problemas 49-62, encuentre el centro, focos, vértices, asíntotas y excentricidad de la hipérbola dada. Grafique la hipérbola.

49. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$
50. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$
51. $y^2 - 5x^2 = 20$
52. $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$
53. $\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{49} = 1$
54. $\frac{(x+2)^2}{10} - \frac{(y+4)^2}{25} = 1$
55. $\frac{(y-4)^2}{36} - x^2 = 1$
56. $\frac{\left(y - \frac{1}{4}\right)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$
57. $25(x - 3)^2 - 5(y - 1)^2 = 125$
58. $10(x + 1)^2 - 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 100$
59. $5x^2 - 6y^2 - 20x + 12y - 16 = 0$
60. $16x^2 - 25y^2 - 256x - 150y + 399 = 0$
61. $4x^2 - y^2 - 8x + 6y - 4 = 0$
62. $2y^2 - 9x^2 - 18x + 20y + 5 = 0$

En los problemas 63-70, encuentre una ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas.

63. Focos $(0, \pm 4)$, un vértice $(0, -2)$

64. Focos $(0, \pm 3)$, un vértice $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

65. Centro $(1, -3)$, un foco $(1, -6)$, un vértice $(1, -5)$

66. Vértices $(2, 5)$, $(2, -1)$, un foco $(2, 7)$

67. Centro $(-1, 3)$, un vértice $(1, -4)$ que pasa por $\left(-5, 3 + \sqrt{5}\right)$

68. Centro $(3, -5)$, un vértice $(3, -2)$ que pasa por $(1, -1)$

69. Centro (24), un vértice (25), una asíntota $2y - x - 6 = 0$

70. Excentricidad $\sqrt{10}$, puntos frontera del eje conjugado $(-5, 4)$, $(-5, 10)$

Aplicaciones

71. Un gran reflector se diseña de manera que una sección transversal a través de su eje es una parábola y la fuente luminosa se encuentra en el foco. Determine la posición de la fuente luminosa si el reflector mide 4 pies de lado a lado en la abertura y 2 pies de profundidad.

72. Un telescopio reflector tiene un espejo parabólico que mide 20 pies de lado a lado en la parte superior y 4 pies de profundidad en el centro. ¿Dónde debe ubicarse el ocular?

73. Suponga que dos torres de un puente de suspensión están a 350 pies de distancia y que el vértice del cable parabólico es tangente al punto medio de la carretera entre las torres. Si el cable se encuentra a 1 pie por arriba de la carretera en un punto a 20 pies de los vértices, encuentre la altura de las torres sobre la carretera.

74. Dos torres de 75 pies de un puente de suspensión con un cable parabólico están a 250 pies de distancia. El vértice de la parábola es tangente al punto medio de la carretera entre las torres. Determine la altura del cable sobre la carretera en cualquier punto a 50 pies de una de las torres.

75. Suponga que el brote de agua desde el extremo de un tubo horizontal sigue un arco parabólico con vértice en el extremo del tubo. El tubo está 20 metros por arriba del suelo. En un punto a 2 metros por debajo del extremo del tubo, la distancia horizontal desde el agua hasta una línea vertical que pasa por el extremo del tubo es de 4 m. Vea la FIGURA 10.1.25. ¿En qué punto el agua golpea el suelo?

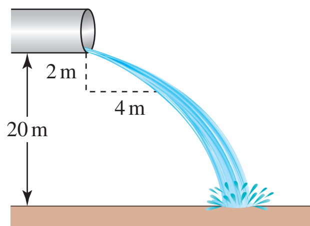


FIGURA 10.1.25 Tubo del problema 75

76. Un lanzador de dardos arroja uno a 5 pies por arriba del suelo. El dardo se lanza horizontalmente y sigue una trayectoria parabólica. Pega en el suelo a $10\sqrt{10}$ pies desde el lanzador de dardos. A la distancia de 10 pies desde el lanzador de dardos, ¿a qué altura debe estar el blanco para que el dardo impacte en él?

77. La órbita del planeta Mercurio es una elipse con el Sol en uno de sus focos. La longitud del eje mayor de esta órbita es de 72 millones de millas y la longitud del eje menor corresponde a 70.4 millones de millas. ¿Cuál es la distancia mínima (perihelio) entre Mercurio y el Sol? ¿Cuál es la distancia más grande (afelio)?

78. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita de Mercurio en el problema 77?

79. La órbita del cometa Halley es una elipse cuyo eje mayor mide 3.34×10^9 millas de largo y cuyo eje menor es de 8.5×10^8 millas de largo. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita del cometa?

80. Un satélite orbita la Tierra en una trayectoria parabólica con el centro de la Tierra en un foco. Tiene una altitud mínima de 200 millas y una altitud máxima de 1 000 millas sobre la superficie de la Tierra. Si el radio terrestre es de 4 000 mi, ¿cuál es una ecuación de la órbita del satélite?

81. Un arco semielíptico tiene un eje mayor vertical. La base del arco es de 10 pies de lado a lado y la parte más alta del arco mide 15 pies. Encuentre la altura del arco sobre el punto en la base del arco a 3 pies del centro.

82. Suponga que un cuarto se construye sobre una base elíptica plana rotando una semielipse 180° alrededor de su eje mayor. Después, por la propiedad de reflexión de la elipse, cualquier susurro en un foco se escuchará claramente en el otro foco. Si la altura de la sala es de 16 pies y la longitud corresponde a 40 pies, encuentre la ubicación del susurro y de los puestos de escucha.

Piense en ello

83. La gráfica de la elipse $x^2/4 + (y - 1)^2/9 = 1$ se desplaza 4 unidades a la derecha. ¿Cuáles son el centro, foco, vértices y puntos frontera del eje menor de la gráfica desplazada?

84. La gráfica de la elipse $(x - 1)^2/9 + (y - 4)^2 = 1$ se desplaza 5 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba. ¿Cuáles son el centro, foco, vértices y puntos frontera del eje menor de la gráfica desplazada?

85. Las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

se dice que son **conjugadas** entre sí.

a) Encuentre la ecuación de la hipérbola que es la conjugada de

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

b) Analice cómo se relacionan las gráficas de las hipérbolas conjugadas.

86. Una **hipérbola rectangular** es aquella para la cual las asíntotas son perpendiculares.

a) Demuestre que $y^2 - x^2 + 5y + 3x = 1$ es una hipérbola rectangular.

b) ¿Cuáles de las hipérbolas dadas en los problemas 49-62 son rectangulares?

87. Puede demostrarse que un rayo luminoso que emana de un foco de una hipérbola será reflejado a lo largo de la

línea desde el foco opuesto. Vea la FIGURA 10.1.26. Un rayo luminoso desde el foco izquierdo de la hipérbola $x^2/16 - y^2/20 = 1$ incide en la hipérbola $(-6, -5)$. Determine una ecuación del rayo reflejado.

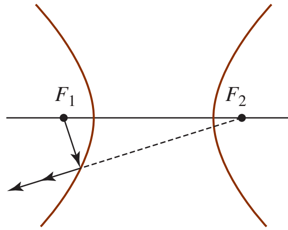


FIGURA 10.1.26 Propiedad reflectora del problema 87

88. Un **óvalo** es una aproximación a una elipse consistente en arcos que surgen de pares de círculos de diferentes radios ubicados simétricamente, siendo cada círculo pequeño tangente a un círculo grande en dos puntos de transición como se indica en la FIGURA 10.1.27. Los arquitectos en los periodos del Renacimiento y barroco usaban óvalos porque son más simples de construir que las elipses. En este problema, considere que los círculos pequeños están centrados en $(\pm a, 0)$, $a > 0$, con radio r, y deje que los círculos grandes se centren en $(0, \pm b)$, $b > 0$, con radio R. Además, considere que $(\pm A, 0)$, $A > 0$, y $(0, \pm B)$, $B > 0$, son los puntos de intersección del óvalo con los ejes x y y.

a) Exprese R en términos de a, b y r.
b) Demuestre que $A > B$. Esto muestra que el "eje mayor" del óvalo está siempre alineado con los centros de los círculos pequeños, y que el "eje menor" del óvalo está siempre en línea con los centros de los círculos grandes. [*Sugerencia*: Demuestre que $A - B = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$.]

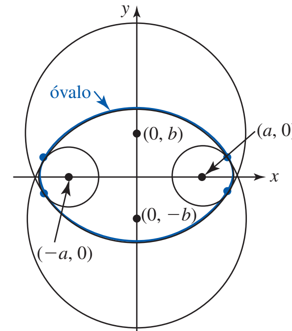


FIGURA 10.1.27 Óvalo en el problema 88

10.2 Ecuaciones paramétricas

Introducción Una ecuación rectangular o cartesiana no es la única manera, y a menudo la más conveniente, de describir una curva en el plano de coordenadas. En esta sección consideraremos una manera diferente de representar una curva que es importante en muchas aplicaciones del cálculo.

Movimiento curvilíneo Empecemos con un ejemplo. El movimiento de una partícula a lo largo de una curva, en contraste con una línea recta, se denomina **movimiento curvilíneo**. Si supone que una pelota de golf golpea sobre el suelo en forma perfectamente recta (sin efecto de gancho o de rebanada) y que su trayectoria permanece en un plano de coordenadas, entonces su movimiento está gobernado por el hecho de que su aceleración en las direcciones x y y satisface

$$a_x = 0, \qquad a_y = -g, \tag{1}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y $a_x = d^2x/dt^2$, $a_y = d^2y/dt^2$. En $t = 0$ tomamos $x = 0$, $y = 0$, y las componentes x y y de la velocidad inicial v_0 son

$$v_0 \cos\theta_0 \qquad \text{y} \qquad v_0 \operatorname{sen}\theta_0, \tag{2}$$

respectivamente. Vea la FIGURA 10.2.1. Al tomar dos antiderivadas de cada ecuación en (1), vemos de las condiciones iniciales de (2) que las coordenadas x y y de la pelota de golf en el tiempo t están dadas por

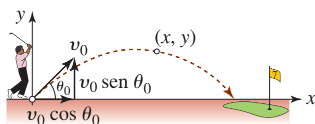


FIGURA 10.2.1 ¡Tiro!

$$x = (v_0 \cos\theta_0)t, \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t, \tag{3}$$

donde θ_0 es el ángulo de lanzamiento, v_0 es la velocidad inicial y $g = 32$ pies/s^2. Estas ecuaciones, las cuales dan la posición de la pelota de golf en el plano de coordenadas en el tiempo t, se llaman **ecuaciones paramétricas**. La tercera variable t en (3) se denomina **parámetro** y está restringido a cierto intervalo I; en este caso, I se define mediante $0 \le t \le T$, donde $t = 0$ produce el origen $(0, 0)$ y $t = T$ es el tiempo en el que la pelota golpea el suelo.

La idea en (3), esto es, representar a x y y en un par ordenado (x, y) mediante funciones de una tercera variable t, se usa para *definir* una curva.

Definición 10.2.1 Curva plana

Si f y g son funciones continuas definidas sobre un intervalo común I, entonces $x = f(t)$, $y = g(t)$ se llaman **ecuaciones paramétricas** y t recibe el nombre de **parámetro**. El conjunto C de pares ordenados $(f(t), g(t))$ cuando t varía sobre I se denomina una **curva plana**.

Es una práctica común referirse al conjunto de ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, para t en I, como una **parametrización** de C. De aquí en adelante, haremos referencia a una curva plana C como una **curva paramétrica** o como una **curva parametrizada**. La **gráfica** de una curva paramétrica C es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano de coordenadas correspondientes al par ordenado $(f(t), g(t))$. Por simplicidad, no se establecerá la distinción entre una *curva paramétrica* y una *gráfica de una curva*.

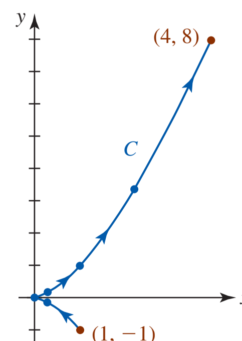


FIGURA 10.2.2 Curva del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Curva paramétrica

Grafique la curva C que tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad -1 \le t \le 2.$$

Solución Como se indica en la tabla siguiente, para cualquier elección de t en el intervalo $[-1, 2]$, se obtiene un solo par ordenado (x, y). Al conectar los puntos con una curva, obtenemos la gráfica de la FIGURA 10.2.2.

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4
y	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	2

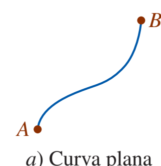
■

En el ejemplo 1, si piensa en términos de movimiento y en t como el tiempo, entonces cuando t aumenta de -1 a 2, un punto P definido como (t^2, t^3) empieza desde $(1, -1)$, avanza hacia arriba en la rama inferior de la curva hacia el origen $(0, 0)$, pasa a la rama superior y finalmente se detiene en $(4, 8)$. En general, un parámetro t no necesita tener relación con el tiempo. Cuando se grafican puntos correspondientes a *valores crecientes* del parámetro, se traza una curva C mediante $(f(t), g(t))$ en una cierta *dirección* indicada por las flechas sobre la curva en la figura 10.2.2. La dirección se denomina la **orientación** de la curva C.

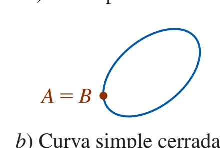
Cuando el intervalo I sobre el cual f y g se definen es un intervalo cerrado $[a, b]$, afirmamos que $(f(a), g(a))$ es el **punto inicial** de la curva C y que $(f(b), g(b))$ es su **punto final**. En el ejemplo 1, $(1, -1)$ y $(4, 8)$ son los puntos inicial y final de C, respectivamente. Si el punto final es el mismo que el punto inicial, esto es,

$$(f(a), g(a)) = (f(b), g(b)),$$

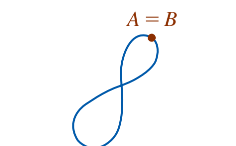
entonces C es una **curva cerrada**. Si C es cerrada pero no se cruza a sí misma, entonces se denomina **curva cerrada simple**. En la FIGURA 10.2.3, A y B representan los puntos inicial y final, respectivamente.



a) Curva plana



b) Curva simple cerrada



c) Cerrada pero no simple

FIGURA 10.2.3 Algunas curvas planas

El siguiente ejemplo ilustra una curva cerrada simple.

EJEMPLO 2 Una parametrización de un círculo

Encuentre una parametrización del círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

Solución El círculo tiene centro en el origen y radio $a > 0$. Si t representa el ángulo central, esto es, un ángulo con vértice en el origen y lado inicial que coincide con el eje x positivo, entonces como se muestra en la FIGURA 10.2.4 las ecuaciones

$$x = a\cos t, \quad y = a\,\text{sen}\, t, \quad 0 \le t \le 2\pi \tag{4}$$

proporcionan cada punto P sobre el círculo. Por ejemplo, en $t = \pi/2$ obtenemos $x = 0$ y $y = a$, en otras palabras, el punto es $(0, a)$. El punto inicial corresponde a $t = 0$ y es $(a, 0)$; el punto final corresponde a $t = 2\pi$ y es también $(a, 0)$. Puesto que los puntos inicial y final son los mismos,

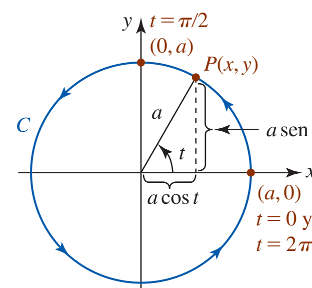


FIGURA 10.2.4 Círculo del ejemplo 2

esto demuestra lo que es evidente: la curva C definida por las ecuaciones paramétricas (4) es una curva cerrada. Advierta la orientación de C en la figura 10.2.4; cuando t aumenta de 0 a 2π, el punto $P(x, y)$ traza C en una dirección contraria a la de las manecillas del reloj. ■

En el ejemplo 2, el *semicírculo* superior $x^2 + y^2 = a^2, 0 \le y \le a$, se define paramétricamente restringiendo el parámetro t al intervalo $[0, \pi]$,

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Observe que cuando $t = \pi$, el punto final es ahora $(-a, 0)$. Por otro lado, si desea describir *dos* revoluciones completas en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del círculo, de nuevo modifica el intervalo del parámetro al escribir

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 4\pi.$$

Eliminación del parámetro Dado un conjunto de ecuaciones paramétricas, algunas veces se desea *eliminar* o *despejar* el parámetro para obtener una ecuación rectangular de la curva. Para eliminar el parámetro en (4), simplemente se elevan al cuadrado x y y y se suman las dos ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t \quad \text{implica que} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

puesto que $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. No hay una manera única de eliminar el parámetro.

EJEMPLO 3 Eliminación del parámetro

a) De la primera ecuación en (3) tenemos $t = x/(v_0 \cos \theta_0)$. Al sustituir esto en la segunda ecuación da

$$y = -\frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} x^2 + (\tan \theta_0)x.$$

Puesto que v_0, θ_0 y g son constantes, la última ecuación tiene la forma $y = ax^2 + bx$ y por ello la trayectoria de cualquier proyectil lanzado a un ángulo $0 < \theta_0 < \pi/2$ es un arco parabólico.

b) En el ejemplo 1 es posible eliminar el parámetro de $x = t^2$, $y = t^3$ resuelve la segunda ecuación para t en términos de y y después al sustituir la primera ecuación encontramos que

$$t = y^{1/3} \quad \text{y por tanto} \quad x = (y^{1/3})^2 = y^{2/3}.$$

La curva que se muestra en la figura 10.2.2 es sólo una porción de la gráfica $x = y^{2/3}$. Para $-1 \le t \le 2$ se tiene de manera correspondiente $-1 \le y \le 8$. De tal modo, una ecuación rectangular para la curva en el ejemplo 1 está dada por $x = y^{2/3}$, $-1 \le y \le 8$. ■

Una curva C puede tener más de una parametrización. Por ejemplo, una parametrización alterna del círculo en el ejemplo 2 es

Una curva C puede tener muchas parametrizaciones diferentes.

$$x = a \cos 2t, \quad y = a \operatorname{sen} 2t, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Advierta que el intervalo del parámetro ahora es $[0, \pi]$. Vemos que conforme t aumenta de 0 a π, el nuevo ángulo $2t$ aumenta de 0 a 2π.

EJEMPLO 4 Parametrizaciones alternas

Considere la curva C que tiene las ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = 2t^2$, $-\infty < t < \infty$. Es posible eliminar el parámetro si utilizamos $t = x$ y sustituimos en $y = 2t^2$. Esto produce la ecuación rectangular $y = 2x^2$, la cual reconocemos como una parábola. Además, puesto que $-\infty < t < \infty$ es equivalente a $-\infty < x < \infty$, el punto $(t, 2t^2)$ traza la parábola completa $y = 2x^2$, $-\infty < x < \infty$.

Una parametrización alterna de C está dada por $x = t^3/4$, $y = t^6/8$, $-\infty < t < \infty$. Empleamos $t^3 = 4x$ y sustituimos en $y = t^6/8$ o $y = (t^3 \cdot t^3)/8$ produce $y = (4x)^2/8 = 2x^2$. Además, $-\infty < t < \infty$ implica $-\infty < t^3 < \infty$ y por ello $-\infty < x < \infty$. ■

Advierta en el ejemplo 4 que un punto sobre C no necesita corresponder con el mismo valor del parámetro en cada conjunto de ecuaciones paramétricas de C. Por ejemplo, (1, 2) se obtuvo para $t = 1$ en $x = t$, $y = 2t^2$, pero $t = \sqrt[3]{4}$ produce (1, 2) en $x = t^3/4$, $y = t^6/8$.

EJEMPLO 5 Repaso del ejemplo 4

Es necesario tener cuidado cuando se trabaja con ecuaciones paramétricas. Al eliminar el parámetro en $x = t^2$, $y = 2t^4$, $-\infty < t < \infty$, parecería que se produce la misma parábola $y = 2x^2$ como en el ejemplo 4. Sin embargo, éste *no* es el caso porque para cualquier valor de t, $t^2 \geq 0$ y por ello $x \geq 0$. En otras palabras, el último conjunto de ecuaciones sólo es una representación paramétrica de la rama del lado derecho de la parábola, esto es, $y = 2x^2$, $0 \leq x < \infty$. ■

◀ Debe proceder con cuidado para eliminar el parámetro.

EJEMPLO 6 Eliminación del parámetro

Considere la curva C definida paramétricamente por

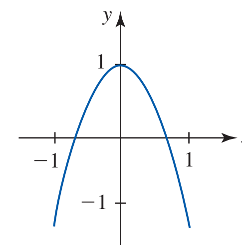
$$x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Elimine el parámetro y obtenga una ecuación rectangular para C.

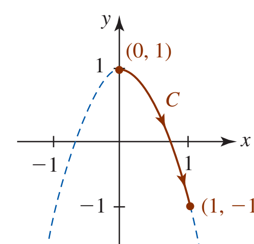
Solución Al utilizar la fórmula del ángulo doble $\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$, es posible escribir

$$\begin{aligned} y &= \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 t) - \operatorname{sen}^2 t \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 t \quad \leftarrow \text{sustituir sen } t = x \\ &= 1 - 2x^2. \end{aligned}$$

En este caso la curva C descrita por las ecuaciones paramétricas no consiste en la parábola completa, esto es, $y = 1 - 2x^2$, $-\infty < x < \infty$. Vea la FIGURA 10.2.5*a*). Para $0 \leq t \leq \pi/2$ tenemos $0 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$ y $-1 \leq \cos 2t \leq 1$. Esto significa que C es sólo aquella porción de la parábola para la cual las coordenadas de un punto $P(x, y)$ satisfacen $0 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$. La curva C, junto con su orientación, aparecen en la figura 10.2.5*b*). Una ecuación rectangular para C es $y = 1 - 2x^2$ con el dominio restringido $0 \leq x \leq 1$. ■



a) $y = 1 - 2x^2$, $-\infty < x < \infty$

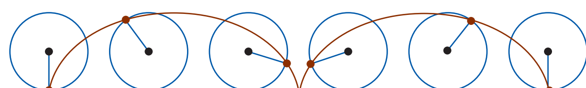


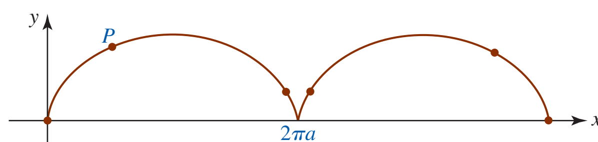
b) $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos 2t$, $0 \leq t \leq \pi/2$

FIGURA 10.2.5 Curva C del ejemplo 6

Intersecciones con los ejes Podemos obtener las intersecciones con los ejes de una curva C sin determinar su ecuación rectangular. Por ejemplo, en el ejemplo 6 encontramos que la intersección con el eje x determina el valor de t en el intervalo paramétrico para el cual $y = 0$. La ecuación $\cos 2t = 0$ produce $2t = \pi/2$, por lo que $t = \pi/4$. El punto correspondiente en el cual C cruza al eje x es $(\sqrt{2}, 0)$. De manera similar, la intersección de C con el eje y la encontramos al resolver $x = 0$ para t. De $\operatorname{sen} t = 0$ concluimos de inmediato que $t = 0$ y por eso la intersección con el eje y es (0, 1).

Aplicaciones de ecuaciones paramétricas Las curvas cicloidales fueron un tema popular de estudio para los matemáticos en el siglo XVII. Suponga que un punto $P(x, y)$, marcado sobre un círculo de radio a, está en el origen cuando su diámetro yace a lo largo del eje y. Conforme el círculo rueda a lo largo del eje x, el punto P traza una curva C que recibe el nombre de **cicloide**. Vea la FIGURA 10.2.6.


a) Círculo que rueda sobre el eje x



b) El punto P en el círculo traza esta curva

FIGURA 10.2.6 Cicloide

Dos problemas fueron estudiados ampliamente en el siglo XVII. Considere un alambre flexible (sin fricción) fijo a los puntos A y B y a una cuenta libre de deslizarse por el alambre empezando en P. Vea la FIGURA 10.2.7. ¿Existe una forma particular del alambre de manera que, independientemente de dónde empiece la cuenta, el tiempo para deslizarse por el alambre hasta B será el mismo? Además, ¿cuál sería la forma del alambre de manera que la cuenta se deslice de P a B en el tiempo más corto? El así llamado **tautócrono** (mismo tiempo) y **braquistócrono** (tiempo mínimo) se presentaron como el medio arco invertido de una cicloide.

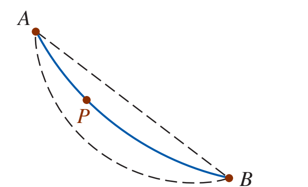


FIGURA 10.2.7 Cuenta deslizante

EJEMPLO 7 Parametrización de una cicloide

Encuentre una parametrización de la cicloide que se muestra en la figura 10.2.6*b*).

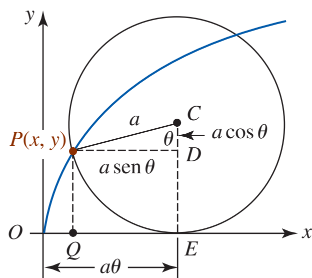


FIGURA 10.2.8 En el ejemplo 7, el ángulo θ es el parámetro del cicloide

Solución Un círculo de radio a cuyo diámetro inicialmente yace a lo largo del eje y rueda a lo largo del eje x sin deslizamiento. Tomamos como parámetro el ángulo θ (en radianes), a través del cual ha rotado el círculo. El punto $P(x, y)$ empieza en el origen, lo cual corresponde a $\theta = 0$. Conforme rueda el círculo a lo largo de un ángulo θ, su distancia desde el origen es el arco $PE = \overline{OE} = a\theta$. De la FIGURA 10.2.8 vemos entonces que la coordenada x de P es

$$x = \overline{OE} - \overline{QE} = a\theta - a\,\text{sen}\,\theta.$$

Ahora se advierte que la coordenada y de P es

$$y = \overline{CE} - \overline{CD} = a - a\cos\theta.$$

En consecuencia, las ecuaciones paramétricas para la cicloide son

$$x = a\theta - a\,\text{sen}\,\theta, \quad y = a - a\cos\theta.$$

Como se ilustra en la figura 10.2.6*a*), un arco de una cicloide es generado por una rotación del círculo y corresponde a un intervalo paramétrico $0 \leq \theta \leq 2\pi$. ■

Parametrización de curvas rectangulares Una curva C descrita por una función continua $y = f(x)$ también se parametriza dejando $x = t$. Las ecuaciones paramétricas para C son entonces

$$x = t, \quad y = f(t). \tag{5}$$

Por ejemplo, un ciclo de la gráfica de la función seno $y = \text{sen}\,x$ se parametriza mediante $x = t$, $y = \text{sen}\,t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

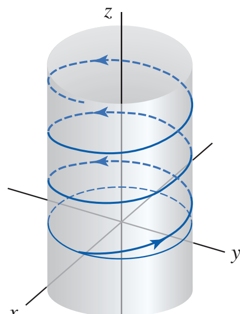


FIGURA 10.2.9 Hélice circular

Curvas suaves Una curva C, dada paramétricamente por

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad a \leq t < b,$$

se dice que es **suave** si f' y g' son continuas sobre $[a, b]$ y no simultáneamente cero sobre (a, b). Se dice que una curva C es **suave por secciones** si el intervalo $[a, b]$ puede dividirse en subintervalos tales que C es suave sobre cada subintervalo. Las curvas en los ejemplos 2, 3 y 6 son suaves; las curvas en los ejemplos 1 y 7 son suaves por secciones.

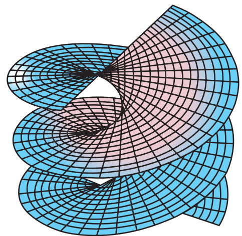
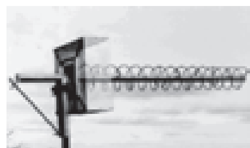


FIGURA 10.2.10 Helicoide circular



El ADN es una doble hélice



Antena helicoide

$\frac{d}{d\theta}$ NOTAS DESDE EL AULA

Esta sección se enfoca en **curvas planas**, curvas C definidas paramétricamente en dos dimensiones. En el estudio del cálculo de múltiples variables verá curvas y superficies en tres dimensiones que se definen mediante ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, una **curva espacial** C consiste en un conjunto de tripletes ordenados $(f(t), g(t), h(t))$, donde f, g y h se definen sobre un intervalo común. Las ecuaciones paramétricas para C son $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$. Por ejemplo, la **hélice circular** de la FIGURA 10.2.9 es una curva espacial cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = a\cos t, \quad y = a\cos t, \quad z = bt, \quad t \geq 0. \tag{6}$$

Las superficies en tres dimensiones se representan mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas que involucran a *dos* parámetros, $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$. Por ejemplo, el **helicoide circular** que se muestra en la FIGURA 10.2.10 surge del estudio de superficies mínimas y está definido por el conjunto de ecuaciones paramétricas similar al correspondiente a (6):

$$x = u\cos v, \quad y = u\,\text{sen}\,v, \quad z = bv,$$

donde b es una constante. El helicoide circular tiene una hélice circular como su frontera. El lector podría reconocer al helicoide como el modelo para el álabe curvado rotatorio en maquinarias tales como excavadoras para hoyos de postes, taladros de hielo y máquinas quitanieve.

Ejercicios 10.2 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-31.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, complete la tabla para un conjunto dado de ecuaciones paramétricas.

1. $x = 2t + 1, y = t^2 + t$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x							
y							

2. $x = \cos t, y = \operatorname{sen}^2 t,$

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$5\pi/6$	$7\pi/4$
x							
y							

En los problemas 3-10, grafique la curva que tiene el conjunto indicado de ecuaciones paramétricas.

3. $x = t - 1, y = 2t - 1; \quad -1 \le t \le 5$
4. $x = 3t, y = t^2 - 1; \quad -2 \le t \le 3$
5. $x = \sqrt{t}, y = 5 - t; \quad t \ge 0$
6. $x = 3 + 2\operatorname{sen} t, y = 4 + \operatorname{sen} t; \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$
7. $x = 4\cos t, y = 4\operatorname{sen} t; \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$
8. $x = t^3 + 1, y = t^2 - 1; \quad -2 \le t \le 2$
9. $x = e^t, y = e^{3t}; \quad 0 \le t \le \ln 2$
10. $x = -e^t, y = e^{-t}; \quad t \ge 0$

En los problemas 11-16, elimine los parámetros del conjunto dado de ecuaciones paramétricas y obtenga una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica.

11. $x = t^2, y = t^4 + 3t^2 - 1$
12. $x = t^3 + t + 4, y = -2t^3 - 2t$
13. $x = -\cos 2t, y = \operatorname{sen} t; \quad -\pi/4 \le t \le \pi/4$
14. $x = e^t, y = \ln t; \quad t > 0$
15. $x = t^3, y = 3\ln t; \quad t > 0$
16. $x = \tan t, y = \sec t; \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

En los problemas 17-22, muestre de manera gráfica la diferencia entre las curvas indicadas.

17. $y = x$ y $x = \operatorname{sen} t, y = \operatorname{sen} t$
18. $y = x^2$ y $x = -\sqrt{t}, y = t, t \ge 0$
19. $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ y $x = 2t, y = t^2 - 1, -1 \le t \le 2$
20. $y = -x^2$ y $x = e^t, y = -e^{2t}, t \ge 0$
21. $x^2 - y^2 = 1$ y $x = \cosh t, y = \operatorname{senh} t$
22. $y = 2x - 2$ y $x = t^2 - 1, y = 2t^2 - 4$

En los problemas 23-26, muestre de manera gráfica las diferencias entre las curvas indicadas. Suponga $a > 0, b > 0$.

23. $x = a\cos t, y = a\operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi$
    $x = a\operatorname{sen} t, y = a\cos t, \quad 0 \le t \le \pi$
24. $x = a\cos t, y = b\operatorname{sen} t, a > b, \quad \pi \le t \le 2\pi$
    $x = a\operatorname{sen} t, y = b\cos t, a > b, \quad \pi \le t \le 2\pi$
25. $x = a\cos t, y = a\operatorname{sen} t, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$
    $x = a\cos 2t, y = a\operatorname{sen} 2t, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$
26. $x = a\cos\frac{t}{2}, y = a\operatorname{sen}\frac{t}{2}, \quad 0 \le t \le \pi$
    $x = a\cos\left(-\frac{t}{2}\right), y = a\operatorname{sen}\left(-\frac{t}{2}\right), \quad -\pi \le t \le 0$

En los problemas 27 y 28, grafique la curva que tiene las ecuaciones paramétricas indicadas.

27. $x = 1 + 2\cosh t, y = 2 + 3\operatorname{senh} t$
28. $x = -3 + 3\cos t, y = 5 + 5\operatorname{sen} t$

En los problemas 29-34, determine si el conjunto dado de ecuaciones paramétricas tiene la misma gráfica que la ecuación rectangular $xy = 1$.

29. $x = \dfrac{1}{2t + 1}, y = 2t + 1$
30. $x = t^{1/2}, y = t^{-1/2}$
31. $x = \cos t, y = \sec t$
32. $x = t^2 + 1, y = (t^2 + 1)^{-1}$
33. $x = e^{-2t}, y = e^{2t}$
34. $x = t^3, y = t^{-3}$

Aplicaciones

35. Como se muestra en la FIGURA 10.2.11, un émbolo está unido por medio de una varilla de longitud L a un mecanismo de manivela circular de radio r. Parametrice las coordenadas del punto P en términos del ángulo ϕ.

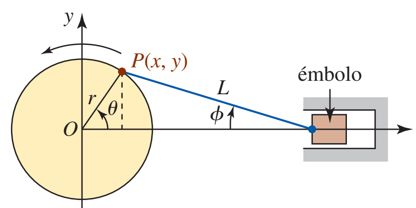


FIGURA 10.2.11 Mecanismo de manivela del problema 35

36. Un punto Q traza una trayectoria circular de radio r y un punto P se mueve de la manera que se indica en la FIGURA 10.2.12. Si R es constante, encuentre ecuaciones paramétricas de la trayectoria trazada por P. Esta curva recibe el nombre de **epitrocoide**. (Aquellos que sepan sobre automóviles podrían reconocer la curva trazada por P como la

forma del rotor albergado en el motor rotatorio o de Wankel.)

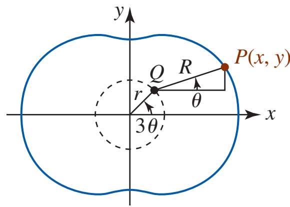


FIGURA 10.2.12 Epitrocoide del problema 36

37. Un carrete circular de hilo enrollado tiene su centro en el origen. El radio del carrete es a. El extremo del hilo P, empezando en $(a, 0)$, se desenrolla mientras el hilo se mantiene tirante. Vea la FIGURA 10.2.13. Encuentre ecuaciones paramétricas de la trayectoria seguida por el punto P si el hilo PR es tangente al carrete circular en R. La curva se denomina **involuta** de un círculo.

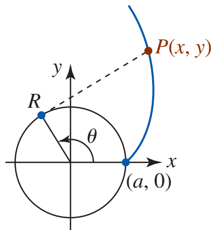


FIGURA 10.2.13 Involuta de un círculo en el problema 37

38. Imagine un pequeño círculo de radio a que rueda sobre el interior de un círculo más grande de radio $b > a$. Un punto P del círculo más pequeño genera una curva llamada **hipocicloide**. Recurra a la FIGURA 10.2.14 para mostrar que las ecuaciones paramétricas de una hipocicloide son

$$x = (b - a)\cos\theta + a\cos\frac{b - a}{a}\theta$$
$$y = (b - a)\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen}\frac{b - a}{a}\theta.$$

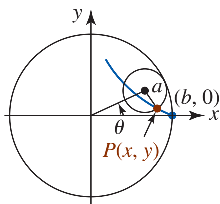


FIGURA 10.2.14 Hipocicloide del problema 38

39. ***a***) Emplee las ecuaciones del problema 38 para demostrar que las ecuaciones paramétricas de una **hipocicloide de cuatro cúspides** son

$$x = b\cos^3\theta, \quad y = b\operatorname{sen}^3\theta.$$

b) Mediante la herramienta de graficación obtenga la gráfica de la curva en el inciso *a*)

c) Elimine el parámetro y obtenga una ecuación rectangular para la hipocicloide de cuatro cúspides.

40. Emplee la FIGURA 10.2.15 para mostrar que las ecuaciones paramétricas de una **epicicloide** están dadas por

$$x = (a + b)\cos\theta - a\cos\frac{a + b}{a}\theta$$
$$y = (a + b)\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen}\frac{a + b}{a}\theta.$$

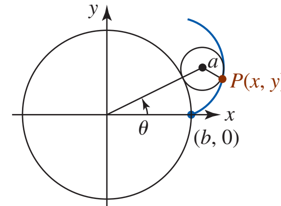


FIGURA 10.2.15 Epicicloide del problema 40

41. ***a***) Emplee las ecuaciones del problema 40 para mostrar que las ecuaciones paramétricas de una **epicicloide de tres cúspides** son

$$x = 4a\cos\theta - a\cos 4\theta, \; y = 4a\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen}4\theta.$$

b) Mediante un aparato para graficación obtenga la gráfica de la curva del inciso *a*).

42. Un clásico matemático

a) Considere un círculo de radio a, que es tangente al eje x en el origen O. Sea B un punto sobre una línea horizontal que pasa por $(0, 2a)$ y considere que el segmento de recta OB corta al círculo en el punto A. Como se muestra en la FIGURA 10.2.16, la proyección de AB sobre la vertical produce el segmento de recta BP. Encuentre ecuaciones paramétricas de la trayectoria trazada por el punto P cuando A varía alrededor del círculo. La curva recibe el nombre de **Bruja de Agnesi**. No, la curva no tiene nada que ver con brujas ni duendes. Esta curva, llamada *versoria*, que es el término en latín para un tipo de cuerda, se incluyó en un texto de geometría analítica escrito en 1748 por la matemática italiana **Maria Gaetana Agnesi** (1718-1799). Este texto tuvo tanta popularidad que rápidamente se tradujo al inglés. El traductor confundió *versoria* con la palabra italiana *versiera*, que significa *duende femenino*. En inglés, *duende femenino* se convirtió en *bruja*.

b) En el inciso *a*) elimine el parámetro y demuestre que la curva tiene la ecuación rectangular

$$y = 8a^3/(x^2 + 4a^2).$$

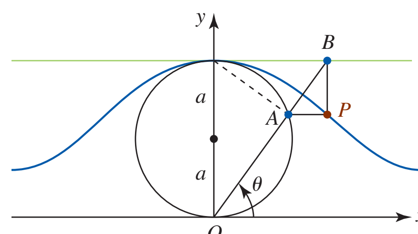


FIGURA 10.2.16 Bruja de Agnesi del problema 42

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 43-48, emplee una calculadora o un SAC para obtener la gráfica del conjunto dado de ecuaciones paramétricas.

43. $x = 4\,\text{sen}\,2t,\ y = 2\,\text{sen}\,t;\quad 0 \le t \le 2\pi$

44. $x = 6\cos 3t,\ y = 4\,\text{sen}\,2t;\quad 0 \le t \le 2\pi$

45. $x = 6\cos 4t,\ y = 4\,\text{sen}\,t;\quad 0 \le t \le 2\pi$

46. $x = \cos t + t\,\text{sen}\,t,\ y = \text{sen}\,t - t\cos t;\quad 0 \le t \le 3\pi$

47. $x = t^3 - 4t + 1,\ y = t^4 - 4t^2;\quad -5 \le t \le 5$

48. $x = t^5 - t + 1,\ y = t^3 + 2t - 1;\quad -3 \le t \le 6$

≡ Piense en ello

49. Demuestre que las ecuaciones paramétricas para una línea que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t,\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t,\ -\infty < t < \infty.$$

¿Qué representan estas ecuaciones cuando $0 \le t \le 1$?

50. ***a***) Use el resultado del problema 49 para encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por (−2, 5) y (4, 8).

b) Elimine el parámetro del inciso *a*) para obtener una ecuación rectangular de la recta.

c) Encuentre las ecuaciones paramétricas del segmento de recta con (−2, 5) como el punto inicial y (4, 8) como el punto final.

51. Una esquiadora salta por una rampa sobre una pendiente y sale despedida horizontalmente por el aire con una velocidad inicial de 75 pies/s. Como se muestra en la FIGURA 10.2.17, la pendiente cae a partir de la horizontal a un ángulo de 33°. Emplee las ecuaciones en (3) para determinar cuán abajo en la pendiente aterrizará la esquiadora. [*Sugerencia*: Observe que los ejes *x* y *y* en la figura 10.2.1 están en la posición estándar (a la derecha y hacia arriba, respectivamente). En la figura 10.2.17 suponga que el origen es el punto donde la esquiadora sale despedida en el aire.]

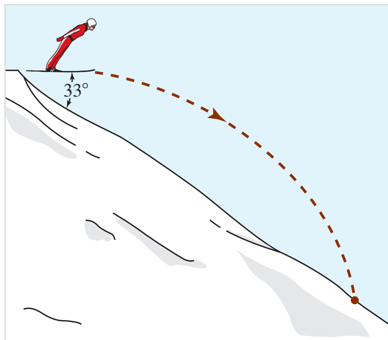


FIGURA 10.2.17 Esquiadora en el problema 51

≡ Proyectos

52. Curva de la mariposa La gráfica del conjunto de ecuaciones paramétricas

$$x = \text{sen}\,t\left(e^{\cos t} - 2\cos 4t + \text{sen}^5 \frac{1}{12}t\right),$$

$$y = \cos t\left(e^{\cos t} - 2\cos 4t + \text{sen}^5 \frac{1}{12}t\right)$$

se dice que es una **curva de mariposa**. La FIGURA 10.2.18 consta de siete porciones coloreadas de la curva correspondiente a diferentes intervalos del parámetro. Experimente con un SAC para determinar estos intervalos del parámetro. Emplee el SAC para generar más porciones coloreadas y después combine todas las curvas coloreadas en un conjunto de ejes de coordenadas.

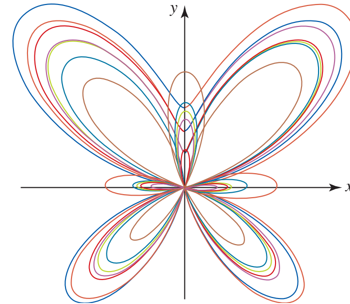


FIGURA 10.2.18 Curva de mariposa del problema 52

53. La curva en la figura 10.2.18 es una de las dos curvas conocidas como una curva de mariposa. Escriba un breve informe que analice ambos tipos de curvas.

54. Curvas de Bézier La mayoría de las aplicaciones de graficación por computadora trazan ecuaciones paramétricas además de gráficas de funciones. Todas las calculadoras gráficas pueden trazar ecuaciones paramétricas calculando de manera repetida un punto sobre la curva y después graficándolo. En este proyecto se introducen algunas curvas paramétricas especiales llamadas **curvas de Bézier**, las cuales son comunes en el diseño asistido por computadora (CAD, por sus siglas en inglés), en programas de dibujo por computadora y en representaciones matemáticas de diferentes fuentes para muchas impresoras láser. Una curva de Bézier *cúbica* se especifica mediante cuatro puntos de control en el plano, por ejemplo,

$$P_0(p_0, q_0),\quad P_1(p_1, q_1),\quad P_2(p_2, q_2)\quad \text{y}\quad P_3(p_3, q_3).$$

La curva empieza en el primer punto para el valor $t = 0$, termina en el último punto para $t = 1$, y de manera aproximada "apunta hacia" los puntos medios de los valores del parámetro entre 0 y 1. Los artistas e ingenieros de diseño pueden mover los puntos de control para ajustar las ubicaciones finales y la forma de la curva paramétrica. La curva de Bézier cúbica para estos cuatro puntos de control tiene las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = p_0(1 - t)^3 + 3p_1(1 - t)^2t + 3p_2(1 - t)t^2 + p_3t^3$$
$$y = q_0(1 - t)^3 + 3q_1(1 - t)^2t + 3q_2(1 - t)t^2 + q_3t^3,$$

donde $0 \le t \le 1$. Varias curvas de Bézier pueden conectarse por pedazos de manera continua haciendo que el último punto de control sobre una curva sea el primer punto de control sobre la curva siguiente. De manera equivalente, es posible construir las ecuaciones paramétricas por secciones. Por ejemplo, la pieza siguiente puede representarse por medio de

$$x = p_3(2 - t)^3 + 3p_4(2 - t)^2(t - 1) + 3p_5(2 - t)(t - 1)^2 + p_6(t - 1)^3$$
$$y = q_3(2 - t)^3 + 3q_4(2 - t)^2(t - 1) + 3q_5(2 - t)(t - 1)^2 + q_6(t - 1)^3,$$

donde $1 \leq t \leq 2$.

En *a*)-*f*), use un aparato para graficación para obtener la gráfica de la curva de Bézier continua por secciones asociada con los puntos de control dados.

a) $P_0(5, 1)$, $P_1(1, 30)$, $P_2(50, 28)$, $P_3(55, 5)$
b) $P_0(32, 1)$, $P_1(85, 25)$, $P_2(1, 30)$, $P_3(40, 3)$
c) $P_0(10, 5)$, $P_1(16, 4)$, $P_2(25, 28)$, $P_3(30, 30)$, $P_4(18, 1)$, $P_5(40, 18)$, $P_6(16, 20)$
d) $P_0(55, 50)$, $P_1(45, 40)$, $P_2(38, 20)$, $P_3(50, 20)$, $P_4(60, 20)$, $P_5(63, 35)$, $P_6(45, 32)$
e) $P_0(30, 30)$, $P_1(40, 5)$, $P_2(12, 12)$, $P_3(45, 10)$, $P_4(58, 10)$, $P_5(66, 31)$, $P_6(25, 30)$
f) $P_0(48, 20)$, $P_1(20, 15)$, $P_2(20, 50)$, $P_3(48, 45)$, $P_4(28, 47)$, $P_5(28, 18)$, $P_6(48, 20)$, $P_7(48, 36)$, $P_8(52, 32)$, $P_9(40, 32)$

En *g*)-*i*) experimente con las ubicaciones de los puntos de control para obtener curvas de Bézier continuas por secciones aproximando la forma u objeto indicados. Proporcione los puntos de control finales que eligió y dibuje la curva paramétrica resultante.

g) Históricamente la letra "S" ha sido una de las más difíciles de representar matemáticamente. Use dos o tres pedazos de curva de Bézier para dibujar una letra "S" en algún estilo de fuente simple.
h) La sección transversal larga de un huevo no se asemeja mucho a una elipse debido a que un extremo es más puntiagudo que el otro. Utilice varios pedazos de curva de Bézier para representar una aproximación de la forma de un huevo.
i) Proporcione una curva aproximando la forma de la letra ε, utilizando tan pocas piezas como sea posible.

Termine este proyecto con la redacción de un breve informe que analice las curvas de Bézier lineal, cuadrática y de grado *n*-ésimo. Incluya un análisis acerca de la historia antigua de las curvas de Bézier; por ejemplo, ¿cuál fue la aportación de Pierre Bézier?

10.3 Cálculo y ecuaciones paramétricas

Introducción Al igual que con las gráficas de funciones $y = f(x)$, podemos obtener información útil acerca de una curva C definida paramétricamente al examinar la derivada dy/dx.

Pendiente Sean $x = f(t)$ y $y = g(t)$ las ecuaciones paramétricas de una curva suave C. La **pendiente** de la recta tangente en un punto $P(x, y)$ sobre C está dada por dy/dx. Para calcular esta derivada, se usa la forma de la derivada dada en (3) de la sección 3.1:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Para un incremento Δt, los incrementos en x y y son, respectivamente,

$$\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t) \qquad \text{y} \qquad \Delta y = g(t + \Delta t) - g(t)$$

y por ello

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\dfrac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}}{\dfrac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}}.$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta t \to 0} \Delta y/\Delta t}{\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x/\Delta t} = \frac{dy/dt}{dx/dt},$$

cuando el límite del denominador no es cero. La forma paramétrica de la derivada se resume en el siguiente teorema.

Teorema 10.3.1 Pendiente de una recta tangente

Si $x = f(t)$, $y = g(t)$ define una curva suave C, entonces la **pendiente de una recta tangente** en un punto $P(x, y)$ sobre C es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}, \tag{1}$$

siempre que $f'(t) \neq 0$.

EJEMPLO 1 Recta tangente

Encuentre una ecuación de una recta tangente a la curva $x = t^2 - 4t - 2$, $y = t^5 - 4t^3 - 1$ en el punto correspondiente a $t = 1$.

Solución Primero determinamos la pendiente dy/dx de la recta tangente. Puesto que

$$\frac{dx}{dt} = 2t - 4 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = 5t^4 - 12t^2$$

se deduce de (1) que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{5t^4 - 12t^2}{2t - 4}.$$

De tal modo, en $t = 1$ tenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}.$$

Al sustituir $t = 1$ de nuevo en las ecuaciones paramétricas originales, encontramos que el punto de tangencia es $(-5, -4)$. En consecuencia, una ecuación de la recta tangente en ese punto es

$$y - (-4) = \frac{7}{2}(x - (-5)) \qquad \text{o} \qquad y = \frac{7}{2}x + \frac{27}{2}.$$

Con la ayuda de un SAC se obtiene la curva dada en la FIGURA 10.3.1. ■

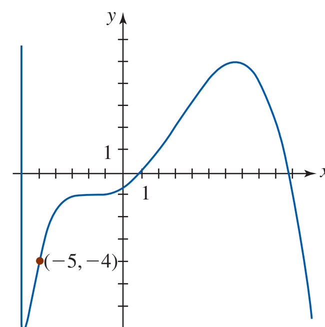


FIGURA 10.3.1 Curva del ejemplo 1

Tangentes horizontal y vertical En un punto (x, y) sobre una curva C en el cual $dy/dt = 0$ y $dx/dt \neq 0$, la recta tangente es necesariamente **horizontal** debido a que $dy/dx = 0$ en ese punto. Por otro lado, en un punto en el cual $dx/dt = 0$ y $dy/dt \neq 0$, la recta tangente es **vertical**. Cuando tanto dy/dt como $dx/dt/$ son cero en un punto, no se puede extraer una conclusión inmediata acerca de la recta tangente.

EJEMPLO 2 Gráfica de una curva paramétrica

Grafique la curva que tiene ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 4$, $y = t^3 - 3t$.

Solución *Intersecciones con el eje x*: $y = 0$ implica $t(t^2 - 3) = 0$ en $t = 0, t = -\sqrt{3}$, y $t = \sqrt{3}$.

Intersecciones con el eje y: $x = 0$ implica que $t^2 - 4 = 0$ en $t = -2$ y $t = 2$.

Tangentes horizontales: $\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$; $\frac{dy}{dt} = 0$ implica que $3(t^2 - 1) = 0$ en $t = -1$ y $t = 1$. Advierta que $dx/dt \neq 0$ en $t = -1$ y $t = 1$.

Tangentes verticales: $\frac{dx}{dt} = 2t$; $\frac{dx}{dt} = 0$ implica $2t = 0$ y $t = 0$. Advierta que $dy/dt \neq 0$ en $t = 0$.

Los puntos (x, y) sobre la curva correspondientes a estos valores del parámetro se resumen en la tabla siguiente:

t	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
x	0	-1	-3	-4	-3	-1	0
y	-2	0	2	0	-2	0	2

En la tabla observamos que: las intersecciones con el eje x son $(-1, 0)$ y $(-4, 0)$, las intersecciones con el eje y son $(0, -2)$ y $(0, 2)$, los puntos de tangencia horizontal son $(-3, 2)$ y $(-3, -2)$, el punto de tangencia vertical es $(-4, 0)$. Una curva graficada a través de estos puntos, consistente con la orientación y la información de la tangente, se ilustra en la FIGURA 10.3.2. ■

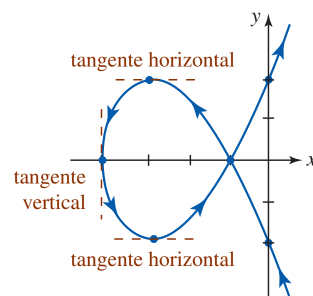


FIGURA 10.3.2 Curva del ejemplo 2

La gráfica de una función diferenciable $y = f(x)$ puede tener sólo una recta tangente en un punto sobre su gráfica. En contraste, puesto que una curva C definida paramétricamente quizá no sea la gráfica de una función, es posible que una curva de este tipo pueda tener más de una recta tangente en un punto.

EJEMPLO 3 Dos rectas tangentes en un punto

En la tabla del ejemplo 2 se observó que para $t = -\sqrt{3}$ y $t = \sqrt{3}$ obtenemos un solo punto $(-1, 0)$. Como puede ver en la figura 10.3.2, esto quiere decir que la curva se interseca a sí misma en $(-1, 0)$. En este caso, de $x = t^2 - 4$, $y = t^3 - 3t$ obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{2t}$$

y

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Por consiguiente, concluimos que hay dos rectas tangentes en $(-1, 0)$:

$$y = -\sqrt{3}(x + 1) \qquad \text{y} \qquad y = \sqrt{3}(x + 1).$$

Vea la FIGURA 10.3.3. ■

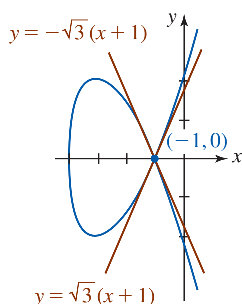


FIGURA 10.3.3 Rectas tangentes del ejemplo 3

Derivadas de orden superior Es posible encontrar derivadas de orden superior exactamente de la misma manera que dy/dx. Suponga que (1) se escribe como

$$\frac{d}{dx}(\ ) = \frac{d(\ )/dt}{dx/dt}. \tag{2}$$

Si $y' = dy/dx$ es una función diferenciable de t, se deduce de (2) al sustituir ( ) por y' que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}y' = \frac{dy'/dt}{dx/dt}. \tag{3}$$

De manera similar, si $y'' = d^2y/dx^2$ es una función diferenciable de t, entonces la tercera derivada es

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}y'' = \frac{dy''/dt}{dx/dt}, \tag{4}$$

y así sucesivamente.

EJEMPLO 4 Tercera derivada

Determine d^3y/dx^3 para la curva dada por $x = 4t + 6$, $y = t^2 + t - 2$.

Solución Para calcular la tercera derivada, primero debemos determinar la primera y segunda derivadas. De (2) la primera derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t + 1}{4} = y'.$$

Después utilizando (3) y (4) obtenemos la segunda y tercera derivadas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8} = y''$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy''/dt}{dx/dt} = \frac{0}{4} = 0. \quad ■$$

La inspección del ejemplo 4 muestra que la curva tiene una tangente horizontal en $t = -\frac{1}{2}$ o $\left(4, -\frac{9}{4}\right)$. Además, puesto que $d^2y/dx^2 > 0$ para todo t, la gráfica de la curva es cóncava hacia arriba en cualquier punto. Verifique lo anterior graficando la curva.

Longitud de una curva En la sección 6.5 nos fue posible determinar la longitud L de la gráfica de una función suave $y = f(x)$ mediante una integral definida. Ahora podemos generalizar el resultado dado en (3) de esa sección a curvas definidas paramétricamente.

Construcción de una integral Suponga que $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, son las ecuaciones paramétricas de una curva suave C que no se interseca a sí misma en $a < t < b$. Si P es una partición de $[a, b]$ dada por los números

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

entonces, como se muestra en la FIGURA 10.3.4, parece ser razonable que C pueda aproximarse mediante una trayectoria poligonal a través de los puntos $Q_k(f(t_k), g(t_k))$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Al denotar la longitud del segmento de recta a través de Q_{k-1} y Q_k mediante L_k escribimos la longitud aproximada de C como

$$\sum_{k=1}^{n} L_k, \tag{5}$$

donde $$L_k = \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2}.$$

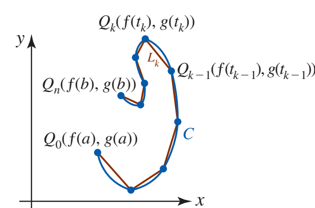


FIGURA 10.3.4 Aproximación de la longitud de C (azul) mediante la longitud de una trayectoria poligonal (rojo)

Ahora bien, puesto que f y g tienen derivadas continuas, el teorema del valor medio (vea sección 4.4) afirma que existen números u_k^* y v_k^* en el intervalo (t_{k-1}, t_k) tales que

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(u_k^*)(t_k - t_{k-1}) = f'(u_k^*)\Delta t_k \tag{6}$$

y $$g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(v_k^*)(t_k - t_{k-1}) = g'(v_k^*)\Delta t_k. \tag{7}$$

Al emplear (6) y (7) en (5) y simplificar obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(u_k^*)]^2 + [g'(v_k^*)]^2}\,\Delta t_k. \tag{8}$$

Al tomar $\|P\| \to 0$ en (8), obtenemos una fórmula para la longitud de una curva suave. Advierta que el límite de la suma en (8) no es la definición usual de una integral definida, puesto que trabajamos con dos números (u_k^* y v_k^*) más que con uno en el intervalo (t_{k-1}, t_k). No obstante, *podemos* hacer una demostración rigurosa de que la fórmula dada en el teorema siguiente resulta de (8) si tomamos $\|P\| \to 0$.

Teorema 10.3.2 Longitud de arco

Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, define a una curva suave C que no se interseca a sí misma en $a < t < b$, entonces la longitud L de C es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{9}$$

Además, (9) también puede obtenerse utilizando (1). Si la curva definida por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, también puede representarse mediante una función explícita $y = F(x)$, $x_0 \leq x \leq x_1$, entonces mediante el cambio de variables de integración y utilizando $f(a) = x_0$, $g(b) = x_1$, (3) de la sección 6.5 se convierte en

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)^2}\,g'(t)\,dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt.$$

EJEMPLO 5 Longitud de una curva

Determine la longitud de la curva dada por $x = 4t$, $y = t^2$, $0 \leq t \leq 2$.

Solución: Puesto que $f'(t) = 4$ y $g'(t) = 2t$, (9) produce

$$L = \int_0^2 \sqrt{16 + 4t^2}\,dt = 2\int_0^2 \sqrt{4 + t^2}\,dt.$$

Con la sustitución trigonométrica $t = 2\tan\theta$, la última integral se vuelve

$$L = 8\int_0^{\pi/4} \sec^3\theta\,d\theta.$$

La integración por partes conduce a (vea el ejemplo 5, sección 7.3)

$$L = \left[4\sec\theta\tan\theta + 4\ln|\sec\theta + \tan\theta|\right]_0^{\pi/4} = 4\sqrt{2} + 4\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) \approx 9.1823. \quad ■$$

Ejercicios 10.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-32.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre la pendiente de la recta tangente en el punto correspondiente al valor indicado del parámetro.

1. $x = t^3 - t^2, y = t^2 + 5t; \quad t = -1$
2. $x = 4/t, y = 2t^3 - t + 1; \quad t = 2$
3. $x = \sqrt{t^2 + 1}, y = t^4; \quad t = \sqrt{3}$
4. $x = e^{2t}, y = e^{-4t}; \quad t = \ln 2$
5. $x = \cos^2\theta, y = \operatorname{sen}\theta; \quad \theta = \pi/6$
6. $x = 2\theta - 2\operatorname{sen}\theta, y = 2 - 2\cos\theta; \quad \theta = \pi/4$

En los problemas 7 y 8, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor indicado del parámetro.

7. $x = t^3 + 3t, y = 6t^2 + 1; \quad t = -1$
8. $x = 2t + 4, y = t^2 + \ln t; \quad t = 1$

En los problemas 9 y 10, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

9. $x = t^2 + t, y = t^2; \quad (2, 4)$
10. $x = t^4 - 9, y = t^4 - t^2; \quad (0, 6)$
11. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva dada por $x = 4 \operatorname{sen} 2t$, $y = 2 \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$, en el punto $\left(2\sqrt{3}, 1\right)$?
12. Una curva C tiene ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 + 1$. ¿En qué punto sobre C está la recta tangente dada por $y + 3x - 5 = 0$?
13. Una curva C tiene ecuaciones paramétricas $x = 2t - 5$, $y = t^2 - 4t + 3$. Encuentre una ecuación de la recta tangente a C que es paralela a la recta $y = 3x + 1$.
14. Verifique que la curva dada por, $x = -2/\pi + \cos\theta$, $y = -2\theta/\pi + \operatorname{sen}\theta$, $-\pi \le \theta \le \pi$, se interseca a sí misma. Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes en el punto de intersección.

En los problemas 15-18, determine los puntos sobre la curva dada en los cuales la recta tangente es horizontal o vertical. Grafique la curva.

15. $x = t^3 - t, y = t^2$
16. $x = \frac{1}{8}t^3 + 1, y = t^2 - 2t$
17. $x = t - 1, y = t^3 - 3t^2$
18. $x = \operatorname{sen} t, y = \cos 3t, 0 \le t \le 2\pi$

En los problemas 19-22, encuentre dy/dx, d^2y/dx^2 y d^3y/dx^3.

19. $x = 3t^2, y = 6t^3$
20. $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t$
21. $x = e^{-t}, y = e^{2t} + e^{3t}$
22. $x = \frac{1}{2}t^2 + t, y = \frac{1}{2}t^2 - t$
23. Emplee d^2y/dx^2 para determinar los intervalos del parámetro para el cual la curva del problema 16 es cóncava hacia arriba y los intervalos para los cuales resulta cóncava hacia abajo.
24. Emplee d^2y/dx^2 para determinar si la curva dada por $x = 2t + 5$, $y = 2t^3 + 6t^2 + 4t$ tiene algún punto de inflexión.

En los problemas 25-30, encuentre la longitud de la curva dada.

25. $x = \frac{5}{3}t^3 + 2, y = 4t^3 + 6; \quad 0 \le t \le 2$
26. $x = \frac{1}{3}t^3, y = \frac{1}{2}t^2; \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$
27. $x = e^t \operatorname{sen} t, y = e^t \cos t; \quad 0 \le t \le \pi$
28. Un arco de la cicloide:
$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), y = a(1 - \cos\theta); \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$
29. Un arco de la hipocicloide de cuatro cúspides:
$$x = b\cos^3\theta, y = b\operatorname{sen}^3\theta; \quad 0 \le \theta \le \pi/2$$
30. Un arco de la epicicloide de tres cúspides:
$$x = 4a\cos\theta - a\cos 4\theta, y = 4a\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen} 4\theta, 0 \le \theta \le 2\pi/3$$

Problemas con calculadora/SAC

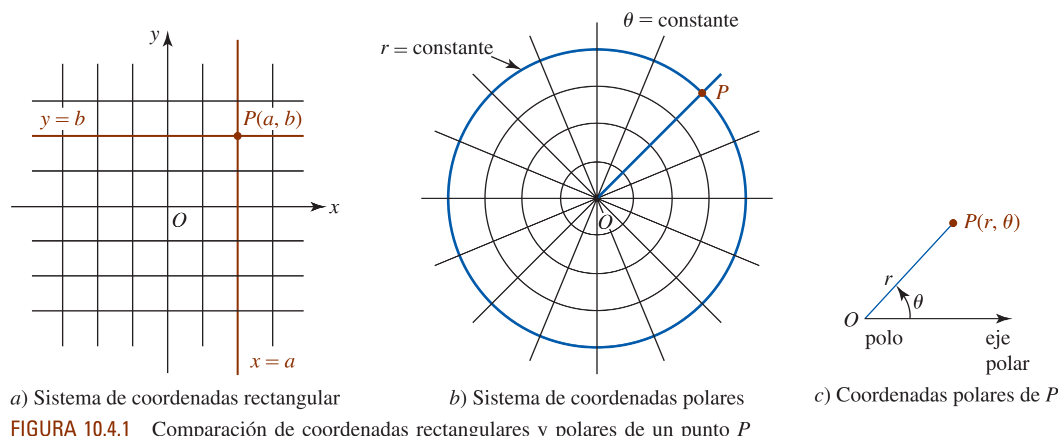
31. Considere la curva $x = t^2 - 4t - 2$, $y = t^5 - 4t^3 - 1$ en el ejemplo 1.
    a) Emplee una calculadora para determinar una aproximación de la coordenada y de la intersección con el eje y que se muestra en la figura 10.3.1.
    b) Emplee el método de Newton para aproximar las coordenadas x de las tres intersecciones con el eje x que se ilustran en la figura 10.3.1.

Piense en ello

32. Sea C una curva descrita por $y = f(x)$, donde F es una función no negativa continua sobre $x_1 \le x \le x_2$. Demuestre que si C está dada paramétricamente por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, f' y g continuas, entonces el **área** bajo la gráfica de C es $\int_a^b g(t) f'(t)dt$.
33. Recurra al problema 32 para demostrar que el área bajo un arco de la cicloide en la figura 10.2.6*b*) es tres veces el área del círculo.

10.4 Sistema de coordenadas polares

Introducción Hasta ahora hemos utilizado el **sistema de coordenadas rectangular** o **cartesiano** para especificar un punto P o describir una curva C en el plano. Podemos considerar este sistema como una retícula de líneas horizontales y verticales. Las coordenadas (a, b) de un punto P están determinadas por la intersección de dos rectas: una recta $x = a$ es perpendicular a la recta de referencia horizontal llamada el eje x, y la otra $y = b$ es perpendicular a la recta de referencia vertical llamada el eje y. Vea la FIGURA 10.4.1*a*). Otro sistema para localizar puntos en el plano es el **sistema de coordenadas polares**.



a) Sistema de coordenadas rectangular *b*) Sistema de coordenadas polares *c*) Coordenadas polares de P

FIGURA 10.4.1 Comparación de coordenadas rectangulares y polares de un punto P

Coordenadas polares Para establecer un **sistema de coordenadas polares** empleamos un sistema de círculos centrados en un punto $\boldsymbol{O}$, denominado **polo**, y líneas rectas o rayos que emanen de O. Tomamos como eje de referencia una media línea horizontal dirigida hacia la derecha del polo, a la cual se le nombra **eje polar**. Para especificar una distancia r dirigida (con signo) desde O y un ángulo θ cuyo lado inicial es el eje polar y cuyo lado final es el rayo OP, se identifica el punto P mediante (r, θ). Se dice que el par ordenado (r, θ) son las **coordenadas polares** de P. Vea las figuras 10.4.1*b*) y 10.4.1*c*).

Si bien la medida del ángulo θ puede ser en grados o radianes, en cálculo se usa casi exclusivamente la medida de radianes. En consecuencia, aquí se usará sólo esta última.

En el sistema de coordenadas polares se adoptan las siguientes convenciones.

Definición 10.4.1 Convenciones en coordenadas polares

i) Los ángulos $\theta > 0$ se miden en el sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del eje polar, en tanto que los ángulos $\theta < 0$ se miden en el sentido de las manecillas del reloj.

ii) Para graficar un punto $(-r, \theta)$, donde $-r < 0$, se miden $|r|$ unidades a lo largo del rayo $\theta + \pi$.

iii) Las coordenadas del polo O son $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

EJEMPLO 1 Graficación de puntos polares

Grafique los puntos cuyas coordenadas polares se indican.

a) $(4, \pi/6)$ ***b***) $(2, -\pi/4)$ ***c***) $(-3, 3\pi/4)$

Solución

a) Mida 4 unidades a lo largo del rayo $\pi/6$ como se muestra en la FIGURA 10.4.2*a*).

b) Mida 2 unidades a lo largo del rayo $-\pi/4$. Vea la figura 10.4.2*b*).

c) Mida 3 unidades a lo largo del rayo $3\pi/4 + \pi = 7\pi/4$. De manera equivalente, pueden medirse tres unidades a lo largo del rayo $3\pi/4$ extendidas *hacia atrás* a través del polo. Advierta con cuidado en la figura 10.4.2*c*) que el punto $(-3, 3\pi/4)$ no está en el mismo cuadrante que el lado final del ángulo dado. ■

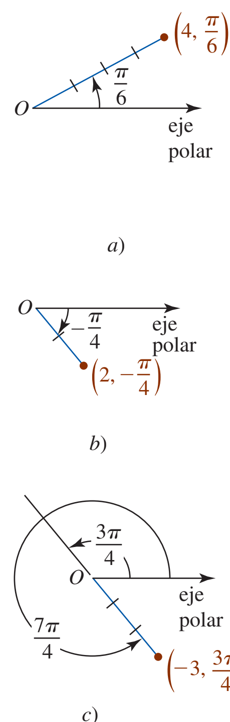


FIGURA 10.4.2 Punto en coordenadas polares del ejemplo 1

En contraste con un sistema de coordenadas rectangulares, la descripción de un punto en coordenadas polares no es única. Lo anterior es una consecuencia inmediata del hecho de que

$$(r, \theta) \qquad \text{y} \qquad (r, \theta + 2n\pi),\ n \text{ un entero,}$$

son equivalentes. Para complicar más el problema pueden utilizarse valores negativos de r.

EJEMPLO 2 Puntos polares equivalentes

Las siguientes coordenadas son algunas representaciones alternas del punto $(2, \pi/6)$:

$$(2, 13\pi/6), \quad (2, -11\pi/6), \quad (-2, 7\pi/6), \quad (-2, -5\pi/6).$$ ■

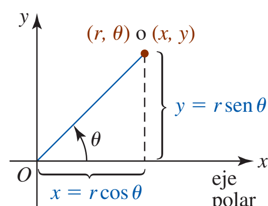


FIGURA 10.4.3 Relación entre coordenadas polares y rectangulares

Conversión de coordenadas polares en rectangulares Al sobreponer un sistema de coordenadas rectangulares sobre un sistema de coordenadas polares, como se muestra en la FIGURA 10.4.3, podemos convertir la descripción polar de un punto en coordenadas rectangulares utilizando

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta. \tag{1}$$

Estas fórmulas de conversión son válidas para cualesquiera valores de r y θ en una representación polar equivalente de (r, θ).

EJEMPLO 3 Polar a rectangular

Convierta las coordenadas polares $(2, \pi/6)$ en coordenadas rectangulares.

Solución Con $r = 2$, $\theta = \pi/6$, tenemos de (1)

$$x = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$
$$y = 2\,\text{sen}\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

De tal modo, $(2, \pi/6)$ es equivalente a $(\sqrt{3}, 1)$ en coordenadas rectangulares. ■

Conversión de coordenadas rectangulares en polares Debe ser evidente de la figura 10.4.3 que x, y, r y θ también están relacionadas por medio de

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Las ecuaciones en (2) se usan para convertir las coordenadas rectangulares (x, y) en coordenadas polares (r, θ).

EJEMPLO 4 Rectangular a polar

Convierta las coordenadas rectangulares $(-1, 1)$ en coordenadas polares.

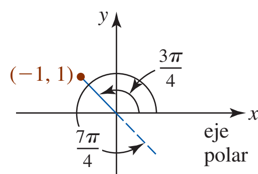


FIGURA 10.4.4 Punto en el ejemplo 4

Solución Con $x = -1$, $y = 1$, tenemos de (2)

$$r^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = -1.$$

Ahora, $r^2 - 2$ o $r = \pm\sqrt{2}$, y dos de los muchos ángulos que satisfacen $\tan\theta = -1$ son $3\pi/4$ y $7\pi/4$. En la FIGURA 10.4.4 advertimos que dos representaciones polares de $(-1, 1)$ son

$$(\sqrt{2}, 3\pi/4) \qquad \text{y} \qquad (-\sqrt{2}, 7\pi/4).$$ ■

En el ejemplo 4, advierta que no es posible sólo aparear *cualquier* ángulo θ y *cualquier* valor r que satisfaga (2); estas soluciones también deben ser consistentes con (1). Como los puntos $(-\sqrt{2}, 3\pi/4)$ y $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$ yacen en el cuarto cuadrante, no son representaciones polares del punto $(-1, 1)$ del segundo cuadrante.

Hay casos en el cálculo en que una ecuación rectangular debe expresarse como una ecuación polar $r = f(\theta)$. El siguiente ejemplo ilustra cómo hacerlo utilizando las fórmulas de conversión en (1).

EJEMPLO 5 Ecuación rectangular en ecuación polar

Encuentre la ecuación polar que tiene la misma gráfica que el círculo $x^2 + y^2 = 8x$.

Solución Al sustituir $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ en la ecuación dada encontramos que

$$\begin{aligned} r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta &= 8r\cos\theta \\ r^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) &= 8r\cos\theta \quad \leftarrow \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1 \\ r(r - 8\cos\theta) &= 0. \end{aligned}$$

La última ecuación implica que $r = 0$ o $r = 8\cos\theta$. Puesto que $r = 0$ determina sólo el polo O, concluimos que la ecuación polar del círculo es $r = 8\cos\theta$. Advierta que el círculo $x^2 + y^2 = 8x$ pasa por el origen puesto que $x = 0$ y $y = 0$ satisfacen la ecuación. En cuanto a la ecuación polar $r = 8\cos\theta$ del círculo, el origen o polo corresponde a las coordenadas polares $(0, \pi/2)$. ■

EJEMPLO 6 Ecuación rectangular en ecuación polar

Encuentre la ecuación polar que tiene la misma gráfica que la parábola $x^2 = 8(2 - y)$.

Solución Se sustituyen x y y en la ecuación indicada por $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y se resuelve para r en términos de θ:

$$\begin{aligned} r^2\cos^2\theta &= 8(2 - r\,\text{sen}\,\theta) \\ r^2(1 - \text{sen}^2\theta) &= 16 - 8r\,\text{sen}\,\theta \\ r^2 &= r^2\text{sen}^2\theta - 8r\,\text{sen}\,\theta + 16 \quad \leftarrow \text{el lado derecho es un cuadrado perfecto} \\ r^2 &= (r\,\text{sen}\,\theta - 4)^2 \\ r &= \pm(r\,\text{sen}\,\theta - 4). \end{aligned}$$

Al resolver para r se producen dos ecuaciones,

$$r = \frac{4}{1 + \text{sen}\,\theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{-4}{1 - \text{sen}\,\theta}.$$

Se recuerda al lector que, por la convención *ii*) de la definición 10.4.1, (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan este mismo punto. El lector debe verificar que si (r, θ) se sustituye por $(-r, \theta + \pi)$ en la segunda de estas dos ecuaciones obtendrá la primera ecuación. En otras palabras, las ecuaciones son equivalentes y por ello simplemente es posible considerar la ecuación polar de la parábola como $r = 4/(1 + \text{sen}\,\theta)$. ■

En el último ejemplo expresamos una ecuación polar $r = f(\theta)$ como una ecuación rectangular utilizando (1) y (2).

EJEMPLO 7 Ecuación polar en ecuación rectangular

Encuentre una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar $r^2 = 9\cos 2\theta$.

Solución Primero, empleamos la identidad trigonométrica para el coseno de un ángulo doble:

$$r^2 = 9(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta). \quad \leftarrow \cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \tag{3}$$

Ahora de (1) escribimos $\cos\theta = x/r$ y $\text{sen}\,\theta = y/r$, y de (2) tenemos $r^2 = x^2 + y^2$. Por tanto,

$$\cos^2\theta = \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad \text{sen}^2\theta = \frac{y^2}{r^2} = \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

Al sustituir r^2, $\cos^2\theta$ y $\text{sen}^2\theta$ en (3) se produce

$$x^2 + y^2 = 9\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right) \qquad \text{o} \qquad (x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2).$$ ■

La siguiente sección se dedicará a graficar ecuaciones polares.

Ejercicios 10.4 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-32.

Fundamentos

En los problemas 1-6, grafique el punto con las coordenadas polares indicadas.

1. $(3, \pi)$ **2.** $(2, -\pi/2)$ **3.** $\left(-\frac{1}{2}, \pi/2\right)$

4. $(-1, \pi/6)$ **5.** $(-4, -\pi/6)$ **6.** $\left(\frac{2}{3}, 7\pi/4\right)$

En los problemas 7 a 12, encuentre coordenadas polares alternas que satisfagan

a) $r > 0, \theta < 0$ ***b)*** $r > 0, \theta > 2\pi$
c) $r < 0, \theta > 0$ ***d)*** $r < 0, \theta < 0$

para cada punto con las coordenadas polares indicadas.

7. $(2, 3\pi/4)$ **8.** $(5, \pi/2)$ **9.** $(4, \pi/3)$
10. $(3, \pi/4)$ **11.** $(1, \pi/6)$ **12.** $(3, 7\pi/6)$

En los problemas 13-18, determine las coordenadas rectangulares de cada punto con las coordenadas polares indicadas.

13. $\left(\frac{1}{2}, 2\pi/3\right)$ **14.** $(-1, 7\pi/4)$ **15.** $(-6, -\pi/3)$

16. $\left(\sqrt{2}, 11\pi/6\right)$ **17.** $(4, 5\pi/4)$ **18.** $(-5, \pi/2)$

En los problemas 19-24, determine las coordenadas polares que satisfagan

a) $r > 0, -\pi < \theta \le \pi$ ***b)*** $r < 0, -\pi < \theta \le \pi$

para cada punto con las coordenadas rectangulares indicadas.

19. $(-2, -2)$ **20.** $(0, -4)$ **21.** $(1, -\sqrt{3})$
22. $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$ **23.** $(7, 0)$ **24.** $(1, 2)$

En los problemas 25-30, dibuje la región sobre el plano que consiste en los puntos (r, θ) cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones indicadas.

25. $2 \le r < 4, 0 \le \theta \le \pi$
26. $2 < r \le 4$
27. $0 \le r \le 2, -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$
28. $r \ge 0, \pi/4 < \theta < 3\pi/4$
29. $-1 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi/2$
30. $-2 \le r < 4, \pi/3 \le \theta \le \pi$

En los problemas 31-40, encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación rectangular dada.

31. $y = 5$ **32.** $x + 1 = 0$
33. $y = 7x$ **34.** $3x + 8y + 6 = 0$
35. $y^2 = -4x + 4$ **36.** $x^2 - 12y - 36 = 0$
37. $x^2 + y^2 = 36$ **38.** $x^2 - y^2 = 1$
39. $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$ **40.** $x^3 + y^3 - xy = 0$

En los problemas 41-52, encuentre una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar dada.

41. $r = 2\sec\theta$ **42.** $r\cos\theta = -4$
43. $r = 6\,\mathrm{sen}\,2\theta$ **44.** $2r = \tan\theta$
45. $r^2 = 4\,\mathrm{sen}\,2\theta$ **46.** $r^2\cos 2\theta = 16$
47. $r + 5\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$ **48.** $r = 2 + \cos\theta$
49. $r = \dfrac{2}{1 + 3\cos\theta}$ **50.** $r(4 - \mathrm{sen}\,\theta) = 10$
51. $r = \dfrac{5}{3\cos\theta + 8\,\mathrm{sen}\,\theta}$ **52.** $r = 3 + 3\sec\theta$

Piense en ello

53. ¿Cómo expresaría la distancia d entre dos puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) en términos de sus coordenadas polares?

54. Usted sabe cómo encontrar la ecuación rectangular de una recta que pasa por dos puntos con coordenadas rectangulares. ¿Cómo encontraría una ecuación polar de una recta que pasa por dos puntos con coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2)? Aplique sus ideas encontrando una ecuación polar de la recta que pasa por $(3, 3\pi/4)$ y $(1, \pi/4)$. Determine las coordenadas polares de las intersecciones de la recta con los ejes x y y.

55. En coordenadas rectangulares las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función $y = f(x)$ se determinan a partir de las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. En la siguiente sección se graficarán las ecuaciones polares $r = f(\theta)$. ¿Cuál es la importancia de las soluciones de la ecuación $f(\theta) = 0$?

10.5 Gráficas de ecuaciones polares

Introducción La gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ es el conjunto de puntos P con *al menos* un conjunto de coordenadas polares que satisfacen la ecuación. Puesto que lo más probable es que su salón de clases no tenga una rejilla de coordenadas polares, para facilitar la graficación y discusión de gráficas de una ecuación polar $r = f(\theta)$, se sobrepondrá, como en la sección anterior, un sistema de coordenadas rectangulares sobre el sistema de coordenadas polares.

Se iniciará con algunas gráficas polares simples.

EJEMPLO 1 Un círculo centrado en el origen

Grafique $r = 3$.

Solución Puesto que θ no se especifica, el punto $(3, \theta)$ yace sobre la gráfica de $r = 3$ para cualquier valor de θ y se encuentra a 3 unidades del origen. Observamos en la FIGURA 10.5.1 que la gráfica es el círculo de radio 3 centrado en el origen.

Además, sabemos de (2) de la sección 10.4 que $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, por lo que $r = 3$ produce la familiar ecuación rectangular $x^2 + y^2 = 3^2$ de un círculo de radio 3 centrado en el origen. ■

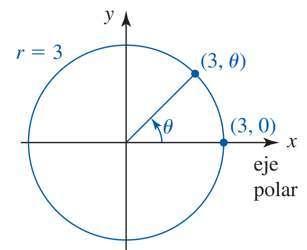


FIGURA 10.5.1 Círculo del ejemplo 1

Círculos centrados en el origen En general, si a es cualquier constante distinta de cero, la gráfica polar de

$$r = a \tag{1}$$

es un círculo de radio $|a|$ con radio en el origen.

EJEMPLO 2 Una recta que pasa por el origen

Grafique $\theta = \pi/4$.

Solución Puesto que r no se especifica, el punto $(r, \pi/4)$ yace sobre la gráfica para cualquier valor de r. Si $r > 0$, entonces este punto se encuentra sobre la media recta en el primer cuadrante; si $r < 0$, entonces el punto está sobre la media recta en el tercer cuadrante. Para $r = 0$, el punto $(0, \pi/4)$ es el polo u origen. Por tanto, la gráfica polar de $\theta = \pi/4$ es la recta completa que pasa por el origen y forma un ángulo de $\pi/4$ con el eje polar o eje x positivo. Vea la FIGURA 10.5.2. ■

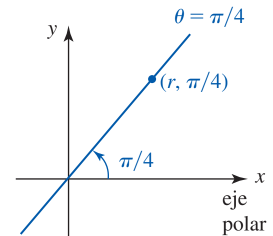


FIGURA 10.5.2 Recta en el ejemplo 2

Rectas que pasan por el origen En general, si α es cualquier constante real distinta de cero, la gráfica polar de

$$\theta = \alpha \tag{2}$$

es una recta que pasa por el origen y forma un ángulo de α radianes con el eje polar.

EJEMPLO 3 Una espiral

Grafique $r = \theta$.

Solución Cuando $\theta \geq 0$, r aumenta y los puntos (r, θ) se enrollan alrededor del polo de una manera opuesta al giro de las manecillas del reloj. Esto se ilustra mediante la porción azul de la gráfica en la FIGURA 10.5.3. La porción roja de la grafica se obtuvo al graficar puntos para $\theta < 0$.

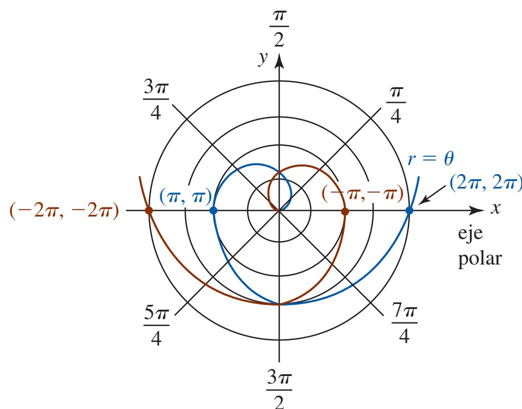


FIGURA 10.5.3 Gráfica de la ecuación del ejemplo 3 ■

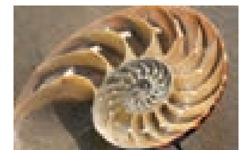
Espirales Muchas gráficas en coordenadas polares reciben nombres especiales. La gráfica en el ejemplo 3 es un caso especial de

$$r = a\theta, \tag{3}$$

donde a es una constante. Una gráfica de esta ecuación se denomina **espiral de Arquímedes**. Una ecuación polar de la forma

$$r = ae^{b\theta} \tag{4}$$

recibe el nombre de **espiral logarítmica**. La curva que describe el caparazón de múltiples cámaras de un nautilo es un ejemplo de una espiral logarítmica. Vea los problemas 31 y 32 en los ejercicios 10.5.



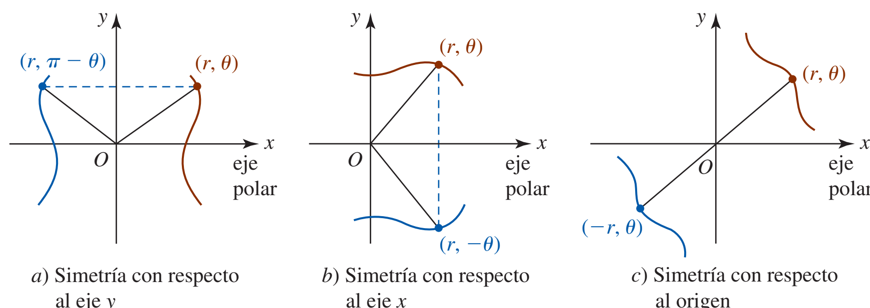
Mitad del caparazón de un nautilo de cámaras múltiples



Simetrías de un copo de nieve

Además del trazado de puntos básico, muchas veces puede recurrirse a la simetría para graficar una ecuación polar.

Simetría Como se ilustra en la FIGURA 10.5.4, una gráfica polar puede tener tres tipos de simetría. Una gráfica polar es **simétrica con respecto al eje y** si siempre que (r, θ) es un punto sobre



a) Simetría con respecto al eje y *b*) Simetría con respecto al eje x *c*) Simetría con respecto al origen

FIGURA 10.5.4 Simetrías de una gráfica polar

la gráfica, $(r, \pi - \theta)$ es también un punto sobre la gráfica. Una gráfica polar es **simétrica con respecto al eje x** si siempre que (r, θ) es un punto de la gráfica, $(r, -\theta)$ también es un punto sobre la gráfica. Por último, una gráfica polar es **simétrica con respecto al origen** si siempre que (r, θ) está sobre la gráfica, $(-r, \theta)$ también es un punto sobre la gráfica.

Se tienen las siguientes pruebas de simetría de una gráfica polar.

Pruebas de simetría de la gráfica de una ecuación polar

La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto:

- al **eje y** si al sustituir (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$ resulta la misma ecuación; (5)
- al **eje x** si al sustituir (r, θ) por $(r, -\theta)$ resulta la misma ecuación; (6)
- al **origen** si al sustituir (r, θ) por $(-r, \theta)$ resulta la misma ecuación. (7)

En coordenadas rectangulares la descripción de un punto es única. Por consiguiente, en coordenadas rectangulares si falla un tipo particular de simetría, entonces es posible decir de manera definitiva que la gráfica no posee esa simetría.

Como la descripción polar de un punto no es única, la gráfica de una ecuación polar aún debe tener un tipo particular de simetría, incluso cuando es posible que falle la prueba para la misma. Por ejemplo, si al sustituir (r, θ) por $(r, -\theta)$ no se produce la ecuación polar original, la gráfica de esa ecuación debe seguir teniendo simetría con respecto al eje x. Por tanto, si una de las pruebas de reemplazo en (5)-(7) no produce la misma ecuación polar, lo mejor que podemos afirmar es "no hay conclusión".

EJEMPLO 4 Graficación de una ecuación polar

Grafique $r = 1 - \cos\theta$.

Solución Una manera de graficar esta ecuación es incorporar unos cuantos puntos bien escogidos correspondientes a $0 \le \theta \le 2\pi$. Como lo indica la siguiente tabla,

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	0	0.29	1	1.71	2	1.71	1	0.29	0

cuando θ avanza de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$, r aumenta desde $r = 0$ (el origen) hasta $r = 1$. Vea la FIGURA 10.5.5*a*). Cuando θ avanza de $\theta = \pi/2$ a $\theta = \pi$, r continúa aumentando desde $r = 1$ hasta su

valor máximo de $r=2$. Vea la figura 10.5.5*b*). Luego, para $\theta = \pi$ a $\theta = 3\pi/2$, r empieza a disminuir de $r=2$ hasta $r=1$. Para $\theta = 3\pi/2$ a $\theta = 2\pi$, r continúa disminuyendo y se termina de nuevo en el origen $r=0$. Vea la figura 10.5.5*c*) y *d*).

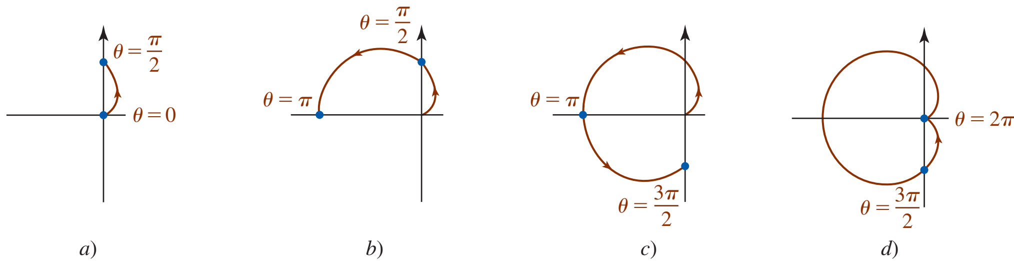


FIGURA 10.5.5 Gráfica de la ecuación del ejemplo 4

Aprovechando la simetría podríamos haber graficado simplemente puntos para $0 \le \theta \le \pi$. A partir de la identidad trigonométrica para la función coseno $\cos(-\theta) = \cos\theta$ concluimos de (6) que la gráfica de $r = 1 - \cos\theta$ es simétrica con respecto al eje x. Podemos obtener la gráfica completa de $r = 1 - \cos\theta$ reflejando en el eje x la parte de la gráfica dada en la figura 10.5.5*b*). ■

Cardioides La ecuación polar en el ejemplo 4 es un miembro de la familia de ecuaciones que en su totalidad tienen una gráfica "en forma de corazón" que pasa por el origen. Una gráfica de cualquier ecuación polar en la forma

$$r = a \pm a\operatorname{sen}\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \pm a\cos\theta \tag{8}$$

recibe el nombre de **cardioide**. La única diferencia en la gráfica de estas cuatro ecuaciones es su simetría con respecto al eje y ($r = a \pm a \operatorname{sen}\theta$) o con respecto al eje x ($r = a \pm a\cos\theta$). En la FIGURA 10.5.6 supusimos que $a > 0$.

Si conocemos la forma y orientación básica de una cardioide, obtenemos una gráfica rápida y precisa al graficar los cuatro puntos correspondientes a $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$ y $\theta = 3\pi/2$. Las gráficas de $r = a \pm a\operatorname{sen}\theta$ son simétricas con respecto al eje y y las gráficas de $r = a \pm a\cos\theta$ son simétricas con respecto al eje x.

Limacones Las cardioides son casos especiales de curvas polares conocidas como **limacones**:

$$r = a \pm b\operatorname{sen}\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \pm b\cos\theta. \tag{9}$$

La forma de una limacón depende de las magnitudes de a y b. Supondremos que $a > 0$ y $b > 0$. Para $0 < a/b < 1$, obtenemos una **limacón con un lazo interior** como se ilustra en la FIGURA 10.5.7*a*). Cuando $a = b$ o equivalentemente $a/b = 1$ obtenemos una **cardioide**. Para $1 < a/b < 2$, encontramos una **limacón con un orificio** como se muestra en la figura 10.5.7*b*). Para $a/b \ge 2$, la curva se llama **limacón convexa**. Vea la figura 10.5.7*c*).

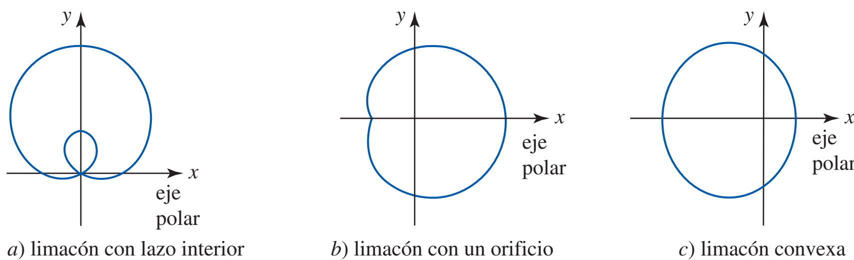
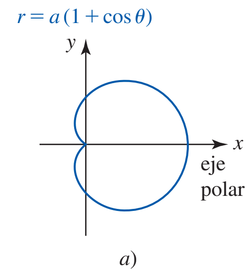
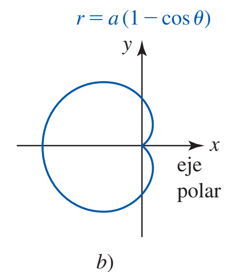
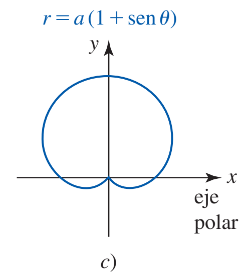


FIGURA 10.5.7 Tres tipos de limacones: para $0 < a/b < 1$ obtenemos *a*); para $1 < a/b < 2$ obtenemos *b*); para $a/b \ge 2$ obtenemos *c*)







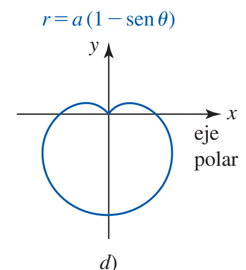


FIGURA 10.5.6 Cardioides

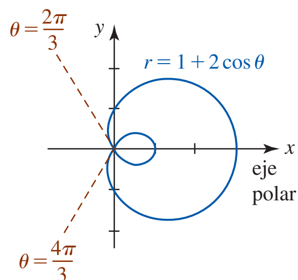


FIGURA 10.5.8 Gráfica de la ecuación del ejemplo 6

EJEMPLO 5 Una limacón

La gráfica de $r = 3 - \text{sen}\,\theta$ es una limacón convexa, puesto que $a = 3$, $b = 1$ y $a/b = 3 > 2$. La gráfica de esta ecuación es similar a la de la figura 10.5.7*c*) excepto en que la gráfica es simétrica con respecto al eje *y*. ■

EJEMPLO 6 Una limacón

La gráfica de $r = 1 + 2\cos\theta$ es una limacón con un lazo interior, ya que $a = 1$, $b = 2$ y $a/b = \frac{1}{2} < 1$. Para $\theta \geq 0$, note en la FIGURA 10.5.8 que la limacón empieza en $\theta = 0$ o $(3, 0)$. La gráfica pasa por el eje *y* en $(1, \pi/2)$ y luego entra al origen $(r = 0)$ en el primer ángulo para el cual $r = 0$ o $1 + 2\cos\theta = 0$ o $\cos\theta = -\frac{1}{2}$. Esto implica que $\theta = 2\pi/3$. En $\theta = \pi$, la curva pasa por $(-1, \pi)$. El resto de la gráfica puede completarse entonces utilizando el hecho de que es simétrica con respecto al eje *x*. ■

Tangentes a la gráfica en el origen En el ejemplo 6, las rectas $\theta = 2\pi/3$ y $\theta = 4\pi/3$ que se muestran en rojo en la figura 10.5.8, donde la gráfica de $r = 1 + 2\cos\theta$ entra y sale, respectivamente, del origen, son en realidad tangentes a la gráfica en el origen. En general, si $r = 0$ para $\theta = \theta_0$ y $dr/d\theta \neq 0$ cuando $\theta = \theta_0$, entonces la gráfica de $r = f(\theta)$ es tangente a la recta $\theta = \theta_0$ en el origen. Se demostrará lo anterior en la siguiente sección.

EJEMPLO 7 La curva de la rosa

Grafique $r = 2\cos 2\theta$.

Solución Como

$$\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta \qquad \text{y} \qquad \cos(-2\theta) = \cos 2\theta$$

concluimos por (5) y (6) de las pruebas de simetría que la gráfica es simétrica con respecto tanto al eje *x* como al eje *y*. Un momento de reflexión convencerá al lector de que sólo se necesita considerar $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Al emplear los datos de la siguiente tabla, vemos que la porción punteada de la gráfica indicada en la FIGURA 10.5.9 es la que se completó por simetría. La gráfica recibe el nombre de **curva de la rosa de cuatro pétalos**.

FIGURA 10.5.9 Gráfica de la ecuación del ejemplo 7

θ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
r	2	$\sqrt{3}$	1	0	-1	$-\sqrt{3}$	-2

Advierta de la tabla que $r = 0$ y $dr/d\theta = -4\,\text{sen}\,2\theta \neq 0$ para $\theta = \pi/4$. Por consiguiente, la gráfica es tangente a la recta $\theta = \pi/4$ en el origen. ■

Curvas de las rosas En general, si *n* es un entero positivo, entonces las gráficas de

$$r = a\,\text{sen}\,n\theta \qquad \text{o} \qquad r = a\cos n\theta, \qquad n \geq 2 \tag{10}$$

se denominan **curvas de las rosas**, aunque, como puede verse en la FIGURA 10.5.10, la curva se asemeja más a una margarita. Se advierte que el número de **pétalos** o **lazos** de la curva es:

- *n* cuando *n* es impar, y
- $2n$ cuando *n* es par.

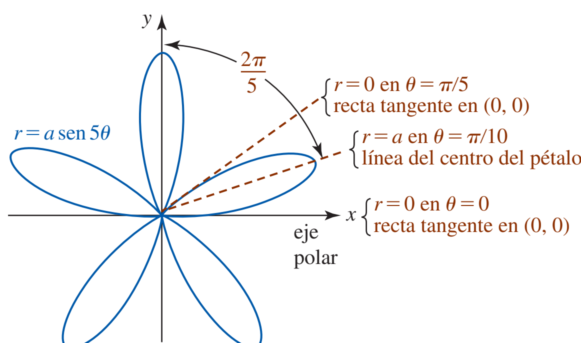


FIGURA 10.5.10 Curva de la rosa con cinco pétalos

Para graficar una curva de la rosa es posible iniciar graficando un pétalo. En un principio, encontramos un ángulo θ para el cual r es un máximo. Esto proporciona la *recta del centro* del pétalo. Después determinamos los valores correspondientes de θ para los cuales la curva de la rosa entra al origen ($r = 0$). Para completar la gráfica aprovechamos el hecho de que las rectas del centro de los pétalos están espaciadas $2\pi/n$ radianes ($360/n$ grados) si n es impar, y $2\pi/2n = \pi/n$ radianes ($180/n$ grados) si n es par. En la figura 10.5.10 dibujamos la gráfica de $r = a$ sen 5θ, $a > 0$. La recta del centro del pétalo en el primer cuadrante se determina a partir de la solución de

$$a = a\,\text{sen}\,5\theta \qquad \text{o} \qquad 1 = \text{sen}\,5\theta.$$

La última ecuación implica que $5\theta = \pi/2$ o $\theta = \pi/10$. El espaciamiento entre las rectas del centro y los cinco pétalos es $2\pi/5$ radianes (72°). Además, $r = 0$, o sen $5\theta = 0$, para $5\theta = 0$ y $5\theta = \pi$. Puesto que $dr/d\theta = 5a\cos 5\theta \neq 0$ para $\theta = 0$ y $\theta = \pi/5$, la gráfica del pétalo en el primer cuadrante es tangente a aquellas rectas en el origen.

En el ejemplo 5 de la sección 10.4 observamos que la ecuación polar $r = 8\cos\theta$ es equivalente a la ecuación rectangular $x^2 + y^2 = 8x$. Completando el cuadrado en x en la ecuación rectangular, reconocemos que

$$(x - 4)^2 + y^2 = 16$$

como un círculo de radio 4 centrado en (4, 0) sobre el eje x. Ecuaciones polares tales como $r = 8\cos\theta$ o $r = 8$ sen θ son círculos y constituyen también casos especiales de curvas de las rosas. Vea la FIGURA 10.5.11.

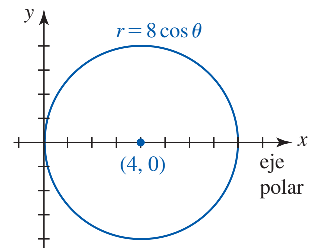


FIGURA 10.5.11 Gráfica de la ecuación $r = 8\cos\theta$

Círculos con centros sobre un eje Cuando $n = 1$ en (10) obtenemos

$$r = a\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{o} \qquad r = a\cos\theta, \tag{11}$$

las cuales son ecuaciones polares de círculos que pasan por el origen con diámetro $|a|$ y con centros $(a/2, 0)$ sobre el eje x ($r = a\cos\theta$), o con centro $(0, a/2)$, sobre el eje y ($r = a$ sen θ). La FIGURA 10.5.12 ilustra las gráficas de las ecuaciones en (11) en los casos en los que $a > 0$ y $a < 0$.

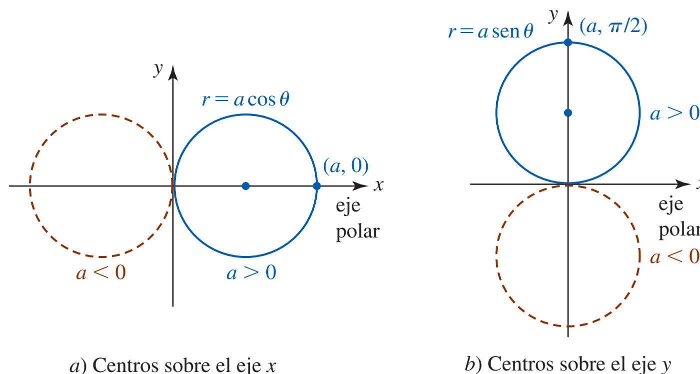
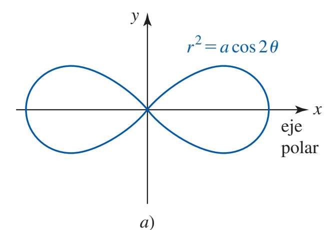


FIGURA 10.5.12 Círculos que pasan por el origen con centros sobre el eje



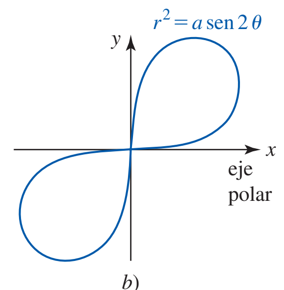


FIGURA 10.5.13 Lemniscatas

Lemniscatas Si n es un entero positivo, las gráficas de

$$r^2 = a\cos 2\theta \qquad \text{o} \qquad r^2 = a\,\text{sen}\,2\theta, \tag{12}$$

donde $a > 0$, se llaman **lemniscatas**. Por (7) de las pruebas de simetría puede advertir que las gráficas de ambas ecuaciones en (12) son simétricas respecto al origen. Además, por (6) de las pruebas de simetría, la gráfica $r^2 = a\cos 2\theta$ es simétrica respecto al eje x. La FIGURA 10.5.13 muestra gráficas típicas de las ecuaciones $r^2 = a\cos 2\theta$ y $r^2 = a$ sen θ, respectivamente.

Puntos de intersección En coordenadas rectangulares es posible encontrar los puntos (x, y) donde las gráficas de dos funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ se intersecan al igualar los valores y. Las soluciones reales de la ecuación $f(x) = g(x)$ corresponden a *todas* las coordenadas x de los puntos donde las gráficas se intersecan. En contraste, pueden surgir problemas en coordenadas polares cuando se intenta el mismo método para determinar dónde se intersecan las gráficas de dos ecuaciones polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$.

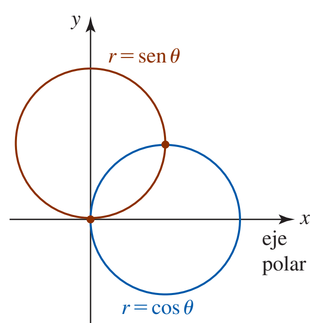


FIGURA 10.5.14 Círculos que se intersecan del ejemplo 8

EJEMPLO 8 Círculos que se intersecan

En la FIGURA 10.5.14 vemos que los círculos $r = \text{sen}\,\theta$ y $r = \cos\theta$ tienen dos puntos de intersección. Al igualar los valores r, la ecuación $\text{sen}\,\theta = \cos\theta$ lleva a $\theta = \pi/4$. Al sustituir este valor en cualquier ecuación obtenemos $r = \sqrt{2}/2$. De tal modo, se ha encontrado sólo un punto polar individual $\left(\sqrt{2}/2, \pi/4\right)$ donde se intersecan las gráficas. En la figura es manifiesto que las gráficas también se intersecan en el origen. Pero el problema aquí es que el origen o polo es $(0, \pi/2)$ sobre la gráfica de $r = \cos\theta$, aunque es $(0, 0)$ sobre la gráfica de $r = \text{sen}\,\theta$. Esta situación es análoga a las curvas que alcanzan el mismo punto en diferentes tiempos. ■

Rotación de gráficas polares En la sección 1.2 vimos que si $y = f(x)$ es la ecuación rectangular de una función, entonces las gráficas de $y = f(x - c)$ y $y = f(x + c)$, $c > 0$, se obtienen *desplazando* la gráfica f horizontalmente c unidades a la derecha y luego a la izquierda, respectivamente. En contraste, si $r = f(\theta)$ es una ecuación polar, entonces las gráficas de $f(\theta - \gamma)$ y $f(\theta + \gamma)$, donde $\gamma > 0$, pueden obtenerse *rotando* la gráfica de f en una cantidad γ. Específicamente:

- La gráfica de $r = f(\theta - \gamma)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada en *sentido contrario al de las manecillas del reloj* alrededor del origen en una cantidad γ.
- La gráfica de $r = f(\theta + \gamma)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada en *dirección de las manecillas del reloj* alrededor del origen en una cantidad γ.

Por ejemplo, la gráfica de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$ se muestra en la figura 10.5.6*a*). La gráfica de $r = a(1 + \cos(\theta - \pi/2))$ es la gráfica de $r = a(1 + \cos\theta)$ rotada en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad $\pi/2$. Su gráfica debe ser entonces la que se indica en la figura 10.5.6*c*). Esto tiene sentido, porque la fórmula de la suma de los cosenos produce

Vea las identidades en (18) de la sección 1.4.

$$r = a[1 + \cos(\theta - \pi/2)] = a[1 + \cos\theta\cos(\pi/2) + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,(\pi/2)] = a(1 + \text{sen}\,\theta).$$

De manera similar, al rotar $r = a(1 + \cos\theta)$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad π se produce

$$r = a[1 + \cos(\theta - \pi)] = a[1 + \cos\theta\cos\pi + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\pi] = a(1 - \cos\theta).$$

Ahora observe de nuevo la figura 10.5.13. De

$$r^2 = a\cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = a\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = a\,\text{sen}\,2\theta$$

se ve que la gráfica de la lemniscata en la figura 10.5.13*b*) es la gráfica de la figura 10.5.13*a*) rotada en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad igual a $\pi/4$.

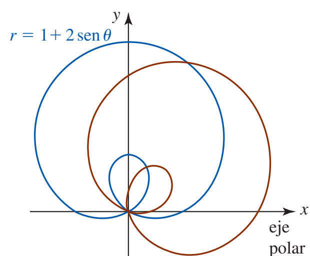


FIGURA 10.5.15 Gráficas de las ecuaciones polares del ejemplo 9

EJEMPLO 9 Gráfica polar rotada

Grafique $r = 1 + 2\,\text{sen}\,(\theta + \pi/4)$.

Solución La gráfica de la ecuación dada es la gráfica de la limacón $r = 1 + 2\,\text{sen}\,\theta$ rotado en sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad igual a $\pi/4$. En la FIGURA 10.5.15 la gráfica azul es la de $r = 1 + 2\,\text{sen}\,\theta$ y la gráfica roja es la gráfica rotada. ■

$\frac{d}{d\theta}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

i) La curva de la rosa de cuatro pétalos del ejemplo 7 se obtiene graficando r para valores de θ que satisfacen $0 \le \theta < 2\pi$. Vea la FIGURA 10.5.16. No suponga que esto es cierto para toda curva de la rosa. De hecho, la curva de la rosa de cinco pétalos analizada en la figura 10.5.10 se obtiene mediante valores de θ que satisfacen $0 \le \theta < \pi$. En general, una curva de la rosa $r = a\,\text{sen}\,n\theta$ o $r = a\cos n\theta$ se traza exactamente una vez para $0 \le \theta \le 2\pi$ si n es par y una vez para $0 \le \theta < \pi$ si n es impar. Observaciones como la anterior serán importantes en la siguiente sección.

ii) El ejemplo 8 ilustra una de varias dificultades frustrantes al trabajar con coordenadas polares:

Un punto puede estar sobre la gráfica de una ecuación polar aun cuando sus coordenadas no satisfagan la ecuación.

Esto es algo que no puede ocurrir en coordenadas rectangulares. Por ejemplo, el lector debe verificar que $(2, \pi/2)$ es una descripción polar alterna del punto $(-2, 3\pi/2)$. Además, verifique que $(-2, 3\pi/2)$ es un punto sobre la gráfica de $r = 1 + 3\,\text{sen}\,\theta$ mostrando que las coordenadas satisfacen la ecuación. Sin embargo, advierta que las coordenadas alternas $(2, \pi/2)$ no satisfacen la ecuación.

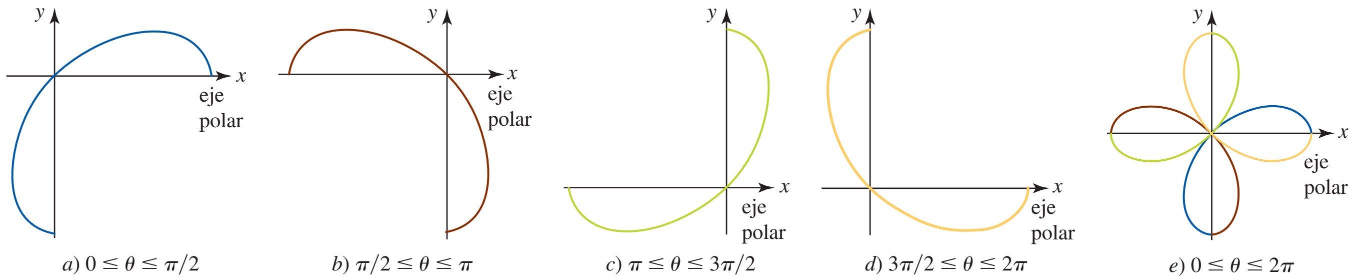


FIGURA 10.5.16 Graficación de $r = 2\cos 2\theta$

Ejercicios 10.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-33.

Fundamentos

En los problemas 1-30, identifique por nombre la gráfica de la ecuación polar dada. Después trace la gráfica de la ecuación.

1. $r = 6$
2. $r = -1$
3. $\theta = \pi/3$
4. $\theta = 5\pi/6$
5. $r = 2\theta,\ \theta \le 0$
6. $r = 3\theta,\ \theta \ge 0$
7. $r = 1 + \cos\theta$
8. $r = 5 - 5\,\text{sen}\,\theta$
9. $r = 2(1 + \text{sen}\,\theta)$
10. $2r = 1 - \cos\theta$
11. $r = 1 - 2\cos\theta$
12. $r = 2 + 4\,\text{sen}\,\theta$
13. $r = 4 - 3\,\text{sen}\,\theta$
14. $r = 3 + 2\cos\theta$
15. $r = 4 + \cos\theta$
16. $r = 4 - 2\,\text{sen}\,\theta$
17. $r = \text{sen}\,2\theta$
18. $r = 3\,\text{sen}\,4\theta$
19. $r = 3\cos 3\theta$
20. $r = 2\,\text{sen}\,3\theta$
21. $r = \cos 5\theta$
22. $r = 2\,\text{sen}\,9\theta$
23. $r = 6\cos\theta$
24. $r = -2\cos\theta$
25. $r = -3\,\text{sen}\,\theta$
26. $r = 5\,\text{sen}\,\theta$
27. $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$
28. $r^2 = 4\cos 2\theta$
29. $r^2 = -25\cos 2\theta$
30. $r^2 = -9\,\text{sen}\,2\theta$

En los problemas 31 y 32, la gráfica de la ecuación dada es una espiral. Dibuje su gráfica.

31. $r = 2^{\theta},\ \theta \ge 0$ (logarítmica)
32. $r\theta = \pi,\ \theta > 0$ (hiperbólica)

En los problemas 33-38, encuentre una ecuación de la gráfica polar dada.

33.

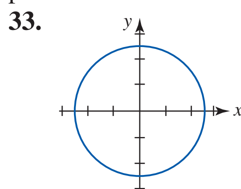


FIGURA 10.5.17 Gráfica del problema 33

34.

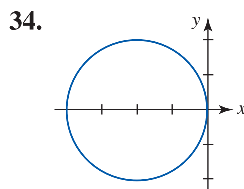


FIGURA 10.5.18 Gráfica del problema 34

35.

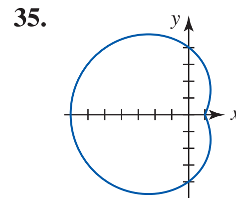


FIGURA 10.5.19 Gráfica del problema 35

36.

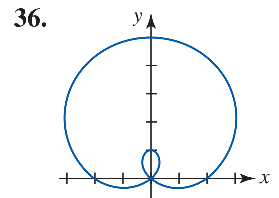


FIGURA 10.5.20 Gráfica del problema 36

37.

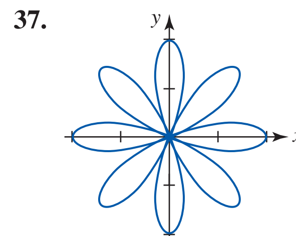


FIGURA 10.5.21 Gráfica del problema 37

38.

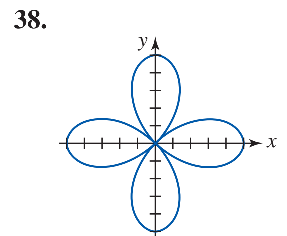


FIGURA 10.5.22 Gráfica del problema 38

En los problemas 39-42, encuentre los puntos de intersección de las gráficas del par de ecuaciones polares indicadas.

39. $r = 2$, $r = 4\,\text{sen}\,\theta$
40. $r = \text{sen}\,\theta$, $r = \text{sen}\,2\theta$
41. $r = 1 - \cos\theta$, $r = 1 + \cos\theta$
42. $r = 3 - 3\cos\theta$, $r = 3\cos\theta$

En los problemas 43 y 44, use el hecho de que $r = f(\theta)$ y $-r = f(\theta + \pi)$ describen la misma curva como una ayuda para determinar los puntos de intersección del par dado de ecuaciones polares.

43. $r = 3$, $r = 6\,\text{sen}\,2\theta$
44. $r = \cos 2\theta$, $r = 1 + \cos\theta$

Problemas con calculadora/SAC

45. Emplee un aparato de graficación para obtener la gráfica de la **bifolium** $r = 4\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta$ y el círculo $r = \text{sen}\,\theta$ sobre los mismos ejes. Encuentre todos los puntos de intersección de las gráficas.

46. Emplee un sistema de graficación para verificar que la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y la lemniscata $r^2 = 4\cos\theta$ se intersecan en cuatro puntos. Encuentre estos puntos de intersección de las gráficas.

En los problemas 47 y 48, las gráficas de las ecuaciones *a*)-*d*) representan una rotación de la gráfica de la ecuación dada. Intente dibujar estas gráficas a mano. Si tiene dificultades, entonces recurra a una calculadora o a un SAC.

47. $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$
 a) $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/2)$
 b) $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta + \pi/2)$
 c) $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/6)$
 d) $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta + \pi/4)$

48. $r = 2 + 4\cos\theta$
 a) $r = 2 + 4\cos(\theta + \pi/6)$
 b) $r = 2 + 4\cos(\theta - 3\pi/2)$
 c) $r = 2 + 4\cos(\theta + \pi)$
 d) $r = 2 + 4\cos(\theta - \pi/8)$

En los problemas 49-52, utilice una calculadora o un SAC, si es necesario, para vincular la gráfica dada con la ecuación polar apropiada en *a*)-*d*).

a) $r = 2\cos\dfrac{3\theta}{2}, \quad 0 \le \theta \le 4\pi$

b) $r = 2\cos\dfrac{\theta}{5}, \quad 0 \le \theta \le 5\pi$

c) $r = 2\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{4}, \quad 0 \le \theta \le 8\pi$

d) $r = 2\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}, \quad 0 \le \theta \le 4\pi$

49.

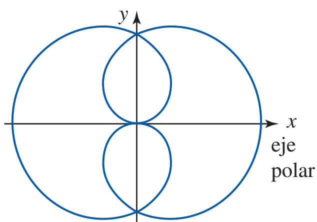


FIGURA 10.5.23 Gráfica del problema 49

50.

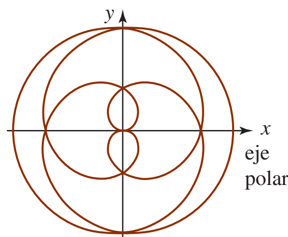


FIGURA 10.5.24 Gráfica del problema 50

51.

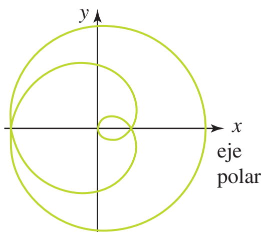


FIGURA 10.5.25 Gráfica del problema 51

52.

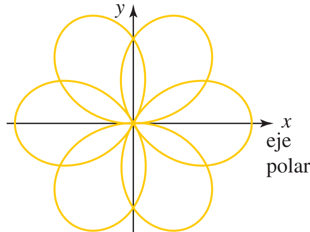


FIGURA 10.5.26 Gráfica del problema 52

53. Utilice un SAC para obtener gráficas de la ecuación polar $r = a + \cos\theta$ para $a = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \ldots, 3$.

54. Identifique todas las curvas en el problema 53. ¿Qué ocurre con las gráficas cuando $a \to \infty$?

Piense en ello

En los problemas 55-58, identifique las simetrías si el par de puntos dados está sobre la gráfica de $r = f(\theta)$.

55. $(r, \theta), (-r, \pi - \theta)$

56. $(r, \theta), (r, \theta + \pi)$

57. $(r, \theta), (-r, \theta + 2\pi)$

58. $(r, \theta), (-r, -\theta)$

En los problemas 59 y 60, considere que $r = f(\theta)$ es una ecuación polar. Interprete geométricamente el resultado dado.

59. $f(-\theta) = f(\theta)$ (función par)

60. $f(-\theta) = -f(\theta)$ (función impar)

61. ***a***) ¿Cuál es la diferencia entre los círculos $r = -4$ y $r = 4$?
 b) ¿Cuál es la diferencia entre las rectas que pasan por el origen $\theta = \pi/6$ y $\theta = 7\pi/6$?

62. **Un poco de historia** El italiano **Galileo Galilei** (1564-1642) es recordado por su gran número de descubrimientos e innovaciones en los campos de la astronomía y la física. Con un telescopio reflector de su propio diseño fue el primero en descubrir las lunas de Júpiter. Mediante sus observaciones del planeta Venus y de las manchas solares, Galileo a la larga apoyó la controvertida opinión de Nicolás Copérnico en el sentido de que los planetas giran alrededor del Sol. El trabajo empírico de Galileo sobre la gravedad antecedió las aportaciones de Isaac Newton. Fue el primero en efectuar estudios científicos para determinar la aceleración de la gravedad. Al medir el tiempo que tardan bolas metálicas al rodar hacia abajo en un plano inclinado, Galileo pudo calcular la velocidad de cada bola y a partir de esas observaciones concluyó que la distancia s que se mueve una bola se relaciona con el tiempo t mediante $s = \frac{1}{2}gt^2$, donde g es la aceleración debida a la gravedad.

Suponga que varias bolas metálicas se sueltan simultáneamente desde un punto común y que se dejan deslizar hacia abajo por planos inclinados sin fricción a diversos ángulos, con cada bola acelerándose por la gravedad. Vea la FIGURA 10.5.27. Demuestre que en cualquier instante, todas las bolas yacen en un círculo común cuyo punto superior más alto es el punto de liberación. Galileo pudo demostrar esto sin el beneficio de las coordenadas rectangulares o polares.

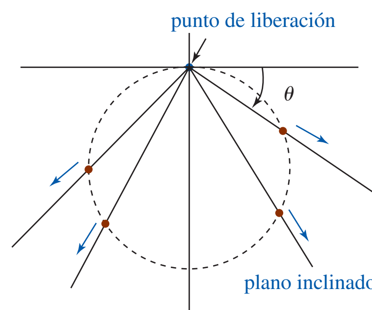


FIGURA 10.5.27 Planos inclinados del problema 62

10.6 Cálculo en coordenadas polares

Introducción En esta sección se responde a tres problemas de cálculo estándar en el sistema de coordenadas polares.

- ¿Cuál es la pendiente de una recta tangente a una gráfica polar?
- ¿Cuál es el área acotada por una gráfica polar?
- ¿Cuál es la longitud de una gráfica polar?

Iniciamos con el problema de la recta tangente.

Pendiente de una tangente a una gráfica polar Sorprende que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ *no* sea la derivada $dr/d\theta = f'(\theta)$. La pendiente de una recta tangente sigue siendo dy/dx. Para determinar esta última derivada, se emplea $r = f(\theta)$ junto con $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ para escribir las ecuaciones paramétricas de la curva:

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta. \tag{1}$$

Entonces de (1) en la sección 10.3 y la regla del producto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\operatorname{sen}\theta}{-f(\theta)\operatorname{sen}\theta + f'(\theta)\cos\theta}.$$

Este resultado se resume en el siguiente teorema.

Teorema 10.6.1 Pendiente de una recta tangente

Si f es una función diferenciable de θ, entonces la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de $r = f(\theta)$ en un punto (r, θ) sobre la gráfica es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\operatorname{sen}\theta}{-f(\theta)\operatorname{sen}\theta + f'(\theta)\cos\theta}, \tag{2}$$

siempre que $dx/d\theta \neq 0$.

La fórmula (2) en el teorema 10.6.1 se presenta "para registro"; no la memorice. Para encontrar dy/dx en coordenadas polares basta con formar las ecuaciones paramétricas $x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$ y después se usa la forma paramétrica de la derivada.

EJEMPLO 1 Pendiente

Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $r = 4\operatorname{sen}3\theta$ en $\theta = \pi/6$.

Solución De las ecuaciones paramétricas $x = 4\operatorname{sen}3\theta\cos\theta$, $y = 4\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}\theta$ encontramos.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{4\operatorname{sen}3\theta\cos\theta + 12\cos3\theta\operatorname{sen}\theta}{-4\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}\theta + 12\cos3\theta\cos\theta}$$

y por ello

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/6} = -\sqrt{3}.$$

La gráfica de la ecuación, la cual se reconoce como la curva de la rosa con tres pétalos, y la recta tangente se ilustran en la FIGURA 10.6.1. ■

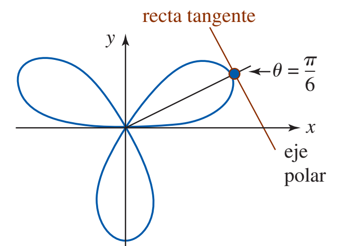


FIGURA 10.6.1 Recta tangente del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación rectangular de la recta tangente en el ejemplo 1.

Solución En $\theta = \pi/6$ las ecuaciones paramétricas $x = 4\operatorname{sen}3\theta\cos\theta$, $y = 4\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}\theta$ producen, respectivamente, $x = 2\sqrt{3}$ y $y = 2$. Las coordenadas rectangulares del punto de tangencia son $(2\sqrt{3}, 2)$. Al emplear la pendiente que se encontró en el ejemplo 1, la forma punto-pendiente produce una ecuación de la recta tangente roja que se ilustra en la figura 10.6.1:

$$y - 2 = -\sqrt{3}(x - 2\sqrt{3}) \quad \text{o} \quad y = -\sqrt{3}x + 8. \quad ■$$

Podemos obtener una ecuación polar de la recta en el ejemplo 2 al sustituir x y y en la ecuación rectangular por $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ y resolver para r:

$$r = \frac{8}{\mathrm{sen}\,\theta + \sqrt{3}\cos\theta}.$$

EJEMPLO 3 Tangentes horizontal y vertical

Determine los puntos sobre la gráfica de $r = 3 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta$ en los cuales la recta tangente es horizontal y los puntos en los cuales la recta tangente es vertical.

Solución Recuerde de la sección 10.3 que una tangente horizontal ocurre en un punto para el cual $dy/d\theta = 0$ y $dx/d\theta \neq 0$, en tanto que una tangente vertical ocurre en un punto para el cual $dx/d\theta = 0$ y $dy/d\theta \neq 0$. Ahora bien, de las ecuaciones paramétricas

$$x = (3 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta, \qquad y = (3 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= (3 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta)(-\mathrm{sen}\,\theta) + \cos\theta(-3\cos\theta)\\ &= -3\,\mathrm{sen}\,\theta + 3\,\mathrm{sen}^2\theta - 3\cos^2\theta\\ &= -3 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta + 6\,\mathrm{sen}^2\theta\\ &= 3(2\,\mathrm{sen}\,\theta + 1)(\mathrm{sen}\,\theta - 1),\\ \frac{dy}{d\theta} &= (3 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta(-3\cos\theta)\\ &= 3\cos\theta(1 - 2\,\mathrm{sen}\,\theta).\end{aligned}$$

De estas derivadas observamos que

$$\frac{dy}{d\theta} = 0\left(\frac{dx}{d\theta} \neq 0\right) \text{ en } \theta = \frac{\pi}{6},\ \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ y } \theta = \frac{3\pi}{2},$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 0\left(\frac{dy}{d\theta} \neq 0\right) \text{ en } \theta = \frac{7\pi}{6} \text{ y } \theta = \frac{11\pi}{6}.$$

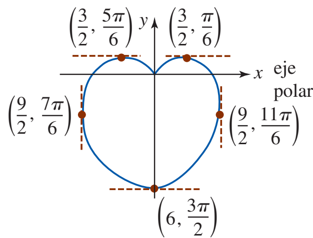


FIGURA 10.6.2 Rectas tangentes horizontal y vertical del ejemplo 3

De tal modo, hay

tangentes horizontales en: $(\frac{3}{2}, \pi/6)$, $(\frac{3}{2}, 5\pi/6)$, $(6, 3\pi/2)$,
tangentes verticales en: $(\frac{9}{2}, 7\pi/6)$, $(\frac{9}{2}, 11\pi/6)$.

Estos puntos, junto con las rectas tangentes, se muestran en la FIGURA 10.6.2. ■

Tangentes a la gráfica en el origen En la sección anterior establecimos que, en general, si $r = 0$ y $dr/d\theta = f'(\theta) \neq 0$ cuando $\theta = \theta_0$, entonces la gráfica de $r = f(\theta)$ es tangente a la recta $\theta = \theta_0$ en el origen. Este hecho se deduce de (2). Si $r = f(\theta)$ es una función diferenciable de θ para la cual $f(\theta_0) = 0$ y $f'(\theta_0) \neq 0$, entonces en $\theta = \theta_0$, (2) produce

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(\theta_0)\cos\theta_0 + f'(\theta_0)\,\mathrm{sen}\,\theta_0}{-f(\theta_0)\,\mathrm{sen}\,\theta_0 + f'(\theta_0)\cos\theta_0} = \frac{f'(\theta_0)\,\mathrm{sen}\,\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0} = \tan\theta_0.$$

En la última expresión se reconoce que $\tan\theta_0$ es la pendiente de la recta tangente $\theta = \theta_0$.

Advierta en el ejemplo 3 que $r = 3 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$ en $\theta = \pi/2$. Pero puesto que tanto el numerador $dy/d\theta$ como el denominador $dx/d\theta$ en (2) son 0 en $\theta = \pi/2$ no podemos concluir algo acerca de la recta tangente en el origen $(0, \pi/2)$.

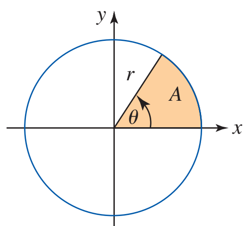


FIGURA 10.6.3 Área A de la sección circular

Área de una región El problema de determinar el área de una región acotada por gráficas polares no es tan directo como lo fue en la sección 6.2. Como veremos en la discusión subsecuente, en lugar de un rectángulo usamos un sector de un círculo, tal como se muestra en la FIGURA 10.6.3. Puesto que el área A de un sector circular es proporcional al ángulo central θ, medido en radianes, y ya que el área del círculo completo es πr^2, tenemos

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \quad \text{o} \quad A = \frac{1}{2}r^2\theta. \tag{3}$$

Construcción de una integral Suponga que $r = f(\theta)$ es una función continua no negativa sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$, donde $0 \leq \alpha \leq \beta < 2\pi$. Para encontrar el área A de la región que se muestra en la FIGURA 10.6.4*a*) que está acotada por la gráfica de f y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, se empieza formando una partición P de $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = \beta.$$

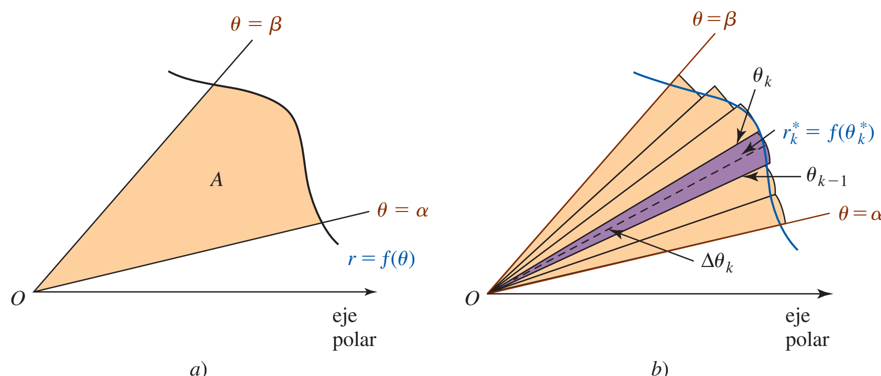


FIGURA 10.6.4 Área A de una región acotada por una gráfica polar y dos rayos

Si θ_k^* denota un punto muestral en el subintervalo k-ésimo $[\theta_{k-1}, \theta_k]$, entonces por (3) el área del sector circular de radio $r_k = f(\theta_k^*)$ indicado en la figura 10.6.4*b*) es

$$A_k = \frac{1}{2}[f(\theta_k^*)]^2 \Delta\theta_k,$$

donde $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ es su ángulo central. A su vez, la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_k^*)]^2 \Delta\theta_k$$

proporciona una aproximación a A. El área A está dada entonces por el límite cuando $\|P\| \to 0$:

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_k^*)]^2 \Delta\theta_k.$$

Teorema 10.6.2 Área en coordenadas polares

Si $r = f(\theta)$ es una función continua no negativa sobre $[\alpha, \beta]$, entonces el **área** acotada por su gráfica y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ están dados por

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta. \qquad (4)$$

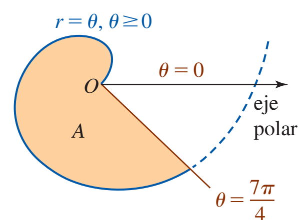


FIGURA 10.6.5 Área del ejemplo 4

EJEMPLO 4 Área acotada por una espiral

Encuentre el área de la región que está acotada por la espiral $r = \theta$, $\theta \geq 0$, entre los rayos $\theta = 0$ y $\theta = 7\pi/4$.

Solución De (4), el área de la región sombreada que se muestra en la FIGURA 10.6.5 es

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{7\pi/4} \theta^2 d\theta = \frac{1}{6}\theta^3 \Big]_0^{7\pi/4} = \frac{343}{384}\pi^3 \approx 27.70. \quad ■$$

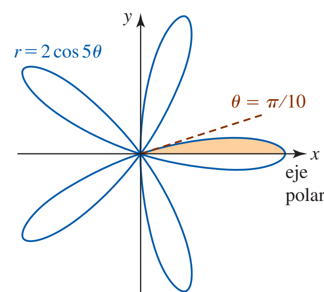


FIGURA 10.6.6 La mitad del área del ejemplo 5

EJEMPLO 5 Área acotada por una curva de la rosa

Encuentre el área de un pétalo de la curva de la rosa $r = 2\cos 5\theta$.

Solución Como se muestra en la FIGURA 10.6.6, la curva de la rosa tiene cinco pétalos. Debido a la simetría encontraremos el área de la mitad de un pétalo y el resultado lo multiplicamos por 2. Al dejar $r = 0$ y resolver $2\cos 5\theta = 0$ obtenemos $5\theta = \pi/2$ o $\theta = \pi/10$. En otras palabras, la

curva entra al origen tangente a la recta $\theta = \pi/10$. De (4), el área A de la mitad del pétalo en la figura 10.6.6 es entonces

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/10} (2\cos 5\theta)^2 d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/10} \cos^2 5\theta\, d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/10} \frac{1}{2}(1 + \cos 10\theta)\, d\theta \\ &= \theta + \frac{1}{10}\operatorname{sen} 10\theta \Big]_0^{\pi/10} \\ &= \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

Las fórmulas del ángulo mitad:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

serán de utilidad en esta sección.

El área de un pétalo es entonces $2(\pi/10) = \pi/5$. ■

Desde luego, el área de cada pétalo en el ejemplo 5 es la misma y por ello el área encerrada por la curva completa de la rosa de cinco pétalos es $5(\pi/5) = \pi$.

Una advertencia: cuando trabaje con problemas del tipo que se presentó en el ejemplo 5, debe tener cuidado con los límites de integración. No suponga que el área encerrada por la curva completa de la rosa de cinco pétalos puede obtenerla de (4) integrando sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. En otras palabras, el área no es $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2\cos 5\theta)^2\, d\theta$. Esto se debe a que la curva completa se obtiene de $0 \le \theta \le \pi$. Vea *i*) en *Notas desde el aula* en la sección 10.5.

EJEMPLO 6 Área acotada entre dos gráficas

Encuentre el área de la región que es común a los interiores de la cardioide $r = 2 - 2\cos\theta$ y la limacón $r = 2 + \cos\theta$.

Solución La inspección de la FIGURA 10.6.7 muestra que necesitamos dos integrales. Al resolver simultáneamente las dos ecuaciones:

$$2 - 2\cos\theta = 2 + \cos\theta \qquad \text{o} \qquad \cos\theta = 0$$

obtenemos $\theta = \pi/2$, por lo que un punto de intersección es $(2, \pi/2)$. Por simetría, concluimos que

$$\begin{aligned} A &= 2\left\{\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(2 - 2\cos\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}(2 + \cos\theta)^2 d\theta\right\} \\ &= 4\int_0^{\pi/2}(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}(4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\left[1 - 2\cos\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\left[4 + 4\cos\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta \\ &= 4\left[\frac{3}{2}\theta - 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{9}{2}\theta + 4\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{21}{4}\pi - 12 \approx 4.49. \end{aligned}$$

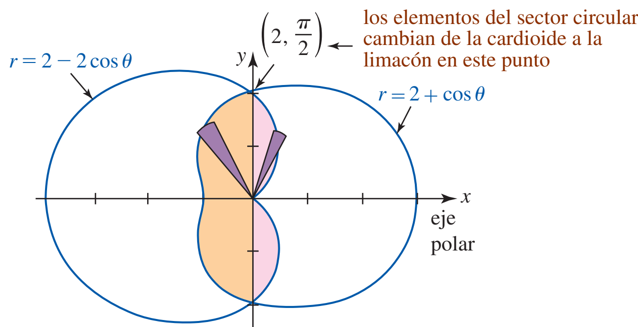


FIGURA 10.6.7 Área del ejemplo 6 ■

Área acotada por dos gráficas El área A de la región que se muestra en la FIGURA 10.6.8 se encuentra sustrayendo áreas. Si f y g son continuas sobre $[\alpha, \beta]$ y $f(\theta) \geq g(\theta)$ sobre el intervalo, entonces el área acotada por las gráficas de $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2\, d\theta.$$

Escrita como una sola integral, el área está dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2)\, d\theta. \tag{5}$$

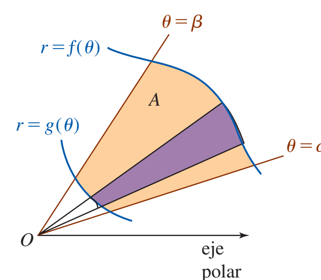


FIGURA 10.6.8 Área de la región acotada entre las dos gráficas

EJEMPLO 7 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área de la región en el primer cuadrante que está fuera del círculo $r = 1$ y dentro de la curva de la rosa $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$.

Solución Al resolver en forma simultánea las dos ecuaciones:

$$1 = 2 \operatorname{sen} 2\theta \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen} 2\theta = \frac{1}{2}$$

implica que $2\theta = \pi/6$ y $2\theta = 5\pi/6$. De este modo, los dos puntos de intersección en el primer cuadrante son $(1, \pi/12)$ y $(1, 5\pi/12)$. El área en cuestión se muestra en la FIGURA 10.6.9. De (5),

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12} [(2 \operatorname{sen} 2\theta)^2 - 1^2]\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12} [4 \operatorname{sen}^2 2\theta - 1]\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12} \left[4\left(\frac{1 - \cos 4\theta}{2}\right) - 1\right] d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4\theta\right]_{\pi/12}^{5\pi/12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.96. \end{aligned}$$

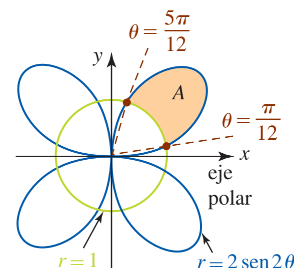


FIGURA 10.6.9 Área del ejemplo 7

Longitud de arco para gráficas polares Hemos visto que si $r = f(\theta)$ es la ecuación de una curva C en coordenadas polares, entonces las ecuaciones paramétricas de C son

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta.$$

Si f tiene una derivada continua, entonces es directo derivar una fórmula para la longitud de arco en coordenadas polares. Puesto que

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta,$$

el álgebra básica indica que

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2.$$

El siguiente resultado se concluye de (9) de la sección 10.3.

Teorema 10.6.3 Longitud de una gráfica polar

Sea f una función para la cual f' es continua sobre un intervalo $[\alpha, \beta]$. Entonces la **longitud** L de la gráfica $r = f(\theta)$ sobre el intervalo es

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta. \tag{6}$$

EJEMPLO 8 Longitud de una cardioide

Determine la longitud de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ para $0 \le \theta \le \pi$.

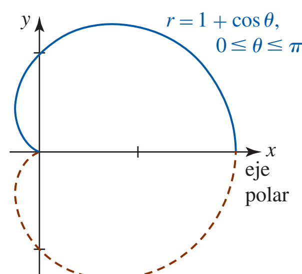


FIGURA 10.6.10 Cardioide del ejemplo 8

Solución La gráfica de $r = 1 + \cos\theta$ para $0 \le \theta \le \pi$ se ilustra en azul en la FIGURA 10.6.10. En este caso, $dr/d\theta = -\operatorname{sen}\theta$, de modo que

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) + \operatorname{sen}^2\theta = 2 + 2\cos\theta$$

y

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{2 + 2\cos\theta} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \cos\theta}.$$

Por consiguiente, de (6) la longitud de la porción azul de la gráfica en la figura 10.6.10 es:

$$L = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta.$$

Para evaluar esta integral empleamos la fórmula del ángulo medio para el coseno en la forma $\cos^2(\theta/2) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$ o $1 + \cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$. La longitud de la gráfica para $0 \le \theta \le \pi$ está dada por

$$L = 2\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\pi} = 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 4.$$ ■

Se pide al lector que lea las *Notas desde el aula* siguientes.

$\frac{d}{d\theta}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

Es fácil cometer un error en los límites de integración en las integrales de área y de longitud de arco (4) y (6). En el ejemplo 8 recurrimos a la simetría para ver que la longitud de una cardioide completa, esto es $r = 1 + \cos\theta$ para $0 \le \theta \le 2\pi$ es $2(4) = 8$ unidades, pero esto *no* es lo que produce (6) integrando sobre el intervalo $0 \le \theta \le 2\pi$:

$$L = 2\int_0^{2\pi} \cos(\theta/2)\, d\theta. \tag{7}$$

Reflexione por qué se obtiene una respuesta incorrecta de (7) y después trabaje los problemas 45 y 46 de los ejercicios 10.6.

Ejercicios 10.6 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-33.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre la pendiente de la recta tangente en el valor indicado de θ.

1. $r = \theta$; $\theta = \pi/2$
2. $r = 1/\theta$; $\theta = 3$
3. $r = 4 - 2\operatorname{sen}\theta$; $\theta = \pi/3$
4. $r = 1 - \cos\theta$; $\theta = 3\pi/4$
5. $r = \operatorname{sen}\theta$; $\theta = \pi/6$
6. $r = 10\cos\theta$; $\theta = \pi/4$

En los problemas 7 y 8, determine los puntos sobre la gráfica de la ecuación dada en los cuales la recta tangente es horizontal y los puntos en los que la recta tangente es vertical.

7. $r = 2 + 2\cos\theta$
8. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

En los problemas 9 y 10, determine la ecuación rectangular de la recta tangente en el punto indicado.

9. $r = 4\cos 3\theta$
10. $r = 1 + 2\cos\theta$

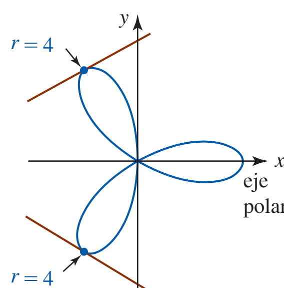


FIGURA 10.6.11 Gráfica del problema 9

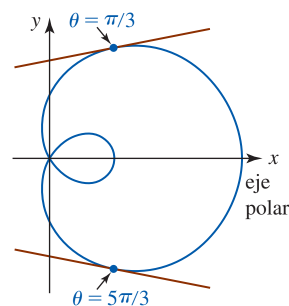


FIGURA 10.6.12 Gráfica del problema 10

En los problemas 11-16, encuentre la ecuación polar de cada recta tangente a la gráfica polar en el origen.

11. $r = -2\operatorname{sen}\theta$

12. $r = 3\cos\theta$

13. $r = 1 + \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$

14. $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$

15. $r = 2\cos 5\theta$

16. $r = 2\operatorname{sen} 2\theta$

En los problemas 17-24, encuentre el área de la región que está acotada por la gráfica de la ecuación polar que se indica.

17. $r = 2\operatorname{sen}\theta$

18. $r = 10\cos\theta$

19. $r = 4 + 4\cos\theta$

20. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

21. $r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$

22. $r = 2 + \cos\theta$

23. $r = 3\operatorname{sen} 2\theta$

24. $r = \cos 3\theta$

En los problemas 25-30, determine el área de la región que está acotada por la gráfica de una ecuación polar dada y los rayos indicados.

25. $r = 2\theta, \theta \geq 0, \theta = 0, \theta = 3\pi/2$

26. $r\theta = \pi, \theta > 0, \theta = \pi/2, \theta = \pi$

27. $r = e^{\theta}, \theta = 0, \theta = \pi$

28. $r = 10e^{-\theta}, \theta = 1, \theta = 2$

29. $r = \tan\theta, \theta = 0, \theta = \pi/4$

30. $r\operatorname{sen}\theta = 5, \theta = \pi/6, \theta = \pi/3$

En los problemas 31 y 32, la gráfica es de la ecuación polar $r = 1 + 2\cos\theta$. Determine el área de la región sombreada.

31.

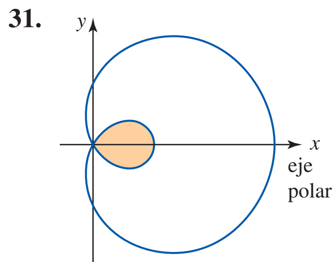


FIGURA 10.6.13 Región del problema 31

32.

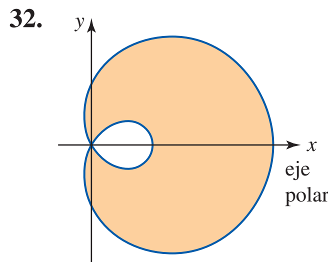


FIGURA 10.6.14 Región del problema 32

En los problemas 33-38, determine el área de la región descrita.

33. Fuera del círculo $r = 1$ y dentro de la curva de la rosa $r = 2\cos 3\theta$.

34. Común a los interiores de los círculos $r = \cos\theta$ y $r = \operatorname{sen}\theta$.

35. Dentro del círculo $r = 5\operatorname{sen}\theta$ y fuera de la limacón $r = 3 - \operatorname{sen}\theta$.

36. Común a los interiores de las gráficas de las ecuaciones del problema 35.

37. Dentro de la cardioide $r = 4 - 4\cos\theta$ y fuera del círculo $r = 6$.

38. Común a los interiores de las gráficas de las ecuaciones en el problema 37.

En los problemas 39-44, encuentre la longitud de la curva para los valores indicados de θ.

39. $r = 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

40. $r = 6\cos\theta$, gráfica completa

41. $r = e^{\theta/2}, 0 \leq \theta \leq 4$

42. $r = \theta, 0 \leq \theta \leq 1$

43. $r = 3 - 3\cos\theta$, gráfica completa

44. $r = \operatorname{sen}^3(\theta/3), 0 \leq \theta \leq \pi$

≡ Piense en ello

45. Considere la lemniscata $r^2 = 9\cos 2\theta$.

a) Explique por qué el área de la región acotada por la gráfica no está dada por la integral $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 9\cos 2\theta\, d\theta$.

b) Al utilizar una integral apropiada, determine el área de la región acotada por la gráfica.

46. En el ejemplo 8 explique por qué la longitud de la cardioide completa $r = 1 + \cos\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, no está dada por la integral $2\int_0^{2\pi}\cos(\theta/2)\, d\theta$. Luego reexamine el problema 43 y explique por qué no hay dificultades al integrar sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

47. Dibuje la región común a los interiores de las gráficas de $r = \operatorname{sen} 2\theta$ y $r = \cos 2\theta$. Encuentre el área de esta región.

48. El área de la región que está acotada por la gráfica de la región de $r = 1 + \cos\theta$ es $3\pi/2$. ¿Qué puede usted afirmar acerca de las áreas acotadas por las gráficas de $r = 1 - \cos\theta$, $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ y $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$? Justifique sus respuestas sin calcular las áreas utilizando (4).

49. ¿El área de la región acotada por la gráfica de $r = 2(1 + \cos\theta)$ es igual al doble del área de la región acotada por la gráfica de $r = 1 + \cos\theta$?

50. Encuentre el área de la región sombreada en la FIGURA 10.6.15. Cada círculo tiene radio 1.

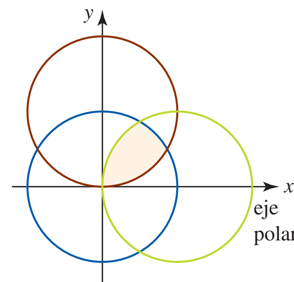


FIGURA 10.6.15 Círculos que se intersecan en el problema 50

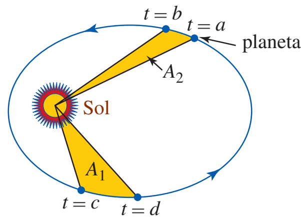
≡ Proyectos

51. Segunda ley de Kepler En coordenadas polares, el **momento angular** de una partícula en movimiento de masa m se define como $L = mr^2\, d\theta/dt$. Suponga que las coordenadas polares de un planeta de masa m son (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) en los tiempos $t = a$ y $t = b$, $a < b$, respectivamente. Puesto que la fuerza gravitacional que actúa sobre el planeta es una fuerza central, el momento angular L del planeta es una constante. Use este hecho para demostrar que el área A barrida por r es $A = L(b - a)/2m$. Cuando se considera que el Sol está en el origen, esta ecuación

demuestra la segunda ley de Kepler del movimiento planetario:

- Una recta que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.

Vea la FIGURA 10.6.16.



$A_1 = A_2$ cuando $b - a = d - c$

FIGURA 10.6.16 Órbita del planeta del problema 51

52. Un poco de historia: Los discos de larga duración (LP) Antes de los iPod, los reproductores MP3 y los CD, la música se obtenía reproduciendo un *disco*. Entre los años 1960-1990 el formato popular fue el disco LP (siglas de larga duración en inglés: *long-playing*) que giraba sobre una tornamesa a razón de 33 revoluciones por minuto.* Aunque ahora es posible encontrarlos en almacenes que se especializan en objetos coleccionables, muchos de nosotros aún tenemos colecciones de estos grandes discos de vinil negro de 33 rpm almacenados en cajas. El sonido se codificaba en estos discos por medios mecánicos a lo largo con un surco continuo. Cuando se reproducía un disco, una aguja empezaba en un punto cercano al borde más externo del disco y recorría el surco hasta un punto cercano a su centro. ¿Cuán largo es el surco de un disco? Suponga que un disco se reproduce durante 20 minutos a 33 revoluciones por minuto. Cuando el disco se reproduce, la aguja va del radio más exterior R_o a un radio más interior R_i. Vea la FIGURA 10.6.17. Suponga que el surco del disco es una espiral que puede describirse mediante una ecuación polar de la forma $r = R_o - k\theta$, donde k es una constante y θ se mide en radianes.

a) Exprese k en términos de R_o, R_i y N, donde N es el número de revoluciones completadas por el disco.

b) Demuestre que la longitud L del surco del disco está dada por

$$L = \frac{1}{k}\int_{R_i}^{R_o} \sqrt{k^2 + u^2}\, du.$$

c) Utilice la serie del binomio para establecer la aproximación

$$\sqrt{k^2 + u^2} \approx u\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{u}\right)^2\right].$$

d) En el inciso *b*), utilice el resultado que se obtuvo en el inciso *c*) para demostrar que la longitud L del surco del disco está dada por la aproximación

$$L \approx \pi N(R_i + R_o) + \frac{R_o - R_i}{4\pi N}\ln\frac{R_o}{R_i}.$$

e) Emplee el resultado en el inciso *d*) para aproximar la longitud L si $R_o = 6$ pulg y $R_i = 2.5$ pulg.

f) Use una sustitución apropiada para evaluar la integral en el inciso *b*) empleando los valores específicos de R_o y R_i dados en el inciso *e*). Compare esta respuesta con la que obtuvo en el inciso *e*).

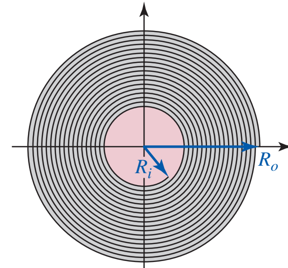


FIGURA 10.6.17 Disco LP del problema 52

*Los discos de 33 en realidad giraban a $33\frac{1}{3}$ revoluciones por minuto.

10.7 Secciones cónicas en coordenadas polares

Introducción En la primera sección de este capítulo dedujimos las ecuaciones de la parábola, elipse e hipérbola mediante la fórmula de la distancia en coordenadas rectangulares. Al emplear coordenadas polares y el concepto de excentricidad, ahora daremos una definición general de una sección cónica que comprende a las tres curvas.

Definición 10.7.1 Sección cónica

Considere que L es una recta fija en el plano y que F es un punto que no se encuentre sobre la recta. Una **sección cónica** es el conjunto de puntos P en el plano para los cuales la distancia de P a F dividida entre la distancia de P a L es una constante.

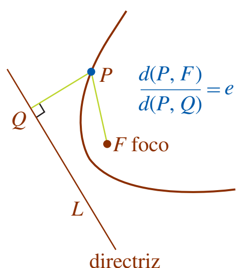


FIGURA 10.7.1 Interpretación geométrica de (1)

La recta fija L recibe el nombre de **directriz** y el punto F es un **foco**. La constante fija es la **excentricidad** e de la cónica. Como indica la FIGURA 10.7.1 el punto P yace sobre la cónica si y sólo si

$$\frac{d(P, F)}{d(P, Q)} = e, \tag{1}$$

donde Q denota el pie de la perpendicular de P a L. En (1), si

- $e = 1$, la cónica es una **parábola**,
- $0 < e < 1$, la cónica es una **elipse**, y
- $e > 1$, la cónica es una **hipérbola**.

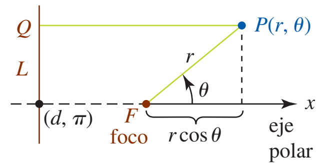


FIGURA 10.7.2 Interpretación de la coordenada polar de (2)

Ecuaciones polares de cónicas La ecuación (1) se interpreta fácilmente utilizando coordenadas polares. Suponga que el foco F se coloca en el polo y la directriz L está d unidades ($d > 0$) a la *izquierda* de F perpendicular al eje polar extendido. Se advierte de la FIGURA 10.7.2 que (1) escrita como $d(P, F) = ed(P, Q)$ es la misma que

$$r = e(d + r\cos\theta) \qquad \text{o} \qquad r - er\cos\theta = ed. \tag{2}$$

Al resolver para r obtenemos

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}. \tag{3}$$

Para ver que (3) produce las familiares ecuaciones de las cónicas, superpondremos un sistema de coordenadas rectangular sobre el sistema de coordenadas polares con origen en el polo y el eje x positivo coincidiendo con los ejes polares. Después expresamos la primera ecuación en (2) en coordenadas rectangulares y simplificamos:

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{x^2 + y^2} &= ex + ed \\ x^2 + y^2 &= e^2x^2 + 2e^2dx + e^2d^2 \\ (1 - e^2)x^2 - 2e^2dx + y^2 &= e^2d^2. \end{aligned} \tag{4}$$

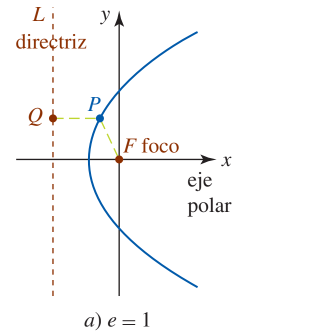
Eligiendo $e = 1$, (4) se convierte en

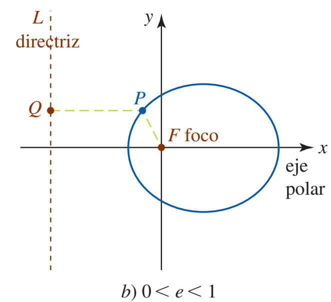
$$-2dx + y^2 = d^2 \qquad \text{o} \qquad y^2 = 2d\left(x + \frac{d}{2}\right),$$

que es una ecuación en forma estándar de una parábola cuyo eje es el eje x, el vértice está en $(-d/2, 0)$ y, consistente con la ubicación de F, cuyo foco está en el origen.

Es un buen ejercicio de álgebra mostrar que (2) produce ecuaciones en forma estándar de una elipse en el caso $0 < e < 1$ y una hipérbola en el caso $e > 1$. Vea el problema 43 en los ejercicios 10.7. De modo que, dependiendo del valor de e, la ecuación polar (3) tiene tres posibles gráficas como se muestra en la FIGURA 10.7.3.

Si ubicamos la directriz L a la *derecha* del foco F en el origen en la deducción de la ecuación polar (3), entonces la ecuación resultante sería $r = ed/(1 + e\cos\theta)$. Cuando elige la directriz L paralela al eje polar, esto es, horizontal, entonces encontrará que la ecuación de la cónica es $r = ed/(1 + e\,\text{sen}\,\theta)$ (directriz debajo del origen) o $r = ed/(1 + e\,\text{sen}\,\theta)$ (directriz sobre el origen). En el siguiente teorema se da un resumen de la discusión precedente.





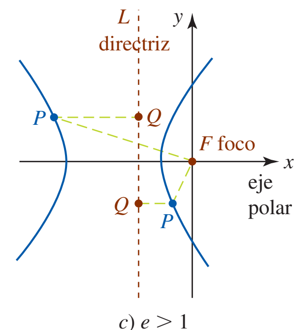


FIGURA 10.7.3 Gráficas de la ecuación (3); directriz L a la izquierda de F

Teorema 10.7.1 Ecuaciones polares de cónicas

Cualquier ecuación polar de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \tag{5}$$

o

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta} \tag{6}$$

es una **sección cónica** con foco en el origen y directriz a d unidades del origen y perpendicular (en el caso de (5)) o paralela (en el caso (6)) al eje x. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$ y una hipérbola si $e > 1$.

EJEMPLO 1 Identificación de cónicas

Identifique cada una de las siguientes cónicas:

a) $r = \dfrac{2}{1 - 2\,\text{sen}\,\theta}$ *b*) $r = \dfrac{3}{4 + \cos\theta}$.

Solución

a) Una comparación término por término de la ecuación dada con la forma polar $r = ed/(1 - e\ \text{sen}\,\theta)$ permite hacer la identificación $e = 2$. En consecuencia, la cónica es una hipérbola.

b) Para identificar la sección cónica, dividimos el numerador y el denominador de la ecuación dada entre 4. Esto deja a la ecuación en la forma

$$r = \frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{4}\cos\theta}.$$

Luego, al comparar con $r = ed/(1 + e\cos\theta)$, observamos que $e = \frac{1}{4}$. En consecuencia, la cónica es una elipse. ■

Gráficas Es posible que obtenga una gráfica aproximada de una cónica definida por (5) o (6) si conoce la orientación de sus ejes, determina las intersecciones con los ejes x y y y encuentra los vértices. En los casos de las ecuaciones (5) y (6) tenemos, respectivamente:

- los dos vértices de la **elipse** o **hipérbola** ocurren en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; el vértice de una **parábola** puede ocurrir sólo en uno de los valores: $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.
- los dos vértices de una elipse o una **hipérbola** ocurren en $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$; el vértice de una **parábola** puede ocurrir únicamente en uno de los valores $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$.

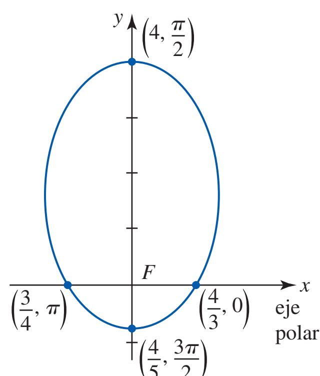


FIGURA 10.7.4 Gráfica de la ecuación polar del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Graficación de una cónica

Grafique $r = \dfrac{4}{3 - 2\,\text{sen}\,\theta}$.

Solución Al escribir la ecuación como $r = \dfrac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3}\text{sen}\,\theta}$ vemos que la excentricidad es $e = \frac{2}{3}$ y por ello la cónica es una elipse. Además, debido a que la ecuación es de la forma dada en (6), sabemos que la directriz es paralela al eje x. Ahora bien, en vista de la discusión precedente a este ejemplo, tenemos

$$\textit{vértices}: \quad (4, \pi/2), \left(\tfrac{4}{5}, 3\pi/2\right)$$

$$\textit{intersecciones } x: \quad \left(\tfrac{4}{3}, 0\right), \left(\tfrac{4}{3}, \pi\right).$$

Según vemos en la FIGURA 10.7.4, el eje mayor de la elipse yace a lo largo del eje y. ■

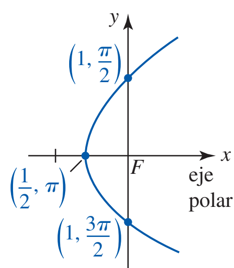


FIGURA 10.7.5 Gráfica de la ecuación polar del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Graficación de una cónica

Grafique $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$.

Solución Al revisar la ecuación vemos que es de la forma dada en (5) con $e = 1$. Por consiguiente, la sección cónica es una parábola cuya directriz es perpendicular al eje x. Puesto que r no está definido en $\theta = 0$, el vértice de la parábola ocurre en $\theta = \pi$:

$$\textit{vértices}: \quad \left(\tfrac{1}{2}, \pi\right)$$

$$\textit{intersecciones } y: \quad (1, \pi/2), (1, 3\pi/2).$$

Como observamos en la FIGURA 10.7.5, el eje de simetría de la parábola yace a lo largo del eje x. ■

EJEMPLO 4 Graficación de una cónica

Grafique $r = \dfrac{2}{1 + 2\cos\theta}$.

Solución De (5) vemos que $e = 2$, y por ello la sección cónica es una hipérbola cuya directriz es perpendicular al eje x. Los vértices ocurren en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$:

$$\textit{vértices:}\quad \left(\tfrac{2}{3}, 0\right), (-2, \pi)$$
$$\textit{intersecciones } y\text{:}\quad (2, \pi/2), (2, 3\pi/2).$$

Como aparece en la FIGURA 10.7.6, el eje transversal de la hipérbola yace a lo largo del eje x. ■

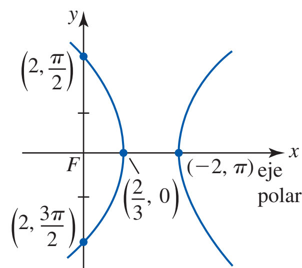


FIGURA 10.7.6 Gráfica de la ecuación polar del ejemplo 4

Cónicas rotadas En la sección 10.5 vimos que las gráficas de $r = f(\theta - \gamma)$ y $r = f(\theta + \gamma)$, $\gamma > 0$, son rotaciones de la gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$ alrededor del origen en una cantidad γ. De tal modo,

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{ed}{1 \pm e\cos(\theta - \gamma)} \\ r &= \frac{ed}{1 \pm e\,\mathrm{sen}(\theta - \gamma)} \end{aligned}\right\} \text{cónicas rotadas en sentido contrario al de las manecillas del reloj en torno al origen}$$

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{ed}{1 \pm e\cos(\theta + \gamma)} \\ r &= \frac{ed}{1 \pm e\,\mathrm{sen}(\theta + \gamma)} \end{aligned}\right\} \text{cónicas rotadas en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen}$$

EJEMPLO 5 Cónica rotada

En el ejemplo 2 se vio que la gráfica de $r = \dfrac{4}{3 - 2\,\mathrm{sen}\,\theta}$ es una elipse con eje mayor a lo largo del eje y. Es la gráfica azul en la FIGURA 10.7.7. La gráfica de $r = \dfrac{4}{3 - 2\,\mathrm{sen}(\theta - 2\pi/3)}$ es la gráfica roja en la figura 10.7.7 y corresponde a una rotación contraria a las manecillas del reloj de la gráfica en la cantidad $2\pi/3$ (o 120°) alrededor del origen. El eje mayor de la gráfica roja yace a lo largo de la recta $\theta = 7\pi/6$. ■

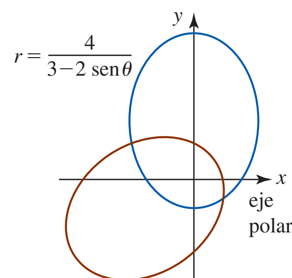


FIGURA 10.7.7 Gráficas de las ecuaciones polares del ejemplo 5

Aplicaciones Las ecuaciones del tipo en (5) y en (6) son bastante apropiadas para describir una órbita cerrada de un satélite alrededor del Sol (Tierra o Luna) puesto que una órbita de este tipo es una elipse con el Sol (Tierra o Luna) en un foco. Suponga que una ecuación de la órbita está dada por $r = ed/(1 - e\cos\theta)$, $0 < e < 1$, y r_p es el valor de r en el perihelio (perigeo o periluna) y r_a es el valor de r en el afelio (apogeo o apoluna). Éstos son los puntos en la órbita que ocurren sobre el eje x, en los cuales el satélite está más cerca o más lejos, respectivamente, del Sol (Tierra o Luna). Vea la FIGURA 10.7.8. Se le deja como ejercicio demostrar que la excentricidad e de la órbita se relaciona con r_p y r_a mediante

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}. \tag{7}$$

Vea el problema 44 en los ejercicios 10.7.

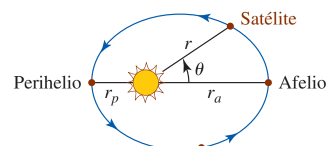


FIGURA 10.7.8 Órbita de un satélite alrededor del Sol

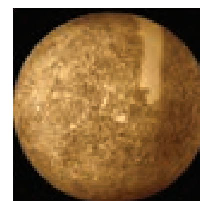
EJEMPLO 6 Determinación de la ecuación polar de una órbita

Encuentre una ecuación polar de la órbita del planeta Mercurio alrededor del Sol si $r_p = 2.85 \times 10^7$ mi y $r_a = 4.36 \times 10^7$ mi.

Solución De (7), la excentricidad de la órbita de Mercurio es

$$e = \frac{4.36 \times 10^7 - 2.85 \times 10^7}{4.36 \times 10^7 + 2.85 \times 10^7} = 0.21.$$

Por consiguiente, $$r = \frac{0.21d}{1 - 0.21\cos\theta}.$$


Mercurio es el planeta más cercano al Sol

Todo lo que necesita hacer ahora es resolver para la cantidad $0.21d$. Para ello recurra al hecho de que el afelio ocurre en $\theta = 0$:

$$4.36 \times 10^7 = \frac{0.21d}{1 - 0.21}.$$

Al resolver la última ecuación para la cantidad $0.21d$ obtiene $0.21d = 3.44 \times 10^7$. Por consiguiente, una ecuación polar de la órbita de Mercurio es

$$r = \frac{3.44 \times 10^7}{1 - 0.21\cos\theta}.$$ ■

Ejercicios 10.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-33.

Fundamentos

En los problemas 1-10, determine la excentricidad, identifique la sección cónica y dibuje su gráfica.

1. $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$

2. $r = \dfrac{2}{2 - \operatorname{sen}\theta}$

3. $r = \dfrac{15}{4 - \cos\theta}$

4. $r = \dfrac{5}{2 - 2\operatorname{sen}\theta}$

5. $r = \dfrac{4}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

6. $r = \dfrac{12}{6 + 2\operatorname{sen}\theta}$

7. $r = \dfrac{18}{3 + 6\cos\theta}$

8. $r = \dfrac{6\sec\theta}{\sec\theta - 1}$

9. $r = \dfrac{10}{5 + 4\operatorname{sen}\theta}$

10. $r = \dfrac{2}{2 + 5\cos\theta}$

En los problemas 11-14, determine la excentricidad e de la cónica dada. Después convierta la ecuación polar en una ecuación rectangular y verifique que $e = c/a$.

11. $r = \dfrac{6}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

12. $r = \dfrac{10}{2 - 3\cos\theta}$

13. $r = \dfrac{12}{3 - 2\cos\theta}$

14. $r = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \operatorname{sen}\theta}$

En los problemas 15-20, encuentre una ecuación polar de la cónica con foco en el origen que satisfaga las condiciones dadas.

15. $e = 1$, directriz $x = 3$

16. $e = \frac{3}{2}$, directriz $y = 2$

17. $e = \frac{2}{3}$, directriz $y = -2$

18. $e = \frac{1}{2}$, directriz $x = 4$

19. $e = 2$, directriz $x = 6$

20. $e = 1$, directriz $y = -2$

21. Encuentre una ecuación polar de la cónica del problema 15 si la gráfica se rota en dirección de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad $2\pi/3$.

22. Encuentre una ecuación polar de la cónica del problema 16 si la gráfica se rota en dirección contraria a la de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad $\pi/6$.

En los problemas 23-28, encuentre una ecuación polar de la parábola con foco en el origen y el vértice dado.

23. $\left(\frac{3}{2}, 3\pi/2\right)$

24. $(2, \pi)$

25. $\left(\frac{1}{2}, \pi\right)$

26. $(2, 0)$

27. $\left(\frac{1}{4}, 3\pi/2\right)$

28. $\left(\frac{3}{2}, \pi/2\right)$

En los problemas 29-32, encuentre las coordenadas polares de los vértices o vértice de la cónica rotada que se indica.

29. $r = \dfrac{4}{1 + \cos(\theta - \pi/4)}$

30. $r = \dfrac{5}{3 + 2\cos(\theta - \pi/3)}$

31. $r = \dfrac{10}{2 - \operatorname{sen}(\theta + \pi/6)}$

32. $r = \dfrac{6}{1 + 2\operatorname{sen}(\theta + \pi/3)}$

Aplicaciones

33. Un satélite de comunicaciones se encuentra a 12 000 km sobre la Tierra en su apogeo. La excentricidad de su órbita es 0.2. Emplee (7) para determinar la distancia del perigeo.

34. Encuentre una ecuación polar $r = ed/(1 - e\cos\theta)$ de la órbita del satélite en el problema 33.

35. Encuentre una ecuación polar de la órbita de la Tierra alrededor del Sol si $r_p = 1.47 \times 10^8$ km y $r_a = 1.52 \times 10^8$ km.

36. ***a)*** La excentricidad de la órbita elíptica del cometa Halley es 0.97 y la longitud del eje mayor de su órbita corresponde a 3.34×10^9 mi. Determine una ecuación polar de su órbita de la forma $r = ed/(1 - e\cos\theta)$.

b) Utilice la ecuación en el inciso *a*) para obtener r_p y r_a para la órbita del cometa Halley.

Problemas con calculadora/SAC

Las características orbitales (excentricidad, perigeo y eje mayor) de un satélite cercano a la Tierra se degradan de manera gradual a lo largo del tiempo debido a muchas fuerzas pequeñas que actúan sobre el satélite aparte de la fuerza gravitacional de la Tierra. Estas fuerzas incluyen el arrastre atmosférico, atracciones gravitacionales del Sol y la Luna y fuerzas magnéticas. Aproximadamente una vez al mes se activan diminutos cohetes durante unos segundos para "aumentar" las características orbitales de nuevo en el rango deseado. Los cohetes se activan en mayor grado para un cambio mayor en la órbita del satélite. La forma más eficiente en cuanto a combustible para mover de una órbita interna a una externa, lo que se denomina una **transferencia de Hohmann**, consiste en añadir velocidad en la dirección del vuelo en el momento en que el satélite alcanza el perigeo sobre su órbita interior, seguir la elipse de transferencia de Hohmann de medio camino alrededor de su apogeo, y agregar velocidad de nuevo para alcanzar la órbita exterior. Un proceso similar (restar velocidad

en el apogeo en la órbita exterior y restar velocidad en el perigeo en la órbita de transferencia de Hohmann) mueve al satélite de la órbita exterior a la órbita interior.

En los problemas 37-40, emplee una calculadora o un SAC para superponer las gráficas de las tres ecuaciones polares dadas sobre los mismos ejes coordenados. Imprima su resultado y utilice un lápiz de colores para trazar la transferencia de Hohmann.

37. Órbita interior $r = \dfrac{24}{1 + 0.2\cos\theta}$,

transferencia Hohmann $r = \dfrac{32}{1 + 0.6\cos\theta}$,

órbita exterior $r = \dfrac{56}{1 + 0.3\cos\theta}$

38. Órbita interior $r = \dfrac{5.5}{1 + 0.1\cos\theta}$,

transferencia Hohmann $r = \dfrac{7.5}{1 + 0.5\cos\theta}$,

orbita exterior $r = \dfrac{13.5}{1 + 0.1\cos\theta}$

39. Órbita interior $r = 9$,

transferencia Hohmann $r = \dfrac{15.3}{1 + 0.7\cos\theta}$,

orbita exterior $r = 51$

40. Órbita interior $r = \dfrac{73.5}{1 + 0.05\cos\theta}$,

transferencia Hohmann $r = \dfrac{77}{1 + 0.1\cos\theta}$,

órbita exterior $r = \dfrac{84.7}{1 + 0.01\cos\theta}$

En los problemas 41 y 42, utilice una calculadora o SAC para superponer las gráficas de las dos ecuaciones polares dadas sobre los mismos ejes de coordenadas.

41. $r = \dfrac{4}{4 + 3\cos\theta}$; $r = \dfrac{4}{4 + 3\cos(\theta - \pi/3)}$

42. $r = \dfrac{2}{1 - \operatorname{sen}\theta}$; $r = \dfrac{2}{1 - \operatorname{sen}(\theta + 3\pi/4)}$

Piense en ello

43. Muestre que (2) produce ecuaciones de forma estándar de una elipse en el caso $0 < e < 1$ y de una hipérbola en el caso $e > 1$.

44. Emplee la ecuación $r = ed/(1 - e\cos\theta)$ para deducir el resultado en (7).

Revisión del capítulo 10

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-34.

A. Verdadero/Falso

En los problemas 1-26, indique si el enunciado dado es verdadero (V) o falso (F).

1. En una parábola, la distancia del vértice al foco es la misma que la distancia del vértice a la directriz. _____

2. El eje menor de una elipse biseca al eje mayor. _____

3. Las asíntotas de $x^2/a^2 - y^2/a^2 = 1$ son perpendiculares. _____

4. Las intersecciones con el eje y de la gráfica $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ son $(0, b)$ y $(0, -b)$. _____

5. El punto $(-2, 5)$ está en la elipse $x^2/8 + y^2/50 = 1$. _____

6. La gráfica de $y = x^2$ y $y^2 - x^2 = 1$ tiene a lo más dos puntos en común. _____

7. Si para todos los valores de θ los puntos $(-r, \theta)$ y $(r, \theta + \pi)$ están en la gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$, entonces la gráfica es simétrica con respecto al origen. _____

8. La gráfica de la curva $x = t^2$, $y = t^4 + 1$ es la misma que la gráfica de $y = x^2 + 1$. _____

9. La gráfica de la curva $x = t^2 + t - 12$, $y = t^3 - 7t$ cruza al eje y en $(0, 6)$. _____

10. $(3, \pi/6)$ y $(-3, -5\pi/6)$ son coordenadas polares del mismo punto._____

11. Las coordenadas rectangulares de un punto en el plano son únicas._____

12. La gráfica de la curva de la rosa $r = 5$ sen 6θ tiene seis "pétalos". _____

13. El punto $(4, 3\pi/2)$ no está en la gráfica de $r = 4\cos 2\theta$, pues sus coordenadas no satisfacen la ecuación. _____

14. La excentricidad de una parábola es $e = 1$. _____

15. El eje transversal de la hipérbola $r = 5/(2 + 3\cos\theta)$ yace a lo largo del eje x. _____

16. La gráfica de la elipse $r = 90/(15 - \operatorname{sen}\theta)$ es casi circular. _____

17. Las coordenadas rectangulares del punto $\left(-\sqrt{2}, 5\pi/4\right)$ en coordenadas polares son $(1, 1)$. _____

18. La gráfica de la ecuación polar $r = -5\sec\theta$ es una recta. _____

19. El lado final del ángulo θ está siempre en el mismo cuadrante que el punto (r, θ). _____

20. La pendiente de la tangente de la gráfica de $r = e^{\theta}$ en $\theta = \pi/2$ es -1. _____

21. Las gráficas de las cardioides $r = 3 + 3\cos\theta$ y $r = -3 + 3\cos\theta$ son las mismas. _____

22. El área acotada por $r = \cos 2\theta$ es $2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 2\theta\, d\theta$. _____

23. El área acotada por $r = 2\,\text{sen}\,3\theta$ es $6\int_0^{\pi/3}\text{sen}^2 3\theta\, d\theta$. _____

24. El área acotada por $r = 1 - 2\cos\theta$ es $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos\theta)^2\, d\theta$. _____

25. El área acotada por $r^2 = 36\cos 2\theta$ es $18\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\, d\theta$. _____

26. La coordenada θ de un punto de intersección de las gráficas de las ecuaciones polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ debe satisfacer la ecuación $f(\theta) = g(\theta)$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-22, llene los espacios en blanco.

1. $y = 2x^2$, foco ________

2. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$, focos ________

3. $4x^2 + 5(y + 3)^2 = 20$, centro ________

4. $25y^2 - 4x^2 = 100$, asíntotas ________

5. $8(y + 3) = (x - 1)^2$, directriz ________

6. $\dfrac{(x + 1)^2}{36} + \dfrac{(y + 7)^2}{16} = 1$, vértices ________

7. $x = y^2 + 4y - 6$, vértice ________

8. $x^2 - 2y^2 = 18$, longitud del eje conjugado ________

9. $(x - 4)^2 - (y + 1)^2 = 4$, puntos frontera del eje transversal ________

10. $\dfrac{(x - 3)^2}{7} + \dfrac{(y + 3/2)^2}{8} = 1$, ecuación de la recta que contiene al eje mayor ________

11. $25x^2 + y^2 - 200x + 6y + 384 = 0$, centro ________

12. $(x + 1)^2 + (y + 8)^2 = 100$, intersecciones con el eje x ________

13. $y^2 - (x - 2)^2 = 1$, intersecciones con el eje y ________

14. $y^2 - y + 3x = 3$, pendiente de la recta tangente en $(1, 1)$ ________

15. $x = t^3$, $y = 4t^3$, nombre de la gráfica rectangular ________

16. $x = t^2 - 1$, $y = t^3 + t + 1$, intersecciones con el eje y ________

17. $r = -2\cos\theta$, nombre de la gráfica polar ________

18. $r = 2 + \text{sen}\,\theta$, nombre de la gráfica polar ________

19. $r = \text{sen}\,3\theta$, tangentes a la gráfica en el origen________

20. $r = \dfrac{1}{2 + 5\,\text{sen}\,\theta}$, excentricidad ________

21. $r = \dfrac{10}{1 - \text{sen}\,\theta}$, foco ________ y vértice ________

22. $r = \dfrac{12}{2 + \cos\theta}$, centro ________, foco ________, vértices ________

C. Ejercicios

1. Encuentre una ecuación de la recta que es normal a la gráfica de la curva $x = t - \text{sen}\,t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$, en $t = \pi/3$.

2. Determine la longitud de la curva dada en el problema 1.

3. Encuentre los puntos sobre la gráfica de la curva $x = t^2 + 4$, $y = t^3 - 9t^2 + 2$ en los cuales la recta tangente es paralela a $6x + y = 8$.

4. Determine los puntos sobre la gráfica de la curva $x = t^2 + 1$, $y = 2t$ en los cuales la recta tangente pasa por $(1, 5)$.

5. Considere la ecuación rectangular $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$.
a) Explique por qué es necesario que $|x| \leq 1$.
b) Si $x = \text{sen}\, t$, entonces $|x| \leq 1$. Encuentre las ecuaciones paramétricas que tengan la misma gráfica que la dada en la ecuación rectangular.
c) Con ecuaciones paramétricas, determine los puntos sobre la gráfica de la ecuación rectangular en la cual la tangente es horizontal.
d) Dibuje la gráfica de la ecuación rectangular.

6. Determine el área de la región que es externa al círculo $r = 4\cos\theta$ e interna a la limacón $r = 3 + \cos\theta$.

7. Encuentre el área de la región que es común al interior del círculo $r = 3\,\text{sen}\,\theta$ y la cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$.

8. En coordenadas polares, dibuje la región cuya área A se describe por medio de $A = \int_0^{\pi/2}(25 - 25\,\text{sen}^2\theta)\,d\theta$.

9. Encuentre ***a***) una ecuación rectangular y ***b***) una ecuación polar de la recta tangente a la gráfica de $r = 2\,\text{sen}\,2\theta$ en $\theta = \pi/4$.

10. Determine las coordenadas rectangulares de los vértices de la elipse cuya ecuación polar es $r = 2/(2 - \text{sen}\,\theta)$.

En los problemas 11 y 12, encuentre una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar dada.

11. $r = \cos\theta + \text{sen}\,\theta$

12. $r = \sec\theta - 5\cos\theta$

En los problemas 13 y 14, encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación rectangular dada.

13. $2xy = 5$

14. $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 9(x^2 + y^2)$

15. Determine una ecuación polar para el conjunto de puntos que son equidistantes del origen (polo) y la recta $r = -\sec\theta$.

16. Encuentre una ecuación polar de la hipérbola con foco en el origen, vértices (en coordenadas rectangulares) $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ y $(0, -4)$ y excentricidad 2.

En los problemas 17 y 18, escriba una ecuación de la gráfica polar dada.

17.

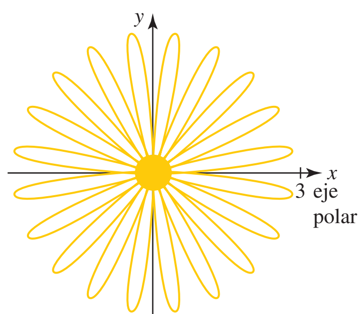


FIGURA 10.R.1 Gráfica del problema 17

18.

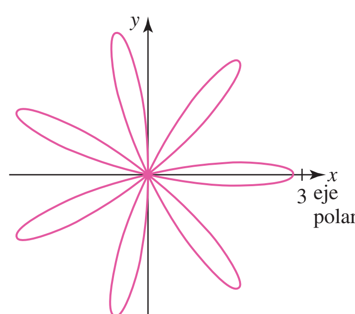


FIGURA 10.R.2 Gráfica del problema 18

19. Determine una ecuación de la hipérbola que tiene asíntotas $3y = 5x$ y $3y = -5x$ y vértices $(0, 10)$ y $(0, -10)$.

20. Encuentre una ecuación rectangular de la recta tangente a la gráfica de $r = 1/(1 + \cos\theta)$ en $\theta = \pi/2$.

21. El folium de Descartes, discutido antes en la sección 3.6, tiene la ecuación rectangular $x^3 + y^3 = 3axy$, donde $a > 0$ es una constante. Emplee la sustitución $y = tx$ para encontrar las ecuaciones paramétricas de la curva. Vea la FIGURA 10.R.3.

22. Emplee las ecuaciones paramétricas que se encontraron en el problema 21 para determinar los puntos sobre el folium de Descartes donde la recta tangente es horizontal. Vea la figura 10.R.3.

23. ***a***) Encuentre una ecuación polar para el folium de Descartes en el problema 21.
b) Emplee una ecuación polar para encontrar el área del lazo sombreado en el primer cuadrante en la figura 10.R.3. [*Sugerencia*: Deje que $u = \tan\theta$.]

24. Utilice las ecuaciones paramétricas encontradas en el problema 21 para mostrar que el folium de Descartes tiene la asíntota inclinada $x + y + a = 0$. Es la línea punteada roja de la figura 10.R.3. [*Sugerencia*: Considere lo que pasa a x, y y $x + y$ cuando $r \to -1$.]

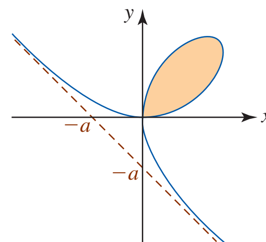


FIGURA 10.R.3 Gráfica de los problemas 21-24

25. La gráfica de $r = 2\ \text{sen}(\theta/3)$ dada en la FIGURA 10.R.4 se asemeja a una limacón con un lazo interior. Determine el área del lazo interior.

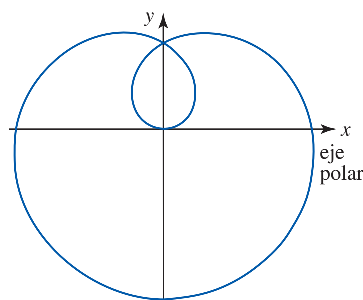


FIGURA 10.R.4 Gráfica del problema 25

26. Encuentre el área de la región sombreada en la FIGURA 10.R.5. Cada círculo tiene un radio igual a 1.

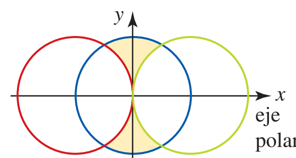


FIGURA 10.R.5 Gráfica del problema 26

En los problemas 27 y 28, la gráfica de la ecuación polar dada se rota en torno al origen en la cantidad indicada.

a) Encuentre una ecuación polar de la nueva gráfica.

b) Encuentre una ecuación rectangular para la nueva gráfica.

27. $r = 2\cos\theta$; en sentido contrario al de las manecillas del reloj, $\pi/4$

28. $r = 1/(1 + \cos\theta)$; en el sentido de las manecillas del reloj, $\pi/6$

29. Un satélite gira alrededor del planeta Júpiter en una órbita elíptica con el centro del planeta en un foco. La longitud del eje mayor de la órbita es 10^9 m y la longitud del eje menor corresponde a 6×10^8 m. Determine la distancia mínima entre el satélite y el centro de Júpiter. ¿Cuál es la distancia máxima?

30. Encuentre el ancho w de cada pétalo de la curva de la rosa $r = \cos 2\theta$. Se muestra un pétalo en la FIGURA 10.R.6.

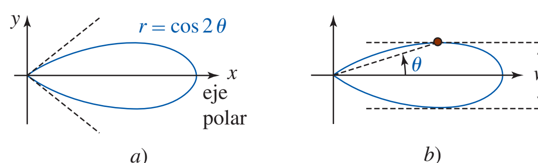
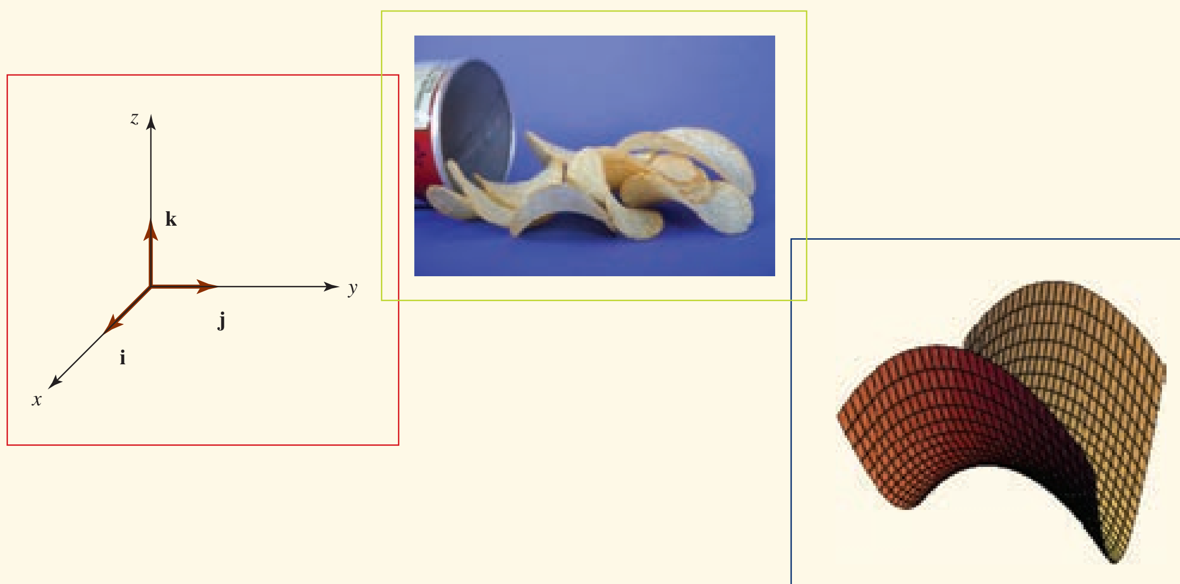


FIGURA 10.R.6 Gráfica del problema 30

Capítulo 11

Vectores y espacio tridimensional



En este capítulo Hasta ahora hemos efectuado la mayoría de los intentos en cálculo en la tierra plana del plano cartesiano bidimensional o espacio 2. En los siguientes capítulos centraremos el interés en examinar la vida matemática en tres dimensiones o espacio 3. Iniciamos el estudio con un examen de los vectores en dos y tres dimensiones.

11.1 Vectores en el espacio bidimensional

Introducción Hasta este punto hemos concentrado el estudio, principalmente, en las funciones de una sola variable cuyas gráficas existen en un plano bidimensional. En esta sección iniciamos el estudio del cálculo de varias variables con una introducción a los vectores en el espacio bidimensional. En secciones y capítulos subsecuentes el enfoque principal será en vectores y funciones definidos en el espacio tridimensional.

Escalares En ciencia, matemáticas e ingeniería se distinguen dos cantidades importantes: *escalares* y *vectores*. Un **escalar** es simplemente un número real y se representa mediante una letra itálica minúscula, a, k o x. Los escalares se usan para representar magnitudes y pueden tener unidades específicas asociadas; por ejemplo, 80 pies o 20 °C.

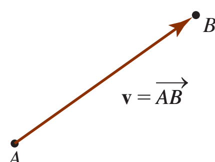


FIGURA 11.1.1 Un vector del punto inicial A al punto final B

Vectores geométricos Por otro lado, un **vector** o **vector de desplazamiento** puede considerarse como una flecha que conecta dos puntos A y B en el espacio. La *cola* de la flecha se llama **punto inicial** y la *punta* de la flecha se denomina **punto final**. Como se muestra en la FIGURA 11.1.1, un vector puede representarse utilizando una letra negrita tal como $\mathbf{v}$ o, si deseamos enfatizar los puntos inicial y final A y B, utilizamos $\overrightarrow{AB}$ para representar el vector. Ejemplos de cantidades vectoriales mostrados en la FIGURA 11.1.2 son el peso $\mathbf{p}$, la velocidad $\mathbf{v}$ y la fuerza de fricción retardadora $\mathbf{F}_f$.

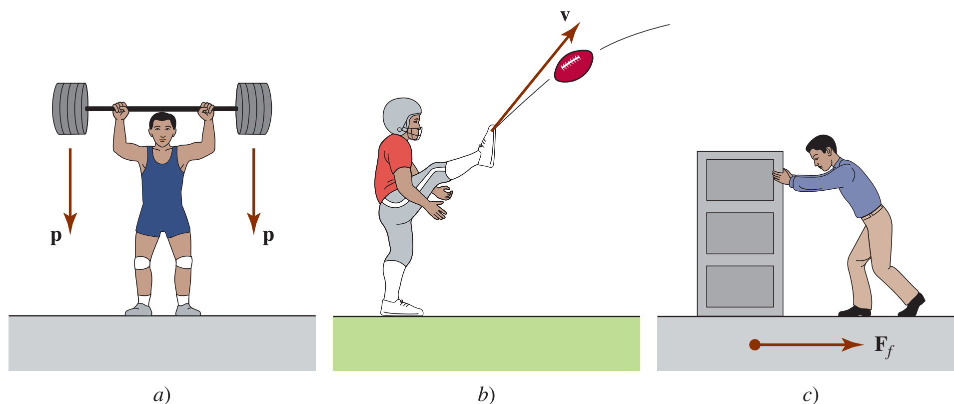


FIGURA 11.1.2 Cantidades vectoriales

Notación y terminología La distancia entre los puntos inicial y final de un vector $\overrightarrow{AB}$ se denomina **longitud**, **magnitud** o **norma** del vector y se denota mediante $|\overrightarrow{AB}|$. Dos vectores que tienen la misma magnitud y la misma dirección se dice que son **iguales**. Así, en la FIGURA 11.1.3 tenemos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. El **negativo** de un vector $\overrightarrow{AB}$, escrito $-\overrightarrow{AB}$, es un vector que tiene la misma magnitud que $\overrightarrow{AB}$ pero la dirección opuesta. Si $k \neq 0$ es un escalar, el **múltiplo escalar** de un vector, $k\overrightarrow{AB}$, es un vector que es $|k|$ veces la longitud de $\overrightarrow{AB}$. Si $k > 0$, entonces $k\overrightarrow{AB}$ tiene la misma dirección que el vector $\overrightarrow{AB}$; si $k < 0$, entonces $k\overrightarrow{AB}$ tiene la dirección opuesta a la de $\overrightarrow{AB}$. Cuando $k = 0$, afirmamos que $0\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$ es el **vector cero**. Dos vectores son **paralelos** si y sólo si no son múltiplos escalares uno del otro. Vea la FIGURA 11.1.4.

La pregunta relativa a cuál es la dirección de 0 suele responderse diciendo que al vector cero se le puede asignar cualquier dirección. Para agregar más al respecto, **0** se necesita para tener un álgebra vectorial.

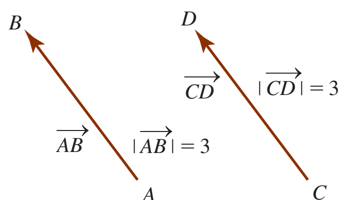


FIGURA 11.1.3 Vectores iguales

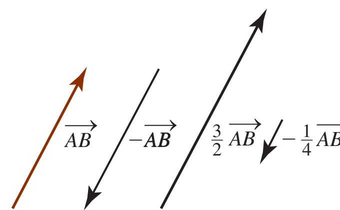


FIGURA 11.1.4 Vectores paralelos

Suma y resta Es posible considerar a dos vectores con el mismo punto inicial común, tal como A en la FIGURA 11.1.5*a*). Así, si vectores no paralelos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son los lados de un paralelogramo en la figura 11.1.5*b*), se dice que el vector que está en la diagonal principal, o $\overrightarrow{AD}$, es la **suma** de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Se escribe

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

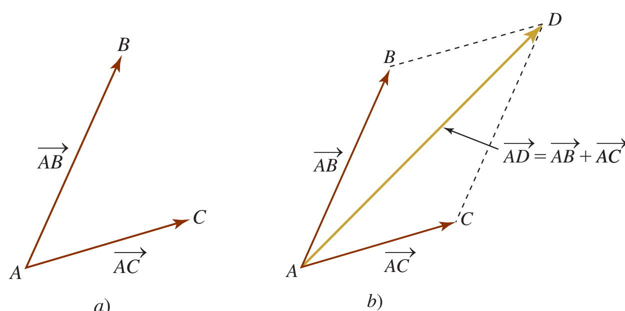


FIGURA 11.1.5 Suma de dos vectores

En ciencia y en ingeniería, si dos vectores representan fuerzas, entonces su suma se denomina la **fuerza resultante**.

La **diferencia** de dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se define mediante

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}).$$

Como puede observar en la FIGURA 11.1.6*a*), la diferencia $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ puede interpretarse como la diagonal principal del paralelogramo con lados $\overrightarrow{AB}$ y $-\overrightarrow{AC}$. Sin embargo, como muestra la figura 11.1.6*b*), la misma diferencia vectorial también puede interpretarse como el tercer lado de un triángulo con lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. En esta segunda interpretación, observe que la diferencia de vectores $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ apunta hacia el punto final del vector *desde* el cual se está restando el segundo vector. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, entonces $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 0$.

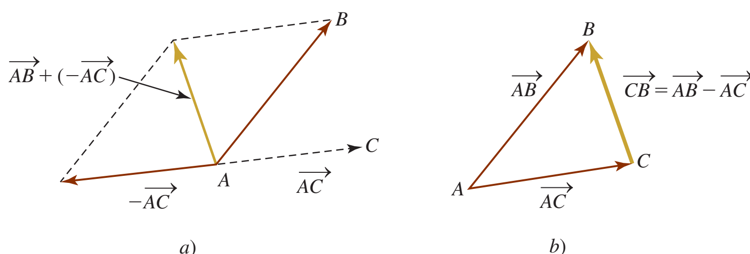


FIGURA 11.1.6 Diferencia de dos vectores

Vectores en un plano de coordenadas Para describir un vector analíticamente, supondremos en el resto de esta sección que los vectores a considerar yacen en un plano de coordenadas bidimensional o **espacio bidimensional**. El vector que se muestra en la FIGURA 11.1.7, cuyo punto inicial es el origen O y cuyo punto final es $P(x_1, y_1)$, recibe el nombre de **vector posición** del punto P y se escribe

$$\overrightarrow{OP} = \langle x_1, y_1 \rangle.$$

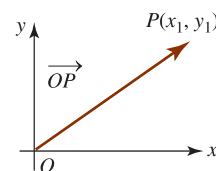


FIGURA 11.1.7 Vector posición

Componentes En general, cualquier vector en el espacio bidimensional puede identificarse con un vector posición único $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$. Los números a_1 y a_2 son las **componentes** del vector posición **a**.

EJEMPLO 1 Vector posición

El desplazamiento desde el punto inicial $P_1(x, y)$ hasta el punto final $P_2(x + 4, y + 3)$ en la FIGURA 11.1.8*a*) está cuatro unidades a la derecha y tres unidades hacia arriba. Como se ve en la figura 11.1.8*b*), el vector posición de $\mathbf{a} = \langle 4, 3 \rangle$ es equivalente al vector de desplazamiento $\overrightarrow{P_1P_2}$ desde $P_1(x, y)$ hasta $P_2(x + 4, y + 3)$.

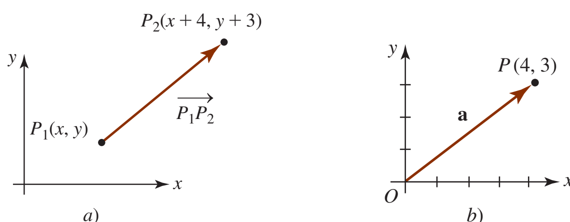


FIGURA 11.1.8 Equivalencia de vectores de desplazamiento y posición ■

Ya hemos definido geométricamente la suma algebraica, la multiplicación escalar y la igualdad de vectores. Ahora daremos las definiciones algebraicas equivalentes utilizando la forma de componentes de vectores.

Definición 11.1.1 Aritmética de componentes

Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ vectores en el espacio bidimensional.

i) Adición: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$ (1)

ii) Multiplicación escalar: $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$ (2)

iii) Igualdad: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y sólo si $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ (3)

Restas Utilizando (2) definimos el **negativo** del vector **b** mediante

$$-\mathbf{b} = (-1)\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2 \rangle.$$

Entonces es posible definir la **resta**, o la diferencia, de dos vectores como

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle. \quad (4)$$

En la FIGURA 11.1.9*a*) vemos ilustrada la suma de dos vectores $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$. En la figura 11.1.9*b*) el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$, con punto inicial P_1 y punto final P_2, es la diferencia de los vectores de posición.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle.$$

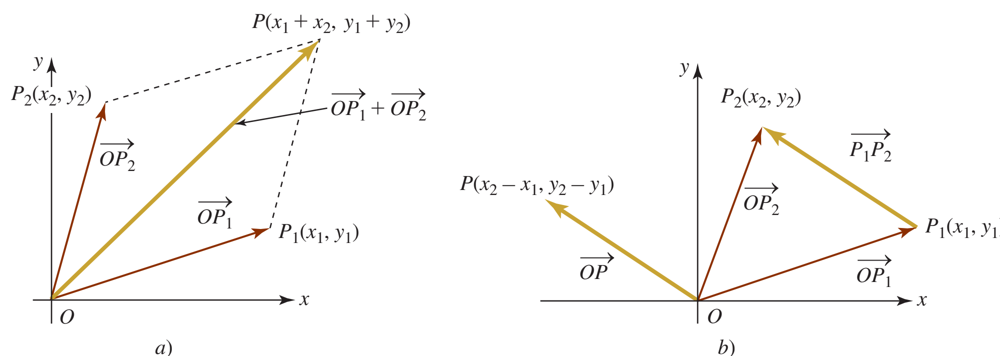


FIGURA 11.1.9 Resta de vectores

Como se muestra en la figura 11.1.9*b*), el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ puede dibujarse ya sea a partir del punto final de $\overrightarrow{OP_1}$ y terminar en el punto final de $\overrightarrow{OP_2}$, o como el vector posición $\overrightarrow{OP}$ cuyo punto final tiene las coordenadas $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Recuerde, $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ se consideran iguales debido a que tienen la misma magnitud y dirección.

EJEMPLO 2 Suma y diferencia de vectores

Si $\mathbf{a} = \langle 1, 4 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -6, 3 \rangle$, se encuentra que

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, ***b***) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y ***c***) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$.

Solución Se emplean (1), (2) y (4).

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 1 + (-6), 4 + 3 \rangle = \langle -5, 7 \rangle$

b) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 1 - (-6), 4 - 3 \rangle = \langle 7, 1 \rangle$

c) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = \langle 2, 8 \rangle + \langle -18, 9 \rangle = \langle -16, 17 \rangle$ ■

Propiedades La forma de componentes de un vector puede usarse para verificar cada una de las siguientes propiedades.

Teorema 11.1.1 Propiedades de la aritmética de vectores

i) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ← ley conmutativa
ii) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ ← ley asociativa
iii) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ ← identidad aditiva
iv) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ ← inverso aditivo
v) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$, k un escalar
vi) $(k_1 + k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}$, k_1 y k_2 escalares
vii) $(k_1)(k_2\mathbf{a}) = (k_1k_2)\mathbf{a}$, k_1 y k_2 escalares
viii) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$
ix) $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$

El **vector cero 0** en las propiedades *iii*), *iv*) y *ix*) se define como

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle.$$

Magnitud Con base en el teorema de Pitágoras y la FIGURA 11.1.10, definimos la **magnitud**, **longitud** o **norma** de un vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ como

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

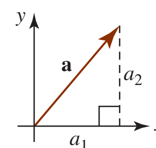


FIGURA 11.1.10 Magnitud de un vector

Claramente, $|\mathbf{a}| \geq 0$ para cualquier vector **a**, y $|\mathbf{a}| = 0$ si y sólo si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Por ejemplo, si $\mathbf{a} = \langle 6, -2\rangle$, entonces

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Vectores unitarios Un vector que tiene magnitud 1 recibe el nombre de **vector unitario**. Obtenemos un vector unitario **u** en la misma dirección que un vector distinto de cero **a** al multiplicar **a** por el escalar positivo $k = 1/|\mathbf{a}|$ (recíproco de su magnitud). En este caso afirmamos que $\mathbf{u} = (1/|\mathbf{a}|)\mathbf{a}$ es la **normalización** del vector **a**. La normalización del vector **a** es el vector unitario debido a que

$$|\mathbf{u}| = \left|\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1.$$

Nota: A menudo es conveniente escribir el múltiplo escalar $\mathbf{u} = (1/|\mathbf{a}|)\mathbf{a}$ como

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

EJEMPLO 3 Vector unitario

Dado $\mathbf{v} = \langle 2, -1\rangle$, forme un vector unitario

a) en la misma dirección de **v** y ***b***) en la dirección opuesta de **v**.

Solución Primero encontramos la magnitud del vector **v**:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

a) Un vector unitario en la misma dirección de **v** es entonces

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 2, -1\rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right\rangle.$$

b) Un vector unitario en la dirección opuesta de **v** es el negativo de **u**:

$$-\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle.$$ ■

Si **a** y **b** son vectores y c_1 y c_2 son escalares, entonces la expresión $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}$ se denomina **combinación lineal** de **a** y **b**. Como veremos a continuación, cualquier vector en el espacio bidimensional puede escribirse como una combinación lineal de dos vectores especiales.

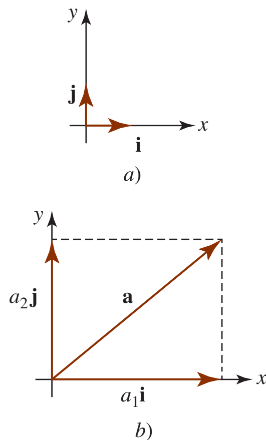


FIGURA 11.1.11 Los vectores **i** y **j** en forma de componentes

Los vectores i, j En vista de (1) y (2), cualquier vector **a** $= \langle a_1, a_2\rangle$ puede escribirse como una suma:

$$\langle a_1, a_2\rangle = \langle a_1, 0\rangle + \langle 0, a_2\rangle = a_1\langle 1, 0\rangle + a_2\langle 0, 1\rangle. \qquad (5)$$

Los vectores unitarios $\langle 1, 0\rangle$ y $\langle 0, 1\rangle$ suelen darse mediante los símbolos especiales **i** y **j**, respectivamente. Vea la FIGURA 11.1.11*a*). Así, si

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle \qquad \text{y} \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle,$$

entonces (5) se vuelve

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}. \qquad (6)$$

Puesto que cualquier vector **a** puede escribirse únicamente como una combinación lineal de **i** y **j**, estos vectores unitarios se conocen como la **base estándar** del sistema de vectores bidimensionales. Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ es un vector de posición, entonces la figura 11.1.11*b*) muestra que **a** es la suma de los vectores $a_1\mathbf{i}$ y $a_2\mathbf{j}$, los cuales tienen el origen como un punto inicial común y yacen, respectivamente, sobre los ejes *x* y *y*. El escalar a_1 se denomina la **componente horizontal** de **a** y el escalar a_2 se llama la **componente vertical** de **a**.

EJEMPLO 4 Varias formas de vectores

a) $\langle 4, 7\rangle = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

b) $(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) + (8\mathbf{i} + 13\mathbf{j}) = 10\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

c) $|\mathbf{i} + \mathbf{j}| = \sqrt{2}$

d) $10(3\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 30\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

e) $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ son paralelos, puesto que **b** es un múltiplo escalar de **a**. En este caso $\mathbf{b} = \frac{3}{2}\mathbf{a}$. ■

EJEMPLO 5 Gráficas de la suma y diferencia

Sea $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Grafique los vectores $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Solución De (1) y (4) tenemos, respectivamente,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{a} - \mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j}.$$

Las gráficas de estos dos vectores en el plano *xy* están dadas en la FIGURA 11.1.12.

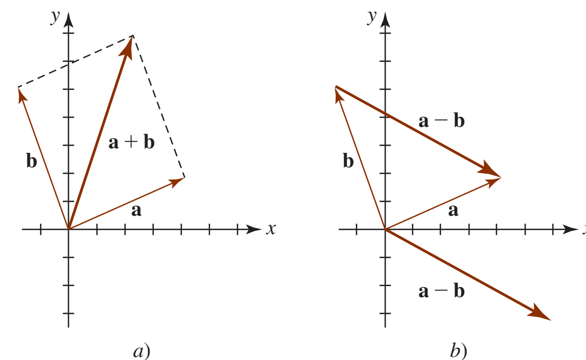


FIGURA 11.1.12 Gráficas de los vectores del ejemplo 5

Ejercicios 11.1 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-35.

Fundamentos

En los problemas 1-8, encuentre

a) 3**a**, *b*) **a** + **b**, *c*) **a** − **b**,
d) |**a** + **b**| y *e*) |**a** − **b**|.

1. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

2. $\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 3\rangle$

3. $\mathbf{a} = \langle 4, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, -5\rangle$

4. $\mathbf{a} = \frac{1}{6}\mathbf{i} - \frac{1}{6}\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{5}{6}\mathbf{j}$

5. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 7\mathbf{j}$

6. $\mathbf{a} = \langle 1, 3\rangle$, $\mathbf{b} = -5\mathbf{a}$

7. $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$

8. $\mathbf{a} = \langle 7, 10\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 2\rangle$

En los problemas 9-14, determine

a) $4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ y *b*) $-3\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$.

9. $\mathbf{a} = \langle 1, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1\rangle$

10. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

11. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

12. $\mathbf{a} = \langle 2, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, -3\rangle$

13. $\mathbf{a} = \langle 4, 10\rangle$, $\mathbf{b} = -2\langle 1, 3\rangle$

14. $\mathbf{a} = \langle 3, 1\rangle + \langle -1, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, 5\rangle - \langle 1, 2\rangle$

En los problemas 15-18, encuentre el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$. Grafique $\overrightarrow{P_1P_2}$ y su correspondiente vector posición.

15. $P_1(3, 2), P_2(5, 7)$ **16.** $P_1(-2, -1), P_2(4, -5)$

17. $P_1(3, 3), P_2(5, 5)$ **18.** $P_1(0, 3), P_2(2, 0)$

19. Encuentre el punto final del vector $\overrightarrow{P_1P_2} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ si su punto inicial es $(-3, 10)$.

20. Encuentre el punto inicial del vector $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle -5, -1\rangle$ si su punto final es $(4, 7)$.

21. Determine cuáles de los siguientes vectores son paralelos a $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$.

a) $-4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ *b*) $-\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j}$

c) $10\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$ *d*) $2(\mathbf{i} - \mathbf{j}) - 3\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{5}{12}\mathbf{j}\right)$

e) $8\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ *f*) $(5\mathbf{i} + \mathbf{j}) - (7\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$

22. Determine un escalar c de manera que $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + c\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ sean paralelos.

En los problemas 23 y 24, encuentre $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ para los vectores dados.

23. $\mathbf{a} = \langle 5, 1\rangle, \mathbf{b} = \langle -2, 4\rangle, \mathbf{c} = \langle 3, 10\rangle$

24. $\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle, \mathbf{b} = \langle 4, 3\rangle, \mathbf{c} = \langle 0, -2\rangle$

En los problemas 25-28, encuentre un vector unitario

a) en la misma dirección de **a**, y

b) en la dirección opuesta de **a**.

25. $\mathbf{a} = \langle 2, 2\rangle$ **26.** $\mathbf{a} = \langle -3, 4\rangle$

27. $\mathbf{a} = \langle 0, -5\rangle$ **28.** $\mathbf{a} = \langle 1, -\sqrt{3}\rangle$

En los problemas 29 y 30, normalice el vector dado cuando $\mathbf{a} = \langle 2, 8\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 3, 4\rangle$.

29. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **30.** $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$

En los problemas 31 y 32, encuentre el vector **b** que es paralelo al vector **a** dado y tiene la magnitud indicada.

31. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, |\mathbf{b}| = 2$ **32.** $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}, |\mathbf{b}| = 3$

33. Encuentre un vector en la dirección opuesta de $\mathbf{a} = \langle 4, 10\rangle$ pero de longitud igual a $\frac{3}{4}$.

34. Dado que $\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -1, 0\rangle$, encuentre un vector en la misma dirección que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ pero cinco veces su longitud.

En los problemas 35 y 36, emplee la figura dada para dibujar el vector que se indica.

35. $3\mathbf{b} - \mathbf{a}$ **36.** $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

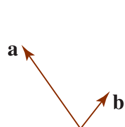


FIGURA 11.1.13 Vectores del problema 35

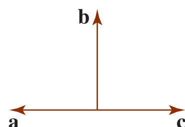


FIGURA 11.1.14 Vectores del problema 36

En los problemas 37 y 38, exprese el vector **x** en términos de los vectores **a** y **b**.

37.

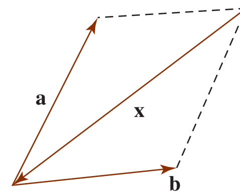


FIGURA 11.1.15 Vectores del problema 37

38.

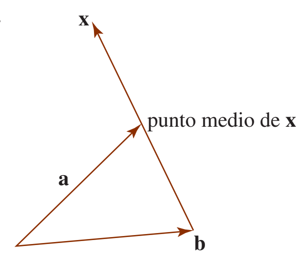


FIGURA 11.1.16 Vectores del problema 38

En los problemas 39 y 40, emplee la figura dada para demostrar el resultado que se indica.

39. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ **40.** $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$

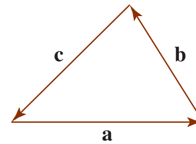


FIGURA 11.1.17 Vectores del problema 39

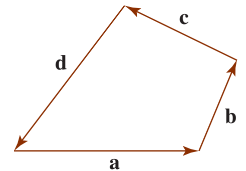


FIGURA 11.1.18 Vectores del problema 40

En los problemas 41 y 42, exprese el vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ como una combinación lineal de los vectores dados **b** y **c**.

41. $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

42. $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

Se dice que un vector es tangente a una curva en un punto si es paralelo a la recta tangente en el punto. En los problemas 43 y 44, encuentre un vector tangente unitario a la curva dada en el punto que se indica.

43. $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$; $(2, 2)$

44. $y = -x^2 + 3x$; $(0, 0)$

45. Sean P_1, P_2 y P_3 puntos distintos tales que $\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{P_2P_3}$ y $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{P_1P_3}$.

a) ¿Cuál es la relación de $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ con $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$?

b) ¿Bajo qué condición es $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$?

≡ Aplicaciones

46. Una carga eléctrica Q se distribuye de manera uniforme a lo largo del eje y entre $y = -a$ y $y = a$. Vea la FIGURA 11.1.19. La fuerza total ejercida sobre la carga q sobre el eje x por la carga Q es $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$, donde

$$F_x = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{L}{2a(L^2 + y^2)^{3/2}}\,dy$$

y

$$F_y = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{y}{2a(L^2 + y^2)^{3/2}}\,dy.$$

Determine **F**.

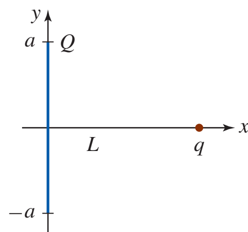


FIGURA 11.1.19 Carga eléctrica del problema 46

47. Al caminar, el pie de una persona golpea el suelo con una fuerza **F** a un ángulo θ desde la vertical. En la FIGURA 11.1.20, el vector **F** se descompone en dos componentes vectoriales $\mathbf{F}_g$, que es paralela al suelo, y $\mathbf{F}_n$, que es perpendicular al suelo. Para que el pie no resbale, la fuerza $\mathbf{F}_g$ debe ser compensada por la fuerza opuesta $\mathbf{F}_f$ de la fricción; esto es, $\mathbf{F}_f = -\mathbf{F}_g$.

***a*)** Utilice el hecho de que $|\mathbf{F}_f| = \mu|\mathbf{F}_n|$, donde el símbolo μ es el coeficiente de fricción, para demostrar que $\tan\theta = \mu$. El pie no resbalará para ángulos menores o iguales que θ.

***b*)** Dado que $\mu = 0.6$ para un tacón de hule que golpea una acera de asfalto, encuentre el ángulo de "no resbalamiento".

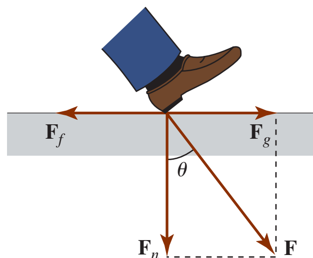


FIGURA 11.1.20 Vectores del problema 47

48. Un semáforo de 200 lb soportado por dos cables cuelga en equilibrio. Como se ilustra en la FIGURA 11.1.21*b*), considere que el peso del semáforo está representado por **w** y las fuerzas en los dos cables por $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. De la figura 11.1.21*c*), se observa que una condición de equilibrio es

$$\mathbf{w} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}. \qquad (7)$$

Vea el problema 39. Si

$$\mathbf{w} = -200\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_1 = (|\mathbf{F}_1|\cos 20°)\mathbf{i} + (|\mathbf{F}_1|\operatorname{sen} 20°)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_2 = -(|\mathbf{F}_2|\cos 15°)\mathbf{i} + (|\mathbf{F}_2|\operatorname{sen} 15°)\mathbf{j},$$

emplee (7) para determinar las magnitudes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. [*Sugerencias*: Vuelva a leer *iii*) de la definición 11.1.1.]

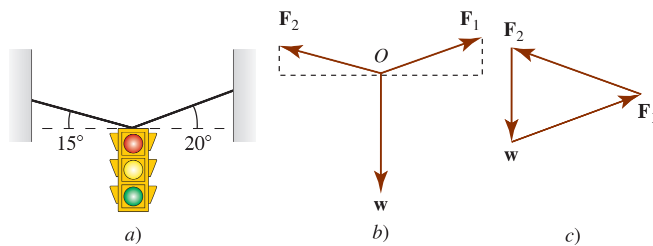


FIGURA 11.1.21 Semáforo en el problema 48

49. El agua que corre por una manguera contra incendios ejerce una fuerza horizontal $\mathbf{F}_1$ de magnitud igual a 200 lb. Vea la FIGURA 11.1.22. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_3$ que un bombero debe ejercer para sostener la manguera a un ángulo de 45° desde la horizontal?

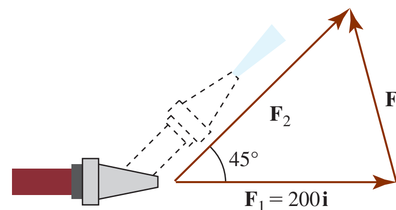


FIGURA 11.1.22 Vectores del problema 49

50. Un avión parte de un aeropuerto ubicado en el origen *O* y vuela a 150 mi en la dirección 20° noreste a la ciudad *A*. De *A* el avión vuela después 200 mi en la dirección 23° noroeste a la ciudad *B*. De *B* el avión vuela 240 mi en la dirección 10° suroeste a la ciudad *C*. Exprese la ubicación de la ciudad *C* como un vector **r** igual al que se presenta en la FIGURA 11.1.23. Determine la distancia de *O* a *C*.

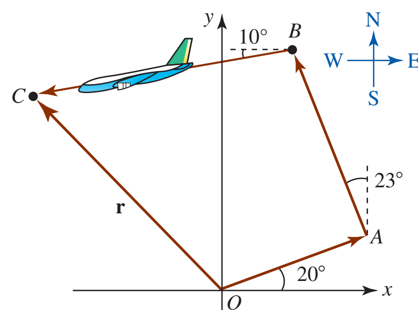


FIGURA 11.1.23 Vectores del problema 50

≡ Piense en ello

51. Mediante vectores, demuestre que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí. [*Sugerencia*: Sea *M* el punto medio de una diagonal y *N* el punto medio de la otra.]

52. Empleando vectores, demuestre que el segmento de recta entre los puntos medios de los dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y la mitad de largo.

11.2 Espacio tridimensional y vectores

Introducción En el plano, o espacio bidimensional, una manera de describir la posición de un punto *P* es asignarle coordenadas relativas a dos ejes mutuamente ortogonales denominados ejes *x* y *y*. Si *P* es el punto de intersección de la recta $x = a$ (perpendicular al eje *x*) y la recta $y = b$ (perpendicular al eje *y*), entonces el **par ordenado** (a, b) se dice que son las coordenadas

rectangulares o cartesianas del punto. Vea la FIGURA 11.2.1. En esta sección se extenderá este método de representación al espacio tridimensional y después se considerarán vectores en el espacio tridimensional.

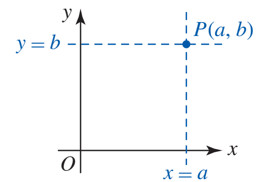


FIGURA 11.2.1 Punto en el espacio bidimensional

Sistema de coordenadas rectangular en el espacio tridimensional En tres dimensiones, o **espacio tridimensional**, se construye un sistema de coordenadas rectangulares utilizando tres ejes mutuamente perpendiculares. El punto en el cual estos ejes se intersecan se denomina **origen** O. Estos ejes, que se muestran en la FIGURA 11.2.2*a*), se marcan de acuerdo con la llamada **regla de la mano derecha**: Si los dedos de la mano derecha, apuntando en la dirección del eje x positivo, se curvan hacia el eje y positivo, el pulgar apuntará entonces en la dirección del nuevo eje perpendicular al plano de los ejes x y y. Este nuevo eje se denomina eje z. Las líneas punteadas en la figura 11.2.2*a*) representan los ejes negativos. Ahora bien, si

Si se intercambian los ejes x y y en la figura 11.2.2*a*), se dice que el sistema de coordenadas es de **mano izquierda**.

$$x = a, \qquad y = b, \qquad z = c$$

son planos perpendiculares a los ejes x, y y z, respectivamente, el punto P en el cual estos planos se intersecan puede representarse mediante una **triada ordenada** de números (a, b, c) que se dice son las **coordenadas rectangulares** o **cartesianas** del punto. Los números a, b y c se denominan, a su vez, las coordenadas x, y y z de $P(a, b, c)$. Vea figura 11.2.2*b*).

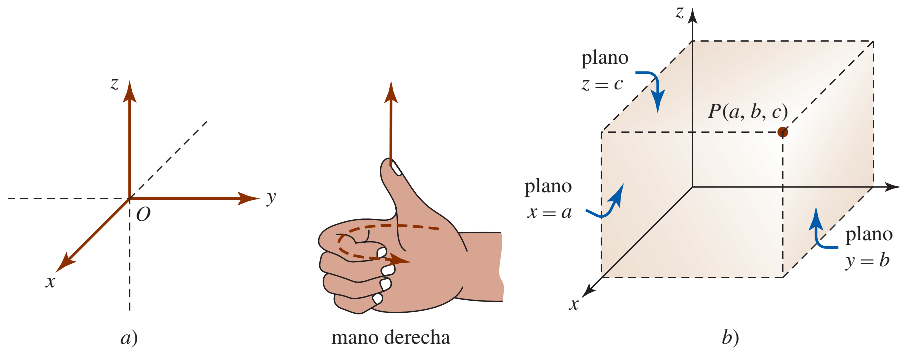


FIGURA 11.2.2 La regla de la mano derecha y un punto en el espacio tridimensional

Octantes Cada par de ejes de coordenadas determina un **plano de coordenadas**. Como se muestra en la FIGURA 11.2.3, los ejes x y y determinan al plano xy, los ejes x y z determinan al plano xz, etcétera. Los planos de coordenadas dividen el espacio tridimensional en ocho partes conocidas como **octantes**. El octante en el cual las tres coordenadas de un punto son *positivas* se denomina **primer octante**. No hay un acuerdo para nombrar a los otros siete octantes.

La siguiente tabla resume las coordenadas de un punto sobre un eje de coordenadas o en un plano de coordenadas. Como se ve en la tabla, también es posible describir, digamos, el plano xy mediante una simple ecuación $z = 0$. De manera similar, el plano xz es $y = 0$ y el plano yz es $x = 0$.

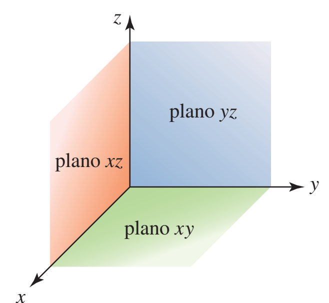


FIGURA 11.2.3 Plano de coordenadas

Ejes	Coordenadas	Plano	Coordenadas
x	$(a, 0, 0)$	xy	$(a, b, 0)$
y	$(0, b, 0)$	xz	$(a, 0, c)$
z	$(0, 0, c)$	yz	$(0, b, c)$

EJEMPLO 1 Graficación de puntos en el espacio tridimensional

Grafique los puntos $(4, 5, 6)$, $(3, -3, -1)$ y $(-2, -2, 0)$.

Solución De los tres puntos que se muestran en la FIGURA 11.2.4, sólo $(4, 5, 6)$ está en el primer octante. El punto $(-2, -2, 0)$ está en el plano xy.

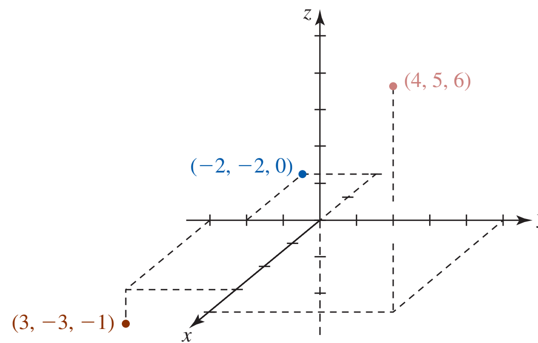


FIGURA 11.2.4 Puntos del ejemplo 1 ■

Fórmula de la distancia Para determinar la **distancia** entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en el espacio tridimensional, vamos a considerar sus proyecciones sobre el plano xy. Como puede observar en la FIGURA 11.2.5, la distancia entre $(x_1, y_1, 0)$ y $(x_2, y_2, 0)$ sigue de la fórmula usual de la distancia en el plano y es $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. En consecuencia, del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo $P_1P_3P_2$ tenemos

$$[d(P_1, P_2)]^2 = \left[\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right]^2 + |z_2 - z_1|^2$$

o

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1}$$

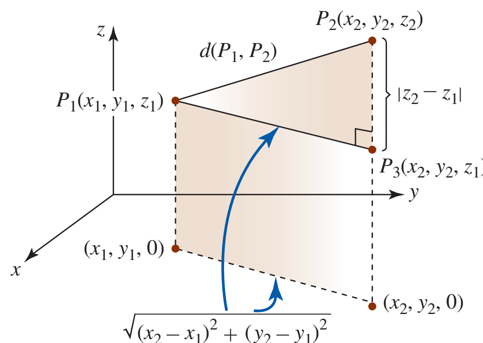


FIGURA 11.2.5 Distancia entre dos puntos en el espacio tridimensional

EJEMPLO 2 Distancia entre puntos en el espacio tridimensional

Encuentre la distancia entre $(2, -3, 6)$ y $(-1, -7, 4)$.

Solución De (1),

$$d = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-3 - (-7))^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{29}.$$ ■

Fórmula del punto medio Es posible utilizar la fórmula de la distancia para mostrar que las coordenadas del **punto medio del segmento de recta** en el espacio tridimensional que conecta los distintos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right). \tag{2}$$

Vea el problema 64 en los ejercicios 11.2.

EJEMPLO 3 Punto medio en el espacio tridimensional

Determine las coordenadas de punto medio del segmento de recta entre los dos puntos del ejemplo 2.

Solución De (2) obtenemos

$$\left(\frac{2 + (-1)}{2}, \frac{-3 + (-7)}{2}, \frac{6 + 4}{2}\right) \quad \text{o} \quad \left(\frac{1}{2}, -5, 5\right).$$ ■

Vectores en el espacio tridimensional Un **vector a** en el espacio tridimensional es cualquier triada ordenada de números reales

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle,$$

donde a_1, a_2 y a_3 son las **componentes** del vector. El **vector posición** de un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en el espacio tridimensional es el vector $\overrightarrow{OP} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$, cuyo punto inicial es el origen O y cuyo punto final es P. Vea la FIGURA 11.2.6.

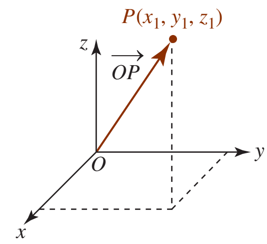


FIGURA 11.2.6 Un vector en el espacio tridimensional

Las definiciones de componentes de la adición, sustracción y multiplicación por un escalar, etc., son generalizaciones naturales de las que se dieron para vectores en el espacio bidimensional.

Definición 11.2.1 Aritmética de componentes

Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ vectores en el espacio tridimensional.

i) Suma: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
ii) Multiplicación escalar: $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
iii) Igualdad: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y sólo si $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$
iv) Negativo: $-\mathbf{b} = (-1)\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2, -b_3 \rangle$
v) Resta: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
vi) Vector cero: $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$
vii) Magnitud: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Si $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$ son los vectores de posición de los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, entonces el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ está dado por

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle. \tag{3}$$

Como en el espacio bidimensional, $\overrightarrow{P_1P_2}$ puede dibujarse ya sea como un vector cuyo punto inicial es P_1 y cuyo punto final es P_2, o como un vector posición $\overrightarrow{OP}$ con punto final $P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Vea la FIGURA 11.2.7.

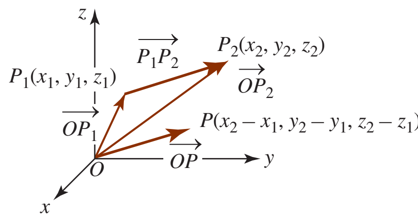


FIGURA 11.2.7 Un vector que conecta dos puntos en el espacio tridimensional

EJEMPLO 4 Vectores entre dos puntos

Determine el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ si los puntos P_1 y P_2 están dados por $P_1 = (4, 6, -2)$ y $P_2 = (1, 8, 3)$.

Solución Si los vectores de posición de los puntos son $\overrightarrow{OP_1} = \langle 4, 6, -2 \rangle$ y $\overrightarrow{OP_2} = (1, 8, 3)$, entonces de (3) tenemos

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle 1 - 4, 8 - 6, 3 - (-2) \rangle = \langle -3, 2, 5 \rangle.$$ ■

EJEMPLO 5 Vector unitario

Encuentre un vector unitario en la dirección de $\mathbf{a} = \langle -2, 3, 6 \rangle$.

Solución Puesto que un vector unitario tiene longitud 1, primero encontramos la magnitud de $\mathbf{a}$ y después se usa el hecho de que $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{a}$. La magnitud de $\mathbf{a}$ es

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7.$$

El vector unitario en la dirección de $\mathbf{a}$ es

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{7}\langle -2, 3, 6 \rangle = \left\langle -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle.$$ ■

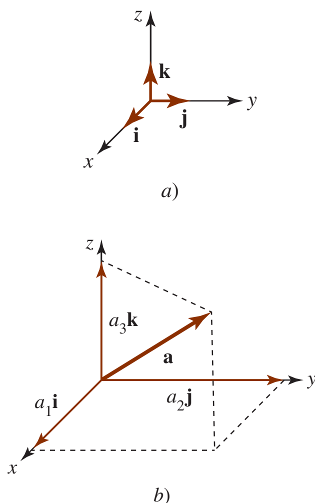


FIGURA 11.2.8 Empleo de los vectores **i, j, k** para representar un vector de posición **a**

Los vectores i, j, k En la sección precedente se mencionó que el conjunto de dos vectores unitarios $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ constituye una base para el sistema de vectores bidimensionales. Esto es, cualquier vector **a** en el espacio bidimensional puede escribirse como una combinación lineal de **i** y **j**: $a = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$. De igual manera, cualquier vector $a = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ en el espacio tridimensional se puede expresar como una combinación lineal de los vectores unitarios

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle, \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle.$$

Para ver esto usamos *i*) y *ii*) de la definición 11.2.1 para escribir

$$\begin{aligned}\langle a_1, a_2, a_3\rangle &= \langle a_1, 0, 0\rangle + \langle 0, a_2, 0\rangle + \langle 0, 0, a_3\rangle \\ &= a_1\langle 1, 0, 0\rangle + a_2\langle 0, 1, 0\rangle + a_3\langle 0, 0, 1\rangle,\end{aligned}$$

esto es,
$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

Los vectores **i**, **j** y **k** ilustrados en la FIGURA 11.2.8*a*) se llaman la **base estándar** del sistema de vectores tridimensionales. En la figura 11.2.8*b*) observamos que un vector posición $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es la suma de los vectores $a_1\mathbf{i}$, $a_2\mathbf{j}$ y $a_3\mathbf{k}$, los cuales yacen a lo largo de los ejes de coordenadas y tienen el origen como un punto inicial común.

EJEMPLO 6 Empleo de los vectores i, j, k

El vector $\mathbf{a} = \langle 7, -5, 13\rangle$ es el mismo que $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$. ■

Cuando se toma en consideración la tercera dimensión, cualquier vector en el plano *xy* se describe de manera equivalente como un vector tridimensional que yace en el plano de coordenadas $z = 0$. Si bien los vectores $\langle a_1, a_2\rangle$ y $\langle a_1, a_2, 0\rangle$ técnicamente no son iguales, se ignorará la distinción. Ésta es la razón, por ejemplo, por la que se denotan $\langle 1, 0\rangle$ y $\langle 1, 0, 0\rangle$ mediante el mismo símbolo **i**. Un vector ya sea en el plano *yz* o en el plano *xz* también debe tener una componente cero. En el plano *yz* el vector $\mathbf{b} = \langle 0, b_2, b_3\rangle$ se escribe como $\mathbf{b} = b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$.

EJEMPLO 7 Vectores en los planos de coordenadas

a) El vector $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{k} = 5\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ yace en el plano *xz* y también puede escribirse como $\mathbf{a} = \langle 5, 0, 3\rangle$.

b) $|5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$ ■

EJEMPLO 8 Combinación de vectores

Si $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 4\mathbf{k}$, encuentre $5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

Solución Al escribir $5\mathbf{a} = 15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 40\mathbf{k}$ y $2\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ obtenemos

$$\begin{aligned}5\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= (15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 40\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 8\mathbf{k}) \\ &= 13\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 48\mathbf{k}.\end{aligned}$$ ■

Ejercicios 11.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-35.

Fundamentos

En los problemas 1-6, grafique el punto dado. Utilice los mismos ejes de coordenadas.

1. (1, 1, 5)

2. (0, 0, 4)

3. (3, 4, 0)

4. (6, 0, 0)

5. (6, −2, 0)

6. (5, −4, 3)

En los problemas 7-10, describa geométricamente todos los puntos $P(x, y, z)$ cuyas coordenadas satisfagan la condición dada.

7. $z = 5$

8. $x = 1$

9. $x = 2, y = 3$

10. $x = 4, y = -1, z = 7$

11. Proporcione las coordenadas de los vértices del paralelepípedo rectangular cuyos lados son los planos de coordenadas y los planos $x = 2$, $y = 5$, $z = 8$.

12. En la FIGURA 11.2.9 se muestran dos vértices de un paralelepípedo rectangular que tiene lados paralelos a los planos de coordenadas. Determine las coordenadas de los restantes seis vértices.

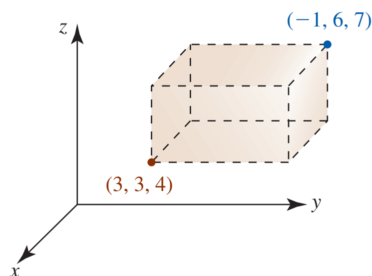


FIGURA 11.2.9 Paralelepípedo del problema 12

13. Considere el punto $P(-2, 5, 4)$.

a) Si las líneas se dibujan desde P perpendicular a los planos coordenados, ¿cuáles son las coordenadas del punto en la base de cada perpendicular?

b) Si se dibuja una línea desde P al plano $z = -2$, ¿cuáles son las coordenadas del punto en la base de la perpendicular?

c) Determine el punto en el plano $x = 3$ que es más cercano a P.

14. Determine una ecuación de un plano paralelo a un plano de coordenadas que contenga el par de puntos indicado.

a) $(3, 4, -5), (-2, 8, -5)$

b) $(1, -1, 1), (1, -1, -1)$

c) $(-2, 1, 2), (2, 4, 2)$

En los problemas 15-20, describa el conjunto de puntos $P(x, y, z)$ en el espacio tridimensional cuyas coordenadas satisfagan la ecuación dada.

15. $xyz = 0$ **16.** $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

17. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$

18. $(x - 2)(z - 8) = 0$

19. $z^2 - 25 = 0$ **20.** $x = y = z$

En los problemas 21 y 22, encuentre la distancia entre los puntos indicados.

21. $(3, -1, 2), (6, 4, 8)$ **22.** $(-1, -3, 5), (0, 4, 3)$

23. Determine la distancia del punto $(7, -3, -4)$ a

a) el plano yz y ***b)*** el eje x.

24. Determine la distancia desde el punto $(-6, 2, -3)$ hasta

a) el plano xz y ***b)*** el origen.

En los problemas 25-28, los tres puntos dados forman un triángulo. Determine cuáles triángulos son isósceles y cuáles son triángulos rectos.

25. $(0, 0, 0), (3, 6, -6), (2, 1, 2)$

26. $(0, 0, 0), (1, 2, 4), \left(3, 2, 2\sqrt{2}\right)$

27. $(1, 2, 3), (4, 1, 3), (4, 6, 4)$

28. $(1, 1, -1), (1, 1, 1), (0, -1, 1)$

En los problemas 29-32, utilice la fórmula de la distancia para determinar si los puntos dados son colineales.

29. $P_1(1, 2, 0), P_2(-2, -2, -3), P_3(7, 10, 6)$

30. $P_1(1, 2, -1), P_2(0, 3, 2), P_3(1, 1, -3)$

31. $P_1(1, 0, 4), P_2(-4, -3, 5), P_3(-7, -4, 8)$

32. $P_1(2, 3, 2), P_2(1, 4, 4), P_3(5, 0, -4)$

En los problemas 33 y 34, resuelva para la incógnita.

33. $P_1(x, 2, 3), P_2(2, 1, 1);\quad d(P_1, P_2) = \sqrt{21}$

34. $P_1(x, x, 1), P_2(0, 3, 5);\quad d(P_1, P_2) = 5$

En los problemas 35 y 36, encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de recta entre los puntos indicados.

35. $\left(1, 3, \frac{1}{2}\right), \left(7, -2, \frac{5}{2}\right)$ **36.** $(0, 5, -8), (4, 1, -6)$

37. Las coordenadas del punto medio del segmento de recta entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(2, 3, 6)$ son $(-1, -4, 8)$. Encuentre las coordenadas de P_1.

38. Sea P_3 el punto medio del segmento de recta entre $P_1(-3, 4, 1)$ y $P_2(-5, 8, 3)$. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de recta.

a) entre P_1 y P_3 y ***b)*** entre P_3 y P_2.

En los problemas 39-42, exprese el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ en forma de componentes.

39. $P_1(3, 4, 5), P_2(0, -2, 6)$ **40.** $P_1(-2, 4, 0), P_2\left(6, \frac{3}{4}, 8\right)$

41. $P_1(0, -1, 0), P_2(2, 0, 1)$ **42.** $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 5\right), P_2\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}, 12\right)$

En los problemas 43-46, dibuje el vector dado.

43. $\langle -3, 5, -2\rangle$ **44.** $\langle 2, 0, 4\rangle$

45. $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ **46.** $-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los problemas 47-50, determine el eje o plano en el cual yace el vector dado.

47. $\langle 7, -3, 0\rangle$ **48.** $\langle 0, 2, 0\rangle$

49. $4\mathbf{k}$ **50.** $-2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

En los problemas 51-58, $\mathbf{a} = \langle 1, -3, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1, 1\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 2, 6, 9\rangle$. Encuentre el vector o escalar indicado.

51. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ **52.** $2\mathbf{a} - (\mathbf{b} - \mathbf{c})$

53. $\mathbf{b} + 2(\mathbf{a} - 3\mathbf{c})$ **54.** $4(\mathbf{a} + 2\mathbf{c}) - 6\mathbf{b}$

55. $|\mathbf{a} + \mathbf{c}|$ **56.** $|\mathbf{c}||2\mathbf{b}|$

57. $\left|\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| + 5\left|\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right|$ **58.** $|\mathbf{b}|\mathbf{a} + |\mathbf{a}|\mathbf{b}$

59. Determine un vector unitario en la dirección opuesta de $\mathbf{a} = \langle 10, -5, 10\rangle$.

60. Encuentre un vector unitario en la misma dirección que $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

61. Encuentre el vector $\mathbf{b}$ que es cuatro veces la longitud de $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ en la misma dirección que $\mathbf{a}$.

62. Encuentre el vector $\mathbf{b}$ para el cual $|\mathbf{b}| = \frac{1}{2}$ que es paralelo a $\mathbf{a} = \langle -6, 3, -2\rangle$ pero tiene la dirección opuesta.

≡ Piense en ello

63. Mediante los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que se muestran en la FIGURA 11.2.10, dibuje el “vector promedio” $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

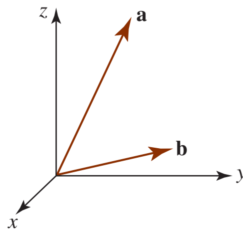


FIGURA 11.2.10 Vectores del problema 63

64. Emplee la fórmula de la distancia para demostrar que

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

es el punto medio del segmento de recta entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. [*Sugerencia*: Demuestre que

$$d(P_1, M) = d(M, P_2) \text{ y } d(P_1, P_2) = d(P_1, M) + d(M, P_2).]$$

☰ Proyectos

65. Como se ilustra en la FIGURA 11.2.11*a*), una nave espacial puede efectuar rotaciones denominadas **declive**, **balanceo** y **desvío del eje** alrededor de tres ejes distintos. Para descubrir las coordenadas de un punto P se recurre a dos sistemas de coordenadas: un sistema de coordenada cartesiano fijo y tridimensional en el cual las coordenadas de P son (x, y, z) y un sistema de coordenada de la nave espacial que se mueve con la rotación particular. En la figura 11.2.11*b*) se ha ilustrado un desvió del eje (esto es, una rotación alrededor del eje z, que es perpendicular al plano de la página). Cuando la nave espacial efectúa un declive, balanceo y desvío del eje *en secuencia* a través de los ángulos α, β y γ, respectivamente, las coordenadas finales del punto P en el sistema de la nave espacial (x_S, y_S, z_S) se obtienen a partir de la secuencia de transformaciones:

$$\begin{aligned} x_P &= x & x_R &= x_P \cos\beta - z_P \operatorname{sen}\beta \\ y_P &= y\cos\alpha + z\operatorname{sen}\alpha & y_R &= y_P \\ z_P &= -y\operatorname{sen}\alpha + z\cos\alpha, & z_R &= x_P\operatorname{sen}\beta + z_P\cos\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_S &= x_R\cos\gamma + y_R\operatorname{sen}\gamma \\ y_S &= -x_R\operatorname{sen}\gamma + y_R\cos\gamma \\ z_S &= z_R. \end{aligned}$$

Suponga que las coordenadas de un punto son (1, 1, 1) en el sistema de coordenadas fijo. Determine las coordenadas del punto en el sistema de la nave espacial si ésta efectúa un declive, balanceo y desvío del eje en secuencia a través de los ángulos $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$.

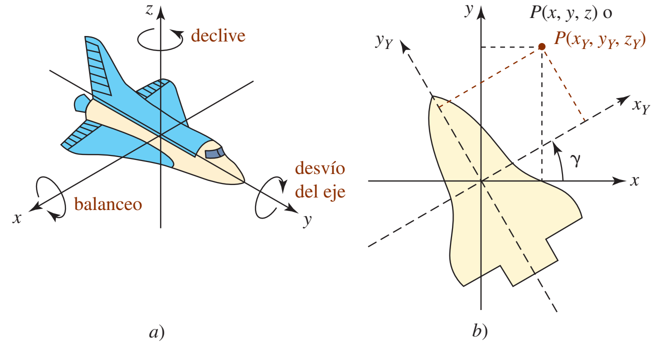


FIGURA 11.2.11 Nave espacial del problema 65

66. *(Para trabajar este problema, debe aprender acerca, o estar familiarizado, con la multiplicación de matrices.)*

a) Cada sistema de ecuaciones en el problema 65 puede escribirse como una ecuación matricial. Por ejemplo, el último sistema es

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} = \mathbf{M}_Y \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{M}_Y = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \operatorname{sen}\gamma & 0 \\ -\operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Identifique las matrices $\mathbf{M}_P$ y $\mathbf{M}_R$ y escriba los primeros dos sistemas como

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \mathbf{M}_P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{bmatrix} = \mathbf{M}_R \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}.$$

b) Verifique que las coordenadas finales (x_S, y_S, z_S) en el sistema de la nave espacial después del declive, balanceo y desvío del eje se obtienen de

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} = \mathbf{M}_Y \mathbf{M}_R \mathbf{M}_P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

c) Con $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ y $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$, efectúe la multiplicación de matrices indicada en el inciso *b*) y verifique que su respuesta es la misma que en el problema 65.

11.3 Producto punto

▮ Introducción En ésta y en la siguiente sección consideraremos dos tipos de productos entre vectores que se originaron en el estudio de la mecánica, la electricidad y el magnetismo. El primero de estos productos, conocido como **producto punto**, se estudia en esta sección.

▮ Forma de componentes del producto punto El producto punto, definido a continuación, se conoce también como **producto interior** o **producto escalar**. El producto punto de dos vectores **a** y **b** se denota mediante **a** · **b** y es un número real, o escalar, definido en términos de las componentes de los vectores.

Definición 11.3.1 Producto punto de dos vectores

En el espacio bidimensional el **producto punto** de dos vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \tag{1}$$

En el espacio tridimensional el **producto punto** de dos vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Productos punto utilizando (2)

Si $\mathbf{a} = 10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, entonces se deduce de (2) que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (10)\left(-\frac{1}{2}\right) + (2)(4) + (-6)(-3) = 21.$$ ■

EJEMPLO 2 Productos punto de los vectores de la base

Puesto que $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$, vemos de (2) que

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0. \tag{3}$$

De manera similar, por (2)

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1. \tag{4}$$ ■

Propiedades El producto punto posee las siguientes propiedades.

Teorema 11.3.1 Propiedades del producto punto

i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{0}$
ii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ← ley conmutativa
iii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ ← ley distributiva
iv) $\mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, k un escalar
v) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$
vi) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

DEMOSTRACIÓN Se prueban los incisos *iii*) y *vi*). Las demás pruebas se dejan al estudiante. Vea el problema 53 en los ejercicios 11.3. Para probar el inciso *iii*) se deja $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot (\langle b_1, b_2, b_3 \rangle + \langle c_1, c_2, c_3 \rangle) \\
&= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle \\
&= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\
&= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3 \\
&= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \\
&= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.
\end{aligned}$$

← puesto que la multiplicación de números reales es distributiva respecto a la adición

Para demostrar el inciso *vi*) notamos que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2.$$ ■

Forma alterna También puede expresarse el producto punto de dos vectores en términos de las longitudes de los vectores y del ángulo entre ellos.

Esta forma más geométrica es la que se usa por lo general como la definición del producto punto en un curso de física.

Teorema 11.3.2 Forma alterna del producto punto

El producto punto de dos vectores **a** y **b** es

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta, \tag{5}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores tal que $0 \le \theta \le \pi$.

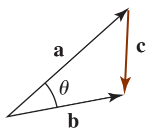


FIGURA 11.3.1 El vector **c** en la prueba del teorema 11.3.2

DEMOSTRACIÓN Suponga que θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Entonces el vector

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1 - a_1)\mathbf{i} + (b_2 - a_2)\mathbf{j} + (b_3 - a_3)\mathbf{k}$$

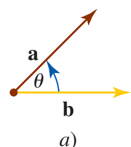
es el tercer lado del triángulo en la FIGURA 11.3.1. Por la ley de los cosenos podemos escribir

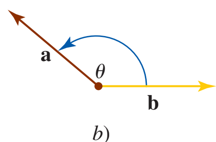
$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \quad \text{o} \quad |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = \tfrac{1}{2}(|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{c}|^2). \tag{6}$$

Al emplear $\qquad |\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \qquad |\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2,$

y $\qquad |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2,$

se simplifica el lado derecho de la ecuación en (6) a $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Puesto que ésta es la definición del producto punto, se observa que $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. ■





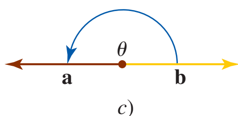


FIGURA 11.3.2 El ángulo θ en el producto punto

Ángulo entre vectores

La FIGURA 11.3.2 ilustra tres casos del ángulo θ en (5). Si los vectores **a** y **b** son paralelos, entonces θ es el *más pequeño* de los dos ángulos posibles entre ellos. Al resolver para $\cos\theta$ en (5) y utilizando después la definición del producto punto en (2) tenemos una fórmula para el coseno del ángulo entre los dos vectores:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}. \tag{7}$$

EJEMPLO 3 Ángulo entre dos vectores

Determine el ángulo entre $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución Tenemos $|\mathbf{a}| = \sqrt{14}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{27}$ y $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 14$. En consecuencia, (7) produce

$$\cos\theta = \frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{27}} = \frac{1}{9}\sqrt{42},$$

y por ello $\theta = \cos^{-1}\left(\sqrt{42}/9\right) \approx 0.77$ radianes o $\theta \approx 44.9°$. ■

Vectores ortogonales

Si **a** y **b** son vectores distintos de cero, entonces el teorema 11.3.2 implica que

i) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} > 0$ si y sólo si θ es agudo,
ii) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$ si y sólo si θ es obtuso y
iii) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ si y sólo si $\cos\theta = 0$.

Las palabras *ortogonal* y *perpendicular* se usan indistintamente. Como regla general se usará *ortogonal* al referirse a vectores y *perpendicular* cuando se involucre a una recta o a un plano.

Sin embargo, en el último caso el único número en $[0, 2\pi]$ para el cual $\cos\theta = 0$ es $\theta = \pi/2$. Cuando $\theta = \pi/2$, se dice que los vectores son **ortogonales** o **perpendiculares**. Así, se llega al siguiente resultado.

Teorema 11.3.3 Criterio para vectores ortogonales

Dos vectores distintos de cero **a** y **b** son ortogonales si y sólo si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

Puesto que $\mathbf{0}\cdot\mathbf{b} = 0$ para todo vector **b**, el vector cero se considera ortogonal a todo vector.

EJEMPLO 4 Vectores ortogonales

Si $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-3)(2) + (-1)(14) + (4)(5) = 0.$$

Del teorema 11.3.3 concluimos que **a** y **b** son ortogonales. ■

Cosenos directores Para un vector distinto de cero $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ en el espacio tridimensional, los ángulos α, β y γ entre **a** y los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, respectivamente, reciben el nombre de **ángulos directores** de **a**. Vea la FIGURA 11.3.3. Ahora bien, por (7),

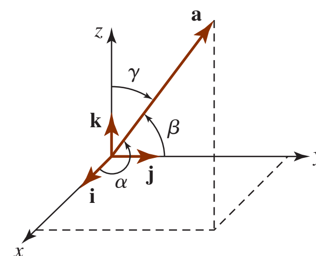


FIGURA 11.3.3 Los ángulos directores de un vector

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}||\mathbf{i}|}, \quad \cos\beta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{a}||\mathbf{j}|}, \quad \cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{a}||\mathbf{k}|},$$

la cual se simplifica en

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}.$$

Afirmamos que $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, son los **cosenos directores** de **a**. Los cosenos directores de un vector distinto de cero **a** son simplemente las componentes del vector unitario $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} &= \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{i} + \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}\mathbf{j} + \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}\mathbf{k} \\ &= (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Puesto que la magnitud de $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ es 1, se sigue de la última ecuación que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

EJEMPLO 5 Cosenos directores y ángulos directores

Determine los cosenos directores y los ángulos directores del vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Solución De $|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, observamos que los cosenos directores son

$$\cos\alpha = \frac{2}{3\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = \frac{5}{3\sqrt{5}}, \quad \cos\gamma = \frac{4}{3\sqrt{5}}.$$

Los ángulos directores son

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\right) \approx 1.27 \text{ radianes} \quad \text{o} \quad \alpha \approx 72.7°$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{3\sqrt{5}}\right) \approx 0.73 \text{ radián} \quad \text{o} \quad \beta \approx 41.8°$$

y

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{4}{3\sqrt{5}}\right) \approx 0.93 \text{ radián} \quad \text{o} \quad \gamma \approx 53.4°.$$ ■

Observe en el ejemplo 5 que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{45} + \frac{25}{45} + \frac{16}{45} = 1.$$

Componentes de a sobre b Utilizando la ley distributiva junto con (3) y (4) es posible usar las componentes de un vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ en términos del producto punto:

$$a_1 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}, \quad a_2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j}, \quad a_3 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}. \tag{8}$$

De manera simbólica, se escriben las componentes de **a** como

$$\text{comp}_{\mathbf{i}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}, \quad \text{comp}_{\mathbf{j}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j}, \quad \text{comp}_{\mathbf{k}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}. \tag{9}$$

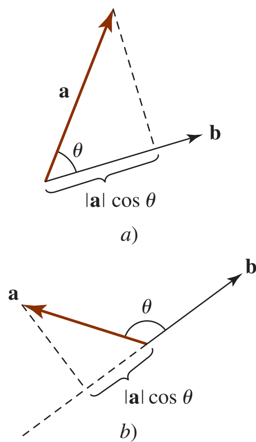


FIGURA 11.3.4 Componente de un vector **a** sobre un vector **b**

A continuación se verá que el procedimiento indicado en (9) continúa para determinar la **componente de un vector a sobre un vector b**. Advierta que en cualquiera de los dos casos que se ilustran en la FIGURA 11.3.4,

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\theta. \tag{10}$$

En la figura 11.3.4*b*), $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} < 0$, puesto que $\pi/2 < \theta \le \pi$. En este caso, al escribir (10) como

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

observamos que

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right). \tag{11}$$

En otras palabras:

- Para encontrar la componente de un vector **a** sobre un vector **b**, se multiplica **a** con un vector unitario en la dirección de **b**.

EJEMPLO 6 Componente de un vector sobre otro

Sean $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Determine

a) $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ y ***b***) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$.

Solución

a) Primero se forma un vector unitario en la dirección de **b**:

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{6} \quad \text{por lo que} \quad \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}).$$

Entonces de (11) tenemos

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = -\frac{3}{\sqrt{6}}.$$

b) Al modificar (11) de manera correspondiente, tenemos

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right).$$

Entonces $|\mathbf{a}| = \sqrt{29}$ por lo que $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})$,

y $$\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})\cdot\frac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = -\frac{3}{\sqrt{29}}.$$ ■

Proyección de a sobre b Como se ilustra en la FIGURA 11.3.5*a*), la proyección de un vector **a** en cualquiera de las direcciones determinadas por **i**, **j**, **k** es simplemente el *vector* formado al multiplicar la componente de **a** en la dirección especificada con un vector unitario en esa dirección; por ejemplo,

$$\text{proy}_{\mathbf{i}}\mathbf{a} = (\text{comp}_{\mathbf{i}}\mathbf{a})\mathbf{i} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} = a_1\mathbf{i},$$

y así sucesivamente. La figura 11.3.5*b*), muestra el caso general de la **proyección de a sobre b**:

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a})\left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right). \tag{12}$$

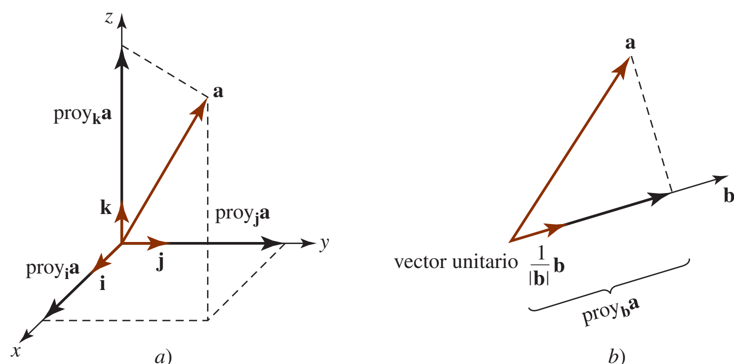


FIGURA 11.3.5 Proyección de un vector **a** sobre un vector **b**

EJEMPLO 7 Proyección de a sobre b

Determine la proyección de $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ sobre el vector $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Grafique.

Solución Primero se determina la componente de **a** sobre **b**. Puesto que $|\mathbf{b}| = \sqrt{13}$, encontramos de (11),

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = \frac{11}{\sqrt{13}}.$$

Así, de (12),

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \left(\frac{11}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = \frac{22}{13}\mathbf{i} + \frac{33}{13}\mathbf{j}.$$ ■

La gráfica de este vector se muestra en la FIGURA 11.3.6.

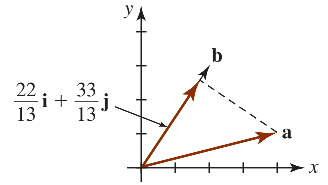


FIGURA 11.3.6 Proyección de **a** sobre **b**

Proyección de a ortogonal sobre b Como se ve en la FIGURA 11.3.7, los vectores **a** y $\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ son la hipotenusa y un lado del triángulo rectángulo, respectivamente. El segundo lado del triángulo es entonces

$$\mathbf{a} - \text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}.$$

Éste es un vector que es ortogonal a **b** y se le denomina **proyección de a ortogonal a b**.

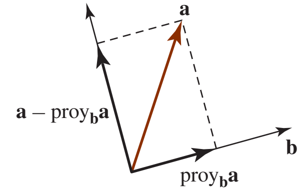


FIGURA 11.3.7 El vector $\mathbf{a} - \text{proy}_b\,\mathbf{a}$ es ortogonal a **b**

EJEMPLO 8 Proyección de a ortogonal a b

Sean $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Determine la proyección de **a** ortogonal a **b**.

Solución Primero se determina la proyección de **a** en **b**. Puesto que $|\mathbf{b}| = 3$, tenemos por (11) que

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 5,$$

por lo que, utilizando (12),

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (5)\left(\frac{1}{3}\right)(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \frac{10}{3}\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j} + \frac{10}{3}\mathbf{k}.$$

Entonces, la proyección de **a** ortogonal a **b** es

$$\mathbf{a} - \text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) - \left(\frac{10}{3}\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j} + \frac{10}{3}\mathbf{k}\right) = -\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{8}{3}\mathbf{j} + \frac{5}{3}\mathbf{k}.$$ ■

Interpretación física del producto punto En la sección 6.8 observamos que cuando una fuerza constante de magnitud F mueve un objeto a una distancia d en la misma dirección de la fuerza, el trabajo realizado es simplemente

$$W = Fd. \tag{13}$$

Sin embargo, si una fuerza constante **F** aplicada a un cuerpo actúa en un ángulo θ respecto a la dirección de movimiento, entonces el trabajo realizado por **F** se define como el producto de la componente de **F** en la dirección del desplazamiento y la distancia $|\mathbf{d}|$ que se mueve el cuerpo:

$$W = \big(|\mathbf{F}|\cos\theta\big)|\mathbf{d}| = |\mathbf{F}||\mathbf{d}|\cos\theta.$$

Vea la FIGURA 11.3.8. Se concluye del teorema 11.3.2 que si **F** provoca un desplazamiento **d** de un cuerpo, entonces el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}. \tag{14}$$

Note que (14) se reduce a (13) cuando $\theta = 0$.

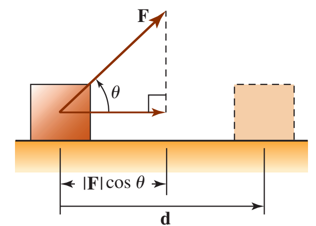


FIGURA 11.3.8 Trabajo realizado por una fuerza que actúa a un ángulo θ con la dirección de movimiento

EJEMPLO 9 Trabajo realizado por una fuerza a un ángulo

Determine el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ sobre un bloque que se mueve de $P_1(1, 1)$ a $P_2(4, 6)$. Suponga que $|\mathbf{F}|$ se mide en libras y $|\mathbf{d}|$ se mide en pies.

Solución El desplazamiento del bloque está dado por

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$$

Se concluye de (14) que el trabajo realizado es

$$W = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = 26 \text{ pies-lb}.$$ ■

Ejercicios 11.3 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-36.

Fundamentos

En los problemas 1-12, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Determine el vector o escalar indicado.

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
2. $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
5. $\mathbf{a} \cdot (4\mathbf{b})$
6. $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c})$
7. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$
8. $(2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{c})$
9. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$
10. $(2\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$
11. $\left(\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\right)\mathbf{b}$
12. $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}$

En los problemas 13-16, determine $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ si el ángulo más pequeño entre **a** y **b** es como se indica.

13. $|\mathbf{a}| = 10$, $|\mathbf{b}| = 5$, $\theta = \pi/4$
14. $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 12$, $\theta = \pi/6$
15. $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\theta = 2\pi/3$
16. $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 1$, $\theta = 5\pi/6$

En los problemas 17-20, determine un ángulo θ entre los vectores indicados.

17. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$
18. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
19. $\mathbf{a} = \langle 2, 4, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, -1, 4\rangle$
20. $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -4, 6\rangle$

21. Encuentre cuáles pares de los siguientes vectores son ortogonales.
a) $\langle 2, 0, 1\rangle$
b) $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
c) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
d) $\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
e) $\langle 1, -1, 1\rangle$
f) $\langle -4, 3, 8\rangle$

22. Determine un escalar c de manera que los vectores dados sean ortogonales.
a) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - c\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
b) $\mathbf{a} = \langle c, \frac{1}{2}, c\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 4, c\rangle$

23. Determine un vector $\mathbf{v} = \langle x_1, y_1, 1\rangle$ que es ortogonal tanto a $\mathbf{a} = \langle 3, 1, -1\rangle$ como a $\mathbf{b} = \langle -3, 2, 2\rangle$.

24. Un **rombo** es un paralelogramo de ángulos oblicuos con los cuatro lados iguales. Utilice el producto punto para demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

25. Verifique que el vector

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$$

es ortogonal al vector **a**.

26. Determine un escalar c de manera que el ángulo entre $\mathbf{a} = \mathbf{i} + c\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ sea 45°.

En los problemas 27-30, encuentre los cosenos directores y los ángulos directores del vector dado.

27. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
28. $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
29. $\mathbf{a} = \langle 1, 0, -\sqrt{3}\rangle$
30. $\mathbf{a} = \langle 5, 7, 2\rangle$

31. Encuentre el ángulo entre la diagonal $\overrightarrow{AD}$ del cubo que se muestra en la FIGURA 11.3.9 y el borde $\overrightarrow{AB}$. Determine el ángulo entre la diagonal $\overrightarrow{AD}$ y la diagonal $\overrightarrow{AC}$.

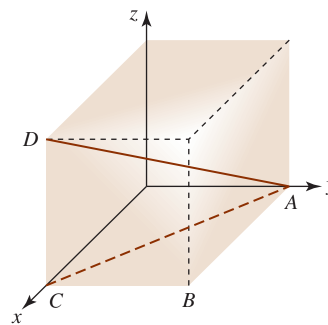


FIGURA 11.3.9 Cubo del problema 31

32. Un avión se encuentra a 4 km de altura, 5 kilómetros hacia el sur y 7 kilómetros hacia el este de un aeropuerto. Vea la FIGURA 11.3.10. Determine los ángulos directores del avión.

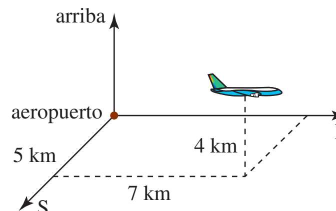


FIGURA 11.3.10 Avión del problema 32

En los problemas 33-36, $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Determine el número indicado.

33. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$
34. $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$
35. $\text{comp}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$
36. $\text{comp}_{2\mathbf{b}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

En los problemas 37 y 38, encuentre la componente del vector indicado en la dirección del origen al punto que se indica.

37. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; $P(3, 10)$
38. $\mathbf{a} = \langle 2, 1, -1\rangle$; $P(1, -1, 1)$

En los problemas 39-42, determine *a)* $\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ y *b)* la proyección de **a** ortogonal a **b**.

39. $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
40. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$
41. $\mathbf{a} = \langle -1, -2, 7\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, -3, -2\rangle$
42. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 2, -1\rangle$

En los problemas 43 y 44, $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Determine el vector indicado.

43. $\text{proy}_{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}\mathbf{a}$
44. Proyección de **b** ortogonal a $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Aplicaciones

45. Un trineo se jala horizontalmente sobre el hielo por medio de una cuerda unida a su frente. Una fuerza de 20 lb que actúa a un ángulo de 60° con la horizontal desplaza el trineo 100 pies. Determine el trabajo realizado.

46. Se empuja un tren a lo largo de un riel recto con una fuerza de 3 000 lb actuando a un ángulo de 45° en la dirección de movimiento. Determine el trabajo realizado al mover el tren 400 pies.

47. Encuentre el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ que mueve un objeto de $P_1(3, 1, -2)$ a $P_2(2, 4, 6)$. Suponga que $|\mathbf{F}|$ se mide en newtons y $|\mathbf{d}|$ en metros.

48. Un bloque con un peso $\mathbf{p}$ se jala a lo largo de una superficie horizontal sin fricción mediante una fuerza constante $\mathbf{F}$ de 30 newtons en la dirección dada por un vector $\mathbf{d}$. Vea la FIGURA 11.3.11. Suponga que $|\mathbf{d}|$ se mide en metros.

a) ¿Cuál es el trabajo realizado por el peso $\mathbf{p}$?

b) ¿Cuál es el trabajo efectuado por la fuerza $\mathbf{F}$ si $\mathbf{d} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$?

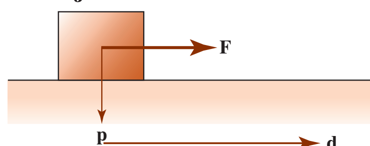


FIGURA 11.3.11 Bloque del problema 48

49. Una fuerza constante $\mathbf{F}$ de magnitud igual a 3 lb se aplica al bloque que se muestra en la FIGURA 11.3.12. $\mathbf{F}$ tiene la misma dirección que el vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Determine el trabajo realizado en la dirección de movimiento si el bloque se mueve de $P_1(3, 1)$ a $P_2(9, 3)$. Suponga que la distancia se mide en pies.

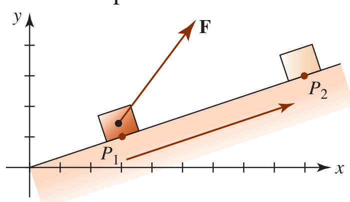


FIGURA 11.3.12 Bloque del problema 49

50. La molécula de metano CH_4 consta de cuatro átomos de hidrógeno que rodean a un solo átomo de carbón. Como se ilustra en la FIGURA 11.3.13, los átomos de hidrógeno se ubican en los vértices de un tetraedro regular. La distancia entre el centro de un átomo de hidrógeno y el centro del átomo de carbono es de 1.10 angstroms (1 angstrom $= 10^{-10}$ m) y el ángulo del enlace hidrógeno-carbón-hidrógeno es $\theta = 109.5°$. Utilizando únicamente métodos vectoriales, determine la distancia entre los dos átomos de hidrógeno.

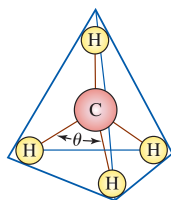


FIGURA 11.3.13 Átomos en la molécula de metano del problema 50

Piense en ello

51. Demuestre que si dos vectores distintos de cero $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales, entonces sus cosenos directores satisfacen

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0.$$

52. Determine un vector unitario cuyos ángulos directores, relativos a los tres ejes de coordenadas, son iguales.

53. Utilice la definición del producto punto para demostrar los incisos *i*), *ii*), *iv*) y *v*) del teorema 11.3.1.

54. Utilice el producto punto para demostrar la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**: $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.

55. Utilice el producto punto para demostrar la **desigualdad del triángulo**: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. [*Sugerencia*: Considere la propiedad *vi*) del teorema 11.3.1.]

56. Demuestre que el vector $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es perpendicular a la recta cuya ecuación es $ax + by + c = 0$. [*Sugerencia*: Considere que $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son puntos distintos de la recta.]

57. Utilice el resultado del problema 56 y la FIGURA 11.3.14 para demostrar que la distancia d del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $ax + by + c = 0$ es $d = |ax_1 + by_1 + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$.

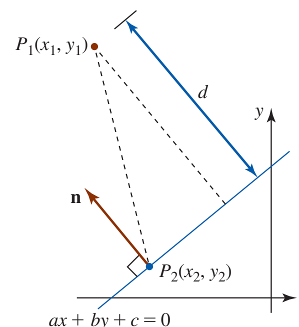


FIGURA 11.3.14 Distancia de un punto a una recta en el problema 57

Proyectos

58. La luz proveniente de una fuente en el punto $S(a, b)$ se refleja en un espejo esférico de radio 1, centrado en el origen, hacia un observador localizado en el punto $O(c, d)$ como se muestra en la FIGURA 11.3.15. El punto de reflexión $P(x, y)$ del espejo esférico yace en el plano determinado por la fuente, el observador y el centro de la esfera. (El análisis de espejos esféricos se da, entre otros lugares, en el estudio del diseño de radares.)

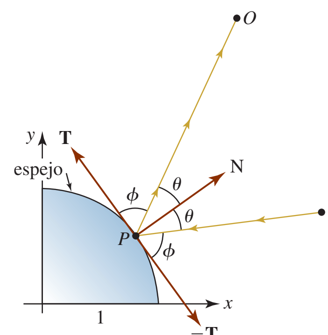


FIGURA 11.3.15 Espejo del problema 58

a) Emplee el teorema 11.3.2 dos veces, una vez con el ángulo θ y una vez con el ángulo ϕ, para demostrar que las coordenadas del punto de reflexión $P(x, y)$ satisfacen la ecuación

$$\frac{ax + by - 1}{ay - bx} = \frac{cx + dy - 1}{dx - cy}.$$

[*Sugerencia*: Como se ilustra en la figura, sean **N** y **T**, respectivamente, un vector normal unitario y una tangente unitaria al círculo en $P(x, y)$. Si $\mathbf{N} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, ¿cómo es **T** en términos de x y y?]

b) Sean $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ y $d = 3$. Utilice la relación $x^2 + y^2 = 1$ para demostrar que la coordenada x del punto de reflexión es una raíz de una ecuación polinomial de cuarto grado.

c) Utilice el método de Newton o un SAC para determinar el punto de reflexión en el inciso *b*). Quizá tenga que considerar las cuatro raíces de la ecuación en el inciso *b*) para encontrar la que corresponde a una solución de la ecuación en el inciso *a*).

11.4 Producto cruz

Introducción El producto punto, que se presentó en la sección anterior, opera tanto en el espacio bidimensional como en el tridimensional y genera un *número*. Por otro lado, el **producto cruz**, que se presenta en esta sección, sólo está definido para vectores en el espacio tridimensional y genera otro *vector* en el espacio tridimensional.

Determinantes de segundo y tercer orden Los siguientes hechos acerca de los determinantes serán importantes en la definición y discusión del producto cruz en esta sección.

Repaso de determinantes

La definición de un **determinante de segundo orden** es el número

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Un **determinante de tercer orden** se define en términos de tres determinantes de segundo orden del modo que sigue:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Lo anterior se denomina **expansión de determinantes por cofactores** del primer renglón.

Se lee como un determinante de “dos por dos”.

Aun cuando un determinante es un *número*, es conveniente pensar en él como un arreglo cuadrado. Así, los determinantes de segundo y tercer orden se refieren, respectivamente, como **determinantes 2 × 2** y **3 × 3**. Hay determinantes de orden superior, pero como no se encontrarán en los siguientes capítulos de este libro no se darán sus definiciones.

Para encontrar el valor de un determinante de 2 × 2 se calculan los productos de los números en las dos diagonales y se restan:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Para un determinante de 3 × 3, el **cofactor** de una entrada a_{1j} en el primer renglón y la columna j-ésima, $j = 1, 2, 3$, es $(-1)^{1+j}$ veces el determinante 2 × 2 formado al eliminar el primer renglón y la j-esima columna. Los cofactores de a_1, a_2 y a_3 son, respectivamente,

$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Así:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 1 Un determinante de 2 × 2

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-4)3 - (-2)5 = -2$$ ■

EJEMPLO 2 Un determinante de 3 × 3

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8(0) - 5(12) + 4(8) = -28$$ ■

Las siguientes propiedades serán de utilidad en la discusión que sigue.

Tres propiedades de determinantes

i) Si toda entrada en un renglón (o columna) de un determinante es 0, entonces el valor del determinante es cero.
ii) Si dos renglones (o columnas) de un determinante son iguales, entonces el valor del determinante es cero.
iii) Cuando dos renglones (o columnas) de un determinante se intercambian, el determinante que resulta es el negativo del determinante original.

Forma de componentes del producto cruz Como se hizo en la discusión del producto punto, definimos el producto cruz de dos vectores **a** y **b** en términos de las componentes de los vectores.

Definición 11.4.1 Producto cruz de dos vectores

El **producto cruz** de dos vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ es el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}. \tag{1}$$

Los coeficientes de los vectores básicos en (1) se reconocen como determinantes de 2 × 2, por lo que (1) puede escribirse como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

Esta representación, a su vez, sugiere que es posible escribir el producto cruz como un determinante de 3 × 3:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Técnicamente la expresión sobre el lado derecho de la igualdad en (2) *no* es un determinante, ya que sus entradas no son todas escalares. De cualquier modo, el “determinante” en (2) se usa simplemente como una manera de recordar la definición de componentes del producto cruz dada en (1).

EJEMPLO 3 El producto cruz

Sean $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Determine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Solución Usamos (2) y se desarrolla el determinante utilizando cofactores del primer renglón:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$= -3\mathbf{i} + 19\mathbf{j} + 10\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 4 Productos cruz de los vectores básicos

Puesto que $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$, advertimos de (2) o la segunda propiedad de determinantes que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

También por (2)

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i}, & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{4}$$

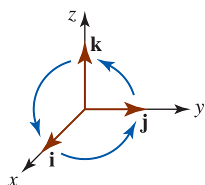


FIGURA 11.4.1 Un mnemónico para productos cruz que implican a **i, j** y **k**

El producto cruz en (4) se obtiene utilizando la mnemónica circular que se muestra en la FIGURA 11.4.1.

Propiedades El siguiente teorema resume algunas de las propiedades importantes del producto cruz.

Teorema 11.4.1 Propiedades del producto cruz

i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{0}$
ii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
iii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$ ← ley distributiva
iv) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ← ley distributiva
v) $\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, k un escalar
vi) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
vii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$
viii) $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$

Advierta en la parte *i)* del teorema 14.4.1 que el producto cruz no es conmutativo. Como consecuencia de esta propiedad no conmutativa hay dos leyes distributivas en los incisos *iii)* y *iv)* del teorema.

DEMOSTRACIÓN Los incisos *i*), *ii*) y *vi*) siguen directamente de las tres propiedades de los determinantes dadas antes. Se demuestra el inciso *iii*) y se dejan las restantes pruebas al estudiante. Vea el problema 60 en los ejercicios 11.4. Para demostrar el inciso *iii*) dejamos $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\ &= [(a_2b_3 + a_2c_3) - (a_3b_2 + a_3c_2)]\mathbf{i} - [(a_1b_3 + a_1c_3) - (a_3b_1 + a_3c_1)]\mathbf{j} \\ &\quad + [(a_1b_2 + a_1c_2) - (a_2b_1 + a_2c_1)]\mathbf{k} \\ &= [(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}] \\ &\quad + [(a_2c_3 - a_3c_2)\mathbf{i} - (a_1c_3 - a_3c_1)\mathbf{j} + (a_1c_2 - a_2c_1)\mathbf{k}] \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}). \end{aligned}$$

Vectores paralelos En la sección 11.1 vimos que dos vectores distintos de cero son paralelos si y sólo si uno es un múltiplo escalar distinto de cero del otro. Así, dos vectores son paralelos y tienen las formas **a** y k**a**, donde **a** es cualquier vector. Por las propiedades *v*) y *vi*) del teorema 11.4.1, el producto cruz de vectores paralelos debe ser **0**. Esto se enuncia formalmente en el siguiente teorema.

Teorema 11.4.2 Criterio para vectores paralelos

Dos vectores distintos de cero **a** y **b** son paralelos si y sólo si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

EJEMPLO 5 Vectores paralelos

Determine si $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ son vectores paralelos.

Solución Del producto cruz

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

y el teorema 11.4.2 concluimos que **a** y **b** son vectores paralelos. ■

Regla de la mano derecha Una caracterización alterna del producto cruz utiliza la **regla de la mano derecha**. Como se observa en la FIGURA 11.4.2*a*), si los dedos de la mano derecha apuntan a lo largo del vector **a** y después se curvan hacia el vector **b**, el pulgar dará la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. En la figura 11.4.1*b*), la regla de la mano derecha muestra la dirección de $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

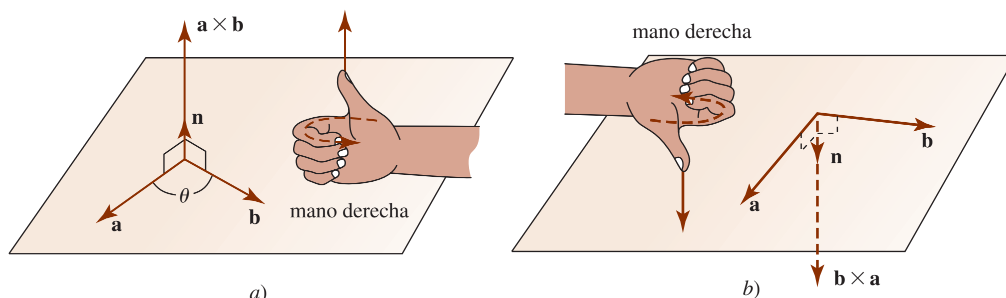


FIGURA 11.4.2 La regla de la mano derecha

Teorema 11.4.3 Forma alterna del producto cruz

Sean **a** y **b** dos vectores distintos de cero que no son paralelos entre sí. Entonces el producto cruz de **a** y **b** es

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta)\mathbf{n}, \tag{5}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ y **n** es un vector unitario perpendicular al plano de **a** y **b** con dirección dada por la regla de la mano derecha.

DEMOSTRACIÓN Se observa de las propiedades *vii*) y *viii*) del teorema 11.4.1 que tanto **a** como **b** son perpendiculares a $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Así, la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular al plano de **a** y **b**, y puede demostrarse que la regla de la mano derecha determina la dirección apropiada. Resta demostrar que la magnitud de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ está dada por

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta. \tag{6}$$

Calculamos por separado los cuadrados de los lados izquierdo y derecho de esta ecuación utilizando las formas de componentes de **a** y **b**:

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1b_3a_3b_1 + a_3^2b_1^2 \\ &\quad + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2 \\ \big(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\,\text{sen}\,\theta\big)^2 &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\text{sen}^2\,\theta = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\theta = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= \big(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\big)\big(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\big) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_2a_3b_3 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1b_1a_3b_3 + a_3^2b_1^2 \\ &\quad + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2. \end{aligned}$$

Puesto que ambos lados son iguales a la misma cantidad, deben ser iguales entre sí, por lo que

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = \big(|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\text{sen}\,\theta\big)^2.$$

Por último, tomando la raíz cuadrada de ambos lados y utilizando el hecho de que $\sqrt{\text{sen}^2\,\theta} = \text{sen}\,\theta$ puesto que $\text{sen}\,\theta \geq 0$ para $0 \leq \theta \leq \pi$, tenemos $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\text{sen}\,\theta$. ■

Combinando los teoremas 11.4.2 y 11.4.3 advertimos que para *cualquier* par de vectores **a** y **b**,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \big(|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\text{sen}\,\theta\big)\mathbf{n}.$$

Esta forma más geométrica se usa por lo general como la definición del producto cruz en un curso de física.

Productos especiales El **triple producto escalar** de los vectores **a**, **b** y **c** es $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Utilizando las formas de las componentes de las definiciones de los productos punto y cruz, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot \left[\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \right] \\ &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Así, vemos que el triple producto escalar puede escribirse como un determinante de 3 × 3:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Utilizando las propiedades de determinantes puede demostrarse que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \tag{8}$$

Vea el problema 61 en los ejercicios 11.4.

El **triple producto vectorial** de tres vectores **a**, **b** y **c** es

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

El triple producto vectorial se relaciona con el producto punto por medio de

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \tag{9}$$

Vea el problema 62 en los ejercicios 11.4.

Áreas Dos vectores distintos de cero y no paralelos **a** y **b** pueden considerarse como los lados de un paralelogramo. El **área *A* de un paralelogramo** es

$$A = (\text{base})(\text{altura}).$$

De la FIGURA 11.4.3*a*), observamos que $A = |\mathbf{b}|\big(|\mathbf{a}|\,\text{sen}\,\theta\big) = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\text{sen}\,\theta$

o

$$A = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|. \tag{10}$$

De igual modo que en la figura 11.4.3*b*), vemos que el **área del triángulo** con lados **a** y **b** es

$$A = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|. \tag{11}$$

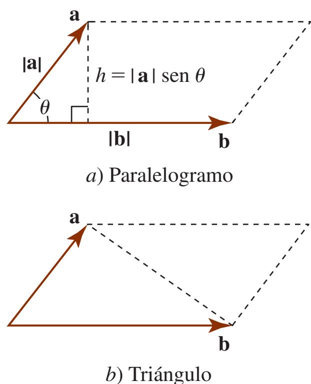


FIGURA 11.4.3 El área de un paralelogramo

EJEMPLO 6 Área del triángulo

Encuentre el área del triángulo determinado por los puntos $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 3, 4)$ y $P_3(3, 0, -1)$.

Solución Los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_2P_3}$ pueden considerarse como dos lados del triángulo. Puesto que

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{P_2P_3} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

tenemos

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$= -\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

De (11) vemos que el área es

$$A = \frac{1}{2}|-\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}| = \frac{3}{2}\sqrt{10}.$$

■

Volumen de un paralelepípedo Si los vectores **a**, **b** y **c** no yacen en el mismo plano, entonces el **volumen del paralelepípedo** con bordes **a**, **b** y **c** que se muestra en la FIGURA 11.4.4 es

$$V = (\text{área de la base})(\text{altura})$$
$$= |\mathbf{b} \times \mathbf{c}||\text{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\mathbf{a}|$$
$$= |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|\left|\mathbf{a} \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|}\mathbf{b} \times \mathbf{c}\right)\right|$$

o

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|. \qquad (12)$$

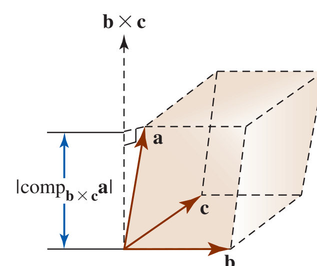


FIGURA 11.4.4 Paralelepípedo formado por tres vectores

Así, el volumen de un paralelepípedo determinado por tres vectores es el valor absoluto del triple producto escalar de los vectores.

Vectores coplanares Los vectores que yacen en el mismo plano se dice que son **coplanares**. Se ha visto que si los vectores **a**, **b** y **c** no son coplanares, entonces necesariamente $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq 0$, pues el volumen de un paralelepípedo con bordes **a**, **b** y **c** tiene volumen distinto de cero. Enunciado de manera equivalente, esto quiere decir que si $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$, entonces los vectores **a**, **b** y **c** son coplanares. Puesto que lo inverso de este último enunciado también es cierto (vea el problema 64 en los ejercicios 11.4), ocurre que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0 \qquad \textit{si y sólo si} \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b} \textit{ y } \mathbf{c} \textit{ son coplanares.}$$

Interpretación física del producto cruz En física una fuerza **F** que actúa en el extremo de un vector de posición **r**, como se muestra en la FIGURA 11.4.5, se dice que produce una **torsión** $\boldsymbol{\tau}$ definida por $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Por ejemplo, si $|\mathbf{F}| = 20$ N, $|\mathbf{r}| = 3.5$ m y $\theta = 30°$, entonces de (6),

$$|\boldsymbol{\tau}| = (3.5)(20)\text{sen}\,30° = 35 \text{ N-m}.$$

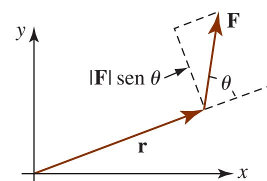


FIGURA 11.4.5 Una fuerza actuando en el extremo de un vector

Si **F** y **r** están en el plano de la página, la regla de la mano derecha implica que la dirección de $\boldsymbol{\tau}$ es hacia afuera de la misma, y perpendicular a ella (hacia el lector).

Como podemos advertir en la FIGURA 11.4.6, cuando una fuerza **F** se aplica a una llave de tuercas, la magnitud de la torsión $\boldsymbol{\tau}$ es una medida del efecto de rotación alrededor del punto pivote P y el vector $\boldsymbol{\tau}$ se dirige a lo largo del eje de la tuerca. En este caso $\boldsymbol{\tau}$ apunta hacia adentro de la página.

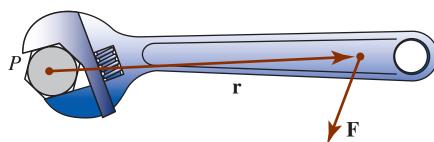


FIGURA 11.4.6 Una llave que aplica torsión a una tuerca



NOTAS DESDE EL AULA

Cuando se trabaja con vectores, debe tenerse cuidado de no mezclar los símbolos de los productos punto y cruz, esto es, $\cdot$ y $\times$, con los símbolos de la multiplicación ordinaria, así como ser cuidadosos, en especial, en el uso, o falta del mismo, de paréntesis. Por ejemplo, si a, b y c son números reales, entonces el producto abc está bien definido puesto que

$$abc = a(bc) = (ab)c.$$

Por otro lado, la expresión $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ no está bien definida puesto que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}.$$

Vea el problema 59 en los ejercicios 11.4. Otras expresiones, tal como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, no tienen sentido, incluso si se incluye paréntesis. ¿Por qué?

Ejercicios 11.4 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-36.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ **2.** $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{k}$

3. $\mathbf{a} = \langle 1, -3, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 0, 4\rangle$

4. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, 2, 3\rangle$

5. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

6. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

7. $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, 6, 0\rangle$ **8.** $\mathbf{a} = \langle 0, 5, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -3, 4\rangle$

9. $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, -3, 6\rangle$

10. $\mathbf{a} = \langle 8, 1, -6\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, -2, 10\rangle$

En los problemas 11 y 12, encuentre $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$.

11. $P_1(2, 1, 3)$, $P_2(0, 3, -1)$, $P_3(-1, 2, 4)$

12. $P_1(0, 0, 1)$, $P_2(0, 1, 2)$, $P_3(1, 2, 3)$

En los problemas 13 y 14, encuentre un vector distinto de cero que sea perpendicular tanto a **a** como a **b**.

13. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

14. $\mathbf{a} = \langle -1, -2, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, -1, 0\rangle$

En los problemas 15 y 16, verifique que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ y $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

15. $\mathbf{a} = \langle 5, -2, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 0, -7\rangle$

16. $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

En los problemas 17 y 18,

***a*)** calcule $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ seguido de $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

***b*)** Verifique los resultados del inciso *a*) mediante (9) de esta sección.

17. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
$\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
$\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

18. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$
$\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
$\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

En los problemas 19-36, encuentre el escalar o vector indicado *sin usar* (2), (7) o (9).

19. $(2\mathbf{i}) \times \mathbf{j}$ **20.** $\mathbf{i} \times (-3\mathbf{k})$

21. $\mathbf{k} \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j})$ **22.** $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$

23. $[(2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{j})] \times (4\mathbf{j})$ **24.** $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \times \mathbf{i}$

25. $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + 5\mathbf{k})$ **26.** $\mathbf{i} \times \mathbf{k} - 2(\mathbf{j} \times \mathbf{i})$

27. $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$ **28.** $\mathbf{i} \cdot [\mathbf{j} \times (-\mathbf{k})]$

29. $|4\mathbf{j} - 5(\mathbf{i} \times \mathbf{j})|$ **30.** $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{j} \times \mathbf{i})$

31. $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$ **32.** $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{i}$

33. $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$ **34.** $(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{i} \times \mathbf{j})$

35. $2\mathbf{j} \cdot [\mathbf{i} \times (\mathbf{j} - 3\mathbf{k})]$ **36.** $(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \times (\mathbf{j} \times \mathbf{i})$

En los problemas 37-44, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Encuentre el escalar o vector indicado.

37. $\mathbf{a} \times (3\mathbf{b})$ **38.** $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

39. $(-\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ **40.** $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$

41. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ **42.** $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

43. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ **44.** $(4\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

En los problemas 45 y 46,

***a*)** verifique que el cuadrilátero dado es un paralelogramo y

***b*)** determine el área del paralelogramo.

45.

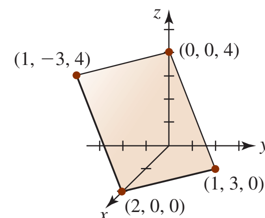


FIGURA 11.4.7 Paralelogramo del problema 45

46.

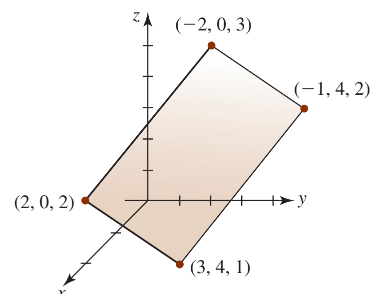


FIGURA 11.4.8 Paralelogramo del problema 46

En los problemas 47-50, encuentre el área del triángulo determinado por los puntos dados.

47. $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(1, 2, 1)$, $P_3(1, 1, 2)$

48. $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(0, 1, 2)$, $P_3(2, 2, 0)$

49. $P_1(1, 2, 4)$, $P_2(1, -1, 3)$, $P_3(-1, -1, 2)$

50. $P_1(1, 0, 3)$, $P_2(0, 0, 6)$, $P_3(2, 4, 5)$

En los problemas 51 y 52, encuentre el volumen del paralelepípedo para el cual los vectores dados son los tres bordes.

51. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

52. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

En los problemas 53 y 54, determine si los vectores indicados son coplanares.

53. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \frac{5}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

54. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \frac{3}{2}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

En los problemas 55 y 56, determine si los cuatro puntos indicados yacen en el mismo plano.

55. $P_1(1, 1, -2)$, $P_2(4, 0, -3)$, $P_3(1, -5, 10)$, $P_4(-7, 2, 4)$

56. $P_1(2, -1, 4)$, $P_2(-1, 2, 3)$, $P_3(0, 4, -3)$, $P_4(4, -2, 2)$

57. Como se muestra en la FIGURA 11.4.9, el vector **a** yace en el plano xy y el vector **b** se ubica a lo largo del eje z positivo. Sus magnitudes son $|\mathbf{a}| = 6.4$ y $|\mathbf{b}| = 5$.

a) Emplee (5) para encontrar $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

b) Utilice la regla de la mano derecha para determinar la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

c) Use el inciso *b*) para expresar $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ en términos de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

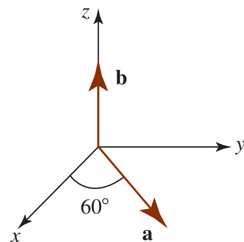


FIGURA 11.4.9 Vectores del problema 57

58. Dos vectores **a** y **b** yacen en el plano xz de manera que el ángulo entre ellos es 120°. Si $|\mathbf{a}| = \sqrt{27}$ y $|\mathbf{b}| = 8$, encuentre todos los valores posibles de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

≡ Piense en ello

59. Si $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, 5, 6\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 7, 8, 3\rangle$, muestre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

60. Demuestre los incisos *iv*), *v*), *vii*) y *viii*) del teorema 11.4.1.

61. Demuestre $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

62. Demuestre $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

63. Demuestre $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

64. Demuestre que si **a**, **b** y **c** son coplanares, entonces $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$.

≡ Proyectos

65. Una retícula tridimensional es una colección de combinaciones enteras de tres vectores básicos no coplanares **a**, **b** y **c**. En cristalografía, una retícula puede especificar las ubicaciones de átomos en un cristal. Los estudios de difracción de rayos X de cristales utilizan la "retícula recíproca", la cual tiene los vectores de la base

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})}, \quad \mathbf{C} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}.$$

a) Cierta retícula tiene los vectores de la base $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. Determine los vectores de la base de la retícula recíproca.

b) La celda unitaria de la retícula recíproca es el paralelepípedo con lados **A**, **B** y **C**, en tanto que la celda unitaria de la retícula original es el paralelepípedo con lados **a**, **b** y **c**. Demuestre que el volumen de la celda unitaria de la retícula recíproca es el recíproco del volumen de la celda unitaria de la retícula original. [*Sugerencia*: Empiece con $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ y utilice (9).]

11.5 Rectas en el espacio tridimensional

Introducción En la sección 1.3 vimos que la clave para escribir la ecuación de una recta en el plano es la noción de la pendiente. La pendiente de una recta (o su ángulo de inclinación) proporciona un indicio de la dirección. Una recta en el plano se determina especificando ya sea un punto y una pendiente o cualesquiera dos puntos distintos. Básicamente lo mismo es cierto en el espacio tridimensional.

A continuación verá que los conceptos de vectores son una ayuda importante en la obtención de la ecuación de una recta en el espacio.

Ecuación vectorial Una recta en el espacio se determina especificando un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector distinto de cero **v**. A través del punto P_0 pasa sólo una recta L paralela al vector dado. Suponga que $P(x, y, z)$ es *cualquier* punto sobre la recta. Si $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ y $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ son los vectores de posición de P y P_0, entonces debido a que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es paralelo al vector **v** existe una escalar t tal que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$. Esto proporciona una **ecuación vectorial**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \qquad (1)$$

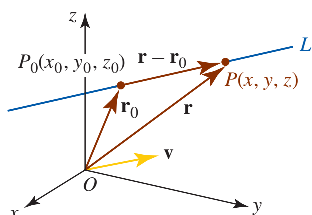


FIGURA 11.5.1 Línea que pasa por P_0 paralela a **v**

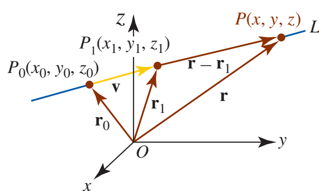


FIGURA 11.5.2 Línea que pasa por P_0 y P_1

de la recta L. Al emplear componentes, $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ advertimos que (1) es igual a

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct\rangle. \qquad (2)$$

El escalar t se denomina **parámetro** y el vector **v** distinto de cero recibe el nombre de **vector direccional**; las componentes a, b y c del vector direccional **v** se llaman **números direccionales** de la recta L. Para cada número real t el vector **r** en (1) es el vector de posición de un punto sobre L y por ello es posible prever la recta como si se estuviera trazando en el espacio a partir de la punta en movimiento de **r**. Vea la FIGURA 11.5.1.

Cualesquiera dos puntos distintos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en el espacio tridimensional determinan únicamente la recta L entre ellos. Si $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ y $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ son vectores de posición, vemos en la FIGURA 11.5.2 que el vector $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ es paralelo al vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$. De tal manera, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ o $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$. Debido a que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ también es paralelo a **v**, una ecuación vectorial alterna para la recta es $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ o

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0). \qquad (3)$$

Si escribimos $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\rangle = \langle a, b, c\rangle$ veremos que (3) es lo mismo que (1). De hecho, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(-\mathbf{v})$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(k\mathbf{v})$, con k un escalar distinto de cero, también son ecuaciones de L.

EJEMPLO 1 Ecuación vectorial de una recta

Encuentre una ecuación vectorial para la recta que pasa por $(4, 6, -3)$ y es paralela a $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Solución Con la identificación $x_0 = 4$, $y_0 = 6$, $z_0 = -3$, $a = 5$, $b = -10$ y $c = 2$ obtenemos de (2) una ecuación vectorial de la recta:

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 4, 6, -3\rangle + t\langle 5, -10, 2\rangle \quad \text{o} \quad \langle x, y, z\rangle = \langle 4 + 5t, 6 - 10t, -3 + 2t\rangle. \quad ■$$

EJEMPLO 2 Ecuación vectorial de una recta

Encuentre una ecuación vectorial para la recta que pasa por $(2, -1, 8)$ y $(5, 6, -3)$.

Solución Si marcamos los puntos como $P_0(2, -1, 8)$ y $P_1(5, 6, -3)$, entonces un vector direccional para la recta que pasa por P_0 y P_1 es

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = \langle 5 - 2, 6 - (-1), -3 - 8\rangle = \langle 3, 7, -11\rangle.$$

De (3) una ecuación vectorial de la recta es

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 2, -1, 8\rangle + t\langle 3, 7, -11\rangle.$$

Ésta es una de las muchas ecuaciones vectoriales posibles de la recta. Por ejemplo, dos ecuaciones alternas son

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 5, 6, -3\rangle + t\langle 3, 7, -11\rangle$$
$$\langle x, y, z\rangle = \langle 5, 6, -3\rangle + t\langle -3, -7, 11\rangle. \quad ■$$

Ecuaciones paramétricas Al igualar las componentes en (2) obtenemos

$$x = x_0 + at, \qquad y = y_0 + bt, \qquad z = z_0 + ct. \qquad (4)$$

Las ecuaciones en (4) se llaman **ecuaciones paramétricas** de la recta que pasa por P_0. La recta L completa, que se extiende indefinidamente en ambas direcciones, se obtiene al permitir que el parámetro t aumente de $-\infty$ a ∞; en otras palabras, el intervalo del parámetro es $(-\infty, \infty)$. Si el parámetro t se restringe a un intervalo cerrado $[t_0, t_1]$, entonces cuando t aumenta (4) define un **segmento de recta** que empieza en el punto que corresponde a t_0 y termina en el punto correspondiente a t_1.

EJEMPLO 3 Ecuaciones paramétricas de una recta

Determine las ecuaciones paramétricas de la recta
a) que pasa por $(5, 2, 4)$ y es paralela a $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$, y ***b***) que pasa por $(-1, 0, 1)$ y $(2, -1, 6)$.

Solución

a) Con las identificaciones $x_0 = 5$, $y_0 = 2$, $z_0 = 4$, $a = 4$, $b = 7$ y $c = -9$, vemos de (4) que las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$x = 5 + 4t, y = 2 + 7t, z = 4 - 9t.$$

b) Procediendo como en el ejemplo 2, un vector direccional de la recta es

$$\mathbf{v} = \langle 2, -1, 6\rangle - \langle -1, 0, 1\rangle = \langle 3, -1, 5\rangle.$$

Con números direccionales $a = 3$, $b = -1$ y $c = 5$, (4) produce

$$x = -1 + 3t, y = -t, z = 1 + 5t.$$ ■

Si se limita el intervalo del parámetro en el inciso *a*) del ejemplo 3, por ejemplo, $-1 \leq t \leq 0$, entonces

$$x = 5 + 4t, \quad y = 2 + 7t, \quad z = 4 - 9t, \quad -1 \leq t \leq 0$$

son ecuaciones paramétricas del segmento de recta que empieza en el punto $(1, -5, 13)$ y termina en $(5, 2, 4)$.

EJEMPLO 4 Repaso del ejemplo 1

Encuentre el punto donde la recta del ejemplo 1 interseca al plano *xy*.

Solución Al igualar componentes en la ecuación vectorial $\langle x, y, z\rangle = \langle 4 + 5t, 6 - 10t, -3 + 2t\rangle$ se producen las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$x = 4 + 5t, \quad y = 6 - 10t, \quad z = -3 + 2t.$$

Puesto que una ecuación para el plano *xy* es $z = 0$, resolvemos $z = -3 + 2t = 0$ para t. Al sustituir $t = \frac{3}{2}$ en las restantes dos ecuaciones se producen $x = 4 + 5\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{23}{2}$ y $y = 6 - 10\left(\frac{3}{2}\right) = -9$. El punto de intersección en el plano *z* es entonces $\left(\frac{23}{2}, -9, 0\right)$. ■

Ecuaciones simétricas De (4) se observa que es posible eliminar el parámetro escribiendo

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

siempre que cada uno de los tres números direccionales *a*, *b* y *c* sea distinto de cero. Las ecuaciones resultantes

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{5}$$

se dice que son **ecuaciones simétricas** de la recta que pasa por P_0.

Si uno de los números direccionales *a*, *b* o *c* es cero, empleamos las dos ecuaciones restantes para eliminar el parámetro *t*. Por ejemplo, si $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, entonces (4) produce

$$x = x_0 \qquad \text{y} \qquad t = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

En este caso,

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{6}$$

son ecuaciones simétricas de la recta. Puesto que $x = x_0$ es una ecuación de un plano vertical perpendicular al eje *x*, la recta descrita por (6) yace en ese plano.

EJEMPLO 5 Repaso del ejemplo 3

Determine las ecuaciones simétricas de la recta que se encontró en el inciso *a*) del ejemplo 3.

Solución A partir de la identificación dada en la solución del ejemplo 3 podemos escribir de inmediato de acuerdo con (5) que

$$\frac{x - 5}{4} = \frac{y - 2}{7} = \frac{z - 4}{-9}.$$ ■

EJEMPLO 6 Ecuaciones simétricas

Encuentre las ecuaciones simétricas para la recta que pasa por los puntos (5, 3, 1) y (2, 1, 1).

Solución Definimos $a = 5 - 2 = 3$, $b = 3 - 1 = 2$ y $c = 1 - 1 = 0$. De acuerdo con la discusión precedente se deduce que las ecuaciones simétricas para la recta son

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{2}, \quad z = 1.$$

En otras palabras, las ecuaciones simétricas describen una recta en el plano $z = 1$. ■

Rectas perpendicular y paralela La siguiente definición proporciona una manera de usar los vectores direccionales de dos rectas para determinar si las rectas son perpendiculares o paralelas.

Definición 11.5.1 Rectas perpendicular y paralela

Dos rectas L_1 y L_2 con vectores direccionales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, respectivamente, son

i) **perpendiculares** si $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ y
ii) **paralelas** si $\mathbf{v}_2 = k\mathbf{v}_1$, para algún escalar k distinto de cero.

EJEMPLO 7 Rectas perpendiculares

Determine si las rectas

$$L_1: \quad x = -6 - t, \quad y = 20 + 3t, \quad z = 1 + 2t$$
$$L_2: \quad x = 5 + 2s, \quad y = -9 - 4s, \quad z = 1 + 7s$$

son perpendiculares.

Solución Al leer los coeficientes de los parámetros t y s, observamos que

$$\mathbf{v}_1 = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

son los vectores direccionales de L_1 y L_2, respectivamente. Como $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -2 - 12 + 14 = 0$ concluimos que las rectas son perpendiculares. ■

EJEMPLO 8 Rectas paralelas

Los vectores direccionales de las rectas

$$L_1: \quad x = 4 - 2t, \quad x = 1 + 4t, \quad z = 3 + 10t$$
$$L_2: \quad x = s, \quad y = 6 - 2s, \quad z = \frac{1}{2} - 5s$$

son $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. Como $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2$ $\left(\text{o } \mathbf{v}_2 = -\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1\right)$, concluimos que las rectas son paralelas. ■

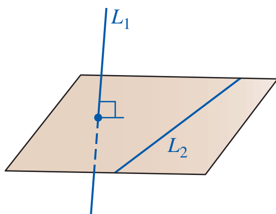


FIGURA 11.5.3 Líneas perpendiculares

Advierta que *i*) de la definición 11.5.1 no exige que las dos rectas se intersequen para que sean perpendiculares. La FIGURA 11.5.3 muestra dos rectas perpendiculares L_1 y L_2 que no se intersecan. En otras palabras, L_1 puede ser perpendicular a un plano que contiene a L_2.

EJEMPLO 9 Repaso del ejemplo 7

Determine si las rectas L_1 y L_2 del ejemplo 7 se intersecan.

Solución Puesto que un punto (x, y, z) de la intersección es común a ambas rectas, debemos tener

$$\left.\begin{aligned} -6 - t &= 5 + 2s \\ 20 + 3t &= -9 - 4s \\ 1 + 2t &= 1 + 7s \end{aligned}\right\} \quad \text{o} \quad \left\{\begin{aligned} 2s + t &= -11 \\ 4s + 3t &= -29 \\ -7s + 2t &= 0\,. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Después de esto resolvemos simultáneamente cualquiera de las *dos* ecuaciones en (7) y usamos la ecuación restante para la verificación. Al elegir la primera y la tercera, encontramos del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2s + t &= -11 \\ -7s + 2t &= 0 \end{aligned}$$

que $s = -2$ y $t = -7$. La sustitución de estos valores en la segunda ecuación en (7) produce la identidad $-8 - 21 = -29$. Así, L_1 y L_2 se intersecan. Para encontrar el punto de intersección, usamos, por ejemplo, $s = -2$:

$$x = 5 + 2(-2) = 1, \quad y = -9 - 4(-2) = -1, \quad z = 1 + 7(-2) = -13.$$

El punto de intersección es $(1, -1, -13)$. ■

En el ejemplo 9, al no haberse satisfecho las ecuaciones restantes cuando se sustituyeron los valores $s = -2$ y $t = -7$, entonces las tres ecuaciones no se satisfarían simultáneamente y por ello las rectas no se intersecarían. Dos rectas L_1 y L_2 en el espacio tridimensional que no se intersecan y que no son paralelas reciben el nombre de **rectas oblicuas**. Como se muestra en la FIGURA 11.5.4, las rectas oblicuas yacen en planos paralelos.

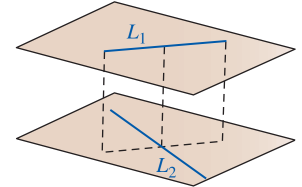


FIGURA 11.5.4 Rectas oblicuas

Ejercicios 11.5 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-36.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-4, encuentre una ecuación vectorial para la recta que pasa por el punto y es paralela al vector dado.

1. $(4, 6, -7)$, $\mathbf{v} = \langle 3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$

2. $(1, 8, -2)$, $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

3. $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

4. $(0, -3, 10)$, $\mathbf{v} = \langle 12, -5, -6 \rangle$

En los problemas 5-10, encuentre la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos indicados.

5. $(1, 2, 1)$, $(3, 5, -2)$

6. $(0, 4, 5)$, $(-2, 6, 3)$

7. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

8. $(10, 2, -10)$, $(5, -3, 5)$

9. $(1, 1, -1)$, $(-4, 1, -1)$

10. $(3, 2, 1)$, $\left(\frac{5}{2}, 1, -2\right)$

En los problemas 11-16, encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos indicados.

11. $(2, 3, 5)$, $(6, -1, 8)$

12. $(2, 0, 0)$, $(0, 4, 9)$

13. $(1, 0, 0)$, $(3, -2, -7)$

14. $(0, 0, 5)$, $(-2, 4, 0)$

15. $\left(4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(-6, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$

16. $(-3, 7, 9)$, $(4, -8, -1)$

En los problemas 17-22, encuentre ecuaciones simétricas para la recta que pasa por los puntos indicados.

17. $(1, 4, -9)$, $(10, 14, -2)$

18. $\left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{4}\right), \left(1, 3, \frac{1}{4}\right)$

19. $(4, 2, 1)$, $(-7, 2, 5)$

20. $(-5, -2, -4)$, $(1, 1, 2)$

21. $(5, 10, -2)$, $(5, 1, -14)$

22. $\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{10}\right)$

23. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(6, 4, -2)$ y que es paralela a la recta $x/2 = (1 - y)/3 = (z - 5)/6$.

24. Encuentre ecuaciones simétricas para la recta que pasa por $(4, -11, -7)$ y que es paralela a la recta $x = 2 + 5t$, $y = -1 + \frac{1}{3}t$, $z = 9 - 2t$.

25. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(2, -2, 15)$ y que es paralela al plano xz y al plano xy.

26. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(1, 2, 8)$ que es

a) paralela al eje x y

b) perpendicular al plano xy.

En los problemas 27 y 28, demuestre que las rectas L_1 y L_2 son las mismas.

27. L_1: $\mathbf{r} = t\langle 1, 1, 1 \rangle$
L_2: $\mathbf{r} = \langle 6, 6, 6 \rangle + t\langle -3, -3, -3 \rangle$

28. L_1: $x = 2 + 3t$, $y = -5 + 6t$, $z = 4 - 9t$
L_2: $x = 5 - t$, $y = 1 - 2t$, $z = -5 + 3t$

29. Dado que las rectas L_1 y L_2 definidas por las ecuaciones paramétricas

L_1: $x = 3 + 2t$, $y = 4 - t$, $z = -1 + 6t$

L_2: $x = 5 - s$, $y = 3 + \frac{1}{2}s$, $z = 5 - 3s$

son iguales,

a) encuentre un valor de t tal que $(-7, 9, -31)$ sea un punto sobre L_1 y

b) encuentre un valor de s tal que $(-7, 9, -31)$ sea un punto sobre L_2.

30. Determine cuáles de las siguientes rectas son perpendiculares y cuáles son paralelas.

a) $\mathbf{r} = \langle 1, 0, 2 \rangle + t\langle 9, -12, 6 \rangle$

b) $x = 1 + 9t$, $y = 12t$, $z = 2 - 6t$

c) $x = 2t$, $y = -3t$, $z = 4t$

d) $x = 5 + t$, $y = 4t$, $z = 3 + \dfrac{5}{2}t$

e) $x = 1 + t$, $y = \dfrac{3}{2}t$, $z = 2 - \dfrac{3}{2}t$

f) $\dfrac{x + 1}{-3} = \dfrac{y + 6}{4} = \dfrac{z - 3}{-2}$

En los problemas 31 y 32, determine los puntos de intersección de la recta dada y los tres planos de coordenadas.

31. $x = 4 - 2t, y = 1 + 2t, z = 9 + 3t$

32. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-4}{2}$

En los problemas 33-36, determine si las rectas L_1 y L_2 se intersecan. Si es así, encuentre el punto de intersección.

33. L_1: $x = 4 + t, y = 5 + t, z = -1 + 2t$
L_2: $x = 6 + 2s, y = 11 + 4s, z = -3 + s$

34. L_1: $x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t$
L_2: $x = 2 - s, y = 1 + s, z = 6s$

35. L_1: $x = 2 - t, y = 3 + t, z = 1 + t$
L_2: $x = 4 + s, y = 1 + s, z = 1 - s$

36. L_1: $x = 3 - t, y = 2 + t, z = 8 + 2t$
L_2: $x = 2 + 2s, y = -2 + 3s, z = -2 + 8s$

En los problemas 37 y 38, determine si los puntos dados yacen sobre la misma recta.

37. $(4, 3, -5), (10, 15, -11), (-1, -7, 0)$

38. $(1, 6, 6), (-11, 10, -2), (-2, 7, 5)$

39. Encuentre ecuaciones paramétricas del segmento de recta que une los puntos $(2, 5, 9)$ y $(6, -1, 3)$.

40. Encuentre ecuaciones paramétricas para el segmento de recta que une los puntos medios de los segmentos de recta dados.

$$x = 1 + 2t, y = 2 - t, z = 4 - 3t, 1 \le t \le 2$$
$$x = -2 + 4t, y = 6 + t, z = 5 + 6t, -1 \le t \le 1$$

En los problemas 41 y 42, encuentre el ángulo entre las rectas dadas L_1 y L_2. El ángulo entre las dos rectas es el ángulo entre sus vectores direccionales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

41. L_1: $x = 4 - t, y = 3 + 2t, z = -2t$
L_2: $x = 5 + 2s, y = 1 + 3s, z = 5 - 6s$

42. L_1: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{7} = \dfrac{z-1}{-1}$
L_2: $\dfrac{x+3}{-2} = y - 9 = \dfrac{z}{4}$

En los problemas 43 y 44, las rectas L_1 y L_2 yacen en el mismo plano. Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto indicado y que es perpendicular a este plano.

43. L_1: $x = 3 + t, y = -2 + t, z = 9 + t$
L_2: $x = 1 - 2s, y = 5 + s, z = -2 - 5s$; $(4, 1, 6)$

44. L_1: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{4}$
L_2: $\dfrac{x+4}{6} = \dfrac{y-6}{4} = \dfrac{z-10}{8}$; $(1, -1, 0)$

En los problemas 45 y 46, demuestre que L_1 y L_2 son rectas oblicuas.

45. L_1: $x = -3 + t, y = 7 + 3t, z = 5 + 2t$
L_2: $x = 4 + s, y = 8 - 2s, z = 10 - 4s$

46. L_1: $x = 6 + 2t, y = 6t, z = -8 + 10t$
L_2: $x = 7 + 8s, y = 4 - 4s, z = 3 - 24s$

≡ Piense en ello

47. Suponga que L_1 y L_2 son rectas torcidas. Considere que L_1 y L_2 son puntos sobre la línea L_1 y sean P_3 y P_4 puntos sobre la línea L_2. Emplee el vector $\overrightarrow{P_1P_3}$, ilustrado en la FIGURA 11.5.5, para demostrar que la distancia más corta d entre L_1 y L_2 (y en consecuencia la distancia más corta entre los planos) es

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_3} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_3P_4})|}{|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_3P_4}|}.$$

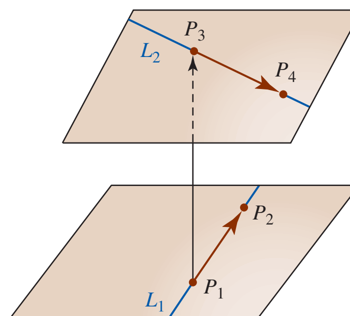


FIGURA 11.5.5 Distancia entre las dos rectas oblicuas del problema 47

48. Utilizando el resultado del problema 47, encuentre la distancia entre las rectas oblicuas del problema 45.

11.6 Planos

Introducción En esta sección aplicamos métodos vectoriales para obtener ecuaciones de planos.

Ecuación vectorial La FIGURA 11.6.1*a*) ilustra el hecho de que hay un número infinito de planos $S_1, S_2, S_3, \ldots$ que pasan por un punto dado $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Sin embargo, como se muestra en la figura 11.6.1*b*), si se especifican un punto P_0 y un vector distinto de cero $\mathbf{n}$, sólo hay *un* plano S que contiene a P_0 con la **normal n**, o perpendicular, al plano. Además, si $P(x, y, z)$ representa cualquier punto sobre el plano, y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$, entonces como se ilustra en la figura 11.6.1*c*), $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ yace en el plano S. Se concluye que una **ecuación vectorial** del plano es

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \tag{1}$$

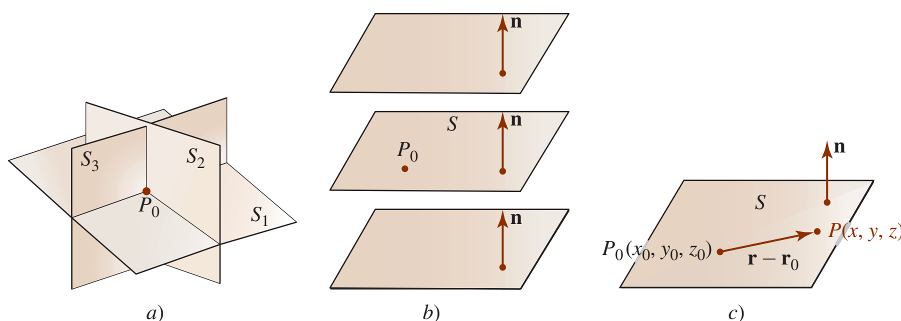


FIGURA 11.6.1 Un punto P_0 y un vector **n** determinan un plano

Ecuación rectangular En concreto, si el vector normal es $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, entonces (1) produce una **ecuación rectangular** o **cartesiana** del plano que contiene a $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{2}$$

La ecuación (2) se denomina la forma **punto-normal** de la ecuación de un plano.

EJEMPLO 1 Ecuación de un plano

Determine una ecuación del plano que contiene al punto $(4, -1, 3)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

Solución Se concluye de inmediato de (2) con $x_0 = 4$, $y_0 = -1$, $z_0 = 3$, $a = 2$, $b = 8$, $c = -5$ que

$$2(x - 4) + 8(y + 1) - 5(z - 3) = 0 \quad \text{o} \quad 2x + 8y - 5z + 15 = 0. \qquad ■$$

La ecuación en (2) siempre puede escribirse como $ax + by + cz + d = 0$ identificando $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. De modo converso, se probará que una **ecuación lineal**

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{3}$$

a, b, c no todas cero, es un plano.

Teorema 11.6.1 Plano y vector normal

La gráfica de una ecuación lineal $ax + by + cz + d = 0$, a, b, c no todas cero, es un plano con vector normal $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

DEMOSTRACIÓN Suponga que x_0, y_0 y z_0 son números que satisfacen la ecuación dada. Entonces $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ implica que $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Al sustituir este valor de d en la ecuación original obtenemos, después de simplificar,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

o, en términos de vectores,

$$[a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}] \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0.$$

Esta última ecuación implica que $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ es normal al plano que contiene el punto (x_0, y_0, z_0) y el vector

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}. \qquad ■$$

EJEMPLO 2 Vector normal a un plano

Al leer los coeficientes de x, y y z en la ecuación lineal $3x - 4y + 10z - 8 = 0$ obtenemos un vector normal

$$\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

al plano. ■

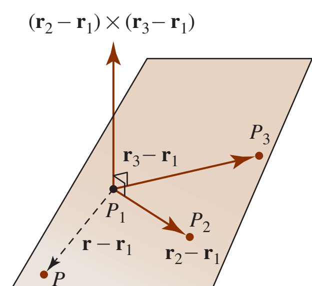


FIGURA 11.6.2 Plano determinado por tres puntos no colineales

Desde luego, un múltiplo escalar distinto de cero de un vector normal $\mathbf{n}$ sigue siendo perpendicular al plano.

Tres puntos no colineales P_1, P_2 y P_3 determinan también un plano S. Para obtener una ecuación del plano, sólo necesitamos formar dos vectores entre dos pares de puntos. Como se ilustra en la FIGURA 11.6.2, su producto cruz es un vector normal al plano que contiene estos vectores. Si $P(x, y, z)$ representa cualquier punto sobre el plano, y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$, $\mathbf{r}_3 = \overrightarrow{OP_3}$ entonces $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ (o, de esa manera, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$ o $\mathbf{r} - \mathbf{r}_3$) está en el plano. Por consiguiente,

$$[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0 \qquad (4)$$

es una ecuación vectorial del plano S. Se pide al lector no memorizar la última fórmula. El procedimiento es el mismo que en (1) con la excepción de que el vector normal al plano se obtiene por medio del producto cruz.

EJEMPLO 3 Ecuación de un plano

Encuentre una ecuación del plano que contiene a (1, 0, −1), (3, 1, 4) y (2, −2, 0).

Solución Se necesitan tres vectores. Al juntar los puntos a la izquierda, como se muestra, se producen los vectores a la derecha. El orden en el cual se realiza la resta es irrelevante.

$$\left.\begin{matrix}(1, 0, -1)\\(3, 1, 4)\end{matrix}\right\} \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$\left.\begin{matrix}(3, 1, 4)\\(2, -2, 0)\end{matrix}\right\} \mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\left.\begin{matrix}(2, -2, 0)\\(x, y, z)\end{matrix}\right\} \mathbf{w} = (x - 2)\mathbf{i} + (y + 2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Ahora,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -11\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

es un vector normal al plano que contiene los puntos dados. En consecuencia, de (1), una ecuación vectorial del plano es $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$. La última ecuación produce

$$-11(x - 2) - 3(y + 2) + 5z = 0 \quad \text{o} \quad -11x - 3y + 5z + 16 = 0. \qquad ■$$

Planos perpendicular y paralelo La FIGURA 11.6.3 ilustra la validez de la siguiente definición respecto a los planos **perpendicular** y **paralelo**.

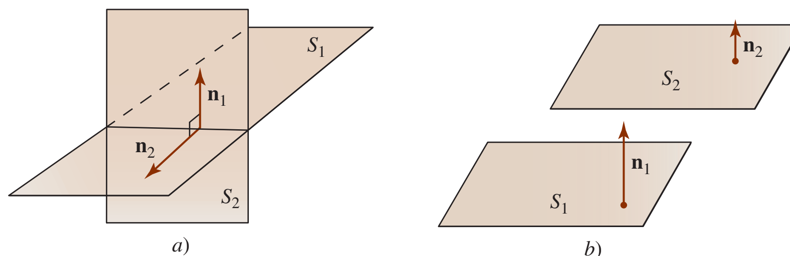


FIGURA 11.6.3 Planos perpendiculares *a*); planos paralelos *b*)

Definición 11.6.1 Planos perpendiculares y paralelos

Dos planos S_1 y S_2 con vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, respectivamente, son

i) **perpendiculares** si $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ y

ii) **paralelos** si $\mathbf{n}_2 = k\mathbf{n}_1$, para algún escalar k distinto de cero.

EJEMPLO 4 Planos paralelos

Los tres planos dados por

$$S_1: \quad 2x - 4y + 8z = 7$$
$$S_2: \quad x - 2y + 4z = 0$$
$$S_3: \quad -3x + 6y - 12z = 1$$

son paralelos, ya que sus respectivos vectores normales

$$\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$
$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = \frac{1}{2}\mathbf{n}_1$$
$$\mathbf{n}_3 = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 12\mathbf{k} = -\frac{3}{2}\mathbf{n}_1$$

son paralelos. ■

Gráficas Las siguientes listas son algunas guías para trazar la gráfica de un plano.

Guías para graficar un plano

- Las gráficas de cada una de las ecuaciones $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, donde x_0, y_0 y z_0 son constantes, son planos perpendiculares, respectivamente, a los ejes x, y y z.
- Para graficar una ecuación lineal $ax + by + cz + d = 0$, encuentre las intersecciones x, y y z o, si es necesario, encuentre la traza del plano en cada plano de coordenadas.

Una **traza** de un plano en un plano de coordenadas es la línea de intersección del plano con el plano de coordenadas.

EJEMPLO 5 Gráfica

Grafique la ecuación $2x + 3y + 6z = 18$.

Solución Al dejar:

$$y = 0, z = 0 \text{ produce } x = 9$$
$$x = 0, z = 0 \text{ produce } y = 6$$
$$x = 0, y = 0 \text{ produce } z = 3.$$

Como se ilustra en la FIGURA 11.6.4, empleamos las intersecciones x, y y z (9, 0, 0), (0, 6, 0) y (0, 0, 3) para dibujar la gráfica del plano en el primer octante. ■

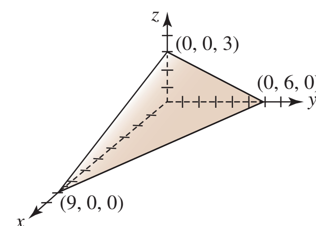


FIGURA 11.6.4 Plano del ejemplo 5

EJEMPLO 6 Gráfica

Grafique la ecuación $6x + 4y = 12$.

Solución En dos dimensiones la gráfica de la ecuación es una línea con intersección (2, 0) con el eje x e intersección (0, 3) con el eje y. Sin embargo, en tres dimensiones esta recta es la traza de un plano en el plano de coordenadas xy. Puesto que z no está especificada, puede ser cualquier número real. En otras palabras, (x, y, z) es un punto sobre el plano siempre que x y y estén relacionados por la ecuación dada. Como se muestra en la FIGURA 11.6.5, la gráfica es un plano paralelo al eje z. ■

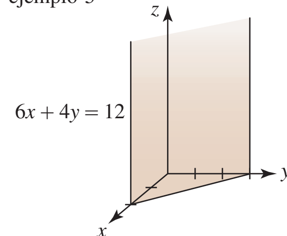


FIGURA 11.6.5 Plano del ejemplo 6

EJEMPLO 7 Gráfica

Grafique la ecuación $x + y - z = 0$.

Solución Observe primero que el plano pasa por el origen (0, 0, 0). En este caso, la traza del plano en el plano xz $(y = 0)$ es $z = x$, en tanto que su traza en el plano yz $(x = 0)$ es $z = y$. El dibujo de estas dos rectas conduce a la gráfica dada en la FIGURA 11.6.6. ■

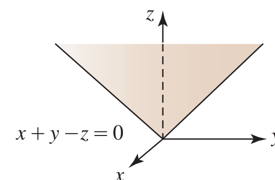


FIGURA 11.6.6 Plano del ejemplo 7

Dos planos S_1 y S_2 que no son paralelos deben intersecarse en una línea L. Vea la FIGURA 11.6.7. El ejemplo 8 ilustra una manera de encontrar ecuaciones paramétricas para la recta de intersección. En el ejemplo 9 vemos cómo encontrar un punto de intersección (x_0, y_0, z_0) de un plano S y una recta L. Vea la FIGURA 11.6.8.

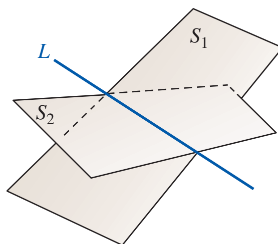


FIGURA 11.6.7 Dos planos que se intersecan

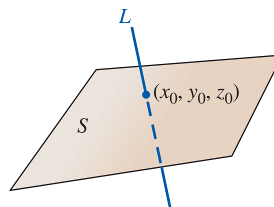


FIGURA 11.6.8 Intersección de una recta y un plano

EJEMPLO 8 Línea de intersección

Encuentre las ecuaciones paramétricas de la línea de intersección $x - y + 2z = 1$ y $x + y + z = 3$.

Solución En un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, elegimos arbitrariamente una variable, digamos $z = t$, y se resuelve para x y y de

$$x - y = 1 - 2t$$
$$x + y = 3 - t.$$

Al resolver el sistema obtenemos

$$x = 2 - \frac{3}{2}t, \quad y = 1 + \frac{1}{2}t, \quad z = t.$$

Éstas son ecuaciones paramétricas de la recta de intersección L de los planos dados. La recta se muestra en rojo, el plano $x - y + 2z = 1$ es azul y el plano $x + y + z = 3$ es morado en la FIGURA 11.6.9. ■

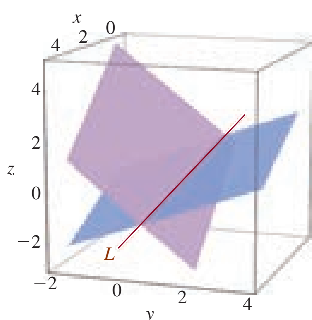


FIGURA 11.6.9 Recta L de intersección de dos planos en el ejemplo 8

La recta en el ejemplo 8 puede obtenerse de otra manera. Vea el problema 52 en los ejercicios 11.6.

EJEMPLO 9 Punto de intersección

Encuentre el punto de intersección del plano $3x - 2y + z = -5$ y la recta $x = 1 + t$, $y = -2 + 2t$, $z = 4t$.

Solución Si (x_0, y_0, z_0) denota el punto de intersección, entonces debe tenerse

$$3x_0 - 2y_0 + z_0 = -5 \quad \text{y} \quad x_0 = 1 + t_0,\ y_0 = -2 + 2t_0,\ z_0 = 4t_0$$

para algún número t_0. Al sustituir las últimas ecuaciones en la ecuación del plano encontramos que

$$3(1 + t_0) - 2(-2 + 2t_0) + 4t_0 = -5 \quad \text{o} \quad t_0 = -4.$$

De las ecuaciones paramétricas de la recta obtenemos entonces $x_0 = -3$, $y_0 = -10$ y $z_0 = -16$. El punto de intersección es $(-3, -10, -16)$. ■

Ejercicios 11.6 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-36.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre una ecuación del plano que contenga el punto dado y sea perpendicular al vector que se indica.

1. $(5, 1, 3)$; $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
2. $(1, 2, 5)$; $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
3. $(6, 10, -7)$; $-5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$
4. $(0, 0, 0)$; $6\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
5. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$; $6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
6. $(-1, 1, 0)$; $-\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

En los problemas 7-12, determine, si es posible, una ecuación de un plano que contenga a los puntos dados.

7. $(3, 5, 2), (2, 3, 1), (-1, -1, 4)$
8. $(0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 3, -1)$
9. $(0, 0, 0), (1, 1, 1), (3, 2, -1)$
10. $(0, 0, 3), (0, -1, 0), (0, 0, 6)$
11. $(1, 2, -1), (4, 3, 1), (7, 4, 3)$
12. $(2, 1, 2), (4, 1, 0), (5, 0, -5)$

En los problemas 13-22, determine una ecuación del plano que satisfaga las condiciones indicadas.

13. Contiene a $(2, 3, -5)$ y es paralelo a $x + y - 4z = 1$

14. Contiene al origen y es paralelo a $5x - y + z = 6$

15. Contiene a $(3, 6, 12)$ y es paralelo al plano xy

16. Contiene a $(-7, -5, 18)$ y es perpendicular al eje y

17. Contiene las rectas $x = 1 + 3t$, $y = 1 - t$, $z = 2 + t$; $x = 4 + 4s$, $y = 2s$, $z = 3 + s$

18. Contiene las rectas $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-5}{6}$; $\mathbf{r} = \langle 1, -1, 5\rangle + t\langle 1, 1, -3\rangle$

19. Contiene las rectas paralelas $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 3 + t$; $x = 3 + s$, $y = 2s$, $z = -2 + s$

20. Contiene al punto $(4, 0, -6)$ y la recta $x = 3t$, $y = 2t$, $z = -2t$

21. Contiene a $(2, 4, 8)$ y es perpendicular a la recta $x = 10 - 3t$, $y = 5 + t$, $z = 6 - \frac{1}{2}t$

22. Contiene a $(1, 1, 1)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2, 6, -3)$ y $(1, 0, -2)$

23. Determine cuáles de los siguientes planos son perpendiculares y cuáles son paralelos.

a) $2x - y + 3z = 1$ ***b)*** $x + 2y + 2z = 9$

c) $x + y - \frac{3}{2}z = 2$ ***d)*** $-5x + 2y + 4z = 0$

e) $-8x - 8y + 12z = 1$ ***f)*** $-2x + y - 3z = 5$

24. Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a $(-4, 1, 7)$ y es perpendicular al plano $-7x + 2y + 3z = 1$.

25. Determine cuáles de los siguientes planos son perpendiculares a la recta $x = 4 - 6t$, $y = 1 + 9t$, $z = 2 + 3t$.

a) $4x + y + 2z = 1$ ***b)*** $2x - 3y + z = 4$

c) $10x - 15y - 5z = 2$ ***d)*** $-4x + 6y + 2z = 9$

26. Determine cuáles de los siguientes planos es paralelo a la recta $(1 - x)/2 = (y + 2)/4 = z - 5$.

a) $x - y + 3z = 1$ ***b)*** $6x - 3y = 1$

c) $x - 2y + 5z = 0$ ***d)*** $-2x + y - 2z = 7$

En los problemas 27-30, encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos dados.

27. $5x - 4y - 9z = 8$, $x + 4y + 3z = 4$

28. $x + 2y - z = 2$, $3x - y + 2z = 1$

29. $4x - 2y - z = 1$, $x + y + 2z = 1$

30. $2x - 5y + z = 0$, $y = 0$

En los problemas 31-34, encuentre el punto de intersección del plano y la recta dados.

31. $2x - 3y + 2z = -7$; $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = -3t$

32. $x + y + 4z = 12$; $x = 3 - 2t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2 - \frac{1}{2}t$

33. $x + y - z = 8$; $x = 1$, $y = 2$, $z = 1 + t$

34. $x - 3y + 2z = 0$; $x = 4 + t$, $y = 2 + t$, $z = 1 + 5t$

En los problemas 35 y 36, encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto indicado y que es paralela a los planos dados.

35. $x + y - 4z = 2$, $2x - y + z = 10$; $(5, 6, -12)$

36. $2x + z = 0$, $-x + 3y + z = 1$; $(-3, 5, -1)$

En los problemas 37 y 38, encuentre una ecuación del plano que contiene a la recta dada y que es perpendicular al plano indicado.

37. $x = 4 + 3t$, $y = -t$, $z = 1 + 5t$; $x + y + z = 7$

38. $\dfrac{2-x}{3} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z-8}{2}$; $2x - 4y - z + 16 = 0$

En los problemas 39-44, grafique la ecuación dada.

39. $5x + 2y + z = 10$

40. $3x + 2z = 9$

41. $-y - 3z + 6 = 0$

42. $3x + 4y - 2z - 12 = 0$

43. $-x + 2y + z = 4$

44. $3x - y - 6 = 0$

45. Demuestre que la recta $x = -2t$, $y = t$, $z = -t$ es

a) paralela pero por arriba del plano $x + y - z = 1$,

b) paralela pero por debajo del plano $-3x - 4y + 2z = 8$.

46. Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre el plano $ax + by + cz + d = 0$ y considere que $\mathbf{n}$ es un vector normal al plano. Vea la FIGURA 11.6.10. Demuestre que si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ es cualquier punto fuera del plano, entonces la **distancia *D* desde un punto a un plano** está dada por

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

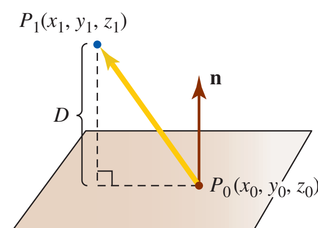


FIGURA 11.6.10 Distancia entre un punto y un plano en el problema 46

47. Emplee el resultado del problema 46 para encontrar la distancia del punto $(2, 1, 4)$ al plano $x - 3y + z - 6 = 0$.

48. ***a)*** Demuestre que los planos $x - 2y + 3z = 3$ y $-4x + 8y - 12z = 7$ son paralelos.

b) Encuentre la distancia entre los planos en el inciso *a*).

Como se muestra en la FIGURA 11.6.11, el **ángulo entre dos planos** se define como el ángulo agudo entre sus vectores normales. En los problemas 49 y 50, encuentre los ángulos entre los planos indicados.

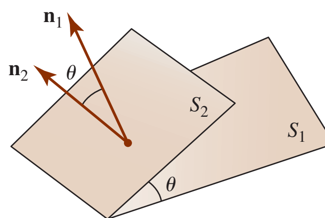


FIGURA 11.6.11 Ángulo entre dos planos en los problemas 49 y 50

49. $x - 3y + 2z = 14$, $-x + y + z = 10$

50. $2x + 6y + 3z = 13$, $4x - 2y + 4z = -7$

Piense en ello

51. Si siempre se ha sentado en una mesa de cuatro patas que se mece, tal vez haya considerado sustituirla con una mesa de tres patas. ¿Por qué?

52. Vuelva a leer el ejemplo 8. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta L de intersección entre los dos planos utilizando el hecho de que L yace en ambos planos y por ello debe ser perpendicular al vector normal de cada plano. Si obtiene una respuesta que difiere de las ecuaciones en el ejemplo 8, demuestre que las respuestas son equivalentes.

53. ***a***) Encuentre una ecuación del plano cuyos puntos son equidistantes de $(1, -2, 3)$ y $(2, 5, -1)$.

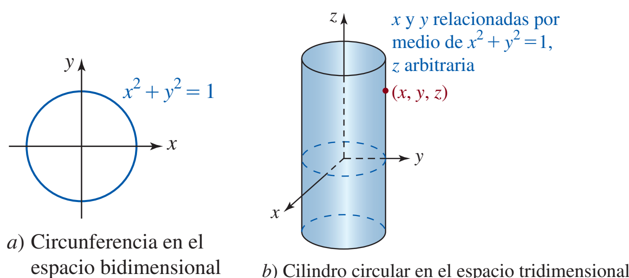
b) Encuentre la distancia entre el plano y los puntos dados en el inciso *a*).

11.7 Cilindros y esferas

Introducción En el espacio bidimensional la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es una circunferencia centrada en el origen del plano xy. Sin embargo, en el espacio tridimensional es posible interpretar la gráfica del conjunto

$$\{(x, y, z)|x^2 + y^2 = 1, z \text{ arbitraria}\}$$

como una **superficie** que es el cilindro circular recto que se muestra en la FIGURA 11.7.1*b*).



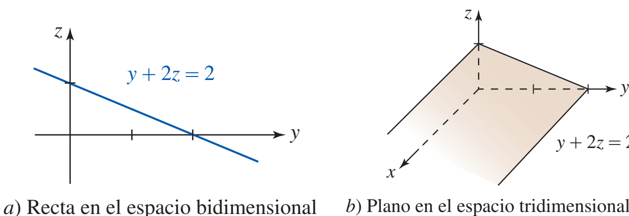
a) Circunferencia en el espacio bidimensional *b*) Cilindro circular en el espacio tridimensional

FIGURA 11.7.1 Interpretación de la ecuación de una circunferencia en los espacios bidimensional y tridimensional

De modo similar, ya hemos visto en la sección 11.6 que la gráfica de una ecuación tal como $y + 2z = 2$ es una recta en el espacio bidimensional (el plano yz), pero en el espacio tridimensional la gráfica del conjunto

$$\{(x, y, z)|y + 2z = 2, x \text{ arbitraria}\}$$

es el plano perpendicular al plano yz mostrado en la FIGURA 11.7.2*b*). Las superficies de este tipo reciben un nombre especial.



a) Recta en el espacio bidimensional *b*) Plano en el espacio tridimensional

FIGURA 11.7.2 Interpretación de una ecuación de una recta en los espacios bidimensional y tridimensional

Cilindro Las superficies ilustradas en las figuras 11.7.1 y 11.7.2 se llaman **cilindros**. Usamos el término *cilindro* en un sentido más general que el de un cilindro circular recto. Específicamente, si C es una curva en un plano y L es una recta no paralela al plano, entonces el conjunto de todos los puntos (x, y, z) generado al mover una línea que recorra a C paralela a L se denomina **cilindro**. La curva C recibe el nombre de **directriz** del cilindro. Vea la FIGURA 11.7.3.

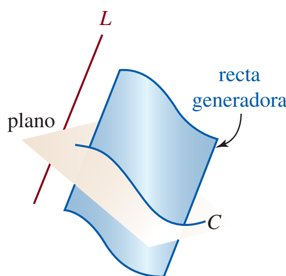


FIGURA 11.7.3 La recta en movimiento sobre C paralela a L genera un cilindro

Así, una ecuación de una curva en un plano de coordenadas, cuando se consideran tres dimensiones, es una ecuación de un cilindro perpendicular a ese plano de coordenadas.

- Si las gráficas de $f(x, y) = c_1$, $g(y, z) = c_2$ y $h(x, z) = c_3$ son curvas en el espacio bidimensional de sus respectivos planos de coordenadas, entonces sus gráficas en el espacio tridimensional son superficies denominadas cilindros. Un cilindro se genera al mover una línea que recorre la curva paralela al eje de coordenadas que es representada por la variable que falta en su ecuación.

La FIGURA 11.7.4 muestra una curva C definida por $f(x, y) = c_1$ en el plano xy y una colección de líneas rojas llamado **bastidor** que representa diversas posiciones de una línea generadora que recorre a C mientras se mueve paralela al eje z.

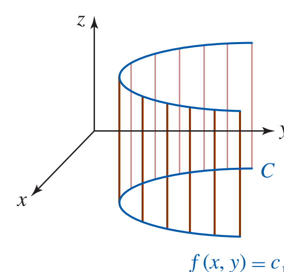
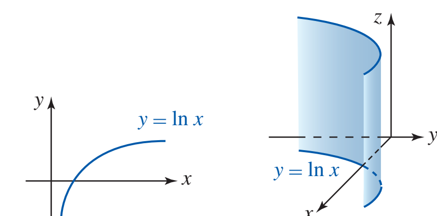


FIGURA 11.7.4 Bastidor del cilindro $f(x, y) = c_1$

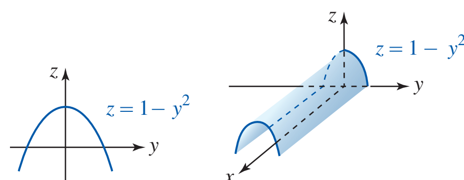
En el siguiente ejemplo comparamos la gráfica de una ecuación en un plano de coordenadas con su interpretación como un cilindro en el espacio tridimensional (FIGURAS 11.7.5-11.7.8). Como en la figura 11.7.2*b*), sólo se muestra una parte del cilindro.

EJEMPLO 1 Cilindros



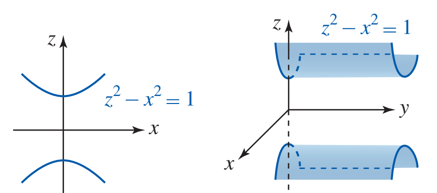
a) Curva logarítmica *b*) Cilindro logarítmico

FIGURA 11.7.5 Cilindro con bastidor paralelo al eje z



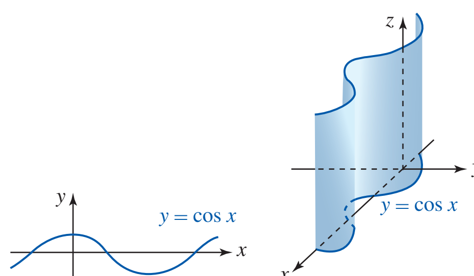
a) Parábola *b*) Cilindro parabólico

FIGURA 11.7.6 Cilindro con bastidor paralelo al eje x



a) Hipérbola *b*) Cilindro hiperbólico

FIGURA 11.7.7 Cilindro con bastidor paralelo al eje y



a) Curva senoidal *b*) Cilindro senoidal

FIGURA 11.7.8 Cilindro con bastidor paralelo al eje z

■

Esferas Como la circunferencia, una esfera puede definirse por medio de la fórmula de la distancia.

Definición 11.7.1 Esfera

Una **esfera** es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ en el espacio tridimensional que son equidistantes de un punto fijo llamado **centro**.

Si r denota la distancia fija, o **radio** de la esfera, y si el centro es $P_1(a, b, c)$, entonces un punto $P(x, y, z)$ está sobre la esfera si y sólo si $[d(P_1, P)]^2 = r^2$, o

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2. \tag{1}$$

EJEMPLO 2 Esfera

Grafique $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Solución Identificamos $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ y $r^2 = 25 = 5^2$ en (1), y por ello la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ es una esfera de radio 5 cuyo centro está en el origen. La gráfica de la ecuación se ilustra en la FIGURA 11.7.9. ■

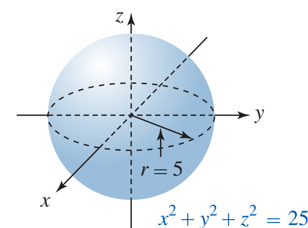


FIGURA 11.7.9 Esfera del ejemplo 2

EJEMPLO 3 Esfera

Grafique $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 + (z - 6)^2 = 9$.

Solución En este caso identificamos $a = 5$, $b = 7$, $c = 6$ y $r^2 = 9$. De (1) advertimos que la gráfica $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 + (z - 6)^2 = 3^2$ es una esfera con centro $(5, 7, 6)$ y radio 3. Su gráfica yace por completo en el primer octante y se muestra en la FIGURA 11.7.10. ■

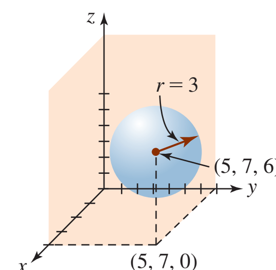


FIGURA 11.7.10 Esfera del ejemplo 3

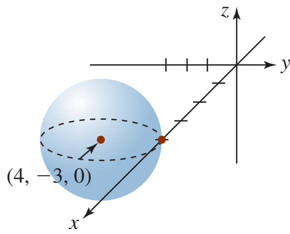


FIGURA 11.7.11 Esfera tangente al plano $y = 0$ en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Ecuación de una esfera

Encuentre una ecuación de la esfera cuyo centro es $(4, -3, 0)$ que es tangente al plano xz.

Solución La distancia perpendicular desde el punto dado hasta el plano xz ($y = 0$), y en consecuencia el radio de la esfera, es el valor absoluto de la coordenada y, $|-3| = 3$. Así, una ecuación de la esfera es

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 3^2.$$

Vea la FIGURA 11.7.11. ■

EJEMPLO 5 Centro y radio

Encuentre el centro y radio de una esfera cuya ecuación es

$$16x^2 + 16y^2 + 16z^2 - 16x + 8y - 32z + 16 = 0.$$

Solución Al dividir entre 16 y completar cuadrados en x, y y z obtenemos

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 + (z - 1)^2 = \frac{5}{16}.$$

El centro y radio de la esfera son $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1\right)$ y $\frac{1}{4}\sqrt{5}$, respectivamente. ■

Traza de una superficie En la sección 11.6 vimos que la traza de un plano en un plano de coordenadas es la recta de intersección del plano con el plano de coordenadas. En general, la **traza de una superficie** en *cualquier* plano es la curva formada por la intersección de la superficie en el plano. Por ejemplo, en la figura 11.7.9 la traza de la esfera en el plano xy ($z = 0$) es la circunferencia punteada $x^2 + y^2 = 25$. En los planos xz y yz, las trazas de las esferas son los círculos $x^2 + z^2 = 25$ y $y^2 + z^2 = 25$, respectivamente.

Ejercicios 11.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-37.

Fundamentos

En los problemas 1-16, dibuje la gráfica del cilindro indicado.

1. $y = x$
2. $z = -y$
3. $y = x^2$
4. $x^2 + z^2 = 25$
5. $y^2 + z^2 = 9$
6. $z = y^2$
7. $z = e^{-x}$
8. $z = 1 - e^y$
9. $y^2 - x^2 = 4$
10. $z = \cosh y$
11. $4x^2 + y^2 = 36$
12. $x = 1 - y^2$
13. $z = \operatorname{sen} x$
14. $y = \dfrac{1}{x^2}$
15. $yz = 1$
16. $z = x^3 - 3x$

En los problemas 17-20, dibuje la gráfica de la ecuación indicada.

17. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
18. $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 16$
19. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$
20. $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 5)^2 = 4$

En los problemas 21-24, encuentre el centro y el radio de la esfera con la ecuación dada.

21. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y - 4z - 7 = 0$
22. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4x - 12z + 9 = 0$
23. $x^2 + y^2 + z^2 - 16z = 0$
24. $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 0$

En los problemas 25-32, encuentre una ecuación de una esfera que satisface las condiciones dadas.

25. Centro $(-1, 4, 6)$; radio $\sqrt{3}$
26. Centro $(0, -3, 0)$; diámetro $\frac{5}{2}$
27. Centro $(1, 1, 4)$; tangente al plano xy
28. Centro $(5, 2, -2)$; tangente al plano yz
29. Centro sobre el eje y positivo; radio 2; tangente a $x^2 + y^2 + z^2 = 36$
30. Centro sobre la recta $x = 2t$, $y = 3t$, $z = 6t$, $t > 0$, a una distancia de 21 unidades del origen; radio 5
31. El diámetro tiene puntos frontera $(0, -4, 7)$ y $(2, 12, -3)$
32. Centro $(-3, 1, 2)$; pasando por el origen

En los problemas 33-38, describa geométricamente todos los puntos $P(x, y, z)$ cuyas coordenadas satisfacen la(s) condición(es) indicada(s).

33. $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$, $1 \le z \le 3$
34. $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$, $z = 2$
35. $x^2 + y^2 + z^2 \ge 1$
36. $0 < (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 < 1$
37. $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9$
38. $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9$, $z \le 0$

11.8 Superficies cuádricas

Introducción La ecuación de la esfera dada en (1) de la sección 11.7 es sólo un caso particular de la ecuación general de segundo grado en tres variables

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \tag{1}$$

donde $A, B, C, \ldots, J$ son constantes. La gráfica de una ecuación de segundo grado de la forma (1) que describe un conjunto real de puntos se dice que es una **superficie cuádrica**. Por ejemplo, tanto el cilindro elíptico $x^2/4 + y^2/9 = 1$ como el cilindro parabólico $z = y^2$ son superficies cuádricas. Concluimos este capítulo considerando las seis superficies cuádricas adicionales: el **elipsoide**, el **cono elíptico**, el **paraboloide elíptico**, el **paraboloide hiperbólico**, el **hiperboloide de una hoja** y el **hiperboloide de dos hojas**.

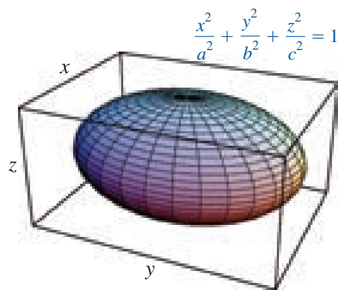
Elipsoide La gráfica de cualquier ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0, \tag{2}$$

se llama **elipsoide**. Cuando $a = b = c$, (2) es la ecuación de una esfera centrada en el origen. Para $|y_0| < b$, la ecuación

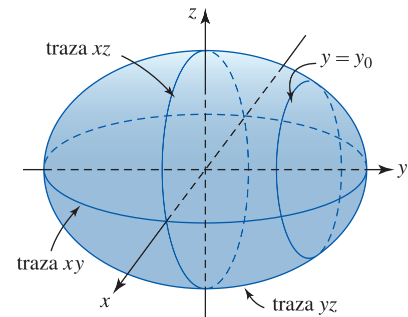
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_0^2}{b^2}$$

representa una familia de elipses (o circunferencias si $a = c$) paralelos al plano xz que se forman rebanando la superficie en planos $y = y_0$. Al elegir, a su vez, $x = x_0$ y $z = z_0$, encontramos que las rebanadas de la superficie son elipses (o círculos) paralelos, respectivamente, a los planos yz y xy. La FIGURA 11.8.1 resume una gráfica típica de un elipsoide junto con las trazas de la superficie en tres planos de coordenadas.



a) Gráfica generada con *Mathematica*

Plano de coordenadas	Traza
xy $(z = 0)$	elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
xz $(y = 0)$	elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
yz $(x = 0)$	elipse: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

FIGURA 11.8.1 Elipsoide

Cono elíptico La gráfica de una ecuación de la forma

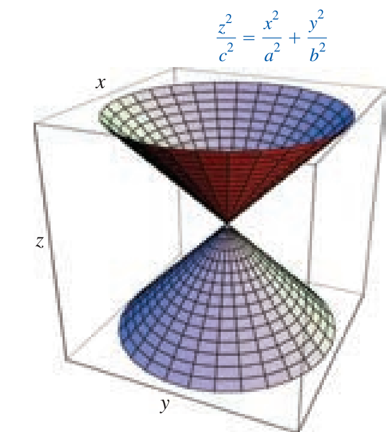
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad a > 0, b > 0, c > 0, \tag{3}$$

recibe el nombre de **cono elíptico** (o circular si el cono $a = b$). Para z_0 arbitraria, planos paralelos al plano xy rebanan la superficie en elipses cuyas ecuaciones son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}.$$

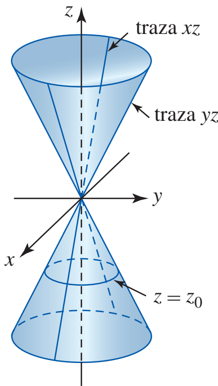
La FIGURA 11.8.2 resume una gráfica típica de un cono elíptico junto con las trazas en los planos de coordenadas.

Como veremos en seguida, hay dos tipos de paraboloides: elíptica e hiperbólica.



a) Gráfica generada con *Mathematica*

Plano de coordenadas	Traza
xy $(z=0)$	punto: (0, 0)
xz $(y=0)$	rectas: $z = \pm\frac{c}{a}x$
yz $(x=0)$	rectas: $z = \pm\frac{c}{b}y$



b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

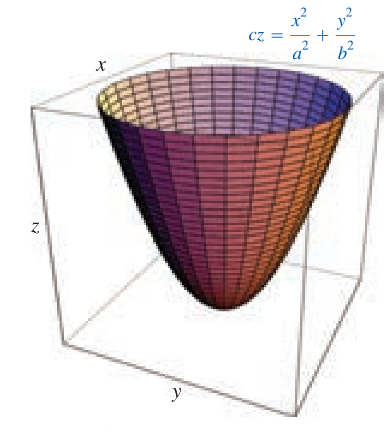
FIGURA 11.8.2 Cono elíptico

Paraboloide elíptico La gráfica de una ecuación de la forma

$$cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a > 0, b > 0, \tag{4}$$

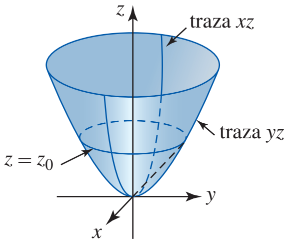
se denomina **paraboloide elíptico**. En la FIGURA 11.8.3*b*) advertimos que para $c > 0$, los planos $z = z_0 > 0$, paralelos al plano xy, cortan la superficie en elipses cuyas ecuaciones son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz_0.$$



a) Gráfica generada con *Mathematica*

Plano de coordenadas	Traza
xy $(z=0)$	punto: (0, 0)
xz $(y=0)$	parábola: $cz = \frac{x^2}{a^2}$
yz $(x=0)$	parábola: $cz = \frac{y^2}{b^2}$



b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

FIGURA 11.8.3 Paraboloide elíptico

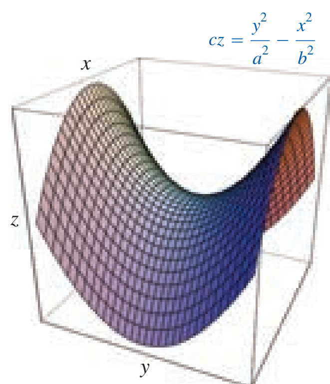
Paraboloide hiperbólico La gráfica de una ecuación de la forma

$$cz = \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}, \quad a > 0, b > 0, \tag{5}$$

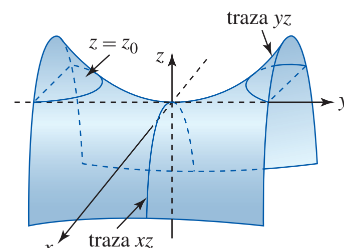
se conoce como **paraboloide hiperbólico**. Advierta que para $c > 0$, los planos $z = z_0$, paralelos al plano xy, cortan la superficie en hipérbolas cuyas ecuaciones son

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = cz_0.$$

La forma de silla característica de un paraboloide hiperbólico se muestra en la FIGURA 11.8.4.



Plano de coordenadas	Traza
$xy\ (z=0)$	rectas: $y = \pm \frac{a}{b}x$
$xz\ (y=0)$	parábola: $cz = -\frac{x^2}{b^2}$
$yz\ (x=0)$	parábola: $cz = \frac{y^2}{a^2}$



a) Gráfica generada con *Mathematica*

b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

FIGURA 11.8.4 Paraboloide hiperbólico

Hay dos tipos de hiperboloides: de una hoja y de dos hojas.

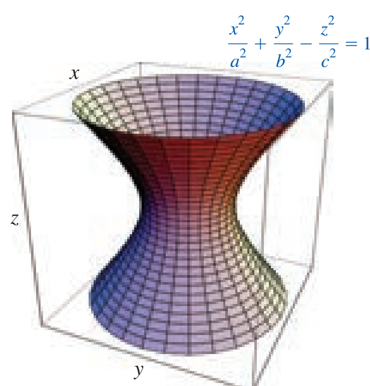
Hiperboloide de una hoja La gráfica de una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0, b > 0, c > 0, \tag{6}$$

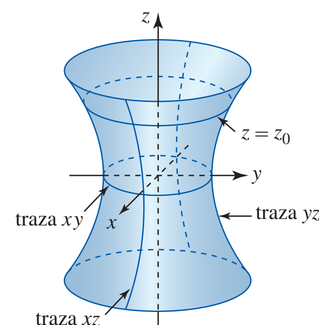
se llama **hiperboloide de una hoja**. En este caso, un plano $z = z_0$, paralelo al plano xy, corta la superficie en secciones transversales elípticas (o circulares si $a = b$). Las ecuaciones de estas elipses son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2}.$$

La elipse más pequeña, $z_0 = 0$, corresponde a la traza en el plano xy. Un resumen de las trazas y de la gráfica típica de (6) se proporciona en la FIGURA 11.8.5.



Plano de coordenadas	Traza
$xy\ (z=0)$	elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$xz\ (y=0)$	hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
$yz\ (x=0)$	hipérbola: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



a) Gráfica generada con *Mathematica*

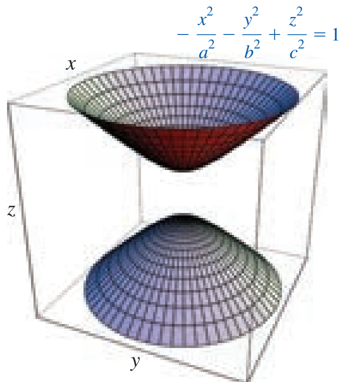
b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

FIGURA 11.8.5 Hiperboloide de una hoja

Hiperboloide de dos hojas Como se observa en la FIGURA 11.8.6, una gráfica de

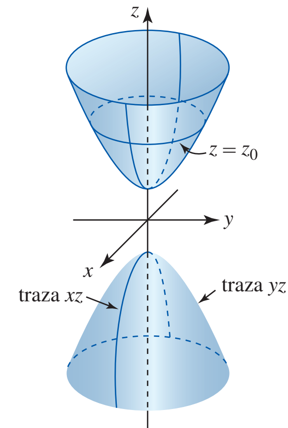
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0, b > 0, c > 0, \tag{7}$$

se llama apropiadamente **hiperboloide de dos hojas**. Para $|z_0| > c$, la ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = z_0^2/c^2 - 1$ describe la curva de intersección elíptica de la superficie con el plano $z = z_0$.



a) Gráfica generada con *Mathematica*

Plano de coordenadas	Traza
xy $(z=0)$	sin lugar
xz $(y=0)$	hipérbola: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
yz $(x=0)$	hipérbola: $-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

FIGURA 11.8.6 Hiperboloide de dos hojas

Variación de las ecuaciones Al intercambiar la posición de las variables en las ecuaciones (2)-(7) no se cambia la naturaleza básica de una superficie, *aunque* cambia la orientación de la superficie en el espacio. Por ejemplo, gráficas de las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{8}$$

siguen siendo hiperboloides de una hoja. De manera similar, los dos signos menos en (7) que caracterizan a los hiperboloides de dos hojas pueden ocurrir en cualquier parte en la ecuación. Similarmente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy \qquad \text{y} \qquad \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx \tag{9}$$

son paraboloides. Las gráficas de ecuaciones de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cy \qquad \text{y} \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cx \tag{10}$$

son paraboloides hiperbólicos.

EJEMPLO 1 Superficies cuádricas

Identifique

a) $y = x^2 + z^2$ y ***b***) $y = x^2 - z^2$.

Compare las gráficas.

Solución De las primeras ecuaciones en (9) y (10) con $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$, identificamos la gráfica de *a*) como un paraboloide y la gráfica de *b*) como un paraboloide hiperbólico. En el caso de la ecuación *a*), un plano $y = y_0$, $y_0 > 0$, corta la superficie en círculos cuyas ecuaciones son $y_0 = x^2 + z^2$. Por otro lado, un plano $y = y_0$ corta la gráfica de la ecuación *b*) en hipérbolas $y_0 = x^2 - z^2$. Las gráficas se comparan en la FIGURA 11.8.7. ■

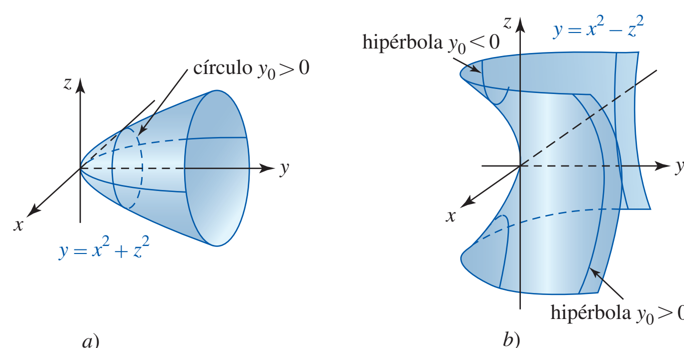


FIGURA 11.8.7 Superficie del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Superficies cuádricas

Identifique

a) $2x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$ y ***b***) $-2x^2 + 4y^2 + z^2 = -36$.

Solución

a) De $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}z^2 = y^2$, se identifica la gráfica de un cono elíptico.

b) De $\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - \frac{1}{36}z^2 = 1$, se identifica la gráfica como un hiperboloide de dos hojas. ■

Origen en (*h, k, l*) Cuando el origen (0, 0, 0) se traslada a (h, k, l), las ecuaciones de las superficies cuádricas se convierten en

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1 \quad \leftarrow \text{elipsoide}$$

$$c(z-l) = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} \quad \leftarrow \text{paraboloide}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1 \quad \leftarrow \text{hiperboloide de una hoja}$$

etcétera. Es posible que usted tenga que completar el cuadrado para poner una ecuación de segundo grado en una de estas formas.

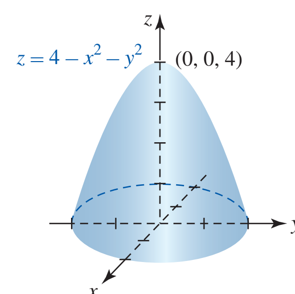


FIGURA 11.8.8 Paraboloide del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Paraboloide

Grafique $z = 4 - x^2 - y^2$.

Solución Al escribir la ecuación como

$$-(z-4) = x^2 + y^2$$

reconocemos la ecuación de un paraboloide. El signo menos enfrente del término en el lado izquierdo de la igualdad indica que la gráfica del paraboloide abre hacia abajo a partir de (0, 0, 4). Vea la FIGURA 11.8.8. ■

Superficies de revolución En las secciones 6.3 y 6.4 vimos que una superficie S podría generarse rotando una curva plana C alrededor de un eje. En la discusión que sigue se encontrarán ecuaciones de **superficies de revolución** cuando C es una curva en un plano de coordenadas y el eje de revolución es un eje de coordenadas.

En aras de la discusión, se va a suponer que $f(y, z) = 0$ es una ecuación de una curva C en el plano yz y que C se rota en torno al eje z de modo que se genera una superficie S. También se supondrá por el momento que las coordenadas y y z de los puntos sobre C son no negativas. Si (x, y, z) denota un punto general sobre S que resulta de rotar el punto $(0, y_0, z)$ en C, entonces se advierte de la FIGURA 11.8.9 que la distancia de (x, y, z) a $(0, 0, z)$ es la misma que la distancia de $(0, y_0, z)$ a $(0, 0, z)$; esto es, $y_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Del hecho de que $f(y_0, z) = 0$ llegamos a una ecuación para S:

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0. \tag{11}$$

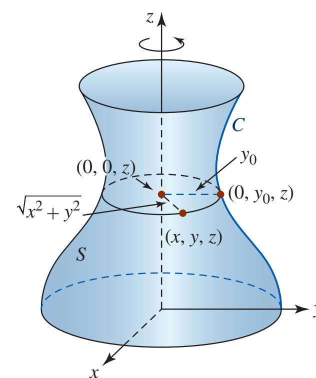


FIGURA 11.8.9 Superficie S de revolución

Es posible, desde luego, que una curva en un plano de coordenadas se rote en torno a cada eje de coordenadas. Si la curva C en el plano yz definida por $f(y, z) = 0$ se rota ahora alrededor del eje y, puede demostrarse que una ecuación de la superficie de revolución resultante es

$$f\left(y, \sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0. \tag{12}$$

Por último, notamos que si hay puntos $(0, y, z)$ sobre C para los cuales las coordenadas y o z son negativas, entonces se sustituye $\sqrt{x^2 + y^2}$ en (11) por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ y $\sqrt{x^2 + z^2}$ en (12) por $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$.

Las ecuaciones de superficies de revolución generadas cuando una curva en el plano xy o xz se rota en torno a un eje de coordenadas son análogas a (11) y (12). Como muestra la siguiente

tabla, una ecuación de una superficie generada al rotar una curva en un plano de coordenadas alrededor de

$$\left.\begin{array}{l} x = \text{eje} \\ y = \text{eje} \\ z = \text{eje} \end{array}\right\} \quad \text{implica el término} \quad \left\{\begin{array}{l} \sqrt{y^2 + z^2} \\ \sqrt{x^2 + z^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2}. \end{array}\right.$$

Ecuación de la curva *C*	**Eje de revolución**	**Ecuación de la superficie *S***
$f(x, y) = 0$	eje x	$f\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$
	eje y	$f\left(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y\right) = 0$
$f(x, z) = 0$	eje x	$f\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$
	eje z	$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$
$f(y, z) = 0$	eje y	$f\left(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0$
	eje z	$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$

EJEMPLO 4 Paraboloide de revolución

a) En el ejemplo 1, la ecuación $y = x^2 + z^2$ puede escribirse como

$$y = \left(\pm\sqrt{x^2 + z^2}\right)^2.$$

En consecuencia, de acuerdo con la tabla anterior se advierte que la superficie se genera al rotar ya sea la parábola $y = x^2$ o la parábola $y = z^2$ en torno al eje y. La superficie que se muestra en la figura 11.8.7*a*) se denomina **paraboloide de revolución**.

b) En el ejemplo 3, la ecuación $-(z - 4) = x^2 + y^2$ puede escribirse como

$$-(z - 4) = \left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2.$$

La superficie es también un paraboloide de revolución. En este caso la superficie se genera al rotar ya sea la parábola $-(z - 4) = x^2$ o la parábola $-(z - 4) = y^2$ alrededor del eje z. ■

EJEMPLO 5 Elipsoide de revolución

La gráfica de $4x^2 + y^2 = 16$ se rota en torno al eje x. Encuentre una ecuación de la superficie de revolución.

Solución La ecuación dada tiene la forma $f(x, y) = 0$. Puesto que el eje de revolución es el eje x, vemos de la tabla que una ecuación de la superficie de revolución puede encontrarse al sustituir y por $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Se concluye que

$$4x^2 + \left(\pm\sqrt{y^2 + z^2}\right)^2 = 16 \qquad \text{o} \qquad 4x^2 + y^2 + z^2 = 16.$$

La superficie se denomina **elipsoide de revolución**. ■

EJEMPLO 6 Cono

La gráfica de $z = y$, $y \geq 0$, se rota en torno al eje z. Encuentre una ecuación de la superficie de revolución.

Solución Puesto que no hay punto sobre la gráfica de $z = y$, $y \geq 0$, con coordenada y negativa, obtenemos una ecuación de la superficie de revolución al sustituir $\sqrt{x^2 + y^2}$ por y:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (13)$$ ■

Observe que (13) no es lo mismo que $z^2 = x^2 + y^2$. Técnicamente la gráfica de (3) es un cono **con dos mantos** o un cono completo; las porciones del cono sobre y debajo del vértice se denominan **mantos**. Si se resuelve (3) para z en términos de x y y, obtenemos ecuaciones de conos de **un manto**. Por ejemplo, al resolver $z^2 = x^2 + y^2$ encontramos que $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y

$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ que son, a su vez, ecuaciones del manto superior y del manto inferior del cono. Así, la gráfica de (13) es el cono de un manto de la FIGURA 11.8.10*a*).

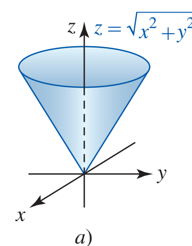


NOTAS DESDE EL AULA

i) La gráfica de $z = xy$ también es un paraboloide hiperbólico. En realidad, es posible demostrar que la superficie $z = xy$ es congruente con el paraboloide hiperbólico $z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ por medio de una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj de los ejes x y y a través de un ángulo de $\pi/4$ radianes en torno al eje z.

ii) El hiperboloide y el paraboloide hiperbólico se encuentran a menudo en la ingeniería arquitectónica. La forma de la torre del puerto de Kobe, Japón, es un hiperboloide de una hoja. Durante años la superficie que se presenta en la FIGURA 11.8.11 se usó en diseños de techos de casas e incluso de gasolineras. El más famoso fue la casa Catalano construida en Raleigh, Carolina del Norte, en 1954. Visite www.trianglemodernisthouses.com/catalano.htm para encontrar fotos detalladas. Por último, si observa con cuidado las papas fritas, especialmente las papas fritas Pringles de tamaño uniforme, advertirá la forma de un paraboloide hiperbólico.

iii) La superficie del espejo de un telescopio reflector se pule para darle forma de un paraboloide de revolución.



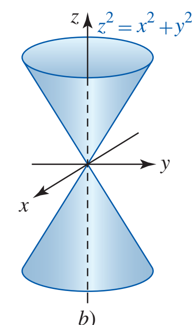


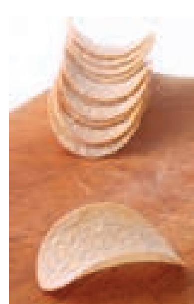
FIGURA 11.8.10 Cono de un solo manto *a*); cono de doble manto en *b*)



Torre del puerto de Kobe, Japón



Casa Catalano, 1954



Papas fritas Pringles



FIGURA 11.8.11 Superficie $z = xy$

Ejercicios 11.8

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-37.

Fundamentos

En los problemas 1-14, identifique y grafique la superficie cuádrica.

1. $x^2 + y^2 = z$
2. $-x^2 + y^2 = z^2$
3. $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$
4. $x^2 + y^2 - z^2 = -4$
5. $36x^2 - y^2 + 9z^2 = 144$
6. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 100$
7. $y^2 + 5z^2 = x^2$
8. $-9x^2 + 16y^2 = 144z$
9. $y = 4x^2 - z^2$
10. $9z + x^2 + y^2 = 0$
11. $x^2 - y^2 - z^2 = 4$
12. $-x^2 + 9y^2 + z^2 = 9$
13. $y^2 + 4z^2 = x$
14. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

En los problema 15-18, grafique la superficie cuádrica.

15. $z = 3 + x^2 + y^2$
16. $y + x^2 + 4z^2 = 4$
17. $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 - z^2 = 1$
18. $5x^2 + (y - 5)^2 + 5z^2 = 25$

En los problemas 19-22, la ecuación indicada es una ecuación de una superficie de revolución obtenida al rotar una curva C en un plano de coordenadas alrededor de un eje de coordenadas. Encuentre una ecuación para C e identifique el eje de revolución.

19. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
20. $-9x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 36$
21. $y = e^{x^2+z^2}$
22. $x^2 - y^2 = \text{sen}^2 z$

En los problemas 23-30, la gráfica de la ecuación dada se rota en torno al eje que se indica. Encuentre una ecuación de la superficie de revolución.

23. $y = 2x$; eje y
24. $y = \sqrt{z}$; eje y
25. $z = 9 - x^2, x \geq 0$; eje x
26. $z = 1 + y^2, y \geq 0$; eje z
27. $x^2 - z^2 = 4$; eje x
28. $3x^2 + 4z^2 = 12$; eje z
29. $z = \ln y$; eje z
30. $xy = 1$; eje x

31. ¿Cuál de las superficies en los problemas 1-14 son superficies de revolución? Identifique los ejes de revolución de cada superficie.

32. Dibuje una gráfica de la ecuación en el problema 22 para $0 \leq z \leq 2\pi$.

En los problemas 33 y 34, compare las gráficas de las ecuaciones dadas.

33. $z + 2 = -\sqrt{x^2 + y^2}$, $(z + 2)^2 = x^2 + y^2$

34. $y - 1 = \sqrt{x^2 + z^2}$, $(y - 1)^2 = x^2 + z^2$

35. Considere el paraboloide

$$z - c = -\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right), \quad c > 0.$$

a) El área de una elipse $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$ es πAB. Emplee este hecho para expresar el área de una sección transversal perpendicular al eje z como una función de z, $z \leq c$.

b) Utilice el método de rebanadas (vea la sección 6.3) para encontrar el volumen del sólido acotado por el paraboloide y el plano xy.

36. ***a***) Utilice el método del rebanadas como en el inciso *b*) del problema 35 para encontrar el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

b) ¿Cuál sería su respuesta en el inciso *a*) si $a = b = c$?

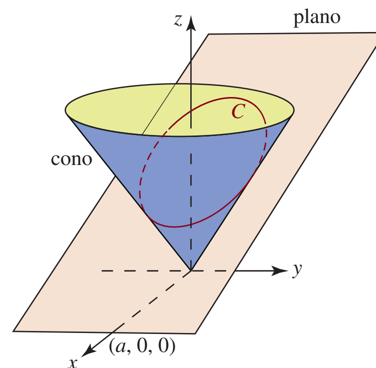
37. Determine los puntos donde la recta

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-6}{3/2}$$

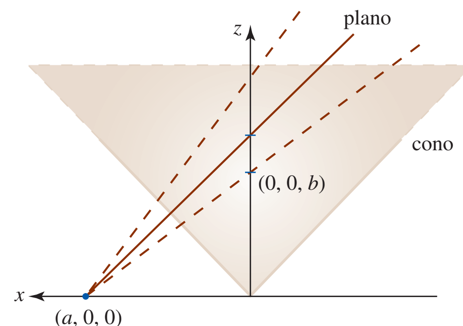
interseca al elipsoide $x^2/9 + y^2/36 + z^2/81 = 1$.

☰ Proyectos

38. Repaso de secciones cónicas En la introducción a la sección 10.1 se definió informalmente una sección cónica (círculo, elipse, parábola e hipérbola) como la curva de intersección de un plano y un cono de doble manto. Con el conocimiento recién adquirido de ecuaciones de planos y conos usted puede demostrar realmente el enunciado anterior. Por simplicidad se considerará un cono de un solo manto con la ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Es bastante sencillo ver que un plano $z = a$, $a > 0$ paralelo al plano xy corta al cono en un círculo. Al sustituir $z = a$ en la ecuación del cono obtenemos, después de simplificar, $x^2 + y^2 = a^2$. Esta última ecuación es un círculo de radio a y es la ecuación de la proyección sobre el plano xy de la curva de intersección del plano con el cono. Suponga ahora un plano definido por $z = b - (b/a)x$ que pasa por el cono como se indica en la FIGURA 11.8.12*a*). Investigue cómo demostrar que la curva C de intersección es ya sea una parábola, una elipse o una hipérbola. Considere casos como los que sugieren las distintas posiciones del plano que se muestra en la figura 11.8.12*b*). Es probable que usted tenga que profundizar un poco respecto a sus ideas iniciales.



a) C yace en el plano de intersección con el cono



b) Vista de la sección transversal

FIGURA 11.8.12 Intersección de planos con un cono de un manto

39. Esferoides

a) Escriba un breve artículo en el que se analice en qué condiciones la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

describe un **esferoide achatado** y un **esferoide prolato**.

b) Relacione estas dos superficies con el concepto de una superficie de revolución.

c) El planeta Tierra es un ejemplo de un esferoide achatado. Compare el radio polar de la Tierra con su radio ecuatorial.

d) Proporcione un ejemplo de un esferoide prolato.

Revisión del capítulo 11

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-38.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-20, indique si el enunciado que se indica es verdadero (V) o falso (F).

1. Los vectores $\langle -4, -6, 10\rangle$ y $\langle -10, -15, 25\rangle$ son paralelos. _____

2. En el espacio tridimensional cualesquiera tres puntos distintos determinan un plano. _____

3. La recta $x = 1 + 5t$, $y = 1 - 2t$, $z = 4 + t$ y el plano $2x + 3y - 4z = 1$ son perpendiculares. _____
4. Los vectores distintos de cero **a** y **b** son paralelos si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. _____
5. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$, el ángulo entre **a** y **b** es obtuso. _____
6. Si **a** es un vector unitario, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$. _____
7. Una recta en el espacio tridimensional puede tener muchas ecuaciones vectoriales diferentes. _____
8. El punto terminal del vector $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ está en el punto terminal de **a**. _____
9. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ _____
10. Si **a**, **b**, **c** y **d** son vectores coplanares distintos de cero, entonces $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{0}$. _____
11. Los planos $x + 2y - z = 5$ y $-2x - 4y + 2z = 1$ son paralelos. _____
12. Dos rectas perpendiculares L_1 y L_2 se intersecan. _____
13. La superficie $z = x^2$ es un cilindro. _____
14. La traza de un elipsoide $x^2/9 + y^2/2 + z^2/2 = 1$ en el plano yz es un círculo. _____
15. Los cuatro puntos (0, 1, 2), (1, −1, 1), (3, 2, 6), (2, 1, 2) yacen en el mismo plano. _____
16. En general, para vectores distintos de cero **a** y **b** en el espacio tridimensional, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a}$. _____
17. La traza de la superficie $x^2 + 9y^2 + z^2 = 1$ en el plano yz es un círculo. _____
18. $x^2 + 9y^2 + z^2 = 1$ es una superficie de revolución. _____
19. Si **a** y **b** son vectores ortogonales distintos de cero, entonces $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. _____
20. Si **a** es un vector distinto de cero y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$, entonces $\mathbf{b} = \mathbf{c}$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-24, llene los espacios en blanco.

1. La suma de $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ es ________.
2. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, los vectores distintos de cero **a** y **b** son ________.
3. $(-\mathbf{k}) \times (5\mathbf{j}) =$ ________
4. $\mathbf{i} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) =$ ________
5. $|-12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}| =$ ________
6. $\mathbf{k} \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) =$ ________
7. $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$ ________
8. $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$ ________
9. Un vector que es normal al plano $-6x + y - 7z + 10 = 0$ es ________.
10. La esfera más grande con centro (4, 3, 7) cuyo interior yace enteramente en el primer octante tiene radio $\mathbf{r} =$ ________.
11. El punto de intersección de la recta $x - 1 = (y + 2)/3 = (z + 1)/2$ y el plano $x + 2y - z = 13$ es ________.
12. Un vector unitario que tiene la dirección opuesta de $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ es ________.
13. Si $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 3, 5, -4 \rangle$ y P_1 tienen coordenadas (2, 1, 7), entonces las coordenadas de P_2 son ________.
14. El punto medio del segmento de recta entre $P_1(4, 3, 10)$ y $P_2(6, -2, -5)$ tiene coordenadas ________.
15. Si $|\mathbf{a}| = 7.2$, $|\mathbf{b}| = 10$ y el ángulo entre **a** y **b** es de 135°, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ ________.
16. Si $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 2, 1 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 0, -2, 2 \rangle$, entonces $\mathbf{a} \cdot (2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}) =$ ________.
17. Las intersecciones con los ejes x, y y z del plano $2x - 3y + 4z = 24$ son, respectivamente, ________.
18. El ángulo θ entre los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ es ________.
19. El área de un triángulo con dos lados dados por $\mathbf{a} = \langle 1, 3, -1 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 2 \rangle$ es ________.
20. Una ecuación de una esfera con centro (−5, 7, −9) y radio $\sqrt{6}$ es ________.
21. La distancia del plano $y = -5$ al punto (4, −3, 1) es ________.
22. Los vectores $\langle 1, 3, c \rangle$ y $\langle -2, -6, 5 \rangle$ son paralelos para $c =$ ________ y ortogonales para $c =$ ________.

23. La superficie $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y - 12z = 0$ es un(a) ________.

24. La traza de la superficie $y = x^2 - z^2$ en el plano $z = 1$ es un(a) ________.

C. Ejercicios

1. Encuentre un vector unitario que sea perpendicular a $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

2. Encuentre los cosenos directores y los ángulos directores del vector $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{4}\mathbf{k}$.

En los problemas 3-6 considere $\mathbf{a} = \langle 1, 2, -2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 4, 3, 0\rangle$. Determine el número o vector indicado.

3. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ **4.** $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ **5.** $\text{proy}_{\mathbf{b}}2\mathbf{a}$ **6.** proyección de $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ortogonal a $\mathbf{b}$

En los problemas 7-12, identifique la superficie cuya ecuación se indica.

7. $x^2 + 4y^2 = 16$ **8.** $y + 2x^2 + 4z^2 = 0$ **9.** $x^2 + 4y^2 - z^2 = -9$

10. $x^2 + y^2 + z^2 = 10z$ **11.** $9z - x^2 + y^2 = 0$ **12.** $2x - 3y = 6$

13. Encuentre una ecuación de la superficie de revolución que se obtiene al rotar la gráfica de $x^2 - y^2 = 1$ alrededor del eje y. Alrededor del eje x. Identifique la superficie en cada caso.

14. Una superficie de revolución tiene una ecuación $y = 1 + \sqrt{x^2 + z^2}$. Encuentre una ecuación de una curva C en un plano de coordenadas que, cuando se rote alrededor de un eje de coordenadas, genere la superficie.

15. Sea $\mathbf{r}$ el vector posición de un punto variable $P(x, y, z)$ en el espacio y sea $\mathbf{a}$ un vector constante. Determine la superficie descrita por las siguientes ecuaciones vectoriales:
a) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0$ ***b***) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0$.

16. Use el producto punto para determinar si los puntos $(4, 2, -2)$, $(2, 4, -3)$ y $(6, 7, -5)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

17. Encuentre ecuaciones simétricas para la recta que pasa por el punto $(7, 3, -5)$ que es paralela a $(x - 3)/4 = (y + 4)/(-2) = (z - 9)/6$.

18. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos $(5, -9, 3)$ que es perpendicular al plano $8x + 3y - 4z = 13$.

19. Demuestre que las rectas $x = 1 - 2t, y = 3t, z = 1 + t$ y $x = 1 + 2s, y = -4 + s, z = -1 + s$ se intersecan y son perpendiculares.

20. Encuentre una ecuación del plano que contiene a los puntos $(0, 0, 0)$, $(2, 3, 1)$, $(1, 0, 2)$.

21. Encuentre una ecuación del plano que contiene a las rectas $x = t, y = 4t, z = -2t$ y $x = 1 + t, y = 1 + 4t, z = 3 - 2t$.

22. Determine una ecuación del plano que contiene a $(1, 7, -1)$ y que es perpendicular a la recta de intersección de $-x + y - 8z = 4$ y $3x - y + 2z = 0$.

23. Encuentre una ecuación del plano que contiene a $(1, -1, 2)$ y que es paralela a los vectores $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$.

24. Encuentre una ecuación de una esfera para la cual el segmento de recta $x = 4 + 2t$, $y = 7 + 3t, z = 8 + 6t, -1 \leq t \leq 0$, es un diámetro.

25. Demuestre que los tres vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ son coplanares.

26. Considere el triángulo recto cuyos lados son los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, y $\mathbf{c}$ mostrados en la FIGURA 11.R.1. Demuestre que el punto medio M de la hipotenusa es equidistante de los tres vértices del triángulo.

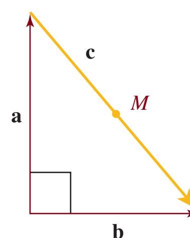


FIGURA 11.R.1 Triángulo del problema 26

27. ***a***) La fuerza **F** que actúa sobre una partícula de carga q que se mueve con velocidad **v** por un campo magnético **B** está dada por $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Encuentre **F** si **v** actúa a lo largo del eje y positivo y **B** actúa a lo largo del eje x positivo. Suponga que $|\mathbf{v}| = v$ y $|\mathbf{B}| = B$.

b) El momento angular **L** de una partícula de masa m que se mueve con velocidad lineal **v** en un círculo de radio **r** está dado por $\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$, donde **r** es perpendicular a **v**. Emplee métodos vectoriales para resolver respecto a **v** en términos de **L**, **r** y m.

28. Una fuerza constante de 10 N en la dirección de $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ mueve un bloque sobre una superficie sin fricción desde $P_1(4, 1, 0)$ hasta $P_2(7, 4, 0)$. Suponga que la distancia se mide en metros. Determine el trabajo realizado.

29. En el problema 28 calcule el trabajo realizado al mover el bloque entre los mismos puntos si otra fuerza constante de 50 N en la dirección de $\mathbf{b} = \mathbf{i}$ actúa simultáneamente con la fuerza original.

30. Una bola uniforme de 50 lb de peso se soporta por medio de dos planos sin fricción como se indica en la FIGURA 11.R.2. Considere que la fuerza ejercida por el plano de soporte S_1 sobre la bola es $\mathbf{F}_1$ y que la fuerza ejercida por el plano S_2 es $\mathbf{F}_2$. Puesto que la bola se mantiene en equilibrio, se debe tener que $\mathbf{w} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{w} = -50\mathbf{j}$. Determine las magnitudes de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. [*Sugerencia*: Suponga que las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son normales a los planos S_1 y S_2, respectivamente, y que actúan a lo largo de las líneas que pasan por el centro C de la bola. Sitúe el origen de un sistema de coordenadas bidimensional en C.]

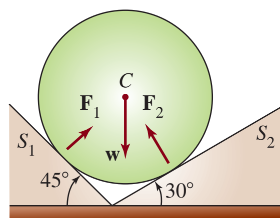
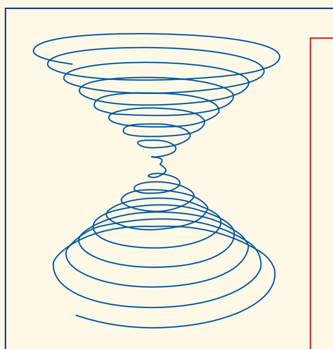


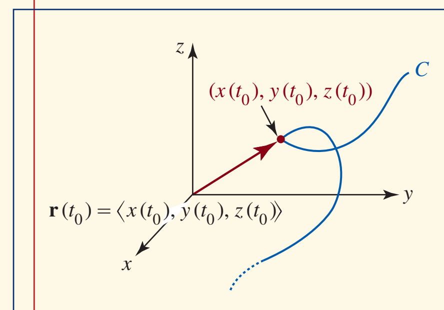
FIGURA 11.R.2 Bola del problema 30

Capítulo 12

Funciones de valores vectoriales







En este capítulo Una curva en el plano así como una curva *C* en el espacio tridimensional pueden definirse mediante ecuaciones paramétricas. Al emplear las funciones como componentes en un conjunto de ecuaciones paramétricas, podemos construir una función de valores vectoriales cuyos valores son los vectores de posición de los puntos sobre la curva *C*. En este capítulo consideraremos el cálculo y las aplicaciones de estas funciones vectoriales.

12.1 Funciones vectoriales

Introducción Vimos en la sección 10.2 que una curva C en el plano xy puede parametrizarse mediante dos ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad a \leq t \leq b. \tag{1}$$

En ciencias e ingeniería muchas veces es conveniente introducir un vector **r** con las funciones f y g como componentes:

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t)\rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}, \tag{2}$$

donde $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$. En esta sección se estudian los análogos de (1) y (2) en tres dimensiones.

Funciones de valores vectoriales Una curva C en el espacio tridimensional, o una **curva espacial**, se parametriza mediante tres ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad a \leq t \leq b. \tag{3}$$

Como en la sección 10.2, la **orientación** de C corresponde a *valores crecientes* del parámetro t. Al emplear las funciones en (3) como componentes, el equivalente en el espacio tridimensional de (2) es

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}, \tag{4}$$

donde $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$. Afirmamos que **r** en (2) y (4) es una **función de valores vectoriales**, o simplemente una **función vectorial**. Como se ilustra en la FIGURA 12.1.1, para un número dado t_0, el vector $\mathbf{r}(t_0)$ es el *vector de posición* de un punto P sobre la curva C. En otras palabras, cuando varía t, podemos visualizar la curva C como si fuera trazada por la punta de flecha móvil de $\mathbf{r}(t)$.

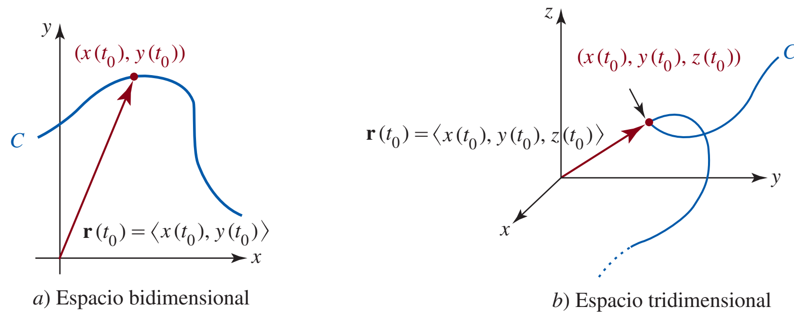


FIGURA 12.1.1 Funciones vectoriales en los espacios bidimensional y tridimensional

Rectas Ya se dio un ejemplo de ecuaciones paramétricas visto como una función vectorial de una curva espacial en la sección 11.5 donde analizamos la recta en el espacio tridimensional. Recuerde, las ecuaciones paramétricas de una recta L que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en el espacio y es paralela a un vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, son

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct, \quad -\infty < t < \infty.$$

Estas ecuaciones resultan del hecho de que los vectores $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ y **v** son paralelos de modo que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es un múltiplo escalar de **v**, esto es, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$. En consecuencia, una función vectorial de la recta L está dada por $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Esta última ecuación se expresa en las formas alternas

$$\mathbf{r}(t) = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct\rangle$$

y

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + at)\mathbf{i} + (y_0 + bt)\mathbf{j} + (z_0 + ct)\mathbf{k}.$$

Si $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1, z_1\rangle$ son los vectores de posición de dos puntos distintos P_0 y P_1, entonces podemos considerar $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\rangle$. Una función vectorial de la recta que pasa por los dos puntos es $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ o

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1. \tag{5}$$

Si el intervalo del parámetro es cerrado $[a, b]$, entonces la función vectorial (5) traza el **segmento de recta** entre los puntos definidos por $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(b)$. En particular, si $0 \le t \le 1$ y $\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$, entonces la orientación es tal que $\mathbf{r}(t)$ traza el segmento de recta del punto P_0 al punto P_1.

EJEMPLO 1 Gráfica de una función vectorial

Encuentre una función vectorial para el segmento de recta del punto $P_0(3, 2, -1)$ al punto P_1 $(1, 4, 5)$.

Solución Los vectores de posición correspondientes a los puntos dados son $\mathbf{r}_0 = \langle 3, 2, -1\rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle 1, 4, 5\rangle$. Entonces, de (5) una función vectorial para el segmento de recta es

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\langle 3, 2, -1\rangle + t\langle 1, 4, 5\rangle$$

o

$$\mathbf{r}(t) = \langle 3 - 2t, 2 + 2t, -1 + 6t\rangle,$$

donde $0 \le t \le 1$. La gráfica de la ecuación vectorial está dada en la FIGURA 12.1.2. ■

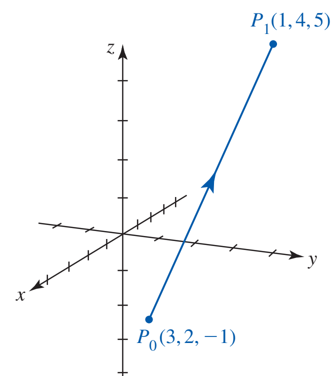


FIGURA 12.1.2 Segmento de recta del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Gráfica de una función vectorial

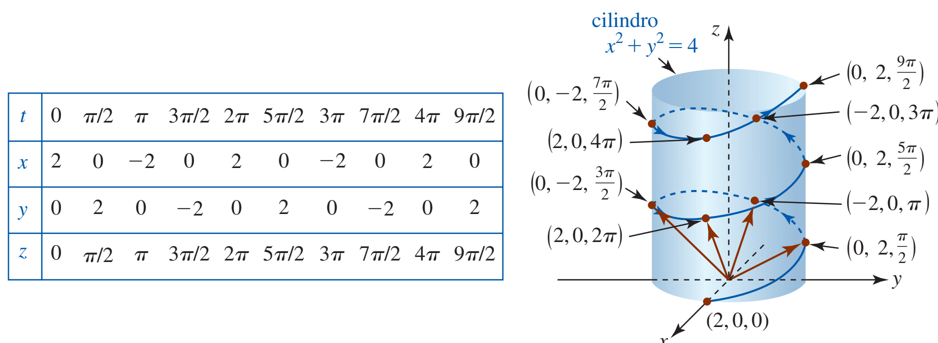
Grafique la curva C trazada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t \ge 0.$$

Solución Las ecuaciones paramétricas de la curva C son $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $z = t$. Al eliminar el parámetro t de las primeras dos ecuaciones,

$$x^2 + y^2 = (2\cos t)^2 + (2\,\text{sen}\,t)^2 = 2^2,$$

notamos que un punto sobre la curva está en el cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$. Como se puede ver en la FIGURA 12.1.3 y la tabla adjunta a la misma, cuando aumenta el valor de t, la curva se enrolla hacia arriba en una espiral cilíndrica o una hélice circular.



t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π	$9\pi/2$
x	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0
y	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2
z	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π	$9\pi/2$

FIGURA 12.1.3 Gráfica de la función vectorial del ejemplo 2 ■

Curvas helicoidales La curva en el ejemplo 2 es una de tipos de curvas espaciales conocidas como **curvas helicoidales**. En general, una función vectorial de la forma

$$\mathbf{r}(t) = a\cos kt\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,kt\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k} \tag{6}$$

describe una **hélice circular**. El número $2\pi c/k$ recibe el nombre de **horquilla** de una hélice. Una hélice circular es sólo un caso especial de la función vectorial

La hélice definida por (6) se enrolla hacia arriba a lo largo del eje z. La horquilla es la separación vertical de los lazos de la hélice.

$$\mathbf{r}(t) = a\cos kt\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\,kt\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k}, \tag{7}$$

que describe una **hélice elíptica** cuando $a \ne b$. La curva definida por

$$\mathbf{r}(t) = at\cos kt\,\mathbf{i} + bt\,\text{sen}\,kt\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k} \tag{8}$$

se denomina **hélice cónica**. Por último, una curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = a\,\text{sen}\,kt\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,kt\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + a\cos kt\,\mathbf{k} \tag{9}$$

se llama **hélice esférica**. En (6)-(9) se supone que a, b, c y k son constantes positivas.

EJEMPLO 3 Curvas helicoidales

a) Si intercambiamos, por ejemplo, las componentes y y z de la función vectorial (7), obtenemos una hélice elíptica que se enrolla lateralmente a lo largo del eje y. Por ejemplo, con la ayuda de un SAC, la gráfica de la hélice elíptica

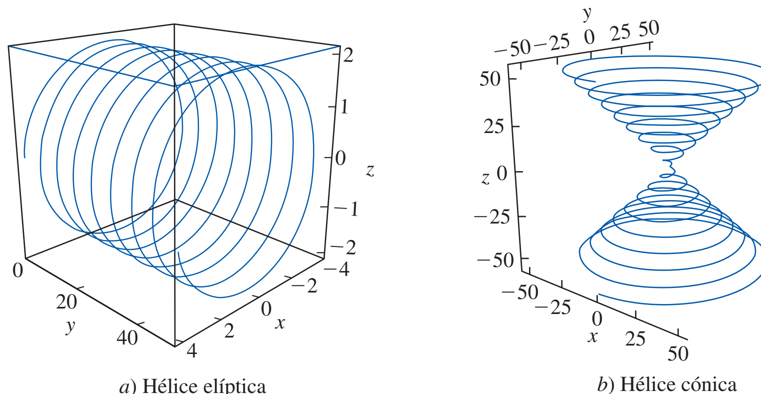
$$\mathbf{r}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{k}$$

se muestra en la FIGURA 12.1.4*a*).

b) La figura 12.1.4*b*) muestra la gráfica de

$$\mathbf{r}(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

e ilustra por qué una función vectorial de la forma dada en (8) define a una hélice cónica. Para mayor claridad, se ha decidido suprimir la caja que por omisión rodea a la salida 3D de *Mathematica*.



a) Hélice elíptica

b) Hélice cónica

FIGURA 12.1.4 Curvas helicoidales del ejemplo 3 ■

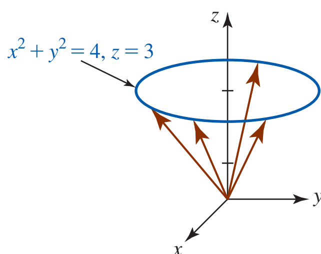


FIGURA 12.1.5 Círculo en un plano en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Gráfica de una función vectorial

Grafique la curva trazada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Solución Las ecuaciones paramétricas de la curva son las componentes de la función vectorial $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $z = 3$. Como en el ejemplo 1, observamos que un punto sobre la curva debe estar sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 4$. Sin embargo, puesto que la coordenada z de cualquier punto tiene el valor constante $z = 3$, la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ traza una circunferencia en el plano 3 unidades arriba y paralelo al plano xy. Vea la FIGURA 12.1.5. ■

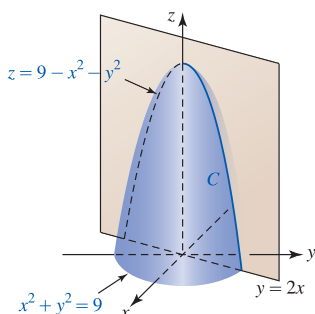


FIGURA 12.1.6 Curva C de intersección del ejemplo 5

EJEMPLO 5 Curva de intersección de dos superficies

Determine la función vectorial que describe la curva C de intersección del plano $y = 2x$ y el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$.

Solución Primero parametrizamos la curva C de intersección haciendo $x = t$. Se deduce que $y = 2t$ y $z = 9 - t^2 - (2t)^2 = 9 - 5t^2$. De acuerdo con las ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = 2t, \quad z = 9 - 5t^2, \quad -\infty < t < \infty,$$

vemos que una función vectorial que describe el trazo del paraboloide en el plano $y = 2x$ está dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (9 - 5t^2)\mathbf{k}.$$

Vea la FIGURA 12.1.6. ■

EJEMPLO 6 Curva de intersección de dos cilindros

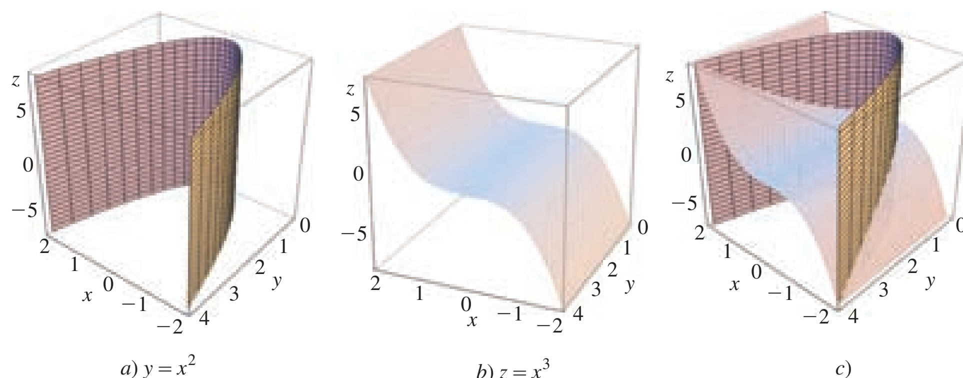
Encuentre la función vectorial que describe la curva C de intersección de los cilindros $y = x^2$ y $z = x^3$.

Solución En el espacio bidimensional, la gráfica de $y = x^2$ es una parábola en el plano xy y por tanto en el espacio tridimensional es un cilindro parabólico cuya generatriz es perpendicular al

plano xy, esto es, paralela al eje z. Vea la FIGURA 12.1.7*a*). Por otro lado, $z = x^3$ puede interpretarse como un cilindro cúbico cuya generatriz es perpendicular al plano xz, esto es, paralelo al eje y. Vea la figura 12.1.7*b*). Como en el ejemplo 5, si se deja $x = t$, entonces $y = t^2$ y $z = t^3$. Una función vectorial que describe a la curva C de intersección de los dos cilindros es entonces

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \qquad (10)$$

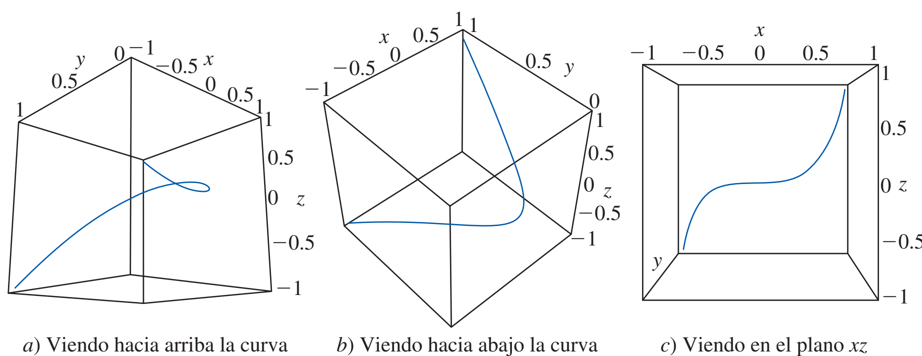
donde $-\infty < t < \infty$.



a) $y = x^2$ *b*) $z = x^3$ *c*)

FIGURA 12.1.7 *a*) y *b*) dos cilindros; *c*) curva C de intersección en el ejemplo 6

La curva C definida por la función vectorial (10) recibe el nombre de **cúbica trenzada**. Con la ayuda de un SAC se ha graficado $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ en la FIGURA 12.1.8. Las partes *a*) y *b*) de la figura muestran dos perspectivas, o puntos de vista, distintas de la curva C de intersección de los cilindros $y = x^2$ y $z = x^3$. En la figura 12.1.8*c*) observamos la naturaleza cúbica de C utilizando una vista en dirección al plano xz. La cúbica trenzada tiene varias propiedades de interés para los matemáticos y por ello se estudia frecuentemente en cursos avanzados de geometría algebraica.



a) Viendo hacia arriba la curva *b*) Viendo hacia abajo la curva *c*) Viendo en el plano xz

FIGURA 12.1.8 Cúbico trenzado del ejemplo 6

Ejercicios 12.1 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-38.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-4, encuentre el dominio de la función vectorial dada.

1. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t^2 - 9}\,\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$
2. $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + \ln(1 - t^2)\mathbf{j}$
3. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} - \operatorname{sen}^{-1} t\mathbf{k}$
4. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \operatorname{sen} 2t\mathbf{k}$

En los problemas 5-8, escriba las ecuaciones paramétricas dadas como una función vectorial $\mathbf{r}(t)$.

5. $x = \operatorname{sen} \pi t,\ y = \cos \pi t,\ z = -\cos^2 \pi t$
6. $x = \cos^2 t,\ y = 2\operatorname{sen}^2 t,\ z = t^2$
7. $x = e^{-t},\ y = e^{2t},\ z = e^{3t}$
8. $x = -16t^2,\ y = 50t,\ z = 10$

En los problemas 9-12, escriba la función vectorial dada $\mathbf{r}(t)$ como ecuaciones paramétricas.

9. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$

10. $\mathbf{r}(t) = t \operatorname{sen} t(\mathbf{i} + \mathbf{k})$

11. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = 5 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 3t\mathbf{i} + 5\cos 3t\mathbf{j} + 5\cos t \operatorname{sen} 3t\mathbf{k}$

En los problemas 13-22, grafique la curva trazada por la función vectorial que se indica.

13. $\mathbf{r}(t) = 2\operatorname{sen} t\mathbf{i} + 4\cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t \geq 0$

14. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\mathbf{k}, \quad t \geq 0$

15. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}, \quad t \geq 0$

16. $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{k}$

17. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{2t} \rangle$

18. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + 3\operatorname{senh} t\mathbf{j}$

19. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sqrt{2}\operatorname{sen} t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, 2\cos t \right\rangle, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

20. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

21. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\mathbf{i} + e^t\operatorname{sen} t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$

22. $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t, t\operatorname{sen} t, t^2 \rangle$

En los problemas 23 y 24, grafique la recta cuya función vectorial se indica.

23. $\mathbf{r}(t) = (4 - 4t)\mathbf{i} + (2 - 2t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

24. $\mathbf{r}(t) = (2 + 3t)\mathbf{i} + (3 + 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$

25. Encuentre una función vectorial para el segmento de recta en el espacio bidimensional con orientación tal que $\mathbf{r}(t)$ traza la recta desde el punto (4, 0) hasta el (0, 3). Dibuje el segmento de recta.

26. Determine una función vectorial para el segmento de recta en el espacio tridimensional con orientación tal que $\mathbf{r}(t)$ traza la recta desde el punto (1, 1, 1) hasta (0, 0, 0). Dibuje el segmento de recta.

En los problemas 27-32, encuentre la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ que describe la curva C de intersección entre las superficies dadas. Dibuje la curva C. Emplee el parámetro indicado.

27. $z = x^2 + y^2, y = x; \quad x = t$

28. $x^2 + y^2 - z^2 = 1, y = 2x; \quad x = t$

29. $x^2 + y^2 = 9, z = 9 - x^2; \quad x = 3\cos t$

30. $z = x^2 + y^2, z = 1; \quad x = \operatorname{sen} t$

31. $x + y + z = 1, y = x; \quad x = t$

32. $3x - 2y + z = 6, x = 1; \quad y = t$

En los problemas 33-36, asocie la gráfica indicada con una de las funciones vectoriales en *a*)-*d*).

***a*)** $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cos 3t\mathbf{j} + \operatorname{sen} 3t\mathbf{k}$

***b*)** $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} 6t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

***c*)** $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + (1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$

***d*)** $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 t\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

33.

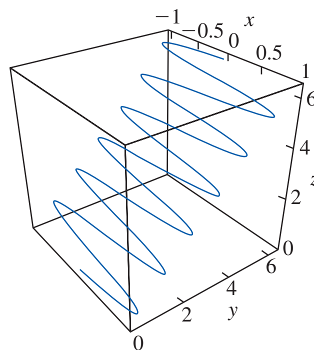


FIGURA 12.1.9 Gráfica del problema 33

34.

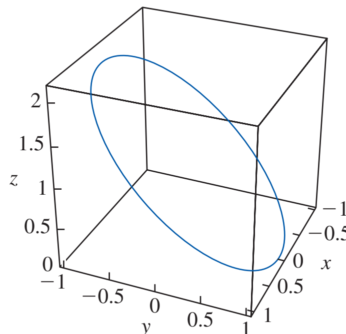


FIGURA 12.1.10 Gráfica del problema 34

35.

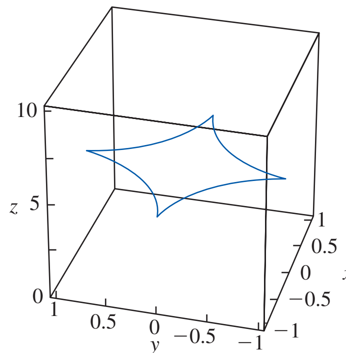


FIGURA 12.1.11 Gráfica del problema 35

36.

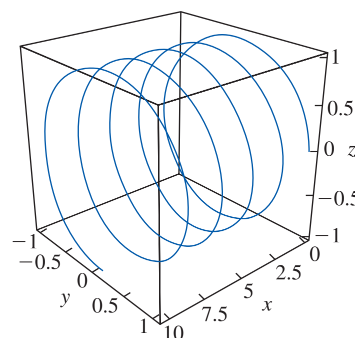


FIGURA 12.1.12 Gráfica del problema 36

37. Demuestre que los puntos sobre una hélice cónica

$$\mathbf{r}(t) = at\cos t\mathbf{i} + bt\operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k},$$

$a > 0, b > 0, c > 0$, yacen sobre un cono elíptico cuya ecuación es

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

38. Una variación de la hélice cónica del problema 37 está dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\cos t\mathbf{j} + t\,\text{sen}\,t\mathbf{k}.$$

a) antes de graficar $\mathbf{r}(t)$ analice la orientación de la curva.

b) Utilice un SAC para graficar $\mathbf{r}(t)$. Experimente con el intervalo del parámetro y el punto de vista de la curva.

39. La función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = ae^{kt}\cos t\mathbf{i} + be^{kt}\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + ce^{kt}\mathbf{k},$$

$a > 0, b > 0, c > 0, k > 0$ describe también a una hélice cónica. Demuestre que los puntos sobre esta hélice cónica yacen sobre un cono elíptico cuya ecuación está dada en el problema 37.

40. Un caso especial de la curva en el problema 39 está dado por

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}e^{0.05t}\cos t\mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{0.05t}\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + e^{0.05t}\mathbf{k}.$$

a) Emplee un SAC para graficar $\mathbf{r}(t)$ en relación con $-30 \le t \le 30$.

b) Reexamine la figura 12.1.4*b*). Luego discuta la diferencia geométrica básica entre la hélice cónica en el problema 37 y la que se da en el problema 39.

41. Demuestre que los puntos sobre una hélice esférica

$$\mathbf{r}(t) = a\,\text{sen}\,kt\cos t\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,kt\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + a\cos kt\mathbf{k}$$

yacen sobre una esfera de radio $a > 0$.

42. Un caso especial de la curva en el problema 41 está dado por

$$\mathbf{r}(t) = \text{sen}\,kt\cos t\mathbf{i} + \text{sen}\,kt\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + \cos kt\mathbf{k}.$$

Utilice un SAC para graficar $\mathbf{r}(t)$ respecto a $k = 1, 2, 3, 4, 10, 20$ y $0 \le t \le 2\pi$. Experimente con diferentes perspectivas de las gráficas.

43. ***a***) Use un SAC para superponer las gráficas de los cilindros $z = 4 - x^2$ y $z = 4 - y^2$ sobre los mismos ejes de coordenadas.

b) Encuentre funciones vectoriales que describan las dos curvas de intersección de los cilindros.

c) Emplee un SAC para dibujar ambas curvas en el inciso *b*). Superponga las curvas sobre los mismos ejes de coordenadas. Experimente con la perspectiva hasta que la visualización de las gráficas tenga sentido.

44. Suponga que $\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial no constante que define a una curva C con la propiedad $|\mathbf{r}(t)| = a$, donde $a > 0$ es una constante. Describa geométricamente a la curva C.

≡ Problemas con calculadora/SAC

45. Use un SAC para graficar la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (10 + \text{sen}\,20t)\cos t\mathbf{i} + (10 + \text{sen}\,20t)\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + \cos 2t\mathbf{k}$$

para $0 \le t \le 2\pi$. Experimente con diferentes perspectivas de la gráfica. Discuta por qué la curva se denomina una **espiral toroidal**.

46. Utilice un SAC para graficar la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \cos(\arctan kt)\cos t\mathbf{i} + \cos(\arctan kt)\text{sen}\,t\mathbf{j} - \text{sen}(\arctan kt)\mathbf{k}$$

para $-10\pi \le t \le 10\pi$ y $k = 0.1, 0.2, 03$. Experimente con diferentes perspectivas de la gráfica. La curva se conoce como **espiral esférica**.

En los problemas 47 y 48, emplee un SAC para graficar la función vectorial dada relativa a los valores indicados de k. Experimente con diferentes perspectivas de la gráfica.

47. $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\,kt\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + \text{sen}\,kt\cos t\mathbf{j} + \text{sen}\,t\mathbf{k}; \quad k = 2, 4$

48. $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\,t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \ln(kt)\text{sen}\,t\mathbf{k}; \quad k = \frac{1}{10}, 1$

12.2 Cálculo de funciones vectoriales

Introducción En esta sección consideraremos el cálculo de funciones de valores vectoriales, en otras palabras, límites, derivadas e integrales de función vectorial. Como los conceptos son similares a los que se discutieron en la sección 10.3, se recomienda un repaso de esa sección.

Límites y continuidad La noción fundamental de **límite** de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ se define en términos de los límites de las funciones componentes.

Definición 12.2.1 Límite de una función vectorial

Si $\lim_{t\to a} f(t)$, $\lim_{t\to a} g(t)$ y $\lim_{t\to a} h(t)$ existe, entonces

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t)\right\rangle. \quad (1)$$

El símbolo $t \to a$ en la definición 12.2.1 puede, desde luego, sustituirse por $t \to a^+$, $t \to a^-$, $t \to \infty$, o $t \to -\infty$.

Como una consecuencia inmediata de la definición 12.2.1, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 12.2.1 Propiedades de los límites

Suponga que a es un número real y $\lim_{t \to a} \mathbf{r}_1(t)$ y $\lim_{t \to a} \mathbf{r}_2(t)$ existe. Si $\lim_{t \to a} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{L}_1$ y $\lim_{t \to a} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{L}_2$, entonces

i) $\lim_{t \to a} c\mathbf{r}_1(t) = c\mathbf{L}_1$, c un escalar

ii) $\lim_{t \to a} [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$

iii) $\lim_{t \to a} \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2$.

Definición 12.2.2 Continuidad

Una función vectorial $\mathbf{r}$ es **continua** en el número a si

i) $\mathbf{r}(a)$ es definido, *ii)* $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t)$ existe y *iii)* $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$.

Equivalentemente la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ es continua en un número a si y sólo si las funciones componentes f, g y h son continuas en a. Por brevedad, a menudo afirmamos que una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es continua en un número a si

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a). \tag{2}$$

Escribiendo (2) se supone que las condiciones *i)* y *ii)* de la definición 12.2.2 se cumplen en un número a.

Derivada de una función vectorial La definición de derivada $\mathbf{r}'(t)$ de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es el equivalente vectorial de la definición 3.1.1. En la siguiente definición se asume que h representa a un número real distinto de cero.

Definición 12.2.3 Derivada de una función vectorial

La **derivada** de una función vectorial $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \tag{3}$$

para toda t para la cual existe el límite.

La derivada de $\mathbf{r}$ también se escribe $d\mathbf{r}/dt$. El siguiente teorema muestra que en un nivel práctico, se obtiene la derivada de una función vectorial diferenciando simplemente sus funciones componentes.

Teorema 12.2.2 Diferenciación

Si las funciones componentes f, g y h son diferenciables, entonces la derivada de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ está dada por

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle. \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN De (3) tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\langle f(t+h), g(t+h), h(t+h)\rangle - \langle f(t), g(t), h(t)\rangle]\\ &= \lim_{h\to 0}\left\langle \frac{f(t+h)-f(t)}{h}, \frac{g(t+h)-g(t)}{h}, \frac{h(t+h)-h(t)}{h}\right\rangle\\ &= \left\langle \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}, \lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}, \lim_{h\to 0}\frac{h(t+h)-h(t)}{h}\right\rangle\\ &= \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle.\end{aligned}$$
■

Curvas suaves Cuando las funciones componentes de una función vectorial **r** tienen primeras derivadas continuas y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para toda t en un intervalo abierto (a, b), entonces **r** se dice que es una **función suave** y la curva C trazada por **r** se denomina **curva suave**.

Interpretación geométrica de r′(t) Si el vector $\mathbf{r}'(t)$ existe y no es **0** en el punto P sobre la curva C definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, entonces la derivada $\mathbf{r}'(t)$ se define como el **vector tangente** a la curva en P. La justificación de lo anterior es similar a la discusión que llevó a la definición 2.7.1 en la sección 2.7. Como puede verse en las FIGURAS 12.2.1*a*) y *b*), para $h > 0$ el vector $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ y el múltiplo escalar

$$\frac{1}{h}[\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)] = \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

son paralelos. Suponiendo que el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

existe, entonces los vectores $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t+h)$ se vuelven cada vez más cercanos cuando $h \to 0$. Como sugieren las figuras 12.2.1*b*) y *c*), la posición límite del vector $[\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)]/h$ es un vector sobre la recta tangente en P. También definimos la **recta tangente** como la recta que pasa por P que es paralela al vector $\mathbf{r}'(t)$.

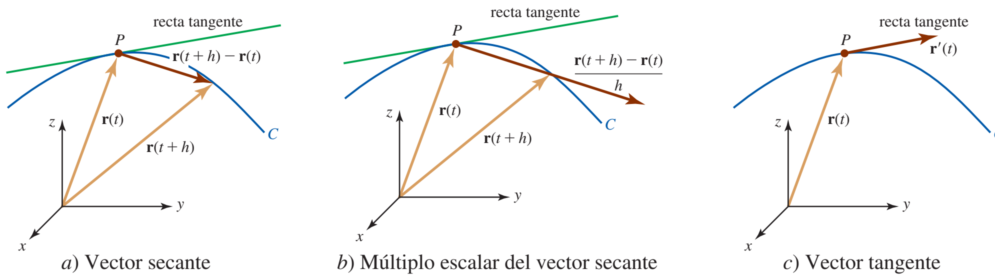


FIGURA 12.2.1 Vector tangente en P sobre una curva C

EJEMPLO 1 El vector $\mathbf{r}'(t)$

Considere la curva C en el espacio bidimensional que es trazada por un punto P cuya posición está dada por $\mathbf{r}(t) = \cos 2t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Encuentre la derivada $\mathbf{r}'(t)$ y grafique los vectores $\mathbf{r}'(0)$ y $\mathbf{r}'(\pi/6)$.

Solución La curva C es suave debido a que las funciones componentes de $\mathbf{r}(t) = \cos 2t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$ tienen derivadas continuas y $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$ sobre el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$. De (4),

$$\mathbf{r}'(t) = -2\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}.$$

En consecuencia, $\quad \mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} \quad$ y $\quad \mathbf{r}'(\pi/6) = -\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}.$

Para graficar C primero eliminamos el parámetro de las ecuaciones paramétricas $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} t$:

$$x = \cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t = 1 - 2y^2.$$

Puesto que $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$, advertimos que la curva C es la porción de la parábola $x = 1 - 2y^2$ sobre el intervalo definido por $-1 \leq x \leq 1$. Los vectores $\mathbf{r}'(0)$ y $\mathbf{r}'(\pi/6)$ se dibujan tangentes a la curva C en $(1, 0)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, respectivamente. Vea la FIGURA 12.2.2. ■

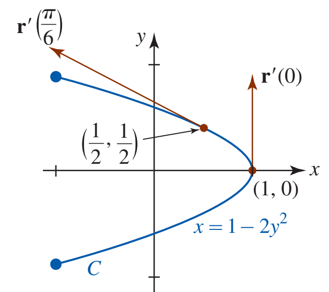


FIGURA 12.2.2 Curva C y vectores del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Ecuaciones paramétricas

Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^2$, $y = t^2 - t$, $z = -7t$ en el punto correspondiente a $t = 3$.

Solución La función vectorial que produce la posición de un punto P sobre la curva está dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j} - 7t\mathbf{k}$. Ahora,

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} - 7\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'(3) = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

El vector $\mathbf{r}'(3)$ es tangente a C en el punto P cuyo vector de posición es

$$\mathbf{r}(3) = 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 21\mathbf{k},$$

esto es, en el punto $P(9, 6, -21)$. Al emplear las componentes de $\mathbf{r}'(3)$, advertimos que las ecuaciones paramétricas de la recta tangente son

$$x = 9 + 6t, \; y = 6 + 5t, \; z = -21 - 7t.$$ ■

Derivadas de orden superior Las derivadas de orden superior de una función vectorial se obtienen también diferenciando sus componentes. En el caso de la **segunda derivada**, tenemos

$$\mathbf{r}''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t)\rangle = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}. \tag{5}$$

EJEMPLO 3 Vectores $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$

Si $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 2t^2)\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = (3t^2 - 4t)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}''(t) = (6t - 4)\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{k}.$$ ■

En el siguiente teorema se enlistan algunas reglas de diferenciación para funciones vectoriales.

Teorema 12.2.3 Reglas de diferenciación

Considere que $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son funciones vectoriales diferenciables y $f(t)$ es una función escalar diferenciable.

i) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t)$

ii) $\dfrac{d}{dt}[f(t)\mathbf{r}(t)] = f(t)\mathbf{r}'(t) + f'(t)\mathbf{r}(t)$

iii) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(f(t))] = \mathbf{r}'(f(t))f'(t)$ (regla de la cadena)

iv) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$

v) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2(t)$

DEMOSTRACIÓN DE *iv*) Si $\mathbf{r}_1(t) = \langle f_1(t), g_1(t), h_1(t)\rangle$ y $\mathbf{r}_2(t) = \langle f_2(t), g_2(t), h_2(t)\rangle$, entonces por (2) de la sección 11.3 el producto punto es la función escalar

$$\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = f_1(t)f_2(t) + g_1(t)g_2(t) + h_1(t)h_2(t).$$

Después de usar la regla del producto agrupamos los términos en rojo y los términos que se muestran en azul:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) &= \frac{d}{dt}f_1(t)f_2(t) + \frac{d}{dt}g_1(t)g_2(t) + \frac{d}{dt}h_1(t)h_2(t)\\ &= f_1(t)f_2'(t) + f_1'(t)f_2(t) + g_1(t)g_2'(t) + g_1'(t)g_2(t) + h_1(t)h_2'(t) + h_1'(t)h_2(t)\\ &= \langle f_1(t), g_1(t), h_1(t)\rangle \cdot \langle f_2'(t), g_2'(t), h_2'(t)\rangle + \langle f_1'(t), g_1'(t), h_1'(t)\rangle \cdot \langle f_2(t), g_2(t), h_2(t)\rangle\\ &= \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t).\end{aligned}$$ ■

Nota: Puesto que el producto cruz de dos vectores no es conmutativo, el orden en el cual $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ aparecen en la parte *v*) del teorema 12.2.3 debe observarse estrictamente. Desde luego, en *iv*) y *v*) podemos efectuar el producto punto y el producto cruz primero y después diferenciar el escalar o la función vectorial resultantes.

Integrales de funciones vectoriales Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es una función vectorial continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces la integral indefinida de $\mathbf{r}$ está definida por

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \left[\int f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int h(t)\,dt\right]\mathbf{k}.$$

La integral indefinida de $\mathbf{r}$ es otro vector $\mathbf{R} + \mathbf{C}$, donde $\mathbf{C}$ es un *vector constante*, tal que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Debido a la continuidad de las funciones componentes f, g y h, la integral definida de $\mathbf{r}(t)$ sobre $[a, b]$ puede definirse como

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathbf{r}(t)dt &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}(t_k^*)\Delta t\\ &= \left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)\Delta t\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(t_k^*)\Delta t\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} h(t_k^*)\Delta t\right]\mathbf{k}.\end{aligned}$$

En otras palabras,

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \left[\int_a^b f(t)dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t)dt\right]\mathbf{k}.$$

El teorema fundamental del cálculo, extendido a funciones vectoriales, es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a),$$

donde $\mathbf{R}$ es una función vectorial tal que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$.

EJEMPLO 4 Integrales

a) Si $\mathbf{r}(t) = 6t^2\mathbf{i} + 4e^{-2t}\mathbf{j} + 8\cos 4t\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned}\int \mathbf{r}(t)dt &= \left[\int 6t^2dt\right]\mathbf{i} + \left[\int 4e^{-2t}dt\right]\mathbf{j} + \left[\int 8\cos 4t\,dt\right]\mathbf{k}\\ &= [2t^3 + c_1]\mathbf{i} + [-2e^{-2t} + c_2]\mathbf{j} + [2\,\mathrm{sen}\,4t + c_3]\mathbf{k}\\ &= 2t^3\mathbf{i} - 2e^{-2t}\mathbf{j} + 2\,\mathrm{sen}\,4t\,\mathbf{k} + \mathbf{C},\end{aligned}$$

donde $\mathbf{C} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Las componentes c_1, c_2 y c_3 del último vector son constantes reales arbitrarias.

b) Si $\mathbf{r}(t) = (4t - 3)\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{j} + \dfrac{2}{1 + t^2}\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathbf{r}(t)dt &= (2t^2 - 3t)\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + 2\tan^{-1} t\mathbf{k}\Big]_{-1}^{1}\\ &= \left(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\cdot\frac{\pi}{4}\mathbf{k}\right) - \left(5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\cdot\frac{\pi}{4}\mathbf{k}\right)\\ &= -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \pi\mathbf{k}.\end{aligned}$$

■

Longitud de una curva espacial En la sección 10.3 vimos que la fórmula de la longitud de arco para una curva suave C en el espacio bidimensional definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

De manera similar, si C es una curva suave en el espacio tridimensional definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t),\quad y = g(t),\quad z = h(t),\quad a \le t \le b,$$

entonces como hicimos en la sección 10.3 podemos construir una integral definida utilizando una trayectoria poligonal, como se ilustra en la FIGURA 12.2.3, para llegar a la integral definida

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \qquad (6)$$

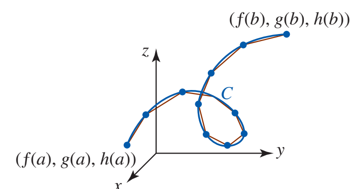


FIGURA 12.2.3 Aproximación de la longitud de C (azul) por medio de la longitud de una trayectoria poligonal (rojo)

que define la **longitud** L de la curva entre los puntos $(f(a), g(a), h(a))$ y $(f(b), g(b), h(b))$. Si la curva C se traza por medio de una función suave de valores vectoriales $\mathbf{r}(t)$, entonces su longitud entre el punto inicial en $t = a$ y el punto terminal en $t = b$ puede expresarse en términos de la magnitud de $\mathbf{r}'(t)$:

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt. \tag{7}$$

En (7), $|\mathbf{r}'(t)|$ es

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \qquad \text{o} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$

dependiendo de si C está en el espacio bidimensional o tridimensional, respectivamente.

Función de la longitud de arco La integral definida

Revise (5) en la sección 6.5.

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\,du \tag{8}$$

se llama la **función de longitud de arco** para la curva C. En (8) el símbolo u es una variable de integración sustituta. La función $s(t)$ representa la longitud de C entre los puntos sobre la curva definida por los vectores de posición $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(t)$. Muchas veces es útil parametrizar una curva suave C en el plano o en el espacio en términos de la longitud de arco s. Al evaluar (8) se expresa s como una función del parámetro t. Si podemos resolver esa ecuación para t en términos de s, entonces es factible expresar $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t)\rangle$ o $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ como

$$\mathbf{r}(s) = \langle x(s), y(s)\rangle \qquad \text{o} \qquad \mathbf{r}(s) = \langle x(s), y(s), z(s)\rangle.$$

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento para determinar una **parametrización de longitud de arco** $\mathbf{r}(s)$ para una curva C.

EJEMPLO 5 Una parametrización de longitud de arco

Encuentre una parametrización de longitud de arco de la hélice circular del ejemplo 2 de la sección 12.1:

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}.$$

Solución De $\mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ se encuentra $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{5}$. Se deduce de (8) que la longitud de la curva empezando en $\mathbf{r}(0)$ hasta un punto arbitrario definido por $\mathbf{r}(t)$ es

$$s = \int_0^t \sqrt{5}\,du = \sqrt{5}u\Big]_0^t = \sqrt{5}t.$$

Al resolver $s = \sqrt{5}t$ para t se encuentra que $t = s/\sqrt{5}$. Al sustituir respecto a t en $\mathbf{r}(t)$ obtenemos una función vectorial de la hélice como una función de la longitud de arco:

$$\mathbf{r}(s) = 2\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{k}. \tag{9}$$

Las ecuaciones paramétricas de la hélice son entonces

$$x = 2\cos\frac{s}{\sqrt{5}}, \quad y = 2\,\text{sen}\frac{s}{\sqrt{5}}, \quad z = \frac{s}{\sqrt{5}}.$$

■

Advierta que la derivada de la función vectorial (9) respecto a la longitud de arco s es

Es particularmente fácil encontrar una parametrización de longitud de arco de una recta $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Vea el problema 49 en los ejercicios 12.2.

$$\mathbf{r}'(s) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\,\text{sen}\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

y su magnitud es

$$|\mathbf{r}'(s)| = \sqrt{\frac{4}{5}\,\text{sen}^2\frac{s}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5}\cos^2\frac{s}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1.$$

El hecho de que $|\mathbf{r}'(s)| = 1$ indica que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario. Esto no es coincidencia. Como hemos visto, la derivada de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ con respecto al parámetro t es un vector

tangente a la curva C trazada por $\mathbf{r}$. Sin embargo, si la curva C se parametriza en términos de la longitud de arco s, entonces:

- La derivada $\mathbf{r}'(s)$ es un vector tangente unitario. (10)

Para ver por qué esto es así, recuerde que la forma de la derivada del teorema fundamental del cálculo, teorema 5.5.2, muestra que la derivada de (8) con respecto a t es

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|. \tag{11}$$

Sin embargo, si la curva C es descrita por una parametrización de longitud de arco $\mathbf{r}(s)$, entonces (8) muestra que la longitud s de la curva de $\mathbf{r}(0)$ a $\mathbf{r}(s)$ es

$$s = \int_0^s |\mathbf{r}'(u)|\,du. \tag{12}$$

Como $\frac{d}{ds}s = 1$, la derivada de (12) con respecto a s es

$$\frac{d}{ds}s = |\mathbf{r}'(s)| \qquad \text{o} \qquad |\mathbf{r}'(s)| = 1.$$

En la siguiente sección veremos por qué (10) es importante.

Ejercicios 12.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-39.

Fundamentos

En los problemas 1-4, evalúe el límite dado o enuncie que éste no existe.

1. $\lim_{t\to 2} [t^3\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + t^5\mathbf{k}]$
2. $\lim_{t\to 0^+} \left[\frac{\text{sen } 2t}{t}\mathbf{i} + (t-2)^5\mathbf{j} + t\ln t\,\mathbf{k}\right]$
3. $\lim_{t\to 1} \left\langle \frac{t^2-1}{t-1}, \frac{5t-1}{t+1}, \frac{2e^{t-1}-2}{t-1} \right\rangle$
4. $\lim_{t\to\infty} \left\langle \frac{e^{2t}}{2e^{2t}+t}, \frac{e^{-t}}{2e^{-t}+5}, \tan^{-1} t \right\rangle$

En los problemas 5 y 6, suponga que

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to a} \mathbf{r}_2(t) = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

Encuentre el límite dado.

5. $\lim_{t\to a} [-4\mathbf{r}_1(t) + 3\mathbf{r}_2(t)]$
6. $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$

En los problemas 7 y 8, determine si la función vectorial indicada es continua en $t = 1$.

7. $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 2t)\mathbf{i} + \frac{1}{t+1}\mathbf{j} + \ln(t-1)\mathbf{k}$
8. $\mathbf{r}(t) = \text{sen } \pi t\,\mathbf{i} + \tan \pi t\,\mathbf{j} + \cos \pi t\,\mathbf{k}$

En los problemas 9 y 10, encuentre los dos vectores indicados para la función vectorial dada.

9. $\mathbf{r}(t) = (3t-1)\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + (5t^2 - t)\mathbf{k}$; $\mathbf{r}'(1)$, $\frac{\mathbf{r}(1.1) - \mathbf{r}(1)}{0.1}$
10. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{1+5t}\mathbf{i} + (3t^2 + t)\mathbf{j} + (1-t)^3\mathbf{k}$; $\mathbf{r}'(0)$, $\frac{\mathbf{r}(0.05) - \mathbf{r}(0)}{0.05}$

En los problemas 11-14, determine $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ para la función vectorial dada.

11. $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$, $t > 0$
12. $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t - \text{sen } t, t + \cos t\rangle$
13. $\mathbf{r}(t) = \langle te^{2t}, t^3, 4t^2 - t\rangle$
14. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \tan^{-1} t\,\mathbf{k}$

En los problemas 15-18, grafique la curva C que es descrita por $\mathbf{r}(t)$ y grafique $\mathbf{r}'(t)$ en el punto correspondiente al valor indicado de t.

15. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 6\,\text{sen } t\,\mathbf{j}$; $t = \pi/6$
16. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$; $t = -1$
17. $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{4}{1+t^2}\mathbf{k}$; $t = 1$
18. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen } t\,\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$; $t = \pi/4$

En los problemas 19 y 20, encuentre ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor que se indica de t.

19. $x = t, y = \frac{1}{2}t^2, z = \frac{1}{3}t^3$; $t = 2$
20. $x = t^3 - t, y = \frac{6t}{t+1}, z = (2t+1)^2$; $t = 1$

En los problemas 21 y 22, determine un vector tangente unitario para la curva dada en el punto correspondiente al valor que se indica de t. Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta tangente en este punto.

21. $\mathbf{r}(t) = te^t\mathbf{i} + (t^2 + 2t)\mathbf{j} + (t^3 - t)\mathbf{k}$; $t = 0$
22. $\mathbf{r}(t) = (1 + \text{sen } 3t)\mathbf{i} + \tan 2t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $t = \pi$

En los problemas 23 y 24, encuentre una función vectorial de la recta tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor que se indica de t.

23. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t \rangle; \quad t = \pi/3$

24. $\mathbf{r}(t) = \langle 6e^{-t/2}, e^{2t}, e^{3t} \rangle; \quad t = 0$

En los problemas 25-30, determine la derivada indicada. Suponga que todas las funciones vectoriales son diferenciables.

25. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)]$

26. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot (t\mathbf{r}(t))]$

27. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t))]$

28. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times (\mathbf{r}_2(t) \times \mathbf{r}_3(t))]$

29. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(2t) + \mathbf{r}_2(1/t)]$

30. $\dfrac{d}{dt}[t^3\mathbf{r}(t^2)]$

En los problemas 31-34, evalúe la integral dada.

31. $\displaystyle\int_{-1}^{2} (t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k})\,dt$

32. $\displaystyle\int_{0}^{4} \left(\sqrt{2t+1}\,\mathbf{i} - \sqrt{t}\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k}\right)dt$

33. $\displaystyle\int (te^t\mathbf{i} - e^{-2t}\mathbf{j} + te^{t^2}\mathbf{k})\,dt$

34. $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}(\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})\,dt$

En los problemas 35-38, encuentre una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ que satisfaga las condiciones indicadas.

35. $\mathbf{r}'(t) = 6\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

36. $\mathbf{r}'(t) = t \operatorname{sen} t^2\mathbf{i} - \cos 2t\mathbf{j}; \quad \mathbf{r}(0) = \frac{3}{2}\mathbf{i}$

37. $\mathbf{r}''(t) = 12t\mathbf{i} - 3t^{-1/2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}'(1) = \mathbf{j}, \mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$

38. $\mathbf{r}''(t) = \sec^2 t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - \operatorname{sen} t\mathbf{k};$
$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{r}(0) = -\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

En los problemas 39-42, encuentre la longitud de la curva trazada por la función vectorial dada en el intervalo que se indica.

39. $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le 2\pi$

40. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t \cos t\mathbf{j} + t \operatorname{sen} t\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le \pi$

41. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos 2t\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} 2t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le 3\pi$

42. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + \sqrt{3}t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le 1$

En los problemas 43-46, emplee (8) y la integración de $u = 0$ a $u = t$ para determinar una parametrización de longitud de arco $\mathbf{r}(s)$ para la curva dada. Verifique que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario.

43. $\mathbf{r}(t) = 9 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 9 \cos t\mathbf{j}$

44. $\mathbf{r}(t) = 5 \cos t\mathbf{i} + 12t\mathbf{j} + 5 \operatorname{sen} t\mathbf{k}$

45. $\mathbf{r}(t) = (1 + 2t)\mathbf{i} + (5 - 3t)\mathbf{j} + (2 + 4t)\mathbf{k}$

46. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k}$

≡ Piense en ello

47. Suponga que $\mathbf{r}$ es una función vectorial diferenciable para la cual $|\mathbf{r}(t)| = c$ para toda t. Demuestre que el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ es perpendicular al vector de posición $\mathbf{r}(t)$ para toda t.

48. Si $\mathbf{v}$ es un vector constante y $\mathbf{r}(t)$ es integrable sobre $[a, b]$, demuestre que $\int_a^b \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{v} \cdot \int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt$.

49. Suponga que $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ es una ecuación vectorial de una recta, donde $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{v}$ son vectores constantes. Utilice la función de longitud de arco $s = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\,du$ para demostrar que una parametrización de longitud de arco de la recta está dada por $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + s\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. Demuestre que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario. En otras palabras, para obtener una parametrización de longitud de arco de una recta sólo se necesita normalizar al vector $\mathbf{v}$.

50. Emplee los resultados del problema 49 para encontrar una parametrización de longitud de arco de cada una de las siguientes rectas.

a) $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + 3t, 2 - 4t \rangle = \langle 1, 2 \rangle + t\langle 3, -4 \rangle$
b) $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 1 + 2t, 10 - t \rangle$

12.3 Movimiento sobre una curva

Introducción Suponga que una partícula o cuerpo se mueve a lo largo de la curva C de manera que su posición en el tiempo t está dada por la función de valores vectoriales

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}.$$

Podemos describir la velocidad y la aceleración de la partícula en términos de derivadas de $\mathbf{r}(t)$.

Velocidad y aceleración Si f, g y h tienen segundas derivadas, entonces los vectores

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k} \tag{1}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k} \tag{2}$$

se denominan la **velocidad** y la **aceleración** de la partícula, respectivamente. La función escalar

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} \tag{3}$$

es la **rapidez** de la partícula. La rapidez se relaciona con la longitud de arco. De (7) de la sección 12.2 observamos que si una curva C es trazada por una función de valores vectoriales suave

$\mathbf{r}(t)$, entonces su longitud entre el punto inicial en $t = a$ y el punto terminal en $t = b$ está dada por $L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt$. En vista de (1) y (3), esto es lo mismo que

$$L = \int_a^b |\mathbf{v}(t)|\,dt. \tag{4}$$

Si $P(x_1, y_1, z_1)$ es la posición de la partícula sobre la curva C en el tiempo t_1, entonces en vista de la discusión en la sección 12.2 acerca de la interpretación geométrica de $\mathbf{r}'(t)$ concluimos que

- $\mathbf{v}(t_1)$ es tangente a la curva C en P.

Se hacen comentarios similares para curvas trazadas por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$.

EJEMPLO 1 Gráfica de la velocidad y la aceleración

La posición de una partícula en movimiento está dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{5}{2}t\mathbf{k}$. Grafique la curva C definida por $\mathbf{r}(t)$ y los vectores $\mathbf{v}(2)$ y $\mathbf{a}(2)$.

Solución Puesto que $x = t^2$, $y = t$, la trayectoria de la partícula está por arriba de la parábola $x = y^2$ que yace en el plano xy. Cuando $t = 2$, el vector de posición $\mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ indica que la partícula está en el punto $P(4, 2, 5)$ sobre C. Ahora,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i}$$

de modo que

$$\mathbf{v}(2) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(2) = 2\mathbf{i}.$$

Estos vectores se ilustran en la FIGURA 12.3.1. ■

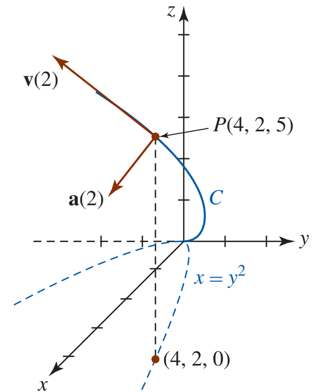


FIGURA 12.3.1 Vectores de velocidad y aceleración del ejemplo 1

Si una partícula se mueve con una rapidez constante c, entonces su vector de aceleración es perpendicular al vector de velocidad $\mathbf{v}$. Para ver lo anterior, advierta que

$$|\mathbf{v}|^2 = c^2 \qquad \text{o} \qquad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = c^2.$$

Diferenciamos ambos lados con respecto a t, y con la ayuda del teorema 12.2.3*iv*) obtenemos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0.$$

Entonces,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad \text{o} \qquad \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 0 \quad \text{para toda } t. \tag{5}$$

EJEMPLO 2 Gráfica de la velocidad y la aceleración

Suponga que la función vectorial del ejemplo 4 de la sección 12.1 representa la posición de una partícula que se mueve en una órbita circular. Grafique los vectores de velocidad y aceleración en $t = \pi/4$.

Solución La función de valores vectoriales

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

es el vector de posición de una partícula que se mueve en una órbita circular de radio 2 en el plano $z = 3$. Cuando $t = \pi/4$, la partícula está en el punto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$. En este caso,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -2\cos t\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j}.$$

Puesto que la rapidez $|\mathbf{v}(t)| = 2$ es constante para todo tiempo t, se sigue de (5) que $\mathbf{a}(t)$ es perpendicular a $\mathbf{v}(t)$. (Verifique lo anterior.) Como se muestra en la FIGURA 12.3.2, los vectores

$$\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\mathbf{i} + 2\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j}$$

se dibujan en el punto P. El vector $\mathbf{v}(\pi/4)$ es tangente a la trayectoria circular en tanto que $\mathbf{a}(\pi/4)$ apunta a lo largo de un radio hacia el centro del círculo. ■

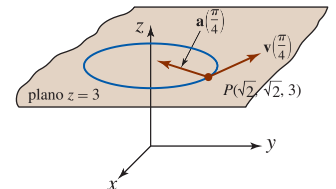


FIGURA 12.3.2 Vectores de velocidad y aceleración del ejemplo 2

Aceleración centrípeta Para el movimiento circular en el plano, descrito mediante $\mathbf{r}(t) = r_0 \cos \omega t\mathbf{i} + r_0 \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}$, r_0 y ω constantes, es evidente que $\mathbf{r}'' = -\omega^2\mathbf{r}$. Esto significa que el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ apunta en la dirección opuesta a la del vector de posición $\mathbf{r}(t)$. Afirmamos entonces que $\mathbf{a}(t)$ es la **aceleración centrípeta**. Vea la FIGURA 12.3.3. Si $v = |\mathbf{v}(t)|$ y $a = |\mathbf{a}(t)|$, se deja como ejercicio demostrar que $a = v^2/r_0$. Vea el problema 17 en los ejercicios 12.3.

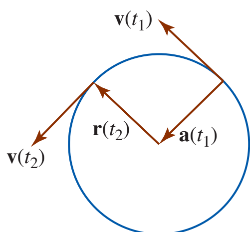


FIGURA 12.3.3 Vector de aceleración centrípeta **a**

Movimiento curvilíneo en el plano Muchas aplicaciones importantes de las funciones vectoriales ocurren en la descripción del movimiento curvilíneo en un plano. Por ejemplo, los movimientos planetarios y de proyectiles se efectúan en un plano. Al analizar el movimiento de proyectiles balísticos de corto alcance, se empieza con la aceleración de la gravedad escrita en forma vectorial

El proyectil se dispara o lanza en vez de autoimpulsarse. En el análisis del movimiento de balística de largo alcance, debe tomarse en cuenta la curvatura de la Tierra.

$$\mathbf{a}(t) = -g\mathbf{j}.$$

Si, como se ilustra en la FIGURA 12.3.4, se lanza un proyectil con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \theta\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen} \theta\mathbf{j}$, desde una altura inicial $\mathbf{s}_0 = s_0\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{v}(t) = \int(-g\mathbf{j})dt = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1,$$

donde $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ implica que $\mathbf{C}_1 = \mathbf{v}_0$. Por tanto,

$$\mathbf{v}(t) = (v_0 \cos \theta)\mathbf{i} + (-gt + v_0 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j}.$$

Al integrar de nuevo y utilizar $\mathbf{r}(0) = \mathbf{s}_0$ se obtiene

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \theta)t\mathbf{i} + \left[-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen} \theta)t + s_0\right]\mathbf{j}.$$

Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas para la trayectoria del proyectil son

$$x(t) = (v_0 \cos \theta)t, \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen} \theta)t + s_0. \tag{6}$$

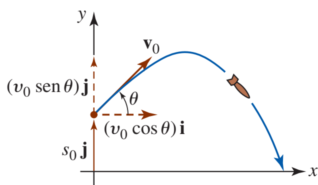
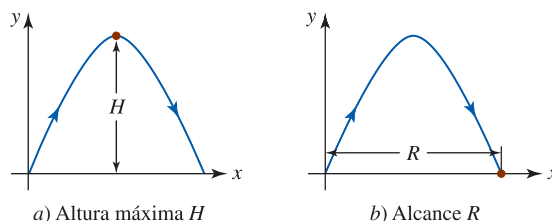


FIGURA 12.3.4 Proyectil balístico

Vea (3) de la sección 10.2.

Existe un interés natural en determinar la altura máxima H y la distancia horizontal R máxima, o alcance, a la que llega el proyectil. Como se muestra en la FIGURA 12.3.5, estas cantidades son los valores máximos de $y(t)$ y $x(t)$, respectivamente. Para calcular estos valores se determinan los tiempos t_1 y $t_2 > 0$ para los cuales $y'(t_1) = 0$ y $y(t_2) = 0$, respectivamente. Luego

$$H = y_{\text{máx}} = y(t_1) \qquad \text{y} \qquad R = x_{\text{máx}} = x(t_2). \tag{7}$$



a) Altura máxima *H* *b*) Alcance *R*

FIGURA 12.3.5 Altura y alcance máximos de un proyectil

EJEMPLO 3 Movimiento de proyectiles

Un obús es lanzado desde el nivel del suelo con una rapidez inicial de 768 pies/s a un ángulo de elevación de 30°. Encuentre

a) la función vectorial y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del obús,
b) la altura máxima alcanzada,
c) el alcance del obús y
d) la rapidez en el impacto.

Solución

a) En términos de vectores, la posición inicial del proyectil es $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ y su velocidad inicial corresponde a

$$\mathbf{v}_0 = (768 \cos 30°)\mathbf{i} + (768 \operatorname{sen} 30°)\mathbf{j} = 384\sqrt{3}\mathbf{i} + 384\mathbf{j}. \tag{8}$$

Al integrar $\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j}$ y utilizar (8), se obtiene

$$\mathbf{v}(t) = (384\sqrt{3})\mathbf{i} + (-32t + 384)\mathbf{j}. \tag{9}$$

Al integrar (9) y emplear $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ se encuentra la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (384\sqrt{3}t)\mathbf{i} + (-16t^2 + 384t)\mathbf{j}.$$

Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del obús son

$$x(t) = 384\sqrt{3}t, \quad y(t) = -16t^2 + 384t. \tag{10}$$

b) De (10) advertimos que $dy/dt = 0$ cuando

$$-32t + 384 = 0 \quad \text{o} \quad t = 12.$$

Entonces, de acuerdo con la primera parte de (7), la altura máxima H alcanzada por el obús es

$$H = y(12) = -16(12)^2 + 384(12) = 2\,304 \text{ pies}.$$

c) De (6) vemos que $y(t) = 0$ cuando

$$-16t(t - 24) = 0 \quad \text{o} \quad t = 0, t = 24.$$

De la segunda parte de (7), el alcance R del obús es

$$R = x(24) = 384\sqrt{3}(24) \approx 15\,963 \text{ pies}.$$

d) De (9) obtenemos la rapidez de impacto del obús:

$$|\mathbf{v}(24)| = \sqrt{(384\sqrt{3})^2 + (-384)^2} = 768 \text{ pies/s}.$$ ■

r(t) NOTAS DESDE EL AULA

En la página 667 vimos que la tasa de cambio de la longitud de arco dL/dt es la misma que la rapidez $|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$. Sin embargo, como veremos en la siguiente sección, *no* se deduce que la *aceleración escalar* d^2L/dt^2 es la misma que $|\mathbf{a}(t)| = |\mathbf{r}''(t)|$. Vea el problema 18 en los ejercicios 12.3.

Ejercicios 12.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-39.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-8, $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento. Grafique la curva y los vectores de velocidad y aceleración en el tiempo indicado. Encuentre la rapidez en ese tiempo.

1. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^4\mathbf{j}; \quad t = 1$

2. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \dfrac{1}{t^2}\mathbf{j}; \quad t = 1$

3. $\mathbf{r}(t) = -\cosh 2t\mathbf{i} + \operatorname{senh} 2t\mathbf{j}; \quad t = 0$

4. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + (1 + \operatorname{sen} t)\mathbf{j}; \quad t = \pi/3$

5. $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + (t - 1)^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}; \quad t = 2$

6. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}; \quad t = 2$

7. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}; \quad t = 1$

8. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}; \quad t = 1$

9. Suponga que $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^3 - 2t)\mathbf{j} + (t^2 - 5t)\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula en movimiento.

a) ¿En qué puntos la partícula pasa por el plano xy?

b) ¿Cuáles son su velocidad y aceleración en los puntos del inciso *a*)?

10. Suponga que una partícula se mueve en el espacio de manera que $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$ para todo tiempo t. Describa su trayectoria.

11. Un obús se lanza desde el nivel del suelo con una rapidez inicial de 480 pies/s a un ángulo de elevación de 30°. Encuentre:

a) una función vectorial y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del obús,

b) la altura máxima alcanzada,

c) el alcance del obús y

d) la rapidez en el impacto.

12. Vuelva a trabajar el problema 11 si el obús se lanza con la misma rapidez inicial y el mismo ángulo de elevación pero desde un acantilado a 1 600 pies de altura.

13. Un automóvil se empuja con una rapidez de 4 pies/s desde un escarpado acantilado frente al mar que tiene una altura de 81 pies. Encuentre la rapidez a la cual el automóvil golpea el agua.

14. Un pequeño proyectil se lanza desde el nivel del suelo con una rapidez inicial de 98 m/s. Encuentre los ángulos posibles de elevación de manera que su alcance sea de 490 m.

15. Un mariscal de campo de futbol americano lanza una "bomba" de 100 yardas a un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. ¿Cuál es la rapidez inicial del balón en el punto de lanzamiento?

16. Un mariscal de campo lanza un balón de futbol con la misma rapidez inicial a un ángulo de 60° desde la horizontal y después a un ángulo de 30° desde la horizontal. Muestre que el alcance del balón es el mismo en cada caso. Generalice este resultado para cualquier ángulo de lanzamiento $0 < \theta < \pi/2$.

17. Suponga que $\mathbf{r}(t) = r_0 \cos \omega t\,\mathbf{i} + r_0 \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}$ es el vector de posición de un objeto que se está moviendo en un círculo de radio r_0 en el plano xy. Si $|\mathbf{v}(t)| = v$, muestre que la magnitud de la aceleración centrípeta es $a = |\mathbf{a}(t)| = v^2/r_0$.

18. El movimiento de una partícula en el espacio tridimensional se describe mediante la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = b \cos t\,\mathbf{i} + b \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}, \quad t \geq 0.$$

a) Calcule $|\mathbf{v}(t)|$.

b) Calcule la función de longitud de arco $s(t) = \int_0^t |\mathbf{v}(u)|\,du$ y verifique que ds/dt es la misma que el resultado del inciso *a*).

c) Verifique que $d^2s/dt^2 \neq |\mathbf{a}(t)|$.

☰ Aplicaciones

19. Se lanza un proyectil desde un cañón directamente a un blanco que se deja caer desde el reposo en forma simultánea cuando se dispara el cañón. Demuestre que el proyectil golpeará al blanco en el aire. Vea la FIGURA 12.3.6. [*Sugerencia*: Suponga que el origen está en la boca del cañón y que el ángulo de elevación es θ. Si $\mathbf{r}_p$ y $\mathbf{r}_t$ son los vectores de posición del proyectil y el blanco, respectivamente, ¿hay algún tiempo en el cual $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_t$?]

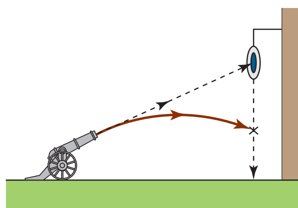


FIGURA 12.3.6 Cañón y blanco del problema 19

20. Para dar abasto a las víctimas de un desastre natural, se dejan caer simplemente equipo sólido y resistente así como paquetes de suministros de alimentos/medicinas desde aviones que vuelan horizontalmente a baja rapidez y altura. Un avión de suministros viaja horizontalmente sobre un blanco a una altura de 1 024 pies y una rapidez constante de 180 mi/h. Emplee (2) para determinar la distancia horizontal que recorre un paquete de suministros con relación al punto desde el cual se dejó caer. ¿A qué ángulo de la línea visual α debe soltarse el paquete de suministro para que dé en el blanco indicado en la FIGURA 12.3.7?

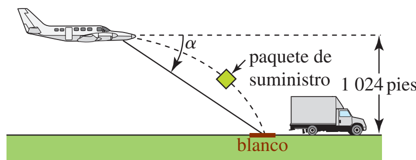


FIGURA 12.3.7 Avión de suministro del problema 20

21. El **peso efectivo** w_e de un cuerpo de masa m en el ecuador de la Tierra se define mediante $w_e = mg - ma$, donde a es la magnitud de la aceleración centrípeta dada en el problema 17. Determine el peso efectivo de una persona de 192 lb si el radio de la Tierra es de 4 000 mi, $g = 32$ pies/s^2 y $v = 1\,530$ pies/s.

22. Considere un ciclista que viaja sobre una pista circular plana de radio r_0. Si m es la masa combinada del ciclista y la bicicleta, llene los blancos de la FIGURA 12.3.8. [*Sugerencia*: Refiérase al problema 17 y a *fuerza* = *masa* × *aceleración*. Suponga que las direcciones positivas son hacia arriba y a la izquierda.] El vector **resultante U** da la dirección a la cual el ciclista debe inclinarse para evitar caer. Encuentre el ángulo ϕ respecto de la vertical al cual el ciclista debe inclinarse si su rapidez es de 44 pies/s y el radio de la pista es de 60 pies.

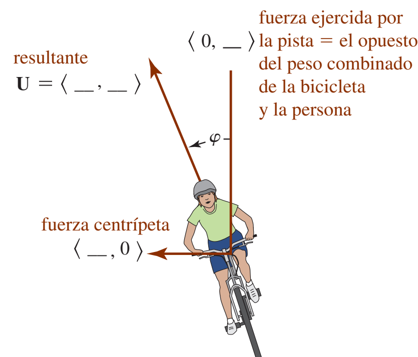


FIGURA 12.3.8 Ciclista del problema 22

23. Emplee el resultado que se obtuvo en (6) para demostrar que la trayectoria de un proyectil balístico es parabólica.

24. Se lanza un proyectil con una rapidez inicial v_0 desde el suelo a un ángulo de elevación θ. Emplee (6) para demostrar que la altura y el alcance máximos del proyectil son

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g} \quad \text{y} \quad R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g},$$

respectivamente.

25. La velocidad de una partícula que se mueve en un fluido se describe por medio de un **campo de velocidades** $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, donde las componentes v_1, v_2 y v_3 son funciones de x, y, z y el tiempo t. Si la velocidad de la partícula es $\mathbf{v}(t) = 6t^2x\mathbf{i} - 4ty^2\mathbf{j} + 2t(z+1)\mathbf{k}$, determine $\mathbf{r}(t)$. [*Sugerencia*: Emplee separación de variables. Vea la sección 8.1 o la sección 16.1.]

26. Suponga que m es la masa de una partícula en movimiento. La segunda ley del movimiento de Newton puede escribirse en forma vectorial como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ se denomina el **momento lineal**. El **momento angular** de la partícula respecto al origen se define como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, donde $\boldsymbol{r}$ es el vector de posición. Si el movimiento de torsión de la partícula alrededor del origen es $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt$, demuestre que τ es la tasa de cambio en el tiempo del momento angular.

27. Suponga que el Sol se localiza en el origen. La fuerza gravitacional $\mathbf{F}$ ejercida sobre un planeta de masa m por el Sol de masa M es

$$\mathbf{F} = -k\frac{Mm}{r^2}\mathbf{u}.$$

F es una **fuerza central**, esto es, una fuerza dirigida a lo largo del vector de posición **r** del planeta. Aquí k es la constante gravitacional (vea la página 369), $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ es un vector unitario en la dirección de **r**, y el signo menos indica que **F** es una fuerza atractiva, esto es, una fuerza dirigida hacia el Sol. Vea la FIGURA 12.3.9.

a) Emplee el problema 26 para demostrar que el momento de torsión que actúa sobre el planeta debido a esta fuerza central es **0**.

b) Explique por qué el momento angular **L** del planeta es constante.

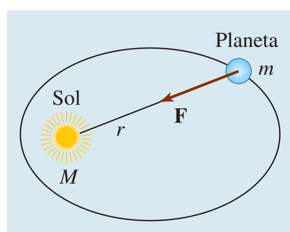


FIGURA 12.3.9 Vector de fuerza central **F** del problema 27

Piense en ello

28. Un cañón lanza una bala horizontalmente como se indica en la FIGURA 12.3.10.

a) Cuanto mayor es la cantidad de pólvora que se utiliza, tanto mayor resulta la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de la bala de cañón y mayor la distancia a la que llega. Con argumentos matemáticos sólidos explique la razón.

b) Si se ignora la resistencia del aire, explique por qué la bala de cañón siempre alcanza el suelo en el mismo tiempo, independientemente del valor de la velocidad inicial $\mathbf{v}_0 > 0$.

c) Si la bala de cañón se suelta simplemente desde la altura s_0 que se indica en la figura 12.3.10, muestre que el tiempo en el que golpea el suelo es el mismo que el tiempo en el inciso *b*).

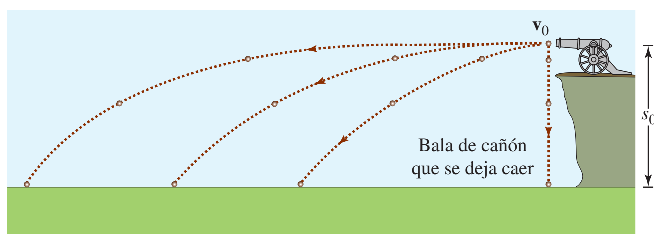


FIGURA 12.3.10 Cañón del problema 28

Proyectos

29. En este proyecto usted empleará las propiedades de las secciones 11.4 y 12.1 para demostrar la **primera ley de Kepler del movimiento planetario**.

- La órbita de un planeta es una elipse con el Sol en un foco.

Se supone que el Sol es de masa M y está ubicado en el origen, **r** es el vector de posición de un cuerpo de masa m que se mueve bajo la atracción gravitacional del Sol y $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ es un vector unitario en la dirección de **r**.

a) Emplee el problema 27 y la segunda ley del movimiento de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para demostrar que

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{kM}{r^2}\mathbf{u}.$$

b) Utilice el inciso *a*) para demostrar que $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'' = \mathbf{0}$.

c) Utilice el inciso *b*) para demostrar que $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

d) Se deduce del inciso *c*) que $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$, donde **c** es un vector constante. Demuestre que $\mathbf{c} = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$.

e) Demuestre que $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$ y consecuentemente $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$.

f) Utilice los incisos *a*), *d*) y *e*) para demostrar que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{c}) = kM\frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

g) Después de integrar el resultado en el inciso *f*) respecto a t, se deduce que $\mathbf{v} \times \mathbf{c} = kM\mathbf{u} + \mathbf{d}$, donde **d** es otro vector constante. Efectúe el producto punto en ambos lados de esta última expresión con el vector $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$ y utilice el problema 61 de los ejercicios 11.4 para demostrar que

$$r = \frac{c^2/kM}{1 + (d/kM)\cos\theta},$$

donde $c = |\mathbf{c}|$, $d = |\mathbf{d}|$ y θ es el ángulo entre **d** y **r**.

h) Explique por qué el resultado del inciso *c*) prueba la primera ley de Kepler.

i) En el perihelio (vea la página 595), los vectores **r** y **v** son perpendiculares y tienen magnitudes r_0 y v_0, respectivamente. Emplee esta información y los incisos *d*) y *g*) para demostrar que $c = r_0v_0$ y $d = r_0v_0^2 - kM$.

12.4 Curvatura y aceleración

Introducción Sea C una curva suave en el espacio bidimensional o tridimensional que es trazada por la función de valores vectoriales $\mathbf{r}(t)$. En esta sección consideraremos con mayor detalle el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$, introducido en la sección anterior. Sin embargo, antes de hacer esto, es necesario examinar una cantidad escalar llamada **curvatura** de una curva.

Curvatura Si $\mathbf{r}(t)$ define a una curva C, entonces se sabe que $\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente en un punto P sobre C. En consecuencia,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \tag{1}$$

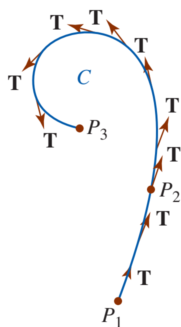


FIGURA 12.4.1 El vector tangente cambia con respecto a la longitud de arco

es una **tangente unitaria**. Sin embargo, es necesario recordar del final de la sección 12.2 que si C es parametrizada por una longitud de arco s, entonces la tangente unitaria a la curva también está dada por $d\mathbf{r}/ds$. Como vimos en (11) de la sección 12.3, la cantidad $|\mathbf{r}'(t)|$ en (1) se relaciona con la función de longitud de arco s por medio de $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$. Puesto que la curva C es suave, se sabe de la página 667 que $ds/dt > 0$. Por consiguiente, mediante la regla de la cadena,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

y por ello

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \mathbf{T}(t). \tag{2}$$

Suponga ahora que C es como se ilustra en la FIGURA 12.4.1. Conforme s aumenta, $\mathbf{T}$ se mueve a lo largo de C cambiando dirección pero no longitud (siempre es de longitud unitaria). A lo largo de la parte de la curva entre P_1 y P_2 el vector $\mathbf{T}$ varía poco en dirección; a lo largo de la curva entre P_2 y P_3, donde C se dobla obviamente en forma más pronunciada, el cambio en la dirección de la tangente $\mathbf{T}$ es más pronunciado. Utilizaremos la *tasa* a la cual el vector unitario $\mathbf{T}$ cambia de dirección respecto a la longitud de arco como un indicador de la *curvatura* de una curva suave C.

Definición 12.4.1 Curvatura

Sea $\mathbf{r}(t)$ una función vectorial que define a una curva suave C. Si s es el parámetro de longitud de arco y $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ es el vector tangente unitario, entonces la **curvatura** de C en un punto P se define como

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|. \tag{3}$$

El símbolo κ en (3) es la letra griega kappa. Ahora, puesto que las curvas a menudo no se parametrizan por medio de la longitud de arco, es conveniente expresar (3) en términos de un parámetro general t. Al emplear de nuevo la regla de la cadena, es posible escribir

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \text{y consecuentemente} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}.$$

En otras palabras, la curvatura definida en (3) produce

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}. \tag{4}$$

EJEMPLO 1 Curvatura de un círculo

Encuentre la curvatura de un círculo de radio a.

Solución Un círculo puede describirse por medio de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = a \cos t\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$. En este caso, de $\mathbf{r}'(t) = -a \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + a \cos t\,\mathbf{j}$ y $|\mathbf{r}'(t)| = a$ obtenemos

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}'(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}.$$

Por consiguiente, de acuerdo con (4) la curvatura es

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}}{a} = \frac{1}{a}. \tag{5}$$

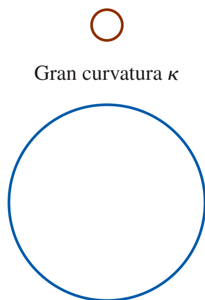


FIGURA 12.4.2 Curvatura de un círculo en el ejemplo 1

El resultado en (5) muestra que la curvatura en un punto sobre un círculo es el recíproco del radio del círculo e indica un hecho que concuerda con nuestra intuición: un círculo con un radio pequeño se curva más que uno con un radio más grande. Vea la FIGURA 12.4.2. ■

Componentes tangencial y normal de la aceleración Suponga que una partícula se mueve en el espacio bidimensional o tridimensional sobre una curva suave C descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Entonces la velocidad de la partícula sobre C es $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, en tanto que su rapidez corresponde a $ds/dt = v = |\mathbf{v}(t)|$. Entonces, (1) implica $\mathbf{v}(t) = v\mathbf{T}(t)$. Diferenciando esta última expresión con respecto a t obtenemos la aceleración:

$$\mathbf{a}(t) = v\frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{dv}{dt}\mathbf{T}. \tag{6}$$

Además, con ayuda del teorema 12.2.1*iii*) se deduce de la diferenciación de $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$ que $\mathbf{T}\cdot d\mathbf{T}/dt = 0$. Por consiguiente, en un punto P sobre C los vectores $\mathbf{T}$ y $d\mathbf{T}/dt$ son ortogonales. Si $|d\mathbf{T}/dt| \neq 0$, entonces el vector

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \tag{7}$$

es una normal unitaria a la curva C en P con dirección dada por $d\mathbf{T}/dt$. El vector $\mathbf{N}$ se denomina **vector normal principal**, o simplemente **normal unitaria**. Sin embargo, puesto que la curvatura es $\kappa(t) = |\mathbf{T}'(t)|/v$, se sigue de (7) que $d\mathbf{T}/dt = \kappa v\mathbf{N}$. Entonces, (6) se convierte en

$$\mathbf{a}(t) = \kappa v^2\mathbf{N} + \frac{dv}{dt}\mathbf{T}. \tag{8}$$

Escribiendo (8) como

$$\mathbf{a}(t) = a_N\mathbf{N} + a_T\mathbf{T} \tag{9}$$

advertimos que el vector aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula en movimiento es la suma de dos vectores ortogonales $a_N\mathbf{N}$ y $a_T\mathbf{T}$. Vea la FIGURA 12.4.3. Las funciones escalares

$$a_T = dv/dt \qquad \text{y} \qquad a_N = \kappa v^2$$

se llaman **componentes tangencial** y **normal de la aceleración**, respectivamente. Note que la componente tangencial de la aceleración resulta de un cambio en la *magnitud* de la velocidad $\mathbf{v}$, mientras que la componente normal de la aceleración proviene de un cambio en la *dirección* de $\mathbf{v}$.

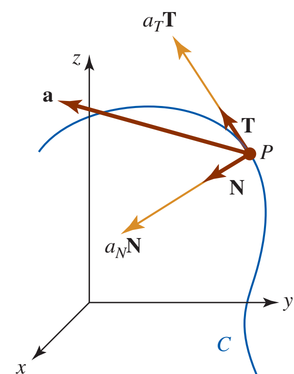


FIGURA 12.4.3 Componentes del vector aceleración

La binormal Un tercer vector definido por el producto cruz

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) \tag{10}$$

recibe el nombre de **vector binormal**. Los tres vectores unitarios $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ forman un conjunto de mano derecha de vectores mutuamente ortogonales denominado **triedro móvil**. El plano de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ se denomina **plano osculante**, el plano $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ se dice que es el **plano normal**, y el plano de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{B}$ es el **plano de rectificación**. Vea la FIGURA 12.4.4.

Literalmente, las palabras "plano osculante" significan "plano del besador".

Los tres vectores unitarios mutuamente ortogonales $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ pueden considerarse como un sistema de coordenadas de mano derecha móvil, ya que

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t), \quad \mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t), \quad \mathbf{T}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{B}(t).$$

Este sistema de coordenadas móvil se conoce como **marco TNB**.

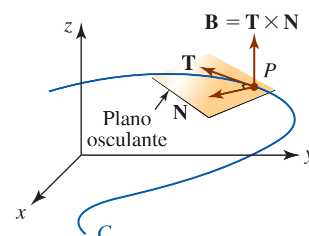


FIGURA 12.4.4 Triedro móvil y plano osculante

EJEMPLO 2 Determinación de T, N y B

En el espacio tridimensional la posición de una partícula en movimiento está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$. Encuentre los vectores $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$. Determine la curvatura $\kappa(t)$.

Solución Puesto que $\mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\, t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{13}$, y por ello de (1) advertimos que una tangente unitaria es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\text{sen}\, t\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{k}.$$

Después de esto, se tiene

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\text{sen}\, t\mathbf{j} \quad \text{y} \quad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Por consiguiente, (7) produce la normal principal

$$\mathbf{N}(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}.$$

De tal manera, de (10) la binormal es

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{13}}\operatorname{sen} t & \dfrac{2}{\sqrt{13}}\cos t & \dfrac{3}{\sqrt{13}} \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}}\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos t\,\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{k}.$$

Por último, al emplear $|\mathbf{T}'(t)| = 2/\sqrt{13}$ y $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{13}$, encontramos de (4) que la curvatura en cualquier punto es la constante

$$\kappa(t) = \frac{2/\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{13}.$$ ■

El hecho de que la curvatura $\kappa(t)$ en el ejemplo 2 es constante no es una sorpresa, ya que la curva definida por $\mathbf{r}(t)$ es una hélice circular.

EJEMPLO 3 Planos osculante, normal y de rectificación

En el punto correspondiente a $t = \pi/2$ sobre la hélice circular del ejemplo 2, encuentre una ecuación de

***a*)** el plano osculante,
***b*)** el plano normal y
***c*)** el plano de rectificación.

Solución De $\mathbf{r}(\pi/2) = \langle 0, 2, 3\pi/2\rangle$ el punto en cuestión es $(0, 2, 3\pi/2)$.

***a*)** De (11) un vector normal al plano osculante en P es

$$\mathbf{B}(\pi/2) = \mathbf{T}(\pi/2) \times \mathbf{N}(\pi/2) = \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{k}.$$

Para encontrar una ecuación de un plano no se requiere una normal *unitaria*, por lo que en lugar de $\mathbf{B}(\pi/2)$ es un poco más simple usar $\langle 3, 0, 2\rangle$. De (2) de la sección 11.6, una ecuación del plano osculante es

$$3(x - 0) + 0(y - 2) + 2\left(z - \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad 3x + 2z = 3\pi.$$

***b*)** En el punto P, el vector $\mathbf{T}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 0, 3\rangle$ o $\langle -2, 0, 3\rangle$ es normal al plano que contiene $\mathbf{N}(\pi/2)$ y $\mathbf{B}(\pi/2)$. Consecuentemente, una ecuación del plano normal es

$$-2(x - 0) + 0(y - 2) + 3\left(z - \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad -4x + 6z = 9\pi.$$

***c*)** Por último, en el punto P, el vector $\mathbf{N}(\pi/2) = \langle 0, -1, 0\rangle$ es normal al plano que contiene $\mathbf{T}(\pi/2)$ y $\mathbf{B}(\pi/2)$. Una ecuación del plano de rectificación es

$$0(x - 0) + (-1)(y - 2) + 0\left(z - \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad y = 2.$$ ■

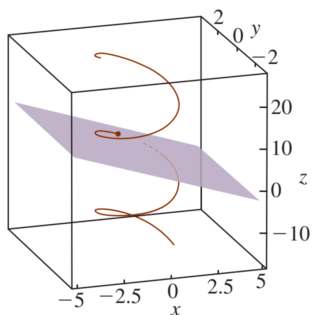


FIGURA 12.4.5 Hélice y plano osculante del ejemplo 3

En la FIGURA 12.4.5 se presentan porciones de la hélice y del plano osculante del ejemplo 3. El punto $(0, 2, 3\pi/2)$ se indica en la figura mediante el punto rojo.

Fórmulas para a_T, a_N y la curvatura Efectuando primero al producto punto y después el producto cruz, para el vector $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ con el vector de aceleración (9), es posible obtener fórmulas explícitas que impliquen a $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{r}''$ para las componentes tangencial y normal de la aceleración y la curvatura. Observe que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = a_N(\underbrace{v\mathbf{T} \cdot \mathbf{N}}_{0}) + a_T(\underbrace{v\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}}_{1}) = a_T v$$

produce la componente tangencial de la aceleración:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}. \tag{12}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{v}\times\mathbf{a} = a_N(v\underbrace{\mathbf{T}\times\mathbf{N}}_{\mathbf{B}}) + a_T(v\underbrace{\mathbf{T}\times\mathbf{T}}_{\mathbf{0}}) = a_N v\mathbf{B}.$$

Puesto que $|\mathbf{B}| = 1$, se concluye que la componente normal de la aceleración es

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}. \tag{13}$$

Resolviendo (13) para la curvatura κ, obtenemos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}. \tag{14}$$

EJEMPLO 4 Determinación de a_T, a_N y κ

La curva trazada por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$ es una variación de la curva cúbica trenzada que se discutió en la sección 12.1. Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula que se mueve sobre una curva C, encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en cualquier punto sobre C. Encuentre la curvatura.

Solución De

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

encontramos $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = t + 2t^3$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{1 + t^2 + t^4}$. Por consiguiente, de (12) obtenemos

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{t + 2t^3}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}.$$

En este caso,

$$\mathbf{v}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y $|\mathbf{v}\times\mathbf{a}| = \sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}$. Por tanto, (13) produce

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}.$$

Por último, de (14) encontramos que la curvatura de la cúbica trenzada está dada por

$$\kappa(t) = \frac{(t^4 + 4t^2 + 1)^{1/2}}{(1 + t^2 + t^4)^{3/2}}.$$ ■

Radio de curvatura El recíproco de la curvatura, $\rho = 1/\kappa$, se denomina **radio de curvatura**. El radio de curvatura en un punto P sobre una curva C es el radio de un círculo que "encaja" en la curva mejor que cualquier otro círculo. El círculo en P se denomina **círculo de curvatura** y su centro es el **centro de curvatura**. El círculo de curvatura tiene la misma recta tangente en P que la curva C, y su centro yace sobre el lado cóncavo de C. Por ejemplo, un automóvil que se mueve sobre una pista curva, como se ilustra en la FIGURA 12.4.6, puede considerarse en cualquier instante como si se moviera sobre un círculo de radio ρ. En consecuencia, la componente normal de su aceleración $a_N = kv^2$ debe ser la misma que la magnitud de su aceleración centrípeta $a = v^2/\rho$. Por tanto, $\kappa = 1/\rho$ y $\rho = 1/\kappa$. Conociendo el radio de curvatura, es posible determinar la rapidez v a la cual el automóvil puede superar la curva peraltada sin patinarse. (Ésta es esencialmente la idea en el problema 22 en los ejercicios 12.3.)

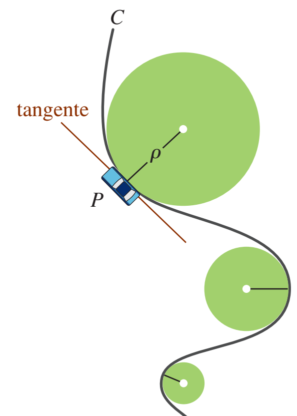


FIGURA 12.4.6 Círculo y radio de curvatura

r(t) NOTAS DESDE EL AULA

Al escribir (6) como

$$\mathbf{a}(t) = \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}$$

observamos que la llamada aceleración escalar d^2s/dt^2, referida en las *Notas desde el aula* de la sección 12.3, es vista ahora como la componente tangencial a_T de la aceleración $\mathbf{a}(t)$.

Ejercicios 12.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-40.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, para la función de posición dada, encuentre la tangente unitaria $\mathbf{T}(t)$.

1. $\mathbf{r}(t) = (t \cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (t \operatorname{sen} t + \cos t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k},\ t > 0$
2. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \sqrt{2}e^t\mathbf{k}$
3. Use el procedimiento descrito en el ejemplo 2 para determinar $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ y $\kappa(t)$ en relación con el movimiento sobre una hélice circular general que se describe mediante $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$.
4. Emplee el procedimiento descrito en el ejemplo 2 para mostrar en el cúbico trenzado del ejemplo 4 que en $t = 1$:

$$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \qquad \mathbf{N}(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{B}(1) = -\frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}), \quad \kappa(1) = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

En los problemas 5 y 6, encuentre una ecuación de

a) el plano osculante,
b) el plano normal y
c) el plano de rectificación para la curva espacial dada en el punto que corresponde al valor indicado de t.

5. La hélice circular en el ejemplo 2; $t = \pi/4$
6. El cúbico trenzado del ejemplo 4; $t = 1$

En los problemas 7-16, $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de la partícula en movimiento. Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en el tiempo t.

7. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
8. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
9. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$
11. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$
12. $\mathbf{r}(t) = \tan^{-1}t\mathbf{i} + \frac{1}{2}\ln(1 + t^2)\mathbf{j}$
13. $\mathbf{r}(t) = 5 \cos t\mathbf{i} + 5 \operatorname{sen} t\mathbf{j}$
14. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\mathbf{j}$
15. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
16. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} + (4t + 2)\mathbf{k}$
17. Encuentre la curvatura de una hélice elíptica que se describe mediante la función vectorial $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + b \operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
18. *a*) Encuentre la curvatura de una órbita elíptica que se describe mediante la función vectorial $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + b \operatorname{sen} t\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
    b) Demuestre que cuando $a = b$, la curvatura de una órbita circular es la constante $\kappa = 1/a$.
19. Demuestre que la curvatura de una línea recta es la constante $\kappa = 0$. [*Sugerencia*: Utilice (1) de la sección 11.5.]
20. Encuentre la curvatura de la cicloide que se describe mediante

$$\mathbf{r}(t) = a(t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j},\ a > 0 \text{ en } t = \pi.$$

21. Considere que C es una curva plana trazada por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g tienen segundas derivadas. Demuestre que la curvatura en un punto está dada por

$$\kappa = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{\left([f'(t)]^2 + [g'(t)]^2\right)^{3/2}}.$$

22. Demuestre que si $y = f(x)$, la fórmula para la curvatura κ en el problema 21 se reduce a

$$\kappa = \frac{|F''(x)|}{[1 + (F'(x))^2]^{3/2}}.$$

En los problemas 23 y 24, utilice el resultado del problema 22 para encontrar la curvatura y el radio de curvatura de la curva en los puntos indicados. Decida en cuáles puntos la curva es "más angulosa".

23. $y = x^2$; $(0, 0), (1, 1)$
24. $y = x^3$; $(-1, -1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$
25. Dibuje la gráfica de la curvatura $y = \kappa(x)$ para la parábola del problema 23. Determine el comportamiento de $y = \kappa(x)$ cuando $x \to \pm\infty$. En otras palabras, describa este comportamiento en términos geométricos.

≡ Problemas con calculadora/SAC

26. En el ejemplo 4 se demostró que la curvatura para $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$ está dada por

$$\kappa(t) = \frac{(t^4 + 4t^2 + 1)^{1/2}}{(1 + t^2 + t^4)^{3/2}}.$$

a) Utilice un SAC para obtener la gráfica de $y = \kappa(t)$ con $-3 \leq t \leq 3$.

b) Utilice un SAC para obtener $\kappa'(t)$ y los números críticos de la función $y = \kappa(t)$.

c) Encuentre el valor máximo de $y = \kappa(t)$ y aproxime los puntos correspondientes sobre la curva trazada por $\mathbf{r}(t)$.

≡ Piense en ello

27. Suponga que $(c, F(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de $y = F(x)$ y que F'' existe para toda x en algún intervalo que contenga a C. Analice la curvatura cerca de $(c, F(c))$.

28. Demuestre que $|\mathbf{a}(t)|^2 = a_N^2 + a_T^2$.

Revisión del capítulo 12

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-40.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-10, indique si el enunciado dado es verdadero (V) o falso (F).

1. Una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,\operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$ se mueve con rapidez constante. _____
2. Un círculo tiene curvatura constante. _____
3. El vector binormal es perpendicular al plano osculante. _____
4. Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, entonces el vector velocidad $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ y el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ son ortogonales. _____
5. Si s es la longitud de arco de una curva C, entonces la magnitud de velocidad de una partícula en movimiento sobre C es ds/dt. _____
6. Si s es la longitud de arco de una curva C, entonces la magnitud de la aceleración de una partícula sobre C es d^2s/dt^2. _____
7. Si la binormal está definida por $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, entonces la normal principal es $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$. _____
8. Si $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_2(t) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, entonces $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = 0$. _____
9. Si $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ son integrables, entonces $\int_a^b [\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)]\,dt = \left[\int_a^b \mathbf{r}_1(t)\,dt\right] \cdot \left[\int_a^b \mathbf{r}_2(t)\,dt\right]$. _____
10. Si $\mathbf{r}(t)$ es diferenciable, entonces $\frac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)|^2 = 2\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-10, llene los espacios en blanco.

1. La trayectoria de una partícula en movimiento cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$ yace en el plano __________.
2. La curvatura de una línea recta es $\kappa =$ __________.

Para la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, \frac{1}{3}t^3 \rangle$,

3. $\mathbf{r}'(1) =$ __________,
4. $\mathbf{r}''(1) =$ __________,
5. $\kappa(1) =$ __________,
6. $\mathbf{T}(1) =$ __________,
7. $\mathbf{N}(1) =$ __________,
8. $\mathbf{B}(1) =$ __________,

y en el punto correspondiente a $t = 1$ una ecuación del

9. plano normal es __________, y una ecuación del
10. plano osculante es __________.

C. Ejercicios

1. Encuentre la longitud de la curva que traza la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k},\ 0 \leq t \leq \pi.$$

2. El vector de posición de una partícula en movimiento está dado por $\mathbf{r}(t) = 5t\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} + 7t\mathbf{k}$. Ya que la partícula empieza en un punto correspondiente a $t = 0$, encuentre la distancia que la partícula recorre hasta el punto correspondiente a $t = 3$. ¿En qué punto la partícula habrá recorrido $80\sqrt{3}$ unidades a lo largo de la curva?

3. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva trazada por

$$\mathbf{r}(t) = -3t^2\mathbf{i} + 4\sqrt{t+1}\,\mathbf{j} + (t - 2)\mathbf{k}$$

en el punto correspondiente a $t = 3$.

4. Dibuje la curva trazada por $\mathbf{r}(t) = t\cos t\,\mathbf{i} + t\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

5. Dibuje la curva trazada por $\mathbf{r}(t) = \cosh t\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

6. Dado que

$$\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2(t) = -t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t^2 + 1)\mathbf{k},$$

calcule la derivada $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)]$ de dos maneras diferentes.

7. Dado que

$$\mathbf{r}_1(t) = \cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2(t) = t^2\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k},$$

calcule $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)]$ de dos maneras diferentes.

8. Dado que $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$ son diferenciables, encuentre $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot (\mathbf{r}_2(t) \times \mathbf{r}_3(t))]$.

9. Sobre una partícula de masa m actúa una fuerza continua de magnitud 2, que tiene dirección paralela al eje y positivo. Si la partícula empieza con una velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ desde (1, 1, 0), encuentre el vector de posición de la partícula y las ecuaciones paramétricas de su trayectoria. [*Sugerencia*: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.]

10. El vector de posición de una partícula en movimiento es $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t^3)\mathbf{j}$.
a) Dibuje la trayectoria de la partícula.
b) Dibuje los vectores de velocidad y aceleración en $t = 1$.
c) Encuentre la rapidez en $t = 1$.

11. Encuentre la velocidad y la aceleración de una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ cuando ésta pasa por el plano $-x + y + z = -4$.

12. La velocidad de una partícula en movimiento es $\mathbf{v}(t) = -10t\mathbf{i} + (3t^2 - 4t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si la partícula empieza en $t = 0$ en (1, 2, 3), ¿cuál es su posición en $t = 2$?

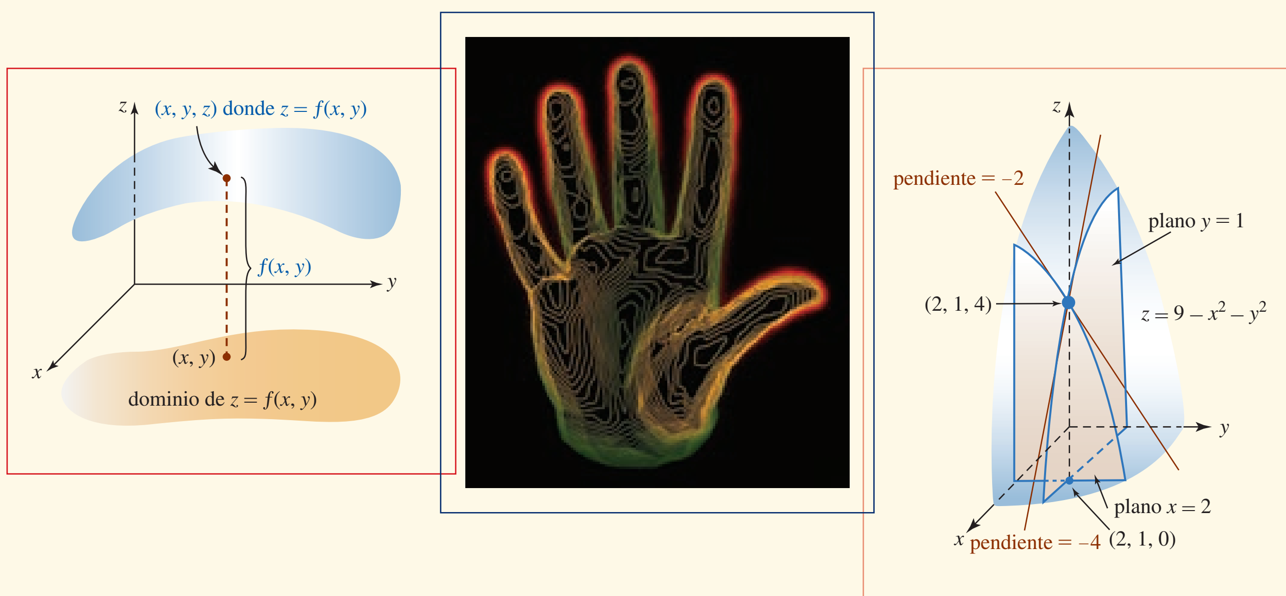
13. La aceleración de una partícula en movimiento es $\mathbf{a}(t) = \sqrt{2}\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{j}$. Dado que la velocidad y la posición de la partícula en $t = \pi/4$ son $\mathbf{v}(\pi/4) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(\pi/4) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (\pi/4)\mathbf{k}$, respectivamente, ¿cuál es la posición de la partícula en $t = 3\pi/4$?

14. Dado que $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} - \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en el tiempo t. Determine la curvatura.

15. Suponga que la función vectorial del problema 5 es el vector de posición de una partícula en movimiento. Encuentre los vectores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ en $t = 1$. Determine la curvatura en este punto.

Capítulo 13

Derivadas parciales



En este capítulo Hasta este punto de nuestro estudio del cálculo, sólo hemos considerado funciones de una sola variable. Previamente se consideraron conceptos de funciones de una sola variable, como límites, tangentes, máximo y mínimo, integrales, etc., extendidos también a funciones de dos o más variables. Este capítulo se dedica fundamentalmente al cálculo diferencial de funciones de múltiples variables.

13.1 Funciones de varias variables

Introducción Recuerde que una función de una variable $y = f(x)$ es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x en el subconjunto X de los números reales, denominado el *dominio* de f, uno y sólo un número real y en otro conjunto de números reales Y. El conjunto $\{y|y = f(x), x \text{ en } X\}$ se llama *rango* de f. En este capítulo consideraremos el cálculo de funciones que son, en la mayoría de las veces, funciones de dos variables. Es probable que el lector ya tenga conocimiento de la existencia de funciones de dos o más variables.

EJEMPLO 1 Algunas funciones de dos variables

a) $A = xy$, área de un rectángulo
b) $V = \pi r^2 h$, volumen de un cilindro circular
c) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, volumen de un cono circular
d) $P = 2x + 2y$, perímetro de un rectángulo ■

Funciones de dos variables La definición formal de una función de dos variables se presenta a continuación.

Definición 13.1.1 Función de dos variables

Una **función de dos variables** es una regla de correspondencia que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) en el subconjunto del plano xy uno y sólo un número z en el conjunto R de números reales.

El conjunto de pares ordenados (x, y) se llama **dominio** de la función y el conjunto de valores correspondientes de z recibe el nombre de **rango**. Una función de dos variables suele escribirse $z = f(x, y)$ y se lee "f de x, y." Las variables x y y se denominan **variables independientes** de la función y z es la **variable dependiente**.

Funciones polinomiales y racionales Una **función polinomial** de dos variables consiste en la suma de potencias $x^m y^n$, donde m y n son enteros no negativos. El cociente de dos funciones polinomiales se denomina **función racional**. Por ejemplo,

Funciones polinomiales:

$$f(x, y) = xy - 5x^2 + 9 \quad \text{y} \quad f(x, y) = 3xy^2 - 5x^2y + x^3$$

Funciones racionales:

$$f(x, y) = \frac{1}{xy - 3y} \quad \text{y} \quad f(x, y) = \frac{x^4y^2}{x^2y + y^5 + 2x}.$$

El dominio de una función polinomial es el plano xy completo. El dominio de una función racional es el plano xy, excepto aquellos pares ordenados (x, y) para los cuales el denominador es cero. Por ejemplo, el dominio de la función racional $f(x, y) = 4/(6 - x^2 - y^2)$ consiste en el plano xy, excepto aquellos puntos (x, y) que yacen en la circunferencia $6 - x^2 - y^2 = 0$ o $x^2 + y^2 = 6$.

EJEMPLO 2 Dominio de una función de dos variables

a) Dado que $f(x, y) = 4 + \sqrt{x^2 - y^2}$, encuentre $f(1, 0)$, $f(5, 3)$ y $f(4, -2)$.
b) Dibuje el dominio de la función.

Solución

a)

$$f(1, 0) = 4 + \sqrt{1 - 0} = 5$$
$$f(5, 3) = 4 + \sqrt{25 - 9} = 4 + \sqrt{16} = 8$$
$$f(4, -2) = 4 + \sqrt{16 - (-2)^2} = 4 + \sqrt{12} = 4 + 2\sqrt{3}$$

b) El dominio de f consiste en todos los pares ordenados (x, y) para los cuales $x^2 - y^2 \geq 0$ o $(x - y)(x + y) \geq 0$. Como se ilustra en la FIGURA 13.1.1, el dominio consiste en todos los puntos sobre las rectas $y = x$ y $y = -x$, y es la región sombreada entre ellas. ■

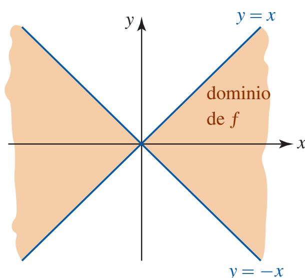


FIGURA 13.1.1 Dominio de f del ejemplo 2

EJEMPLO 3 Funciones de dos variables

a) Una ecuación de un plano $ax + by + cz = d, c \neq 0$, describe una función cuando se escribe como

$$z = \frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y \qquad \text{o} \qquad f(x, y) = \frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y.$$

Puesto que z es un polinomio en x y y, el dominio de la función consiste en el plano xy completo.

b) Un modelo matemático para el área S de la superficie de un cuerpo humano es una función de su peso w y altura h:

$$S(w, h) = 0.1091 w^{0.425} h^{0.725}. \qquad ■$$

Gráficas La **gráfica** de una función $z = f(x, y)$ es una *superficie* en el espacio tridimensional. Vea la FIGURA 13.1.2. En la FIGURA 13.1.3 la superficie es la gráfica de la función polinomial $z = 2x^2 - 2y^2 + 2$.

Recuerde: la gráfica de esta función polinomial es un paraboloide hiperbólico.

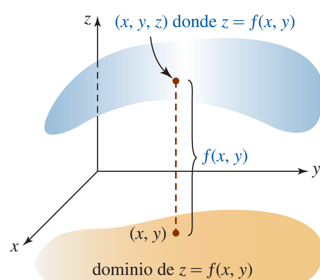


FIGURA 13.1.2 La gráfica de una función de x y y es una superficie

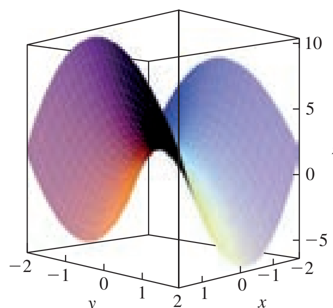


FIGURA 13.1.3 Gráfica de una función polinomial

EJEMPLO 4 Dominio de una función de dos variables

A partir de la discusión de superficies cuádricas de la sección 11.8 usted puede reconocer que la gráfica de una función polinomial $f(x, y) = x^2 + 9y^2$ es un paraboloide elíptico. Puesto que f se define para todo par ordenado de números reales, su dominio es el plano xy completo. Del hecho de que $x^2 \geq 0$ y $y^2 \geq 0$, podemos afirmar que el rango de f está definido por la desigualdad $z \geq 0$. ■

EJEMPLO 5 Dominio de una función de dos variables

En la sección 11.7 vimos que $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ es una esfera de radio 3 centrada en el origen. Al resolver para z, y tomar la raíz cuadrada no negativa, obtenemos la función

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad \text{o} \qquad f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

La gráfica de f es el hemisferio superior que se ilustra en la FIGURA 13.1.4. El dominio de la función es un conjunto de pares ordenados (x, y) donde las coordenadas satisfacen

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 \leq 9.$$

Esto es, el dominio de f consiste en la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y su interior. La inspección de la figura 13.1.4 muestra que el rango de la función es el intervalo [0, 3] sobre el eje z. ■

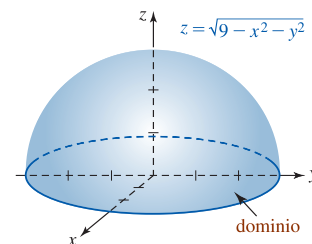


FIGURA 13.1.4 Hemisferio del ejemplo 5

En ciencia a menudo se encuentran las palabras **isotérmico**, **equipotencial** e **isobárico**. El prefijo *iso* proviene de la palabra griega *isos*, la cual significa *igual* o *lo mismo*. Entonces, dichos términos se aplican a líneas o curvas sobre las cuales es *constante* la temperatura, el potencial o la presión barométrica.

EJEMPLO 6 Función potencial

El potencial electrostático en un punto $P(x, y)$ en el plano debido a una carga puntual unitaria en el origen está dado por $U = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. Si el potencial es una constante, digamos $U = c$, donde c es una constante positiva, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}.$$

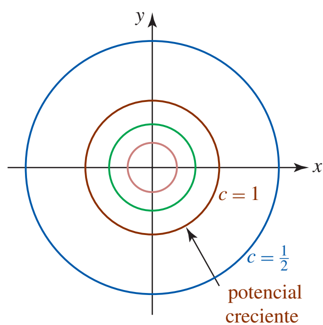


FIGURA 13.1.5 Curvas equipotenciales del ejemplo 6

Así, como se ilustra en la FIGURA 13.1.5, las curvas de equipotencial son círculos concéntricos que rodean a la carga. Note que en la figura 13.1.5 es posible tener una percepción del comportamiento de la función U, específicamente donde ésta crece (o decrece), al observar la dirección creciente de c. ■

Curvas de nivel En general, si una función de dos variables está dada por $z = f(x, y)$, entonces las curvas definidas por $f(x, y) = c$, para una c apropiada, reciben el nombre de **curvas de nivel** de f. La palabra *nivel* proviene del hecho de que podemos interpretar $f(x, y) = c$ como la proyección sobre el plano xy de la curva de intersección o **traza** de $z = f(x, y)$ y el plano (horizontal o de nivel) $z = c$. Vea la FIGURA 13.1.6.

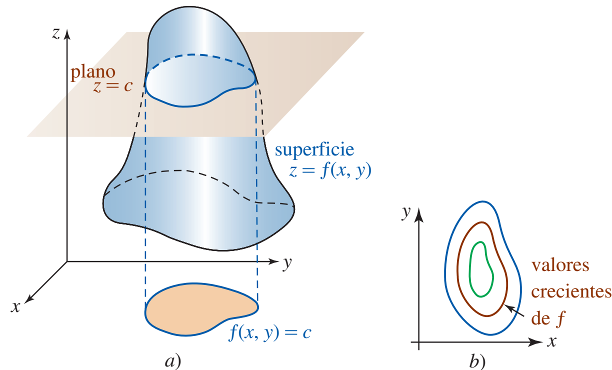


FIGURA 13.1.6 Superficie en *a*) y curvas de nivel en *b*)

EJEMPLO 7 Curvas de nivel

Las curvas de nivel de una función polinomial $f(x, y) = y^2 - x^2$ son la familia de curvas definidas por $y^2 - x^2 = c$. Como se muestra en la FIGURA 13.1.7, cuando $c > 0$ o $c < 0$, un miembro de esta familia de curvas es una hipérbola. Para $c = 0$, obtenemos las rectas $y = x$ y $y = -x$.

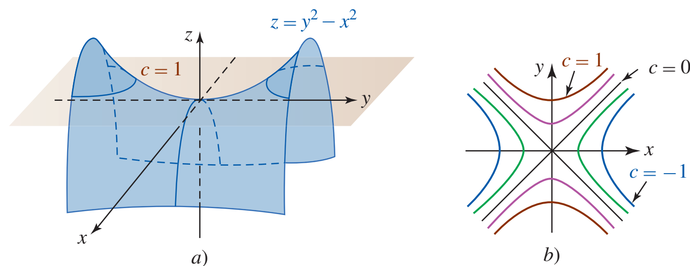


FIGURA 13.1.7 Superficie y curvas de nivel del ejemplo 7 ■

En la mayoría de los casos la tarea de graficación de curvas de nivel de una función de dos variables $z = f(x, y)$ es considerable. Usamos un SAC para generar las superficies y curvas de nivel correspondientes de la FIGURA 13.1.8 y FIGURA 13.1.9.

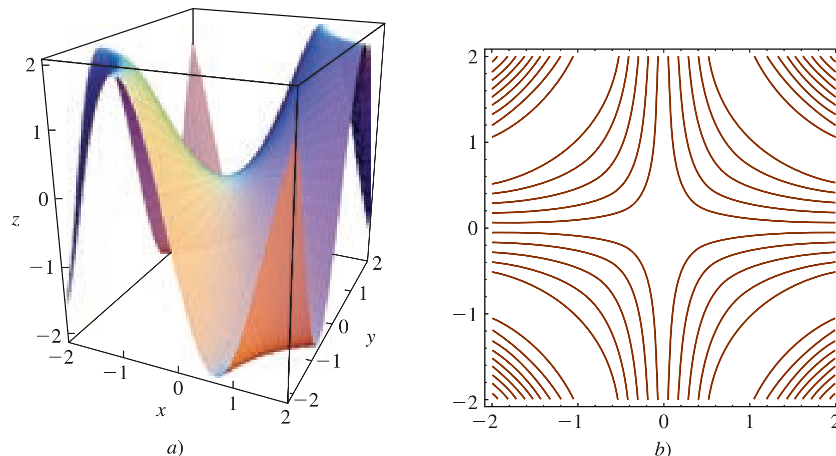


FIGURA 13.1.8 Gráfica de $f(x, y) = 2 \operatorname{sen} xy$ en *a*); curvas de nivel en *b*)

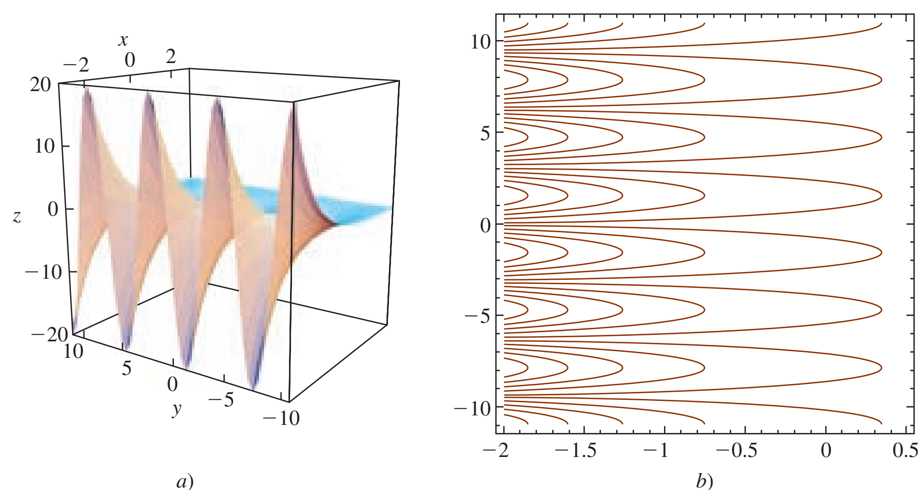


FIGURA 13.1.9 Gráfica de $f(x, y) = e^{-x}$ sen y en *a*); curvas de nivel en *b*)

Las curvas de nivel de una función *f* también reciben el nombre de **líneas de contorno**. A nivel práctico, los **mapas de contorno** son usados más a menudo para desplegar curvas de igual elevación. En la FIGURA 13.1.10 podemos observar que un mapa de contornos ilustra los diversos segmentos de una columna que tienen una altura dada. Ésta es la idea de los contornos de la FIGURA 13.1.11,* los cuales muestran el espesor de la ceniza volcánica alrededor del volcán El Chichón, en el estado de Chiapas, México. El Chichón hizo erupción el 28 de marzo y el 4 de abril de 1982.

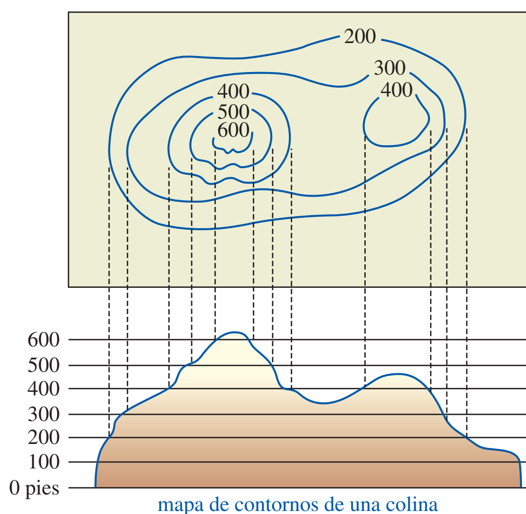


FIGURA 13.1.10 Mapa de contornos

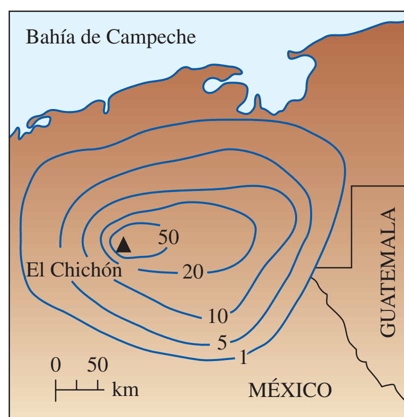


FIGURA 13.1.11 Mapa de contornos que muestra la profundidad de la ceniza alrededor del volcán

Funciones de tres o más variables Las definiciones de funciones de tres o más variables son simplemente generalizaciones de la definición 13.1.1. Por ejemplo, una **función de tres variables** es una regla de correspondencia que asigna a cada triada ordenada de números reales (x, y, z) en un subconjunto del espacio tridimensional, uno y sólo un número w en el conjunto R de los números reales. Una función de tres variables suele denotarse por medio de $w = f(x, y, z)$ o $w = F(x, y, z)$. Una **función polinomial** de tres variables consiste en la suma de potencias $x^m y^n z^k$, donde m, n y k son enteros no negativos. El cociente de dos funciones polinomiales se llama **función racional**.

Por ejemplo, el volumen V y el área de la superficie S de una caja rectangular son funciones polinomiales de tres variables:

$$V = xyz \qquad \text{y} \qquad S = 2xy + 2xz + 2yz.$$

*Adaptado con permiso de la revista *National Geographic*.

La ley de Poiseuille establece que la tasa de descarga, o tasa de flujo, de un fluido viscoso (como la sangre) a través de un tubo (como una arteria) es

$$Q = k\frac{R^4}{L}(p_1 - p_2),$$

donde k es una constante, R es el radio del tubo, L es su longitud, y p_1 y p_2 son las presiones en los extremos del tubo. Éste es un ejemplo de una función *de cuatro* variables.

Nota: Puesto que se requieren cuatro dimensiones, no es posible graficar una función de tres variables.

EJEMPLO 8 Dominio de una función de cuatro variables

El dominio de la función racional de cuatro variables

$$f(x, y, z) = \frac{2x + 3y + z}{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisface $x^2 + y^2 + z^2 \neq 4$. En otras palabras, el dominio de f es todo el espacio tridimensional *salvo* los puntos que yacen sobre la superficie de una esfera de radio 2 centrada en el origen. ■

Una elección de palabras desafortunada, pero común, puesto que las *superficies de nivel* suelen no estar a nivel.

Superficies de nivel Para una función de tres variables, $w = f(x, y, z)$, las superficies definidas por $f(x, y, z) = c$, donde c es una constante, se llaman **superficies de nivel** de la función f.

EJEMPLO 9 Algunas superficies de nivel

a) Las superficies de nivel del polinomio $f(x, y, z) = x - 2y + 3z$ son una familia de planos paralelos definidos por $x - 2y + 3z = c$. Vea la FIGURA 13.1.12.

b) Las superficies de nivel del polinomio $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ son una familia de esferas concéntricas definidas por $x^2 + y^2 + z^2 = c$, $c > 0$. Vea la FIGURA 13.1.13.

c) Las superficies de nivel de una función racional $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)/z$ están dadas por $(x^2 + y^2)/z = c$ o $x^2 + y^2 = cz$. Algunos miembros de esta familia de paraboloides se presentan en la FIGURA 13.1.14.

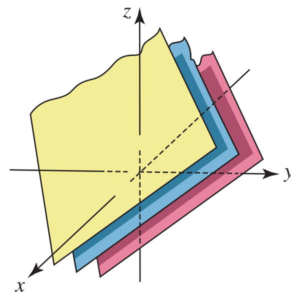


FIGURA 13.1.12 Superficies de nivel en *a*) del ejemplo 9

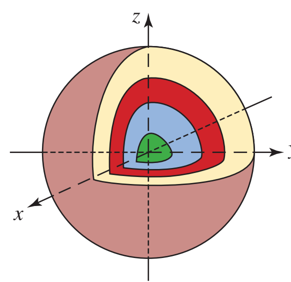


FIGURA 13.1.13 Superficies de nivel en *b*) del ejemplo 9

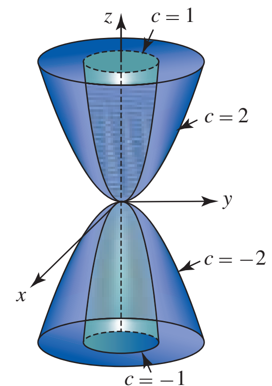


FIGURA 13.1.14 Superficies de nivel en *c*) del ejemplo 9 ■

Ejercicios 13.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-40.

Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre el dominio de la función dada.

1. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

2. $f(x, y) = (x^2 - 9y^2)^{-2}$

3. $f(x, y) = \dfrac{y^2}{y + x^2}$

4. $f(x, y) = x^2 - y^2\sqrt{4 + y}$

5. $f(s, t) = s^3 - 2t^2 + 8st$

6. $f(u, v) = \dfrac{u}{\ln(u^2 + v^2)}$

7. $g(r, s) = e^{2r}\sqrt{s^2 - 1}$

8. $g(\theta, \phi) = \dfrac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi}$

9. $H(u, v, w) = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - 16}$

10. $f(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{z - 5}$

En los problemas 11-18, relacione el conjunto de puntos dados en la figura con el dominio de una de las funciones en *a*)-*h*).

a) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ ***b***) $f(x, y) = \ln(x - y^2)$

c) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y - x}$ ***d***) $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x}{y} - 1}$

e) $f(x, y) = \sqrt{xy}$ ***f***) $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(xy)$

g) $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{xy}$ ***h***) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{y - x}$

11.

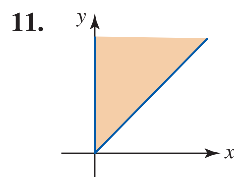


FIGURA 13.1.15 Gráfica del problema 11

12.

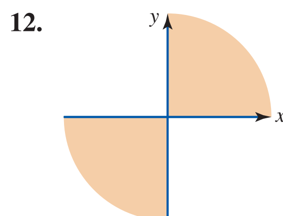


FIGURA 13.1.16 Gráfica del problema 12

13.

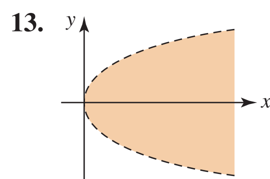


FIGURA 13.1.17 Gráfica del problema 13

14.

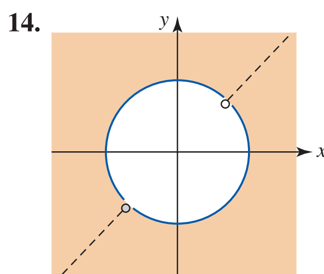


FIGURA 13.1.18 Gráfica del problema 14

15.

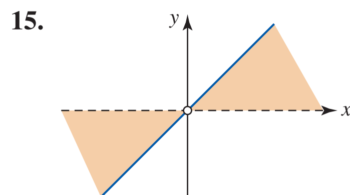


FIGURA 13.1.19 Gráfica del problema 15

16.

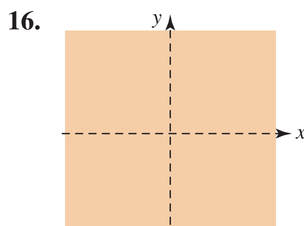


FIGURA 13.1.20 Gráfica del problema 16

17.

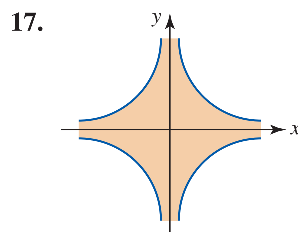


FIGURA 13.1.21 Gráfica del problema 17

18.

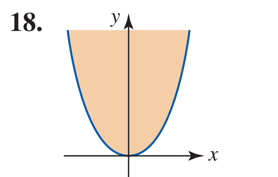


FIGURA 13.1.22 Gráfica del problema 18

En los problemas 19-22, dibuje el dominio de la función dada.

19. $f(x, y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

20. $f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2)(y^2 - 4)}$

21. $f(x, y) = \sqrt{\ln(y - x + 1)}$

22. $f(x, y) = e^{\sqrt{xy+1}}$

En los problemas 23-26, determine el rango de la función dada.

23. $f(x, y) = 10 + x^2 + 2y^2$ **24.** $f(x, y) = x + y$

25. $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(x + 2y + 3z)$ **26.** $f(x, y, z) = 7 - e^{xyz}$

En los problemas 27-30, evalúe la función dada en los puntos indicados.

27. $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y (2t - 1)dt$; $(2, 4), (-1, 1)$

28. $f(x, y) = \ln\dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$; $(3, 0), (5, -5)$

29. $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^2$; $(-1, 1, -1), (2, 3, -2)$

30. $F(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$; $(\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6}), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$

En los problemas 31-36, describa la gráfica de la función dada.

31. $z = x$ **32.** $z = y^2$

33. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ **34.** $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

35. $z = \sqrt{36 - x^2 - 3y^2}$ **36.** $z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$

En los problemas 37-42, dibuje alguna de las curvas de nivel asociadas con la función dada.

37. $f(x, y) = x + 2y$ **38.** $f(x, y) = y^2 - x$

39. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$ **40.** $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$

41. $f(x, y) = e^{y - x^2}$ **42.** $f(x, y) = \tan^{-1}(y - x)$

En los problemas 43-46, describa las superficies de nivel pero no grafique.

43. $f(x, y, z) = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}z^2$

44. $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2$

45. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 6z^2$ **46.** $G(x, y, z) = 4y - 2z + 1$

47. Grafique alguna de las superficies de nivel asociadas con $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ para $c = 0$, $c > 0$ y $c < 0$.

48. Dado que

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9},$$

encuentre las intersecciones x, y y z de las superficies de nivel que pasan por $(-4, 2, -3)$.

≡ Aplicaciones

49. La temperatura, presión y volumen de un gas ideal encerrado están relacionadas por medio de $T = 0.01PV$, donde T, P y V se miden en kelvins, atmósferas y litros, respectivamente. Dibuje las isotermas $T = 300$ K, 400 K y 600 K.

50. Exprese la altura de una caja rectangular con una base cuadrada como una función del volumen y de la longitud de un lado de la caja.

51. Una lata de refresco se construye con un costado lateral de estaño y una tapa y fondo de aluminio. Dado que el costo es de 1.8 centavos por unidad cuadrada de la tapa, 1 centavo por unidad cuadrada del fondo y 2.3 centavos por uni-

dad cuadrada del costado, determine la función de costo $C(r, h)$, donde r es el radio de la lata y h es su altura.

52. Una caja rectangular cerrada va a construirse con 500 cm^2 de cartón. Exprese el volumen V como una función de la longitud x y el ancho y.

53. Como se muestra en la FIGURA 13.1.23, una tapa cónica descansa sobre la parte superior de un cilindro circular. Si la altura de la tapa es dos tercios de la altura del cilindro, exprese el volumen del sólido como una función de las variables indicadas.

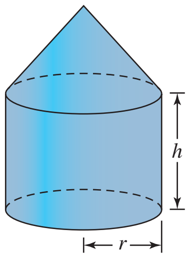


FIGURA 13.1.23 Cilindro con tapa cónica del problema 53

54. A menudo una muestra de tejido es un cilindro que se corta oblicuamente, como se muestra en la FIGURA 13.1.24. Exprese el espesor t del corte como una función de x, y y z.

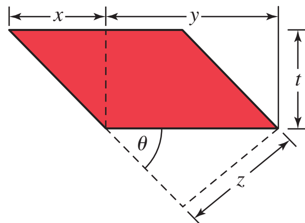


FIGURA 13.1.24 Muestra de tejido del problema 54

55. En medicina a menudo se emplean fórmulas para el área de la superficie (vea el ejemplo 3*b*) para calibrar dosis de fármacos, puesto que se supone que la dosis del fármaco D y el área de la superficie S son directamente proporcionales. La siguiente función simple puede utilizarse para obtener una estimación rápida del área superficial del cuerpo de un humano: $S = 2ht$, donde h es la altura (en cm) y t es la máxima circunferencia de músculo (en cm). Estime el área de la superficie de una persona de 156 cm de altura con una circunferencia de músculo máxima de 50 cm. Estime su propia área superficial.

≡ Proyectos

56. Factor de enfriamiento Durante su investigación del invierno de 1941 en el Antártico, el doctor Paul A. Siple ideó el siguiente modelo matemático para definir el factor de enfriamiento del viento:

$$H(v, T) = \left(10\sqrt{v} - v + 10.5\right)(33 - T),$$

donde H se mide en kcal/m^2h, v es la velocidad del viento en m/s y T es la temperatura en grados Celsius. Un ejemplo de este índice es: 1 000 = muy frío, 1 200 = implacablemente frío y 1 400 = congelamiento de la carne expuesta. Determine el factor de enfriamiento en −6.67 °C (20 °F) con una velocidad de viento de 20 m/s (45 mi/h). Escriba un breve informe que defina con precisión el factor de enfriamiento. Encuentre al menos otro modelo matemático para el factor de enfriamiento del viento.

57. Flujo de agua Cuando el agua fluye de un grifo, como se muestra en la FIGURA 13.1.25*a*), se contrae a medida que se acelera hacia abajo. Eso ocurre debido a que la tasa de flujo Q, la cual se define como la velocidad por el área de la sección transversal de la columna de agua, debe ser constante en cada nivel. En este problema suponga que las secciones transversales de la columna de fluido son circulares.

a) Considere la columna de agua que se muestra en la figura 13.1.25*b*). Suponga que v es la velocidad del agua en el nivel superior, V es la velocidad del agua en el nivel inferior a una distancia h unidades por debajo del nivel superior, R es el radio de la sección transversal en el nivel superior y r es el radio de la sección transversal en el nivel inferior. Muestre que la tasa de flujo Q como una función de r y R es

$$Q = \frac{\pi r^2 R^2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{R^4 - r^4}},$$

donde g es la aceleración de la gravedad. [*Sugerencia*: Empiece expresando el tiempo t que tarda la sección transversal del agua en caer una distancia h en términos de u y V. Por conveniencia considere la dirección positiva hacia abajo.]

b) Determine la tasa de flujo Q (en cm^3/s) si $g = 980$ cm/s^2, $h = 10$ cm, $R = 1$ cm y $r = 0.2$ cm.

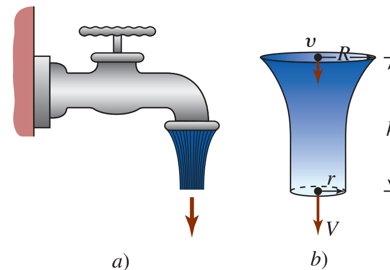


FIGURA 13.1.25 El agua fluye por el grifo del problema 57

13.2 Límites y continuidad

Introducción En el caso de funciones de una variable, en muchos casos es factible hacer un juicio acerca de la existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$. También se aprovecha que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si y sólo si $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe y son iguales al mismo número L, en cuyo caso $\lim_{x\to a} f(x) = L$. En esta sección veremos que la situación es más difícil en la consideración de límites de funciones de dos variables.

Terminología Antes de proceder con la discusión sobre límites es necesario introducir cierta terminología relativa a conjuntos que se utilizará en este apartado, así como en las secciones y capítulos que siguen. El conjunto en el espacio bidimensional

$$\{(x, y)|(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\} \quad (1)$$

consiste en todos los puntos *en el interior de*, pero *no en*, un círculo con centro (x_0, y_0) y radio $\delta > 0$. El conjunto (1) se denomina **disco abierto**. Por otro lado, el conjunto

$$\{(x, y)|(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta^2\} \quad (2)$$

es un **disco cerrado**. Un disco cerrado incluye todos los puntos *en el interior de* y *en* un círculo con centro (x_0, y_0) y radio $\delta > 0$. Vea la FIGURA 13.2.1*a*). Si R es cierta región del plano xy, entonces un punto (a, b) se dice que será un **punto interior** de R si hay *algún* disco abierto centrado en (a, b) que contiene sólo puntos de R. En contraste, afirmamos que (a, b) es un **punto frontera** de R si el interior de *cualquier* disco abierto centrado en (a, b) contiene tanto puntos en R como puntos en no R. La región R se dice que será **abierta** si contiene puntos no frontera y **cerrada** si contiene todos sus puntos frontera. Vea la figura 13.2.1*b*). Se dice que una región R está **acotada** si puede estar contenida en un rectángulo suficientemente grande en el plano. La figura 13.2.1*c*) ilustra una región acotada; el primer cuadrante ilustrado en la figura 13.2.1*d*) es un ejemplo de una región **no acotada**. Estos conceptos se llevan de manera natural al espacio tridimensional. Por ejemplo, el análogo de un disco abierto es una **bola abierta**. Una bola abierta consiste en todos los puntos *en el interior*, pero *no en*, una esfera con centro (x_0, y_0) y radio $\delta > 0$:

$$\{(x, y, z)|(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0) < \delta^2\}. \quad (3)$$

Una región en el espacio tridimensional está acotada si puede estar contenida en una caja rectangular suficientemente grande.

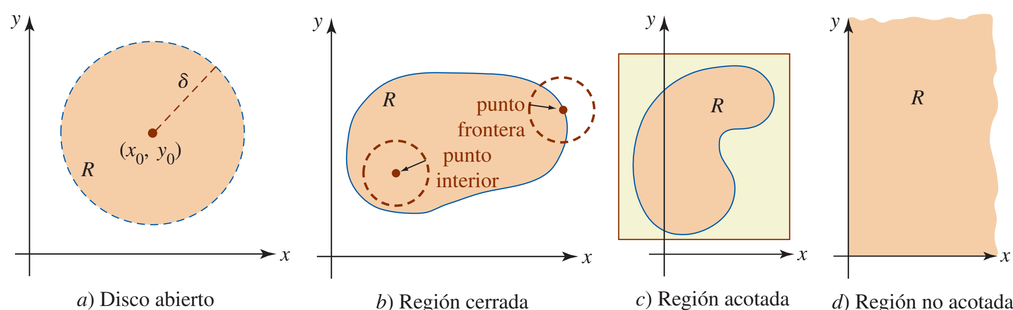


FIGURA 13.2.1 Varias regiones en el espacio bidimensional

Límites de funciones de dos variables Analizar un límite dibujando la gráfica de $z = f(x, y)$ no es conveniente ni es una rutina posible para la mayor parte de las funciones de dos variables. Por intuición sabemos que f tiene un límite en un punto (a, b) si los valores de la función $f(x, y)$ se acercan a un número L conforme (x, y) se acerca a (a, b). Escribimos $f(x, y) \to L$ como $(x, y) \to (a, b)$, o

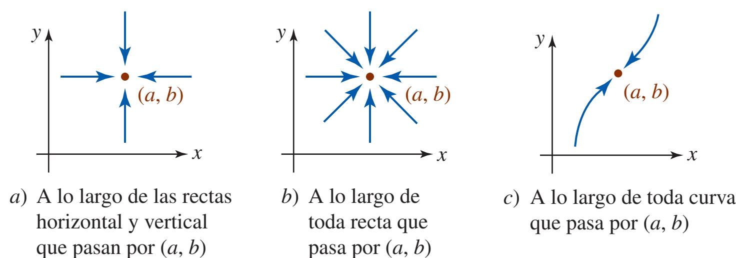
$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L.$$

Para tener un poco más de precisión, f tiene un límite L en el punto (a, b) si los puntos en el espacio $(x, y, f(x, y))$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a (a, b, L) siempre que (x, y) sea suficientemente cercano a (a, b).

La noción de (x, y) "aproximándose" a un punto (a, b) no es tan simple como para funciones de una variable donde $x \to a$ significa que x puede acercarse a a sólo desde la izquierda y desde la derecha. En el plano xy hay un número infinito de maneras de aproximarse al punto (a, b). Como se muestra en la FIGURA 13.2.2, para que $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ exista, requerimos ahora que f se aproxime al mismo número L a lo largo de *cualquier* **trayectoria** o curva posible que pase por (a, b). Si se pone lo anterior de manera negativa:

- Si $f(x, y)$ no se aproxima al mismo número L por dos trayectorias diferentes a (a, b), entonces $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ no existe. (4)

En la discusión de $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ que sigue se supondrá que la función f está definida en todo punto (x, y) en un disco abierto centrado en (a, b) pero no necesariamente *en* el propio (a, b).



a) A lo largo de las rectas horizontal y vertical que pasan por (a, b)

b) A lo largo de toda recta que pasa por (a, b)

c) A lo largo de toda curva que pasa por (a, b)

FIGURA 13.2.2 Tres de muchas maneras de aproximar el punto (a, b)

EJEMPLO 1 Un límite que no existe

Demuestre que $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^2 - 3y^2}{x^2 + 2y^2}$ no existe.

Solución La función $f(x, y) = (x^2 - 3y^2)/(x^2 + 2y^2)$ se define en todas partes excepto en $(0, 0)$. Como se ilustra en la figura 13.2.2*a*), dos maneras de aproximarse a $(0, 0)$ son a lo largo del eje x ($y = 0$) y a lo largo del eje y ($x = 0$). En $y = 0$ se tiene

$$\lim_{(x, 0)\to(0, 0)} f(x, 0) = \lim_{(x, 0)\to(0, 0)} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$$

donde $x = 0$,

$$\lim_{(0, y)\to(0, 0)} f(0, y) = \lim_{(0, y)\to(0, 0)} \frac{0 - 3y^2}{0 + 2y^2} = -\frac{3}{2}.$$

En vista de (4), concluimos que el límite no existe. ■

EJEMPLO 2 Un límite que no existe

Demuestre que $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ no existe.

Solución En este caso los límites a lo largo de los ejes x y y son los mismos:

$$\lim_{(x, 0)\to(0, 0)} f(x, 0) = \lim_{(x, 0)\to(0, 0)} \frac{0}{x^2} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(0, y)\to(0, 0)} f(0, y) = \lim_{(0, y)\to(0, 0)} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Sin embargo, esto *no* significa que $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ exista, ya que no se ha examinado *toda* trayectoria a $(0, 0)$. Como se ilustra en la figura 13.2.2*b*), ahora intentaremos cualquier recta que pase por el origen dada por $y = mx$:

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

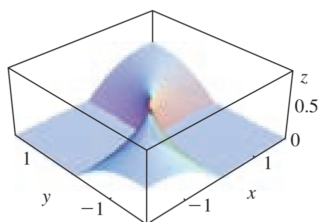


FIGURA 13.2.3 Gráfica de la función del ejemplo 2

Puesto que $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ depende de la pendiente m de la recta sobre la cual se hace la aproximación al origen, concluimos que el límite no existe. Por ejemplo, en $y = x$ y en $y = 2x$, tenemos, respectivamente,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} \quad \text{y} \quad \lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, x) = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2},$$

$$f(x, 2x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} \quad \text{y} \quad \lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, 2x) = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} = \frac{2}{5}.$$

Una gráfica generada por computadora de la superficie se presenta en la FIGURA 13.2.3. Si tiene en mente que el origen está en el centro de la caja, debe tener claro por qué diferentes trayectorias a $(0, 0)$ producen diferentes valores del límite. ■

EJEMPLO 3 Un límite que no existe

Demuestre que $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^3y}{x^6 + y^2}$ no existe.

Solución Sea $f(x, y) = x^3y/(x^6 + y^2)$. Se le pide al lector demostrar que a lo largo del eje x, el eje y, cualquier recta $y = mx$, $m \neq 0$ que pasa por $(0, 0)$, y a lo largo de cualquier parábola

$y = ax^2$, $a \neq 0$, que pasa por (0, 0), $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Si bien esto constituye verdaderamente un número infinito de trayectorias al origen, el límite *sigue* sin existir, ya que $y = x^3$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, x^3) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}.$$ ■

Propiedades de límites En los siguientes dos teoremas se mencionan las propiedades de límites para funciones de dos variables. Estos teoremas son las contrapartes en dos variables de los teoremas 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3.

Teorema 13.2.1 Tres límites fundamentales

i) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c$, c una constante

ii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$

iii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} cf(x, y) = c \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$

Teorema 13.2.2 Límite de una suma, producto, cociente

Suponga que (a, b) es un punto en el plano xy y que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y)$ existe. Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L_1$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = L_2$, entonces

i) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x, y) \pm g(x, y)] = L_1 \pm L_2$,

ii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)g(x, y) = L_1L_2$, y

iii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$.

EJEMPLO 4 Límite de una suma

Evalúe $\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x + y^2)$.

Solución De *ii*) del teorema 13.2.1 advertimos primero que

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} x = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(2,3)} y = 3.$$

Entonces de las partes *i*) y *ii*) del teorema 13.2.2 sabemos que el límite de una suma es la suma de los límites y el límite de un producto es el producto de los límites siempre que exista el límite:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(2,3)} (x + y^2) &= \lim_{(x,y)\to(2,3)} x + \lim_{(x,y)\to(2,3)} y^2 \\ &= \lim_{(x,y)\to(2,3)} x + \left(\lim_{(x,y)\to(2,3)} y\right)\left(\lim_{(x,y)\to(2,3)} y\right) \\ &= 2 + 3 \cdot 3 = 11.\end{aligned}$$ ■

Uso de coordenadas polares En algunos casos las coordenadas polares pueden ser de utilidad en la evaluación de un límite de la forma $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$. Si $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y $r^2 = x^2 + y^2$, entonces $(x, y) \to (0, 0)$ si y sólo si $r \to 0$.

EJEMPLO 5 Uso de coordenadas polares

Evalúe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{10xy^2}{x^2 + y^2}$.

Solución Al sustituir $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ en la función, obtenemos

$$\frac{10xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{10r^3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta}{r^2} = 10r\cos\theta\,\text{sen}^2\theta.$$

Puesto que $\lim_{r\to 0} r\cos\theta\,\text{sen}^2\,\theta = 0$, concluimos que

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{10xy^2}{x^2+y^2} = 0. \qquad ■$$

En el ejemplo 8 examinaremos de nuevo el límite del ejemplo 5.

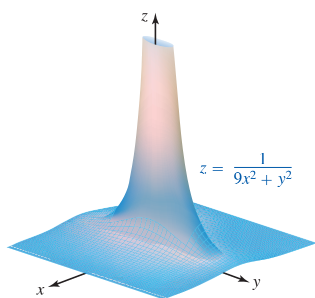


FIGURA 13.2.4 Función con una discontinuidad infinita en (0, 0)

Continuidad Una función $z = f(x, y)$ es **continua** en (a, b) si $f(a, b)$ está definida, $\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y)$ existe y el límite es el mismo que el valor de la función $f(a, b)$; esto es,

$$\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y) = f(a, b). \tag{5}$$

Si f no es continua en (a, b), se afirma que es **discontinua**. La gráfica de una función continua es una superficie sin quiebres. De la gráfica de la función $f(x, y) = 1/(9x^2 + y^2)$ en la FIGURA 13.2.4 vemos que f tiene una discontinuidad infinita en (0, 0), esto es, $f(x, y) \to \infty$ como $(x, y) \to (0, 0)$. Una función $z = f(x, y)$ es **continua sobre un región *R*** del plano xy si f es continua en cualquier punto en R. La **suma** y el **producto** de dos funciones continuas también son continuas. El **cociente** de dos funciones continuas es continuo, excepto en el punto donde el denominador es cero. Además, si g es una función de dos variables continuas en (a, b) y F es una función de una variable continua en $g(a, b)$, entonces la **composición** $f(x, y) = F(g(x, y))$ es continua en (a, b).

EJEMPLO 6 Función discontinua en (0, 0)

La función $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$ es discontinua en (0, 0), ya que $f(0, 0)$ no está definida. Sin embargo, como puede observarse en el siguiente ejemplo, f tiene una discontinuidad removible en (0, 0). ■

EJEMPLO 7 Función continua en (0, 0)

La función f definida por

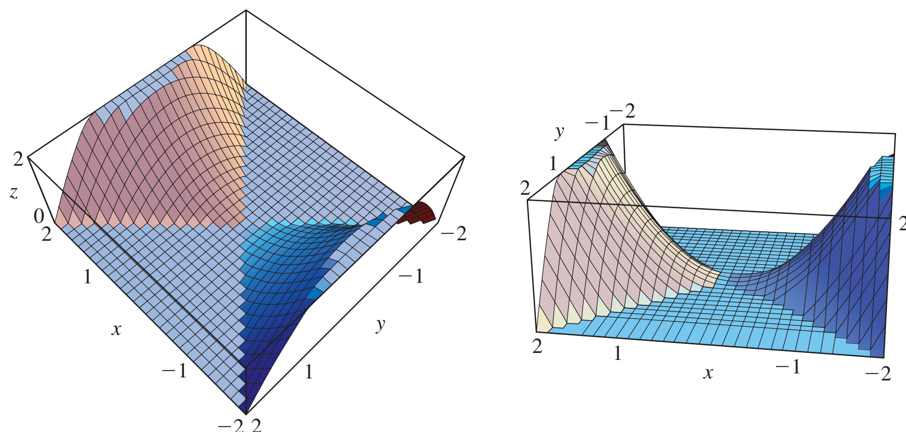
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en (0, 0), ya que $f(0, 0) = 0$ y

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} (x^2 - y^2) = 0^2 - 0^2 = 0.$$

Por consiguiente, advertimos que $\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, y) = f(0, 0)$.

Con la ayuda de un SAC vemos en la FIGURA 13.2.5 dos perspectivas diferentes (ViewPoint en *Mathematica*) de la superficie definida por $z = f(x, y)$. Note en los incisos *a*) y *b*) de la figura 13.2.5 la orientación del eje x y del eje y.

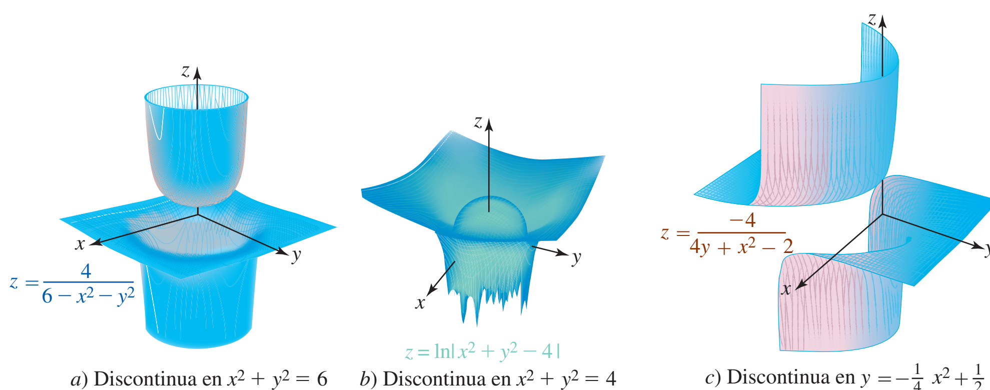


a) Viendo hacia abajo sobre la superficie

b) Viendo ligeramente hacia abajo y hacia el eje x

FIGURA 13.2.5 Gráfica de la función del ejemplo 7 ■

Funciones polinomiales y racionales En la sección 13.1 vimos que una **función polinomial** de dos variables consiste en la suma de potencias $x^m y^n$, donde m y n son enteros no negativos, y que el cociente de dos funciones polinomiales recibe el nombre de **función racional**. Las funciones polinomiales, como $f(x, y) = xy$, son continuas por todo el plano xy. Las funciones racionales son continuas salvo en puntos donde el denominador es cero. Por ejemplo, la función racional $f(x, y) = xy/(y - x)$ es continua salvo en puntos sobre la recta $y = x$. En la FIGURA 13.2.6 se han ilustrado las gráficas de tres funciones que son discontinuas en puntos sobre una curva. En los incisos *a*) y *c*) de la figura 13.2.6, la función racional es discontinua en todos los puntos sobre la curva obtenida igualando a 0 el denominador. En la figura 13.2.6*b*) la función logarítmica es discontinua donde $x^2 + y^2 - 4 = 0$, esto es, sobre el círculo $x^2 + y^2 = 4$.



a) Discontinua en $x^2 + y^2 = 6$ *b*) Discontinua en $x^2 + y^2 = 4$ *c*) Discontinua en $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$

FIGURA 13.2.6 Tres funciones discontinuas

Funciones de tres o más variables Las nociones de límite y continuidad para funciones de tres o más variables son extensiones naturales de las que acaban de considerarse. Por ejemplo, una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ es continua en (a, b, c) si

$$\lim_{(x, y, z)\to(a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c).$$

La función polinomial en tres variables $f(x, y, z) = xy^2z^3$ es continua a través del espacio tridimensional. La función racional

$$f(x, y, z) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + (z - 1)^2}$$

es continua salvo en el punto (0, 0, 1). La función racional

$$f(x, y, z) = \frac{x + 3y}{2x + 5y + z}$$

es continua excepto en los puntos (x, y, z) sobre el plano $2x + 5y + z = 0$.

Definición formal de un límite La discusión anterior conduce a la definición formal del límite de una función $z = f(x, y)$ en un punto (a, b). Esta **definición ε-δ** es análoga a la definición 2.6.1.

Definición 13.2.1 Definición de un límite

Suponga que una función f de dos variables se define en cualquier punto (x, y) en un disco abierto centrado en (a, b), salvo posiblemente en (a, b). Entonces

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

significa que para toda $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - a)^2} < \delta.$$

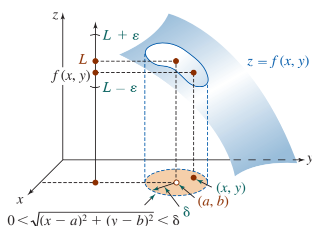


FIGURA 13.2.7 Cuando $(x, y) \neq (a, b)$ es un disco abierto, $f(x, y)$ está en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

Como se ilustra en la FIGURA 13.2.7, cuando f tiene un límite en (a, b), para un $\varepsilon > 0$, sin que importe cuán pequeño, es posible encontrar un disco abierto de radio δ centrado en (a, b) de modo que $L - \varepsilon < f(x, y) < L + \varepsilon$ para todo punto $(x, y) \neq (a, b)$ dentro del disco. El disco abierto con radio $\delta > 0$ y su centro (a, b) eliminado se definen mediante la desigualdad

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} < \delta.$$

Como se mencionó antes, los valores de f son cercanos a L siempre que (x, y) sea cercano a (a, b). El concepto de "suficientemente cercano" se define mediante el número δ.

EJEMPLO 8 Repaso del ejemplo 5

Demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{10xy^2}{x^2+y^2} = 0.$

Solución De la definición 13.2.1, si $\varepsilon > 0$ está dado, se desea determinar un número $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{10xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

La última línea es lo mismo que

$$\frac{10|x|y^2}{x^2+y^2} < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

Como $x^2 \geq 0$, puede escribirse $y^2 \leq x^2 + y^2$ y

$$\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1.$$

Así,
$$\frac{10|x|y^2}{x^2+y^2} = 10|x| \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 10|x| = 10\sqrt{x^2} \leq 10\sqrt{x^2+y^2}.$$

De modo que si se elige $\delta = \varepsilon/10$, tenemos

$$\left|\frac{10xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| \leq 10\sqrt{x^2+y^2} \leq 10 \cdot \frac{\varepsilon}{10} = \varepsilon.$$

Por la definición 13.2.1, esto demuestra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0. \qquad \blacksquare$$

Ejercicios 13.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-41.

Fundamentos

En los problemas 1-30, evalúe el límite dado, si existe.

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(5,-1)} (x^2+y^2)$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2-y}{x-y}$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2+y^2}{x^2+y^2}$
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{4x^2+y^2}{16x^4+y^4}$
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{4-x^2-y^2}{x^2+y^2}$
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y}{x^2+2y^2}$
7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$
8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6xy^2}{x^2+y^4}$
9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^3y^2(x+y)^3$
10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{xy}{x^2-y^2}$
11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{x+y+1}$
12. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{x^2+y^2}$
13. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{xy}{x^3+y^2}$
14. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,\pi/4)} \cos(3x+y)$
15. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-3y+1}{x+5y-3}$
16. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+5y^4}$
17. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,3)} xy^2\left(\frac{x+2y}{x-y}\right)$
18. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2y}{x^3+y^3}$
19. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-x-y+1}{x^2+y^2-2x-2y+2}$
20. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{xy-3y}{x^2+y^2-6y+9}$

21. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^3y + xy^3 - 3x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2}$

22. $\lim_{(x, y)\to(-2, 2)} \dfrac{y^3 + 2x^3}{x + 5xy^2}$

23. $\lim_{(x, y)\to(1, 1)} \ln(2x^2 - y^2)$ **24.** $\lim_{(x, y)\to(1, 2)} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}(x/y)}{\cos^{-1}(x - y)}$

25. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2}$ **26.** $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2 + 3y^2)}{x^2 + y^2}$

27. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{6xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **28.** $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

29. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$ **30.** $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

En los problemas 31-34, determine dónde es continua la función indicada.

31. $f(x, y) = \sqrt{x}\cos\sqrt{x + y}$ **32.** $f(x, y) = y^2e^{1/xy}$

33. $f(x, y) = \tan\dfrac{x}{y}$

34. $f(x, y) = \ln(4x^2 + 9y^2 + 36)$

En los problemas 35 y 36, determine si la función indicada es continua en los conjuntos dados en el plano *xy*.

35. $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$

a) $x^2 + y^2 < 1$ ***b***) $x \geq 0$ ***c***) $y > x$

36. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$

a) $y \geq 3$ ***b***) $|x| + |y| < 1$ ***c***) $(x - 2)^2 + y^2 < 1$

37. Determine si la función *f* definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{6x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en (0, 0).

38. Muestre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en cada variable por separado en (0, 0), esto es, que $f(x, 0)$ y $f(0, y)$ son continuas en $x = 0$ y $y = 0$, respectivamente. Demuestre, sin embargo, que *f* es no continua en (0, 0).

≡ Piense en ello

En los problemas 39 y 40, emplee la definición 13.2.1 para demostrar el resultado indicado; esto es, encuentre δ para un $\varepsilon > 0$ arbitrario.

39. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{3x^2y}{2x^2 + 2y^2} = 0$ **40.** $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0$

41. Determine si existen puntos en los cuales la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x - y}, & y \neq x \\ 3x^2, & y = x \end{cases}$$

es discontinua.

42. Utilice la definición 13.2.1 para demostrar que $\lim_{(x, y)\to(a, b)} y = b$.

13.3 Derivadas parciales

Introducción La derivada de una función de **una variable** $y = f(x)$ está dada por el límite de un cociente de diferencia

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Exactamente de la misma manera, podemos definir la derivada de primer orden de una función de **dos variables** $z = f(x, y)$ con respecto a *cada* variable.

Definición 13.3.1 Derivadas parciales de primer orden

Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables, entonces la **derivada parcial con respecto a *x*** en un punto (x, y) es

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \tag{1}$$

y la **derivada parcial con respecto a *y*** es

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \tag{2}$$

siempre que exista el límite.

Cálculo de una derivada parcial En (1) observe que la variable y no cambia en el proceso del límite, en otras palabras, y se mantiene fija. De manera similar, en la definición del límite (2) la variable x se mantiene fija. Las dos derivadas parciales de primer orden (1) y (2) representan entonces las *tasas de cambio* de f con respecto a x y y. En un nivel práctico tenemos las siguientes guías simples.

Guías para la diferenciación parcial

Por *reglas de la diferenciación ordinaria* se entienden las reglas formuladas en el capítulo 3: reglas del múltiplo constante, suma, producto, cociente, potencia y de la cadena.

- Para calcular $\partial z/\partial x$, emplee las leyes de la diferenciación ordinaria mientras trata a y como una constante.
- Para calcular $\partial z/\partial y$, emplee las leyes de la diferenciación ordinaria mientras trata a x como una constante.

EJEMPLO 1 Derivadas parciales

Si $z = 4x^3y^2 - 4x^2 + y^6 + 1$, encuentre

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y ***b***) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución

a) Diferenciamos z con respecto a x mientras y se mantiene fija y se tratan a las constantes de la manera usual:

y es constante

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (12x^2)y^2 - 8x + 0 + 0 = 12x^2y^2 - 8x.$$

b) Ahora tratando a x como constante, obtenemos

x es constante

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3(2y) - 0 + 6y^5 + 0 = 8x^3y + 6y^5.$$ ■

Símbolos alternos Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ a menudo se representan por medio de símbolos alternos. Si $z = f(x, y)$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z_x = f_x \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z_y = f_y.$$

Símbolos como $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial y$ se denominan **operadores de diferenciación parcial** y denotan la *operación* de tomar una derivada parcial, en este caso con respecto a x y y. Por ejemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial x}x^2 - \frac{\partial}{\partial x}y^2 = 2x - 0 = 2x$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}e^{x^4y^5} = e^{x^4y^5} \cdot \frac{\partial}{\partial y}x^4y^5 = e^{x^4y^5}x^4 \cdot \frac{\partial}{\partial y}y^5 = e^{x^4y^5}x^4(5y^4) = 5x^4y^4e^{x^4y^5}.$$

El **valor** de una derivada parcial en un punto (x_0, y_0) se escribe de diversas maneras. Por ejemplo, la derivada parcial de $z = f(x, y)$ con respecto a x para (x_0, y_0) se escribe como

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,\, y_0)}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x = x_0,\, y = y_0}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad f_x(x_0, y_0).$$

EJEMPLO 2 Empleo de la regla del producto

Si $f(x, y) = x^5y^{10}\cos(xy^2)$, encuentre f_y.

Solución Cuando x se mantiene fija, observe que

$$f(x, y) = x^5\overbrace{y^{10}\cos(xy^2)}^{\text{producto de dos funciones de } y}.$$

Por consiguiente, por las reglas del producto y de la cadena la derivada parcial de f con respecto a y es,

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= x^5[y^{10}(-\operatorname{sen}(xy^2)) \cdot 2xy + 10y^9 \cdot \cos(xy^2)] \\ &= -2x^6y^{11}\operatorname{sen}(xy^2) + 10x^5y^9\cos(xy^2). \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 3 Una tasa de cambio

La función $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ relaciona el área superficial (en pies cuadrados) del cuerpo de una persona como una función del peso w (en libras) y la altura h (en pulgadas). Encuentre $\partial S/\partial w$ cuando $w = 150$ y $h = 72$. Interprete.

Solución La derivada parcial de S respecto a w,

$$\frac{\partial S}{\partial w} = (0.1091)(0.425)w^{-0.575}h^{0.725},$$

evaluada en (150, 72) es

$$\left.\frac{\partial S}{\partial w}\right|_{(150,\,72)} = (0.1091)(0.425)(150)^{-0.575}(72)^{0.725} \approx 0.058.$$

La derivada parcial $\partial S/\partial w$ es la tasa a la cual el área superficial de una persona de altura *fija* h, como un adulto, cambia con respecto al peso w. Puesto que las unidades para la derivada son pies^2/libra y $\partial S/\partial w > 0$, advertimos que el aumento de 1 lb, mientras que h está fija en 72, produce un *aumento* en el área de la piel de aproximadamente $0.058 \approx \frac{1}{17}$ pie^2. ■

Interpretación geométrica Como advertimos en la FIGURA 13.3.1*a*), cuando y es constante, digamos $y = b$, la traza de la superficie $z = f(x, y)$ en el plano $y = b$ es la curva azul C. Si definimos la pendiente de una secante a través de los puntos $P(a, b, f(a, b))$ y $R(a + h, b, f(a + h, b))$ como

$$\frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{(a + h) - a} = \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

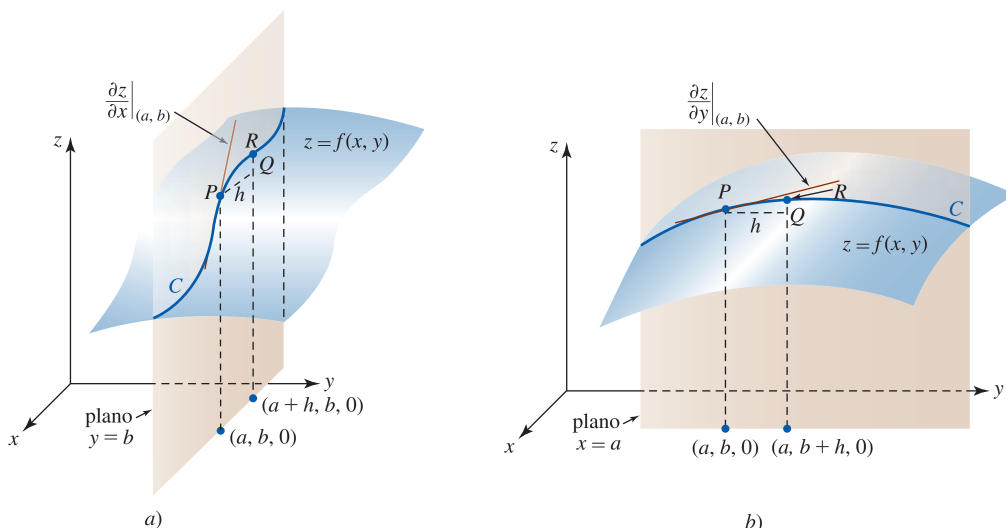


FIGURA 13.3.1 Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ son pendientes de la recta tangente a la curva C de intersección de la superficie y el plano paralelo a los ejes x o y.

tenemos
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,\,b)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}.$$

En otras palabras, es posible interpretar $\partial z/\partial x$ como la pendiente de la recta tangente en el punto P (para la cual el límite existe) sobre la curva C de intersección de la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $y = b$. A su vez, una inspección de la figura 13.3.1*b*) revela que $\partial z/\partial y$ es la pendiente de la recta tangente en el punto P sobre la curva C de intersección entre la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $x = a$.

EJEMPLO 4 Pendientes de rectas tangentes

Para $z = 9 - x^2 - y^2$, encuentre la pendiente de la recta tangente en (2, 1, 4) en

a) el plano $x = 2$ y ***b***) el plano $y = 1$.

Solución

a) Al especificar el plano $x = 2$, se mantienen todos los valores de x constantes. Por consiguiente, calculamos la derivada parcial de z con respecto a y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

En (2, 1, 4) la pendiente es $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,\,1)} = -2.$

b) En el plano $y = 1$, y es constante y por ello encontramos la derivada parcial de z con respecto a x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x.$$

En (2, 1, 4) la pendiente es $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\,1)} = -4.$

Vea la FIGURA 13.3.2. ■

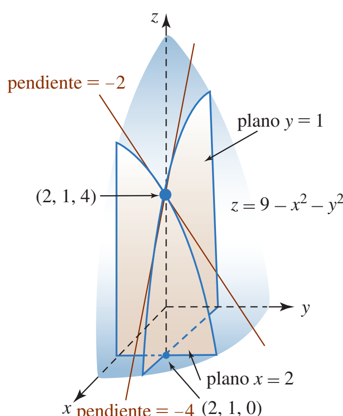


FIGURA 13.3.2 Pendientes de las rectas tangentes del ejemplo 4

Si $z = f(x, y)$, entonces los valores de las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en un punto $(a, b, f(a, b))$ también se denominan **pendientes de la superficie** en las direcciones x y y, respectivamente.

Funciones de tres o más variables Las tasas de cambio de una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ en las direcciones x, y y z son las derivadas parciales $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ y $\partial w/\partial z$, respectivamente. La derivada parcial de f respecto a z se define como

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y,z+h)-f(x,y,z)}{h}, \tag{3}$$

siempre que el límite exista. Para calcular, por ejemplo, $\partial w/\partial x$, se deriva con respecto a x de la manera usual mientras se mantienen constantes *tanto y como z*. De esta manera se extiende el proceso de diferenciación parcial a funciones de cualquier número de variables. Si $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una función de n variables, entonces la derivada parcial de f con respecto a la variable i-ésima, $i = 1, 2, \dots, n$, se define como

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots x_n) - f(x_1, x_2, \dots x_n)}{h}. \tag{4}$$

Para calcular $\partial u/\partial x_i$ se deriva con respecto a x_i mientras se mantienen fijas las $n - 1$ variables restantes.

EJEMPLO 5 Empleo de la regla del cociente

Si $w = \dfrac{x^2 - z^2}{y^2 + z^2}$, encuentre $\dfrac{\partial w}{\partial z}$.

Solución Se emplea la regla del cociente mientras se mantiene constante x y y:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{(y^2 + z^2)(-2z) - (x^2 - z^2)2z}{(y^2 + z^2)^2} = -\frac{2z(x^2 + y^2)}{(y^2 + z^2)^2}. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Tres derivadas parciales

Si $f(x, y, t) = e^{-3\pi t} \cos 4x \operatorname{sen} 6y$, entonces las derivadas parciales con respecto a x, y y t son, a su vez,

$$f_x(x, y, t) = -4e^{-3\pi t} \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 6y,$$
$$f_y(x, y, t) = 6e^{-3\pi t} \cos 4x \cos 6y,$$

y

$$f_t(x, y, t) = -3\pi e^{-3\pi t} \cos 4x \operatorname{sen} 6y. \qquad \blacksquare$$

Derivadas de orden superior y mixtas Para una función de dos variables $z = f(x, y)$, las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ son ellas mismas funciones de x y y. En consecuencia, se pueden calcular las **derivadas parciales de segundo orden** y de orden superior. De hecho, se encuentra la derivada parcial de $\partial z/\partial x$ con respecto a y, y la derivada parcial de $\partial z/\partial y$ con respecto a x. Los últimos tipos de derivadas parciales se denominan **derivadas parciales mixtas**. En resumen, las segundas, terceras derivadas parciales y la derivada parcial mixta de $z = f(x, y)$ están definidas por:

Derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Derivadas parciales de tercer orden:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

Derivadas parciales de segundo orden mixtas:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

diferenciar primero con respecto a y ↑ — diferenciar primero con respecto a x ↑

Observe en el resumen que hay cuatro derivadas parciales de segundo orden. ¿Cuántas derivadas parciales de tercer orden de $z = f(x, y)$ hay? Las derivadas parciales de orden superior para $z = f(x, y)$ y para funciones de tres o más variables se definen de manera similar.

Símbolos alternos Las derivadas parciales de segundo y tercer orden también se denotan mediante f_{xx}, f_{yy}, f_{xxx}, etcétera. La notación de subíndice para las derivadas parciales de segundo orden mixtas es f_{xy} o f_{yx}.

Nota El orden de los símbolos en los subíndices de las parciales mixtas es justamente lo opuesto al orden de los símbolos cuando se usa la notación de operador de diferenciación parcial:

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

y

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}.$$

Igualdad de parciales mixtas Aunque no se demostrará, el siguiente teorema enuncia que bajo ciertas condiciones es irrelevante el orden en el cual se efectúa una derivada parcial de segundo orden mixta; esto es, las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} son iguales.

Teorema 13.3.2 Igualdad de parciales mixtas

Sea f una función de dos variables. Si las derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} son continuas en algún disco abierto, entonces

$$f_{xy} = f_{yx}$$

en cada punto sobre el disco.

Vea el problema 68 en los ejercicios 13.3.

EJEMPLO 7 Derivadas parciales de segundo orden

Si $z = x^2y^2 - y^3 + 3x^4 + 5$, encuentre

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ *b*) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ y *c*) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$.

Solución De las primeras derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 12x^3 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y - 3y^2$$

obtenemos:

a) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2y^2 + 36x^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 72x,$$

b) $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2x^2 - 6y \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = -6,$$

c) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 4xy.$$

Debemos verificar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = 4xy.$ ■

Si f es una función de dos variables y tiene derivadas parciales de primer, segundo y tercer orden continuas sobre algún disco abierto, entonces las derivadas mixtas de tercer orden son iguales; esto es,

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx} \qquad \text{y} \qquad f_{yxx} = f_{xyx} = f_{xxy}.$$

Se sostienen comentarios similares para funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si f es una función de tres variables x, y y z que posee derivadas parciales continuas de cualquier orden en alguna bola abierta, entonces las derivadas parciales como $f_{xyz} = f_{zyx} = f_{yxz}$ son iguales en cada punto en la bola.

EJEMPLO 8 Derivadas parciales mixtas de tercer orden

Si $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^4 + z^6}$, determine f_{yzz}.

Solución f_{yzz} es una derivada parcial mixta de tercer orden. Primero se encuentra la derivada parcial con respecto a y mediante la regla de potencias para funciones:

$$f_y = \frac{1}{2}(x^2 + y^4 + z^6)^{-1/2}4y^3 = 2y^3(x^2 + y^4 + z^6)^{-1/2}.$$

La derivada parcial con respecto a z de la función en la última línea es entonces

$$\begin{aligned} f_{yz} = (f_y)_z &= 2y^3\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + y^4 + z^6)^{-3/2} \cdot 6z^5 \\ &= -6y^3z^5(x^2 + y^4 + z^6)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Por último, por la regla del producto,

$$f_{yzz} = (f_{yz})_z = -6y^3z^5\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2 + y^4 + z^6)^{-5/2} \cdot 6z^5 - 30y^3z^4(x^2 + y^4 + z^6)^{-3/2}$$
$$= y^3z^4(x^2 + y^4 + z^6)^{-5/2}(24z^6 - 30x^2 - 30y^4).$$

Se sugiere que el lector calcule f_{zzy} y f_{zyz} y verifique sobre cualquier disco abierto que no contenga al origen que $f_{yzz} = f_{zzy} = f_{zyz}$. ■

Diferenciación parcial implícita La diferenciación parcial implícita se llevó a cabo de la misma manera que en la sección 3.6.

EJEMPLO 9 Derivada parcial implícita

Suponga que la ecuación $z^2 = x^2 + xy^2z$ define a z implícitamente como una función de x y y. Encuentre $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

Solución Al mantener y constante,

$$\frac{\partial}{\partial x}z^2 = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy^2z) \qquad \text{implica} \qquad \frac{\partial}{\partial x}z^2 = \frac{\partial}{\partial x}x^2 + y^2\frac{\partial}{\partial x}xz.$$

Por la regla de potencia para funciones junto con la regla del producto:

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + z\right).$$

Después de que resolvamos la última ecuación para $\partial z/\partial x$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + y^2z}{2z - xy^2}.$$

Al mantener ahora x constante,

$$\frac{\partial}{\partial y}z^2 = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy^2z) \qquad \text{implica} \qquad 2z\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(y^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2yz\right).$$

Al resolver para $\partial z/\partial y$ se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xyz}{2z - xy^2}.$$ ■

Ejercicios 13.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-41.

Fundamentos

En los problemas 1-4, emplee la definición 13.3.1 para calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ con respecto a la función dada.

1. $z = 7x + 8y^2$
2. $z = xy$
3. $z = 3x^2y + 4xy^2$
4. $z = \dfrac{x}{x + y}$

En los problemas 5-24, encuentre las primeras derivadas parciales de la función dada.

5. $z = x^2 - xy^2 + 4y^5$
6. $z = -x^3 + 6x^2y^3 + 5y^2$
7. $z = 5x^4y^3 - x^2y^6 + 6x^5 - 4y$
8. $z = \tan(x^3y^2)$
9. $z = \dfrac{4\sqrt{x}}{3y^2 + 1}$
10. $z = 4x^3 - 5x^2 + 8x$
11. $z = (x^3 - y^2)^{-1}$
12. $z = (-x^4 + 7y^2 + 3y)^6$
13. $z = \cos^2 5x + \operatorname{sen}^2 5y$
14. $z = e^{x^2 \tan^{-1} y^2}$
15. $f(x, y) = xe^{x^3y}$
16. $f(\theta, \phi) = \phi^2 \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{\phi}$
17. $f(x, y) = \dfrac{3x - y}{x + 2y}$
18. $f(x, y) = \dfrac{xy}{(x^2 - y^2)^2}$
19. $g(u, v) = \ln(4u^2 + 5v^3)$
20. $h(r, s) = \dfrac{\sqrt{r}}{s} - \dfrac{\sqrt{s}}{r}$
21. $w = 2\sqrt{x}y - ye^{y/z}$
22. $w = xy \ln xz$
23. $f(u, v, x, t) = u^2w^2 - uv^3 + vw\cos(ut^2) + (2x^2t)^4$
24. $G(p, q, r, s) = (p^2q^3)e^{2r^4s^5}$

En los problemas 25-26, suponga que $z = 4x^3y^4$.

25. Determine la pendiente de la recta tangente en $(1, -1, 4)$ en el plano $x = 1$.

26. Encuentre la pendiente de la recta tangente en $(1, -1, 4)$ en el plano $y = -1$.

En los problemas 27 y 28, suponga que $f(x, y) = \dfrac{18xy}{x + y}$.

27. Determine las ecuaciones paramétricas para la recta tangente en $(-1, 4, -24)$ en el plano $x = -1$.

28. Encuentre ecuaciones simétricas para la recta tangente en $(-1, 4, -24)$ en el plano $y = 4$.

En los problemas 29 y 30, suponga que $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

29. ¿A qué tasa está cambiando z con respecto a x en el plano $y = 2$ en el punto $(2, 2, 1)$?

30. ¿A qué tasa está cambiando z con respecto a y en el plano $x = \sqrt{2}$ en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2)$?

En los problemas 31-38, encuentre la derivada parcial indicada.

31. $z = e^{xy}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

32. $z = x^4 y^{-2}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$

33. $f(x, y) = 5x^2y^2 - 2xy^3$; f_{xy}

34. $f(p, q) = \ln\dfrac{p + q}{q^2}$; f_{qp}

35. $w = u^2 v^3 t^3$; w_{tuv}

36. $w = \dfrac{\cos(u^2 v)}{t^3}$; w_{vvt}

37. $F(r, \theta) = e^{r^2}\cos\theta$; $F_{r\theta r}$

38. $H(s, t) = \dfrac{s + t}{s - t}$; H_{tts}

En los problemas 39 y 40, verifique que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

39. $z = x^6 - 5x^4y^3 + 4xy^2$

40. $z = \tan^{-1}(2xy)$

En los problemas 41 y 42, verifique que las derivadas parciales indicadas son iguales.

41. $w = u^3v^4 - 4u^2v^2t^3 + v^2t$; $w_{uvt}, w_{tvu}, w_{vut}$

42. $F(\eta, \xi, \tau) = (\eta^3 + \xi^2 + \tau)^2$; $F_{\eta\xi\eta}, F_{\xi\eta\eta}, F_{\eta\eta\xi}$

En los problemas 43-46, suponga que la ecuación dada define a z como una función de las dos variables restantes. Emplee diferenciación implícita para encontrar las primeras derivadas parciales.

43. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

44. $z^2 = x^2 + y^2 z$

45. $z^2 + u^2v^3 - uvz = 0$

46. $se^z - e^{st} + 4s^3t = z$

47. El área A de un paralelogramo con base x y altura y sen θ es $A = xy$ sen θ. Encuentre todas las primeras derivadas parciales.

48. El volumen del cono truncado que se muestra en la FIGURA 13.3.3 es $V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$. Determine todas las primeras derivadas parciales.

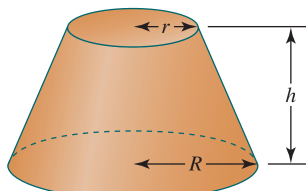


FIGURA 13.3.3 Cono truncado del problema 48

Aplicaciones

En los problemas 49 y 50, verifique que la distribución de temperatura indicada satisface la **ecuación de Laplace en dos dimensiones**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

Una solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace (5) puede interpretarse como la distribución de temperatura independiente del tiempo a través de una delgada placa bidimensional. Vea la FIGURA 13.3.4.

49. $u(x, y) = (\cosh 2\pi y + \operatorname{senh} 2\pi y)\operatorname{sen} 2\pi x$

50. $u(x, y) = e^{-(n\pi x/L)}\operatorname{sen}(n\pi y/L)$, n y L constantes

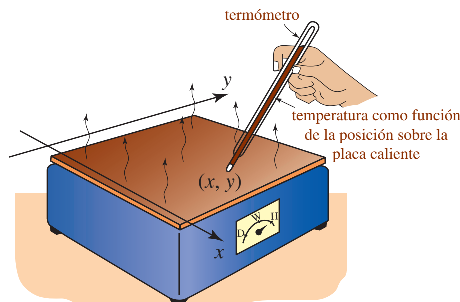


FIGURA 13.3.4 Placa caliente de los problemas 49 y 50

En los problemas 51 y 52, verifique que la función dada satisface la ecuación de Laplace (5).

51. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

52. $u(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

En los problemas 53 y 54 verifique que la función dada satisface la **ecuación de Laplace en tres dimensiones**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{6}$$

53. $u(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

54. $u(x, y, z) = e^{\sqrt{m^2 + n^2}\,x}\cos my \operatorname{sen} nz$

En los problemas 55 y 56, verifique que la función dada satisface la **ecuación de onda unidimensional**

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{7}$$

La ecuación de onda (7) ocurre en problemas que implican fenómenos vibratorios.

55. $u(x, t) = \cos at \operatorname{sen} x$

56. $u(x, t) = \cos(x + at) + \operatorname{sen}(x - at)$

57. La concentración molecular $C(x, t)$ de un líquido está dada por $C(x, t) = t^{-1/2}e^{-x^2/kt}$. Verifique que esta función satisface la **ecuación de difusión unidimensional**

$$\frac{k}{4}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

58. La presión P ejercida por un gas ideal encerrado está dada por $P = k(T/V)$, donde k es una constante. T es la temperatura y V es el volumen. Encuentre:

a) la tasa de cambio de P con respecto a V,

b) la tasa de cambio de V con respecto a T y

c) la tasa de cambio de T con respecto a P.

59. El desplazamiento vertical de una larga cuerda fija en el origen pero cayendo bajo su propio peso está dado por

$$u(x, t) = \begin{cases} -\dfrac{g}{2a^2}(2axt - x^2), & 0 \leq x \leq at \\ -\frac{1}{2}gt^2, & x > at. \end{cases}$$

Vea la FIGURA 13.3.5.

a) Determine $\partial u/\partial t$. Interprete para $x > at$.
b) Determine $\partial u/\partial x$. Interprete para $x > at$.

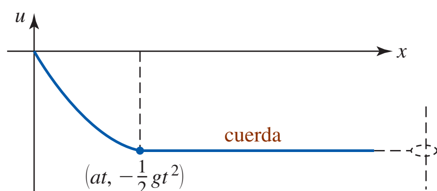


FIGURA 13.3.5 Cuerda que cae del problema 59

60. Para la función de área de la piel $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ que se discutió en el ejemplo 3 encuentre $\partial S/\partial h$ en $w = 60$, $h = 36$. Si una niña crece de 36 a 37 pulg, mientras su peso se mantiene en 60 lb, ¿cuál es el aumento aproximado en el área de la piel?

Piense en ello

61. Formule una definición de límite que sea análoga a la definición 13.3.1 para las derivadas parciales de segundo orden

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ***b***) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ***c***) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$

62. Encuentre una función $z = f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 + 2y + \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2x + 1.$$

63. ¿Es posible que una función $z = f(x, y)$, con derivadas parciales continuas en un conjunto abierto, se encuentra de manera tal que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - y^2?$$

64. ***a***) Suponga que la función $w = f(x, y, z)$ tiene derivadas parciales de tercer orden continuas. ¿Cuántas derivadas parciales de tercer orden diferentes hay?
b) Suponga que la función $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas de n-ésimo orden. ¿Cuántas derivadas parciales diferentes de n-ésimo orden hay?

65. ***a***) Suponga que $z = f(x, y)$ tiene la propiedad de que $\partial z/\partial x = 0$ y $\partial z/\partial y = 0$ para todo (x, y). ¿Qué puede usted afirmar acerca de la forma de f?
b) Suponga que $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y $\partial^2 z/\partial x\,\partial y = 0$. ¿Qué puede usted afirmar acerca de la forma f?

66. Algunas curvas de nivel de una función $z = f(x, y)$ se muestran en la FIGURA 13.3.6. Emplee estas curvas de nivel para conjeturar respecto a los signos algebraicos de las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en el punto que se indica en rojo en la figura.

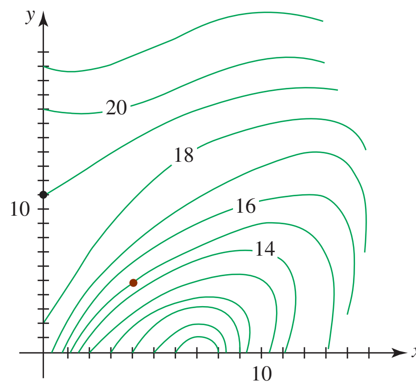


FIGURA 13.3.6 Curvas de nivel del problema 66

67. Un clásico matemático Una función $z = f(x, y)$ quizá no sea continua en un punto aunque es posible que siga teniendo derivadas parciales en ese punto. La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no es continua en (0, 0). (Vea el problema 38 en los ejercicios 13.2.) Emplee (1) y (2) de la definición 13.3.1 para mostrar que

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0 \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0.$$

68. Un clásico matemático Considere la función $z = f(x, y)$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(y^2 - x^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Calcule $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\,y)}$ y $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,\,0)}$.

b) Muestre que $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right|_{(0,0)} \neq \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{(0,0)}$.

13.4 Linealización y diferenciales

Introducción En la sección 4.9 se vio que una linealización $L(x)$ de una función de una sola variable $y = f(x)$ en un número x_0 está dada por $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Esta ecuación puede utilizarse para aproximar los valores de la función $f(x)$ en la vecindad de x_0, esto es, $L(x) \approx f(x)$ para valores de x cercanos a x_0. De manera similar puede definirse una linealización

$L(x, y)$ de una función de dos variables en un punto (x_0, y_0). En el caso de una función de una sola variable se asumió que $y = f(x)$ era diferenciable en x_0, esto es,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

existe. Recuerde también que si f es diferenciable en x_0, también es continua en ese número. Al repetir la suposición en (1), deseamos que $z = f(x, y)$ sea diferenciable en un punto (x_0, y_0). Aunque hemos considerado lo que significa que $z = f(x, y)$ posea *derivadas parciales* en un punto, aún no formulamos una definición de *diferenciabilidad* de una función de dos variables f en un punto.

Incremento de la variable dependiente La definición de diferenciabilidad de una función de cualquier número de variables independientes no depende de la noción de un cociente de diferencia como en (1), sino más bien de la noción de un *incremento* de la variable dependiente. Recuerde que para una función de una variable $y = f(x)$ el incremento en la variable dependiente está dado por

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

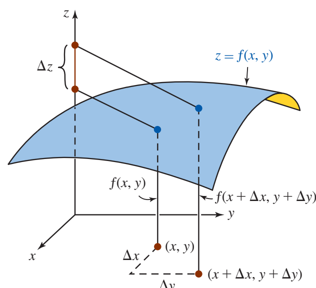


FIGURA 13.4.1 Incremento en z

De manera análoga, para una función de dos variables $z = f(x, y)$, definimos el **incremento de la variable dependiente z** como

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{2}$$

La FIGURA 13.4.1 muestra que Δz produce la cantidad de cambio en la función cuando (x, y) cambia a $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

EJEMPLO 1 Determinando Δz

Encuentre Δz para la función polinomial $z = x^2 - xy$. ¿Cuál es el cambio en la función de (1, 1) a (1.2, 0.7)?

Solución De (2),

$$\begin{aligned}\Delta z &= [(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y)] - (x^2 - xy)\\ &= (2x - y)\Delta x - x\Delta y + (\Delta x)^2 - \Delta x\Delta y.\end{aligned} \tag{3}$$

Con $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0.2$ y $\Delta y = -0.3$,

$$\Delta z = (1)(0.2) - (1)(-0.3) + (0.2)^2 - (0.2)(-0.3) = 0.6.$$ ■

Una fórmula de incremento fundamental Una breve reinspección del incremento Δz en (3) muestra que en los primeros dos términos los coeficientes de Δx y Δy son $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, respectivamente. El importante teorema que sigue muestra que esto no es un accidente.

Teorema 13.4.1 Una fórmula del incremento

Considere que $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ en una región rectangular abierta que está definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Si (x, y) es cualquier punto en esta región, entonces existen ε_1 y ε_2, las cuales son funciones de Δx y Δy, tales que

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y, \tag{4}$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$.

DEMOSTRACIÓN Al sumar y restar $f(x, y + \Delta y)$ en (2), tenemos,

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Al aplicar el teorema del valor medio (teorema 4.4.2) a cada conjunto de corchetes, se llega a

$$\Delta z = f_x(x_0, y + \Delta y)\Delta x + f_y(x, y_0)\Delta y, \tag{5}$$

donde, como se muestra en la FIGURA 13.4.2, $x < x_0 < x + \Delta x$ y $y < y_0 < y + \Delta y$. En este caso, definimos

$$\varepsilon_1 = f_x(x_0, y + \Delta y) - f_x(x, y) \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_2 = f_y(x, y_0) - f_y(x, y). \tag{6}$$

Cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, entonces, como se ilustra en la figura, $P_2 \to P_1$ y $P_3 \to P_1$. Puesto que f_x y f_y se suponen continuas en la región, tenemos

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0.$$

Al resolver (6) para $f_x(x_0, y + \Delta y)$ y $f_y(x, y_0)$ y sustituir en (5), obtenemos (4). ■

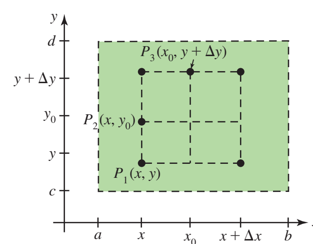


FIGURA 13.4.2 Región rectangular en el teorema 13.4.1

Diferenciabilidad: funciones de dos variables Ahora podemos definir la diferenciabilidad de una función $z = f(x, y)$ en un punto.

Definición 13.4.1 Función diferenciable

Una función $z = f(x, y)$ es **diferenciable** en (x_0, y_0) si el incremento Δz puede escribirse como

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Si la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en cada punto en una región R del plano xy, entonces se dice que f es **diferenciable en R**. Si f es diferenciable sobre la región consistente en el plano xy completo, se afirma entonces que es **diferenciable en todas partes**.

Es interesante notar que las derivadas parciales f_x y f_y quizás existan en un punto (x_0, y_0) e incluso f no sea diferenciable en ese punto. Desde luego, si f_x y f_y no existen en un punto (x_0, y_0), entonces f no es diferenciable en ese punto. El siguiente teorema proporciona una condición suficiente bajo la cual la existencia de las derivadas parciales implica diferenciabilidad.

Teorema 13.4.2 Condición suficiente para la diferenciabilidad

Si las primeras derivadas parciales f_x y f_y son continuas en un punto en una región abierta R, entonces $z = f(x, y)$ es diferenciable sobre R.

El siguiente teorema es el análogo del teorema 3.1.1; establece que si $z = f(x, y)$ es diferenciable en un punto, entonces es continua en el punto.

Teorema 13.4.3 Diferenciabilidad implica continuidad

Si $z = f(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0), entonces f es continua en (x_0, y_0).

DEMOSTRACIÓN Suponga que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) y que

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Utilizando esta expresión en (4), obtenemos

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

Cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, se deduce de la última línea que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0).$$

Si se considera $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, entonces el último resultado es equivalente a

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Por (5) de la sección 13.2, f es continua en (x_0, y_0). ■

EJEMPLO 2 Diferenciabilidad

Si (3) del ejemplo 1 se escribe como

$$\Delta z = \overbrace{(2x - y)}^{f_x}\Delta x + \overbrace{(-x)}^{f_y}\Delta y + \overbrace{(\Delta x)}^{\varepsilon_1}(\Delta x) + \overbrace{(-\Delta x)}^{\varepsilon_2}\Delta y,$$

podemos identificar $\varepsilon_1 = \Delta x$ y $\varepsilon_2 = -\Delta x$. Puesto que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, la función $z = x^2 - xy$ es diferenciable en todo punto en el plano xy. ■

Como se advirtió en el ejemplo 2, la función dada es un polinomio. Cualquier función polinomial de dos o más variables es diferenciable en todas partes.

Linealización Si $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) y (x, y) es un punto muy cercano a (x_0, y_0), se deduce de la definición 13.4.1 que $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = y - y_0$ son ambas cercanas a cero, e igualmente lo son $\varepsilon_1 \Delta x$ y $\varepsilon_2 \Delta y$. En vista de (4) esto significa que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Empleando $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ la última línea es lo mismo que

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Esto nos lleva a definir la linealización de f en (x_0, y_0) de la siguiente manera.

Definición 13.4.2 Linealización

Si una función $z = f(x, y)$ es diferenciable en un punto (x_0, y_0), entonces la función

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{7}$$

se dice que es una **linealización** de f en (x_0, y_0). Para un punto (x, y) cercano a (x_0, y_0), la aproximación

$$f(x, y) \approx L(x, y) \tag{8}$$

se denomina una **aproximación lineal local** de f en (x_0, y_0).

EJEMPLO 3 Linealización

Encuentre una linealización de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en (4, 3).

Solución Las primeras derivadas parciales de f son

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Utilizando los valores $f(4, 3) = 5$, $f_x(4, 3) = \frac{4}{5}$ y $f_y(4, 3) = \frac{3}{5}$, se deduce de (7) que una linealización de f en (4, 3) es

$$L(x, y) = 5 + \frac{4}{5}(x - 4) + \frac{3}{5}(y - 3). \tag{9}$$

La última ecuación es equivalente a $L(x, y) = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$ pero con fines de cálculo (9) es más conveniente. ■

EJEMPLO 4 Aproximación lineal local

Utilice la aproximación lineal local para aproximar $\sqrt{(4.01)^2 + (2.98)^2}$.

Solución Primero observe que se está pidiendo una aproximación del valor de la función $f(4.01, 2.98)$, donde $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Debido a que el punto (4.01, 2.98) es razonablemente cercano al punto (4, 3) es factible utilizar la linealización en (9) para formar una aproximación lineal local $f(x, y) \approx L(x, y)$. De

$$L(4.01, 2.98) = 5 + \frac{4}{5}(4.01 - 4) + \frac{3}{5}(2.98 - 3) = 4.996$$

se sigue que la aproximación deseada es $f(4.01, 2.98) \approx L(4.01, 2.98)$ o

$$\sqrt{(4.01)^2 + (2.98)^2} \approx 4.996.$$

Suponga que se deja $z = L(x, y)$ y se reescribe (7) como

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0. \qquad (10)$$

Al relacionar (10) término a término con (2) de la sección 11.6 se demuestra que una linealización de una función $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0) es una ecuación de un plano.

Plano tangente En la sección 4.9 vimos que la linealización $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ de una función f de una sola variable en un número x_0 no es más que una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$. En tres dimensiones el análogo de una *recta tangente* a una curva es un *plano tangente* a una superficie. Veremos en la sección 13.7 que la fórmula de linealización $z = L(x, y)$ en (7) es una ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Diferenciales Recuerde también que para una función f de una sola variable independiente hay dos diferenciales $\Delta x = dx$ y $dy = f'(x)\,dx$. La diferencial dx es simplemente el cambio en la variable independiente x. La diferencial dy es el cambio en la linealización $L(x)$; en el número x_0 tenemos

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + \Delta x) - L(x_0)\\ &= [f(x_0) + f'(x_0)\Delta x] - [f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0]\\ &= f'(x_0)\,dx = dy.\end{aligned}$$

En el caso de una función f de dos variables tenemos naturalmente tres diferenciales. Los cambios en las variables independientes x y y son dx y dy; los cambios en la linealización $L(x, y)$ se denotan por medio de dz. En el punto (x_0, y_0) el cambio en la linealización es

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0)\\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x_0 + \Delta x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y_0 + \Delta y - y_0) - f(x_0, y_0)\\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y. \qquad (11)\end{aligned}$$

Empleando el resultado en (11) definimos a continuación la diferencial dz de una función f en un punto arbitrario en el plano xy. Si (x, y) denota el punto, entonces un punto cercano es $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ o $(x + dx, y + dy)$. La diferencial dz se llama comúnmente **diferencial total** de la función.

Definición 13.4.3 Diferenciales

Sea $z = f(x, y)$ una función para la cual las primeras derivadas parciales f_x y f_y existen. Entonces las **diferenciales de x y y** son $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$. La **diferencial de z**,

$$dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \qquad (12)$$

también se denomina **diferencial total de z**.

EJEMPLO 5 Diferencial total

Si $z = x^2 - xy$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x.$$

De (12) la diferencial total de la función es

$$dz = (2x - y)\,dx - x\,dy.$$

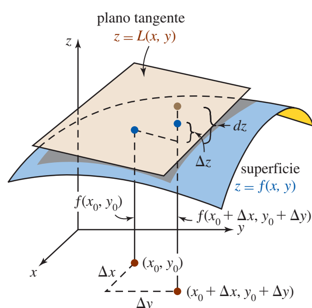


FIGURA 13.4.3 Interpretaciones geométricas de dx, dy, Δz y dz

Concluimos de inmediato de (4) del teorema 13.4.1 que cuando f_x y f_y son continuas y cuando Δx y Δy son cercanas a 0, entonces dz es una aproximación de Δz, esto es

$$dz \approx \Delta z. \tag{13}$$

La FIGURA 13.4.3 es una versión tridimensional de la figura 4.9.4. Los puntos en azul son los mismos puntos que se muestran en la figura 13.4.1 y están sobre la superficie. El plano es tangente a la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y el punto marcado en café es un punto sobre el plano tangente.

EJEMPLO 6 Comparación de Δz y dz

En el ejemplo 1 vimos que la función $z = x^2 - xy$ cambió en la cantidad exacta $\Delta z = 0.6$ cuando hubo un desplazamiento del punto (1, 1) a (1.2, 0.7). Con las identificaciones $x = 1$, $y = 1$, $dx = 0.2$ y $dy = -0.3$, se observa de (12) y (13) y el resultado del ejemplo 5 que el cambio Δz de la función puede aproximarse por medio de los cambios en la linealización:

$$dz = (1)(0.2) - (1)(-0.3) = 0.5.$$ ■

EJEMPLO 7 Una aproximación de un error

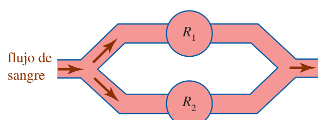


FIGURA 13.4.4 Flujo de sangre a través de las dos resistencias del ejemplo 7

El sistema cardiovascular humano es similar a circuitos eléctricos en serie y en paralelo. Por ejemplo, cuando la sangre circula a través de dos resistencias en paralelo, como se muestra en la FIGURA 13.4.4, entonces la resistencia equivalente R de la red es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \text{o} \qquad R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Si los errores porcentuales en la medición de R_1 y R_2 son $\pm 0.2\%$ y $\pm 0.6\%$, respectivamente, encuentre el error porcentual máximo aproximado en R.

Solución Tenemos que $\Delta R_1 = \pm 0.002R_1$ y $\Delta R_2 = \pm 0.006R_2$. En este caso,

$$dR = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}\,dR_1 + \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}\,dR_2,$$

y por ello

$$\begin{aligned} |\Delta R| \approx |dR| &\le \left|\frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}(\pm 0.002R_1)\right| + \left|\frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}(\pm 0.006R_2)\right| \\ &= R\left[\frac{0.002R_2}{R_1 + R_2} + \frac{0.006R_1}{R_1 + R_2}\right] \\ &\le R\left[\frac{0.006R_2}{R_1 + R_2} + \frac{0.006R_1}{R_1 + R_2}\right] = (0.006)R. \end{aligned}$$

Entonces el error relativo máximo está dado por la aproximación $|dR|/R \approx 0.006$; por tanto, el error porcentual máximo es aproximadamente 0.6%. ■

Funciones de tres variables Las definiciones 13.4.1, 13.4.2 y 13.4.3, así como los teoremas 13.4.1, 13.4.2 y 13.4.3, se generalizan de la manera esperada a funciones de tres o más variables. A continuación se mencionan algunos puntos importantes. Si $w = f(x, y, z)$, entonces el **incremento** Δw está dado por

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z). \tag{14}$$

En este caso f es **diferenciable** en un punto (x_0, y_0, z_0) si Δw puede escribirse

$$\Delta w = f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z, \tag{15}$$

donde ε_1, ε_2 y $\varepsilon_3 \to 0$ cuando Δx, Δy y $\Delta z \to 0$. Si f es diferenciable en (x_0, y_0, z_0), entonces la **linealización** de f se define como

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0). \tag{16}$$

Por último, la **diferencial total** de f es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz. \tag{17}$$

EJEMPLO 8 Diferencial total: función de tres variables

Si $w = x^2 + 2y^3 + 3z^4$, entonces las tres primeras derivadas parciales son

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 6y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 12z^3.$$

Por (17) la diferencial total es

$$dw = 2x\,dx + 6y^2\,dy + 12z^3\,dz.$$ ■

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

i) Puesto que $dy \approx \Delta y$ siempre que $f'(x)$ exista y Δx es cercana a 0, parece razonable esperar que $dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$ será una buena aproximación a Δz cuando Δx y Δy son ambas cercanas a 0. Pero la vida no es tan sencilla para funciones de varias variables. La garantía de que $dz \approx \Delta z$ para incrementos cercanos a 0 proviene de la continuidad de las derivadas parciales $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ y no simplemente de su existencia.

ii) Cuando trabaje en los problemas 27-30 en los ejercicios 13.4 descubrirá que las funciones ε_1 y ε_2 introducidas en (4) del teorema 13.4.1 no son únicas.

Ejercicios 13.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-41.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre una linealización de la función dada en el punto indicado.

1. $f(x, y) = 4xy^2 - 2x^3y$; $(1, 1)$

2. $f(x, y) = \sqrt{x^3y}$; $(2, 2)$

3. $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$; $(8, 15)$

4. $f(x, y) = 3\,\text{sen}\,x\cos y$; $(\pi/4, 3\pi/4)$

5. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^3)$; $(-1, 1)$

6. $f(x, y) = e^{-2y}\,\text{sen}\,3x$; $(0, \pi/3)$

En los problemas 7-10, emplee una aproximación lineal para aproximar la cantidad indicada.

7. $\sqrt{102} + \sqrt[4]{80}$

8. $\sqrt{\dfrac{35}{63}}$

9. $f(1.95, 2.01)$ para $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$

10. $f(0.52, 2.96)$ para $f(x, y) = \cos \pi xy$

En los problemas 11-22, calcule la diferencial total de la función dada.

11. $z = x^2\,\text{sen}\,4y$

12. $z = xe^{x^2 - y^2}$

13. $z = \sqrt{2x^2 - 4y^3}$

14. $z = (5x^3y + 4y^5)^3$

15. $f(s, t) = \dfrac{2s - t}{s + 3t}$

16. $g(r, \theta) = r^2\cos 3\theta$

17. $w = x^2y^4z^{-5}$

18. $w = e^{-z^2}\cos(x^2 + y^4)$

19. $F(r, s, t) = r^3 + s^{-2} - 4t^{1/2}$

20. $G(\rho, \theta, \phi) = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta$

21. $w = \ln\left(\dfrac{uv}{st}\right)$

22. $w = \sqrt{u^2 + s^2t^2 - v^2}$

En los problemas 23-26, compare los valores de Δz y dz para la función dada cuando (x, y) varía del primero al segundo punto.

23. $z = 3x + 4y + 8$; $(2, 4), (2.2, 3.9)$

24. $z = 2x^2y + 5y + 8$; $(0, 0), (0.2, -0.1)$

25. $z = (x + y)^2$; $(3, 1), (3.1, 0.8)$

26. $z = x^2 + x^2y^2 + 2$; $(1, 1), (0.9, 1.1)$

En los problemas 27-30, encuentre funciones ε_1 y ε_2 de Δz como se define en (4) del teorema 13.4.1.

27. $z = 5x^2 + 3y - xy$

28. $z = 10y^2 + 3x - x^2$

29. $z = x^2y^2$

30. $z = x^3 - y^3$

≡ Aplicaciones

31. Cuando la sangre fluye a través de tres resistencias R_1, R_2, R_3, en paralelo, la resistencia equivalente R de la red es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Dado que el error porcentual en la medida de cada resistencia es $\pm 0.9\%$, calcule el error porcentual máximo aproximado en R.

32. La presión P de un gas ideal confinado está dada por $P = k(T/V)$, donde V es el volumen, T es la temperatura y k es una constante. Dado que los errores porcentuales al medir T y V son a lo sumo 0.6 y 0.8%, respectivamente, calcule el error porcentual máximo aproximado en P.

33. La tensión T en la cuerda del yo-yo que se muestra en la FIGURA 13.4.5 es

$$T = mg\frac{R}{2r^2 + R^2},$$

donde mg es su peso constante. Determine el cambio aproximado en la tensión si R y r se incrementan de 4 cm y 0.8 cm a 4.1 cm y 0.9 cm, respectivamente. ¿La tensión aumenta o disminuye?

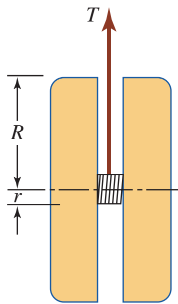


FIGURA 13.4.5 Yo-yo del problema 33

34. Determine el incremento aproximado en el volumen de un cilindro circular recto si su altura aumenta de 10 a 10.5 cm y su radio crece de 5 a 5.3 cm. ¿Cuál es el nuevo volumen aproximado?

35. Si la longitud, ancho y altura de una caja rectangular cerrada aumentan, respectivamente, en 2, 5 y 8%, ¿cuál es el incremento porcentual aproximado en el volumen?

36. En el problema 35, si la longitud, ancho y altura originales son, respectivamente, 3, 1 y 2 pies, ¿cuál es el incremento aproximado en el área de la superficie de la caja? ¿Cuál es la nueva área aproximada de la superficie?

37. La función $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ produce el área de la superficie del cuerpo de una persona en términos de su peso w y altura h. Si el error en la medición de w es a lo sumo 3% y el error en la medición de h es a lo sumo 5%, ¿cuál es el error porcentual máximo aproximado en la medición de S?

38. La impedancia Z del circuito en serie que se presenta en la FIGURA 13.4.6 es $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, donde R es la resistencia, $X = 1\,000L - 1/(1\,000C)$ es la reactancia neta, L es la inductancia y C es la capacitancia. Si los valores de R, L y C dados en la figura se incrementan, respectivamente, a 425 ohms, 0.45 henrys y 11.1×10^{-5} farads, ¿cuál es el cambio aproximado en la impedancia del circuito? ¿Cuál es el valor aproximado de la nueva impedancia?

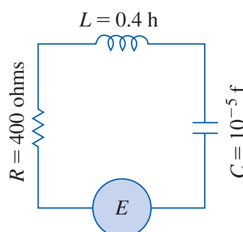


FIGURA 13.4.6 Circuito en serie del problema 38

Piense en ello

39. *a*) Dé una definición para la linealización de una función de tres variables $w = f(x, y, z)$.

b) Emplee la linealización para encontrar una aproximación de $\sqrt{(9.1)^2 + (11.75)^2 + (19.98)^2}$.

40. En el problema 67 de los ejercicios 13.3 se vio que para

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

tanto $\partial z/\partial x$ como $\partial z/\partial y$ existen en (0, 0). Explique por qué f no es diferenciable en (0, 0).

41. *a*) Dé una explicación intuitiva del porqué $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no es diferenciable en (0, 0).

b) Después de esto pruebe que f no es diferenciable en (0, 0).

42. La longitud de los lados de la caja rectangular roja que se muestra en la FIGURA 13.4.7 son x, y y z. Considere que el volumen de la caja roja es V. Cuando se incrementan los lados de la caja en las cantidades Δx, Δy y Δz obtenemos la caja rectangular que se ilustra en la figura que se traza en azul. Dibuje o trace la figura 13.4.7 sobre un pedazo de papel. Identifique por medio de colores diferentes las cantidades Δx, Δy, Δz, ΔV, dV y $\Delta V - dV$.

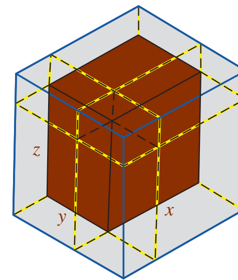


FIGURA 13.4.7 Caja del problema 42

Proyectos

43. Brazo robótico Un brazo de robot bidimensional cuyo hombro está fijo en el origen sigue el rastro de su posición por medio de un ángulo del hombro θ y un ángulo del codo ϕ como se ilustra en la FIGURA 13.4.8. El ángulo del hombro se mide en el sentido contrario de las manecillas del reloj desde el eje x y el ángulo del codo se mide en esa misma dirección desde el brazo superior hasta el brazo inferior, los cuales tienen una longitud respectiva L y l.

a) La ubicación de la unión del codo está dada por (x_c, y_c), donde

$$x_c = L\cos\theta, \quad y_c = L\,\text{sen}\,\theta.$$

Encuentre fórmulas correspondientes para la ubicación (x_m, y_m) de la mano.

b) Muestre que las diferenciales totales de x_m y y_m pueden escribirse como

$$dx_m = -y_m d\theta + (y_c - y_m)\,d\phi$$
$$dy_m = x_m d\theta + (x_c - x_m)\,d\phi.$$

c) Suponga que $L = l$ y que el brazo está ubicado de manera que alcanza el punto (L, L). Suponga también

que el error en la medición de cada uno de los ángulos θ y ϕ es a lo más de $\pm 1°$. Calcule el error máximo aproximado en la coordenada x de la ubicación de la mano para cada una de las dos posiciones posibles.

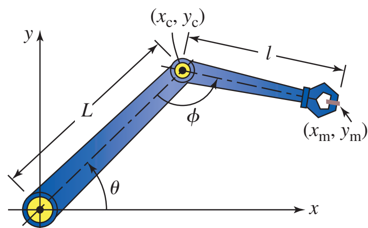


FIGURA 13.4.8 Brazo robótico del problema 43

44. Movimiento de proyectiles Se dispara un proyectil a un ángulo θ con velocidad v a través de un abismo de ancho D hacia el muro del acantilado vertical que es esencialmente infinito tanto en la altura como en profundidad. Vea la FIGURA 13.4.9.

a) Si el proyectil sólo está sujeto a la fuerza de la gravedad, demuestre que la altura H a la cual golpea el muro del acantilado como una función de las variables v y θ está dada por

$$H = D\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{D^2}{v^2}\sec^2\theta.$$

[*Sugerencia*: Vea la sección 10.2.]

b) Calcule la diferencial total de H.

c) Suponga que $D = 100$ pies, $g = 32$ pies/s^2, $v = 100$ pies/s y $\theta = 45°$. Calcule H.

d) Suponga, para los datos del inciso *c*), que el error en la medición de v es a lo sumo ± 1 pies/s y que el error en la medición de θ es a lo sumo $\pm 1°$. Calcule el error máximo aproximado en H.

e) Al dejar que D varíe, H también puede considerarse como una función de tres variables. Encuentre la diferencial total de H. Empleando los datos de los incisos *c*) y *d*) y suponiendo que el error en la medición D es a lo sumo ± 2 pies/s, calcule el error máximo aproximado en H.

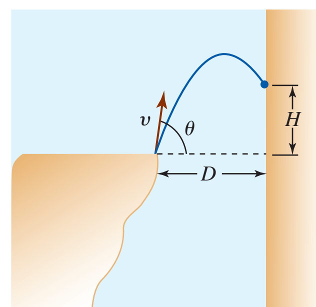


FIGURA 13.4.9 Abismo del problema 44

13.5 Regla de la cadena

Introducción La regla de la cadena para funciones de una sola variable indica que si $y = f(x)$ es una función diferenciable de x, y $x = g(t)$ es una función diferenciable de t, entonces la derivada de la función compuesta es

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

En esta sección se extiende la regla de la cadena a funciones de varias variables.

Regla de la cadena para derivadas ordinarias Si $z = f(x, y)$ y x y y son funciones de una sola variable t, entonces el siguiente teorema indica cómo calcular la derivada ordinaria dz/dt.

Teorema 13.5.1 Regla de la cadena

Suponga que $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x, y) y $x = g(t)$ y que $y = h(t)$ son funciones diferenciables en t. Entonces $z = f(g(t), h(t))$ es una función diferenciable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

EJEMPLO 1 Regla de la cadena

Si $z = x^3y - y^4$ y $x = 2t^2$, $y = 5t^2 - 6t$, calcule dz/dt en $t = 1$.

Solución De (1)

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= (3x^2y)(4t) + (x^3 - 4y^3)(10t - 6).\end{aligned}$$

En este caso, en $t = 1$, $x(1) = 2$ y $y(1) = -1$, por lo que

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} = (3 \cdot 4 \cdot (-1)) \cdot 4 + (8 + 4) \cdot 4 = 0.$$

■

Aunque no hay necesidad de hacerlo de esa manera, también podemos encontrar la derivada dz/dt en el ejemplo 1 al sustituir las funciones $x = 2t^2$, $y = 5t^2 - 6t$ en $z = x^3y - y^4$ y después derivar la función resultante de una sola variable $z = 8t^6(5t^2 - 6t) - (5t^2 - 6t)^4$ con respecto a t.

EJEMPLO 2 Tasas relacionadas

En el ejemplo 3 de la sección 13.3 observamos que la función $S(w, h) = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ relaciona el área de la superficie (pies cuadrados) del cuerpo de una persona como una función del peso w (en libras) y la altura h (en pulgadas). Encuentre la tasa a la cual S cambia cuando $dw/dt = 10$ lb/año, $dh/dt = 2.3$ pulg/año, $w = 100$ lb y $h = 60$ pulgadas.

Solución Con los símbolos w y h desempeñando los papeles de x y y se deduce de (1) que la tasa de cambio de S con respecto al tiempo t es

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial w}\frac{dw}{dt} + \frac{\partial S}{\partial h}\frac{dh}{dt}\\ &= (0.1091)(0.425)w^{-0.575}h^{0.725}\frac{dw}{dt} + (0.1091)(0.725)w^{0.425}h^{-0.275}\frac{dh}{dt}.\end{aligned}$$

Cuando $dw/dt = 10$, $dh/dt = 2.3$, $w = 100$ y $h = 60$, el valor de la derivada es

$$\begin{aligned}\left.\frac{dS}{dt}\right|_{(100,\,60)} &= (0.1091)(0.425)(100)^{-0.575}(60)^{0.725}\cdot(10) + (0.1091)(0.725)(100)^{0.425}(60)^{-0.275}\cdot(2.3)\\ &\approx 1.057.\end{aligned}$$

Como $dS/dt > 0$, la superficie de la persona está creciendo a una tasa de aproximadamente 1.057 pies^2 por año. ■

Regla de la cadena para derivadas parciales Para una función compuesta de dos variables $z = f(x, y)$, donde $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$, se esperarían naturalmente *dos* fórmulas análogas a (1), ya que $z = f(g(u, v), h(u, v))$ y por ello pueden calcularse tanto $\partial z/\partial u$ como $\partial z/\partial v$. La regla de la cadena para funciones de dos variables se resume en el siguiente teorema.

Teorema 13.5.2 Regla de la cadena

Si $z = f(x, y)$ es diferenciable y $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN Probamos el segundo de los resultados en (2). Si $\Delta u = 0$, entonces

$$\Delta z = f(g(u, v + \Delta v), h(u, v + \Delta v)) - f(g(u, v), h(u, v))$$

Ahora bien, si

$$\Delta x = g(u, v + \Delta v) - g(u, v) \quad \text{y} \quad \Delta y = h(u, v + \Delta v) - h(u, v),$$

entonces

$$g(u, v + \Delta v) = x + \Delta x \quad \text{y} \quad h(u, v + \Delta v) = y + \Delta y.$$

Por consiguiente, Δz puede escribirse como

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Puesto que f es diferenciable, se deduce de la fórmula de incremento (4) de la sección 13.4 que Δz puede escribirse como

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

donde, recuerde, ε_1 y ε_2 son funciones de Δx y Δy con la propiedad de que $\lim_{(\Delta u,\, \Delta v)\to(0,\,0)} \varepsilon_1 = 0$ y $\lim_{(\Delta u,\, \Delta v)\to(0,\,0)} \varepsilon_2 = 0$. Puesto que ε_1 y ε_2 no son funciones definidas de manera única, podemos encontrar siempre un par de funciones para las cuales $\varepsilon_1(0, 0) = 0$, $\varepsilon_2(0, 0) = 0$. Por consiguiente, ε_1 y ε_2 son continuas en $(0, 0)$. Por tanto,

$$\frac{\Delta z}{\Delta v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta v} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta v} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta v}.$$

Ahora, tomando el límite de la última línea cuando $\Delta v \to 0$ obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + 0\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + 0\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

puesto que Δx y Δy se aproximan a cero cuando $\Delta v \to 0$. ■

EJEMPLO 3 Regla de la cadena

Si $z = x^2 - y^3$ y $x = e^{2u-3v}$, $y = \text{sen}(u^2 - v^2)$, determine $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$.

Solución Como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2e^{2u-3v}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = 2u\cos(u^2 - v^2),$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -3e^{2u-3v}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -2v\cos(u^2 - v^2),$$

vemos de (2) que $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ son, a su vez,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x(2e^{2u-3v}) - 3y^2[2u\cos(u^2 - v^2)] = 4xe^{2u-3v} - 6uy^2\cos(u^2 - v^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x(-3e^{2u-3v}) - 3y^2[-2v\cos(u^2 - v^2)] = -6xe^{2u-3v} + 6vy^2\cos(u^2 - v^2).$$ ■

Desde luego, como en el ejemplo 1, podríamos sustituir las expresiones para x y y en la función original y encontrar después las derivadas parciales $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ de manera directa. Sin embargo, no hay una ventaja particular que se obtenga al hacerlo así.

Generalizaciones Los resultados dados en (1) y (2) se generalizan de inmediato a cualquier número de variables. Si $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es diferenciable en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y si x_i, $i = 1, \ldots, n$, son funciones diferenciables de una sola variable t, entonces (1) del teorema 13.5.1 se convierte en

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}. \tag{3}$$

De manera similar, si $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y cada una de las variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son funciones de k variables $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k$, entonces bajo las mismas suposiciones que en el teorema 13.5.2, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_i} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_i} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_i}, \tag{4}$$

donde $i = 1, 2, \ldots, k$.

Diagramas de árbol Los resultados en (1) y (2) pueden memorizarse en términos de **diagramas de árbol**. Los puntos en la FIGURA 13.5.1*a*) indican que z depende de x y y; x y y dependen, a su vez, de u y v. Para calcular $\partial z/\partial u$ por ejemplo, leemos el diagrama verticalmente hacia abajo empezando desde z y siguiendo las dos trayectorias azules que llevan a x y y. Después seguimos las trayectorias azules que conducen a u, multiplicamos las derivadas parciales en cada trayectoria y luego sumamos los productos. Para calcular $\partial z/\partial v$ empezamos en las dos trayectorias azules pero después ramificamos en x y y hacia las trayectorias rojas para obtener v, multiplicar las derivadas parciales en cada segmento y después sumar los productos. El resultado en (1) se

representa mediante el diagrama de árbol de la figura 13.5.1*b*). Sólo hay una rama que parte de x y de y puesto que estas variables dependen sólo de la variable individual t.

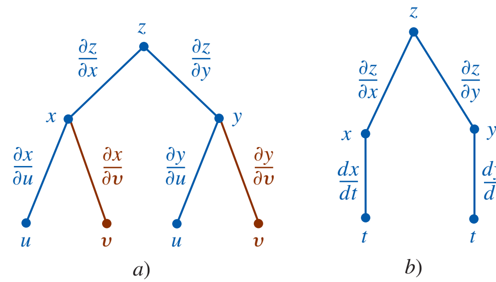


FIGURA 13.5.1 Diagramas de árbol: *a*) para (2) y *b*) para (1)

Empleamos los diagramas de árbol en los siguientes tres ejemplos para ilustrar casos especiales de (3) y (4).

EJEMPLO 4 Regla de la cadena

Si $r = x^2 + y^5z^3$ y $x = uve^{2s}$, $y = u^2 - v^2s$, $z = \text{sen}(uvs^2)$, encuentre *a*) $\partial r/\partial u$ y *b*) $\partial r/\partial s$.

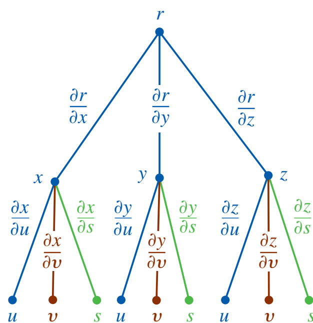


FIGURA 13.5.2 Diagrama de árbol del ejemplo 4

Solución En este caso r es una función de tres variables x, y y z, y cada una es en sí misma una función de tres variables u, v y s. Para construir un diagrama de árbol dibujamos tres trayectorias azules desde r hasta tres puntos denominados x, y y z. Luego, ya que x, y y z dependen de tres variables, dibujamos tres trayectorias (azul, roja y verde) que parten de los puntos x, y y z hasta los puntos u, v y s. En cada uno de estos doce segmentos indicamos la derivada parcial apropiada. Vea la FIGURA 13.5.2. Para calcular $\partial r/\partial u$ seguimos las tres trayectorias poligonales azules que empiezan en r siempre hacia u en los tres diagramas. Formamos los productos de las derivadas parciales indicadas sobre cada segmento de las tres trayectorias poligonales azules hacia u y sumamos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial u} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\ &= 2x(ve^{2s}) + 5y^4z^3(2u) + 3y^5z^2(vs^2\cos(uvs^2)).\end{aligned}$$

Ahora para calcular $\partial r/\partial s$ empezamos desde r sobre las tres trayectorias poligonales azules en la figura 13.5.2 y luego ramificamos hacia las trayectorias verdes en x, y y z para llegar a s. Al sumar los productos de la derivada parcial en cada segmento de las tres trayectorias poligonales que llevan a s obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial s} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ &= 2x(2uve^{2s}) + 5y^4z^3(-v^2) + 3y^5z^2(2uvs\cos(uvs^2)).\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 Regla de la cadena

Suponga que $w = f(x, y, z)$ es una función diferenciable de x, y y z y $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ y $z = k(u, v)$ son funciones diferenciables de u y v. Construya un diagrama de árbol para calcular $\partial w/\partial u$ y $\partial w/\partial v$.

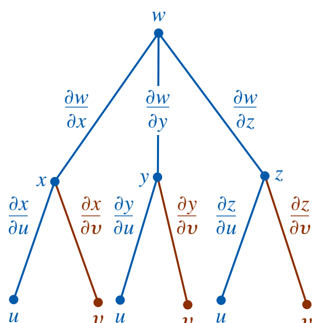


FIGURA 13.5.3 Diagrama de árbol del ejemplo 5

Solución Puesto que f es una función de tres variables x, y y z, y éstas son funciones de dos variables u y v, el diagrama de árbol es como se ilustra en la FIGURA 13.5.3. Las derivadas parciales son entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Regla de la cadena

Si $z = u^2v^3w^4$ y $u = t^2$, $v = 5t - 8$, $w = t^3 + t$, determine dz/dt.

Solución En este caso el diagrama de árbol de la FIGURA 13.5.4 indica que

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}\\ &= 2uv^3w^4(2t) + 3u^2v^2w^4(5) + 4u^2v^3w^3(3t^2 + 1).\end{aligned}$$ ■

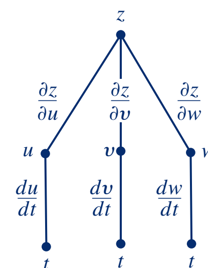


FIGURA 13.5.4 Diagrama de árbol del ejemplo 6

Diferenciación implícita Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define a una función $y = f(x)$ de manera implícita, entonces $F(x, f(x)) = 0$ para toda x en el dominio de f. Recuerde de la sección 3.6 que encontramos la derivada dy/dx mediante un proceso llamado *diferenciación implícita*. La derivada dy/dx también puede determinarse de la regla de la cadena. Si suponemos que $w = F(x, y)$ y $y = f(x)$ son funciones diferenciables, entonces de (1) tenemos

$$\frac{dw}{dx} = F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx}. \tag{5}$$

Puesto que $w = F(x, y) = 0$ y $dx/dx = 1$, (5) implica

$$F_x(x, y) + F_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)},$$

siempre que $F_y(x, y) \neq 0$.

Además, si $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente una función $z = f(x, y)$, entonces $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para toda (x, y) en el dominio de f. Si $w = F(x, y, z)$ es una función diferenciable y $z = f(x, y)$ es diferenciable en x y y, entonces (3) produce

$$\frac{\partial w}{\partial x} = F_x(x, y, z)\frac{\partial x}{\partial x} + F_y(x, y, z)\frac{\partial y}{\partial x} + F_z(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x}. \tag{6}$$

Puesto que $w = F(x, y, z) = 0$, $\partial x/\partial x = 1$ y $\partial y/\partial x = 0$, (6) produce

$$F_x(x, y, z) + F_z(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)},$$

siempre que $F_z(x, y, z) \neq 0$. La derivada parcial $\partial z/\partial y$ puede obtenerse de manera similar. Resumimos estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 13.5.3 Diferenciación implícita

i) Si $w = F(x, y)$ es diferenciable y $y = f(x)$ es una función diferenciable de x definida implícitamente por $F(x, y) = 0$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \tag{7}$$

donde $F_y(x, y) \neq 0$.

ii) Si $w = F(x, y, z)$ es diferenciable y $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de x y y definida implícitamente por $F(x, y, z) = 0$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \tag{8}$$

donde $F_z(x, y, z) \neq 0$.

EJEMPLO 7 Diferenciación implícita

a) Encuentre dy/dx si $x^2 - 4xy - 3y^2 = 10$.

b) Encuentre $\partial z/\partial y$ si $x^2y - 5xy^2 = 2yz - 4z^3$.

Solución

a) Sea $F(x, y) = x^2 - 4xy - 3y^2 - 10$. Entonces definimos y como una función de x por medio de $F(x, y) = 0$. En este caso, $F_x = 2x - 4y$ y $F_y = -4x - 6y$, y consecuentemente por (7) del teorema 13.5.3 tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{2x - 4y}{-4x - 6y} = \frac{x - 2y}{2x + 3y}.$$

Se le pide al lector verificar este resultado mediante el procedimiento de la sección 3.6.

b) Sea $F(x, y, z) = x^2y - 5xy^2 - 2yz + 4z^3$. Entonces definimos z como una función de x y y mediante $F(x, y, z) = 0$. Puesto que $F_y = x^2 - 10xy - 2z$ y $F_z = -2y + 12z^2$, concluimos de (8) en el teorema 13.5.3 que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{x^2 - 10xy - 2z}{-2y + 12z^2} = \frac{x^2 - 10xy - 2z}{2y - 12z^2}.$$ ■

Ejercicios 13.5 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-41.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre la derivada indicada.

1. $z = \ln(x^2 + y^2); \quad x = t^2, y = t^{-2}; \quad \dfrac{dz}{dt}$

2. $z = x^3y - xy^4; \quad x = e^{5t}, y = \sec 5t; \quad \dfrac{dz}{dt}$

3. $z = \cos(3x + 4y); \quad x = 2t + \dfrac{\pi}{2}, y = -t - \dfrac{\pi}{4}; \quad \left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=\pi}$

4. $z = e^{xy}; \quad x = \dfrac{4}{2t + 1}, y = 3t + 5; \quad \left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=0}$

5. $p = \dfrac{r}{2s + t}; \quad r = u^2, s = \dfrac{1}{u^2}, t = \sqrt{u}; \quad \dfrac{dp}{du}$

6. $r = \dfrac{xy^2}{z^3}; \quad x = \cos s, y = \operatorname{sen} s, z = \tan s; \quad \dfrac{dr}{ds}$

En los problemas 7-16, determine las derivadas parciales indicadas.

7. $z = e^{xy^2}; \quad x = u^3, y = u - v^2; \quad \dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$

8. $z = x^2 \cos 4y; \quad x = u^2v^3, y = u^3 + v^3; \quad \dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$

9. $z = 4x - 5y^2; \quad x = u^4 - 8v^3, y = (2u - v)^2; \quad \dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$

10. $z = \dfrac{x - y}{x + y}; \quad x = \dfrac{u}{v}, y = \dfrac{v^2}{u}; \quad \dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$

11. $w = (u^2 + v^2)^{3/2}; \quad u = e^{-t} \operatorname{sen} \theta, v = e^{-t} \cos \theta; \quad \dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial \theta}$

12. $w = \tan^{-1}\sqrt{uv}; \quad u = r^2 - s^2, v = r^2s^2; \quad \dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial s}$

13. $R = rs^2t^4; \quad r = ue^{v^2}, s = ve^{-u^2}, t = e^{u^2v^2}; \quad \dfrac{\partial R}{\partial u}, \dfrac{\partial R}{\partial v}$

14. $Q = \ln(pqr); \quad p = t^2 \operatorname{sen}^{-1} x, q = \dfrac{x}{t^2}, r = \tan^{-1}\dfrac{x}{t}; \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial t}$

15. $w = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad x = \ln(rs + tu),$
$y = \dfrac{t}{u}\cosh rs; \quad \dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial u}$

16. $s = p^2 + q^2 - r^2 + 4t; \quad p = \phi e^{3\theta}, q = \cos(\phi + \theta),$
$r = \phi\theta^2, t = 2\phi + 8\theta; \quad \dfrac{\partial s}{\partial \phi}, \dfrac{\partial s}{\partial \theta}$

En los problemas 17-20, encuentre dy/dx mediante dos métodos:

a) diferenciación implícita y
b) el teorema 13.5.3*i*).

17. $x^3 - 2x^2y^2 + y = 1$

18. $x + 2y^2 = e^y$

19. $y = \operatorname{sen} xy$

20. $(x + y)^{2/3} = xy$

En los problemas 21-24, emplee el teorema 13.5.3*ii*) para encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

21. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

22. $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$

23. $xy^2z^3 + x^2 - y^2 = 5z^2$

24. $z = \ln(xyz)$

25. Si F y G tienen segundas derivadas parciales, muestre que $u(x, t) = F(x + at) + G(x - at)$ satisface la **ecuación de onda**

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

26. Sea $\eta = x + at$ y $\xi = x - at$. Muestre que la ecuación de onda del problema 25 se convierte en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0,$$

donde $u = f(\eta, \xi)$.

27. Si $u = f(x, y)$ y $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, muestre que la **ecuación de Laplace** $\partial^2u/\partial x^2 + \partial^2u/\partial y^2 = 0$ se vuelve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

28. Si $z = f(u)$ es una función diferenciable de una variable y $u = g(x, y)$ posee primeras derivadas parciales, entonces, ¿cuáles son $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$?

29. Emplee el resultado del problema 28 con el fin de mostrar que para cualquier función diferenciable f, $z = f(y/x)$ satisface la ecuación diferencial parcial $x\partial z/\partial x + y\partial z/\partial y = 0$.

30. Si $u = f(r)$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, muestre que la ecuación de Laplace $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ se transforma en

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = 0.$$

31. La **función error** definida por $\mathrm{erf}(x) = \left(2/\sqrt{\pi}\right)\int_0^x e^{-v^2}dv$ es importante en matemáticas aplicadas. Muestre que $u(x, t) = A + B\,\mathrm{erf}\left(x/\sqrt{4kt}\right)$, A y B constantes, satisfacen la ecuación de difusión unidimensional

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

≡ Aplicaciones

32. El voltaje en los extremos de un conductor aumenta a una tasa de 2 volts/min y la resistencia disminuye a razón de 1 ohm/min. Emplee $I = E/R$ y la regla de la cadena para calcular la tasa a la cual la corriente que circula por el conductor está cambiando cuando $R = 50$ ohms y $E = 60$ volts.

33. La longitud del lado marcado x del triángulo de la FIGURA 13.5.5 aumenta a una tasa de 0.3 cm/s, el lado marcado y crece a una tasa de 0.5 cm/s y el ángulo incluido θ aumenta a una tasa de 0.1 rad/s. Emplee la regla de la cadena para determinar la tasa a la cual el área del triángulo está cambiando en el instante $x = 10$ cm, $y = 8$ cm y $\theta = \pi/6$.

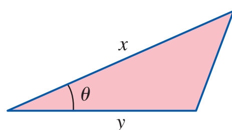


FIGURA 13.5.5 Triángulo del problema 33

34. La **ecuación de estado de Van der Waals** para un gas real CO_2 es

$$P = \frac{0.08T}{V - 0.0427} - \frac{3.6}{V^2}.$$

Si dT/dt y dV/dt son las tasas a las cuales cambian, respectivamente, la temperatura y el volumen, utilice la regla de la cadena para determinar dP/dt.

35. Un bebé crece a una tasa de 2 pulg/año y gana peso a una tasa de 4.2 lb/año. Utilice $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ y la regla de la cadena para determinar la tasa a la cual el área superficial del bebé está cambiando cuando éste pesa 25 lb y mide 29 pulg de altura.

36. Una partícula se mueve en el espacio tridimensional de manera que sus coordenadas en cualquier tiempo son $x = 4\cos t$, $y = 4\,\mathrm{sen}\,t$, $z = 5t$, $t \geq 0$. Emplee la regla de la cadena para encontrar la tasa a la cual su distancia

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

a partir del origen está cambiando en $t = 5\pi/2$ segundos.

37. La ecuación de estado correspondiente a un sistema termodinámico es $F(P, V, T) = 0$, donde P, V y T son la presión, el volumen y la temperatura, respectivamente. Si la ecuación define a V como una función de P y T, y también define a T como una función de V y P, muestre que

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial T}}{\dfrac{\partial F}{\partial V}} = -\frac{1}{\dfrac{\partial T}{\partial V}}.$$

38. Dos barcos de la guardia costera (denotados por A y B en la FIGURA 13.5.6), separados por una distancia de 500 yardas, descubren a un barco sospechoso C con orientaciones relativas θ y ϕ como se ilustra en la figura.

a) Utilice la ley de los senos para expresar la distancia r de A y C en términos de θ y ϕ.

b) ¿Cuán lejos está C de A cuando $\theta = 62°$ y $\phi = 75°$?

c) Suponga que en el momento especificado en el inciso *b*), el ángulo θ está creciendo a una tasa de 5° por minuto, mientras que ϕ está disminuyendo a una tasa de 10° por minuto. ¿La distancia de C a A crece o decrece? ¿A qué tasa?

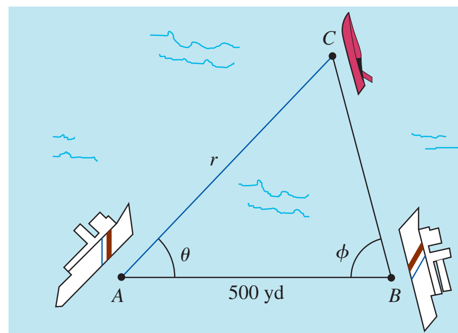


FIGURA 13.5.6 Barcos del problema 38

39. Un **resonador de Helmholtz** es cualquier recipiente con un cuello y una abertura (tal como una jarra o una botella de cerveza). Cuando se sopla el aire a través de la abertura, el resonador produce un sonido característico cuya frecuencia, en ciclos por segundo, es

$$f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{lV}},$$

donde A es el área de la sección transversal de la abertura, l es la longitud del cuello, V es el volumen del recipiente (sin contar el cuello) y c es la velocidad del sonido (aproximadamente 330 m/s). Vea la FIGURA 13.5.7.

a) ¿Qué frecuencia sonora producirá una botella si tiene una abertura circular de 2 cm de diámetro, un cuello de 6 cm de largo y un volumen de 100 cm^3? [*Sugerencia*: Asegúrese de convertir c a cm/s.]

b) Suponga que el volumen de la botella en el inciso *a*) está disminuyendo a una tasa de 10 cm^3/s, mientras que su cuello se adelgaza a una tasa de 1 cm/s. En el instante especificado en el inciso *a*) (esto es, $V = 100$, $l = 6$) ¿la frecuencia está creciendo o decreciendo?

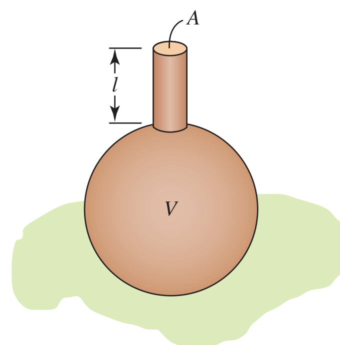


FIGURA 13.5.7 Recipiente del problema 39

Piense en ello

40. ***a***) Suponga que $w = F(x, y, z)$ y $y = g(x)$, $z = h(x)$. Dibuje un diagrama de árbol apropiado y encuentre una expresión para dw/dx.

b) Suponga que $w = xy^2 - 2yz + x$ y $y = \ln x$, $z = e^x$. Emplee la regla de la cadena para determinar dw/dx.

41. Suponga que $z = F(u, v, w)$, donde $u = F(t_1, t_2, t_3, t_4)$, $v = g(t_1, t_2, t_3, t_4)$ y $w = h(t_1, t_2, t_3, t_4)$. Dibuje un diagrama de árbol apropiado y encuentre expresiones para las derivadas parciales $\partial z/\partial t_2$ y $\partial z/\partial t_4$.

42. Suponga que $w = F(x, y, z, u)$ es diferenciable y $u = f(x, y, z)$ es una función diferenciable de x, y y z definida implícitamente por $f(x, y, z, u) = 0$. Encuentre expresiones para $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ y $\partial u/\partial z$.

43. Utilice los resultados del problema 42 para encontrar $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ y $\partial u/\partial z$ si u es una función diferenciable de x, y y z definida implícitamente por $-xyz + x^2yu + 2xy^3u - u^4 = 8$.

44. ***a***) Se dice que una función f es **homogénea de grado *n*** si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$. Si f tiene primeras derivadas parciales, muestre que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$

b) Verifique que $f(x, y) = 4x^2y^3 - 3xy^4 + x^5$ es una función homogénea de grado 5.

c) Verifique que la función en el inciso *b*) satisface la ecuación diferencial del inciso *a*).

d) Reexamine el problema 29. Conjeture acerca de si $z = f(y/x)$ es homogénea.

13.6 Derivada direccional

Introducción En la sección 13.3 vimos que las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ son las tasas de cambio de la función $z = f(x, y)$ en las direcciones que son paralelas al eje x o al eje y, respectivamente. En la presente sección generalizaremos la noción de derivadas parciales mostrando cómo encontrar la tasa de cambio de f en una dirección arbitraria. Para hacerlo es conveniente introducir una nueva función vectorial cuyas componentes son derivadas parciales.

El gradiente de una función Cuando el **operador diferencial**

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{o} \quad \nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

se aplica a una función $z = f(x, y)$ o $w = f(x, y, z)$, obtenemos una función vectorial muy útil.

Definición 13.6.1 Gradientes

i) Suponga que f es una función de dos variables x y y cuyas derivadas parciales f_x y f_y existen. Entonces el **gradiente de *f*** se define como

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}. \quad (1)$$

ii) Suponga que f es una función de tres variables x, y y z cuyas derivadas parciales f_x, f_y y f_z existen. Entonces el **gradiente de *f*** se define como

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}. \quad (2)$$

El símbolo ∇ es una delta griega mayúscula invertida, que se denomina *del* o *nabla*. El símbolo ∇f suele leerse "grad f".

EJEMPLO 1 Gradiente de una función de dos variables

Calcule $\nabla f(x, y)$ para $f(x, y) = 5y - x^3y^2$.

Solución De (1),

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(5y - x^3y^2)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(5y - x^3y^2)\mathbf{j}\\ &= -3x^2y^2\mathbf{i} + (5 - 2x^3y)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Gradiente de una función de tres variables

Si $f(x, y, z) = xy^2 + 3x^2 - z^3$, determine $\nabla f(x, y, z)$ en $(2, -1, 4)$.

Solución De (2),

$$\nabla f(x, y, z) = (y^2 + 6x)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} - 3z^2\mathbf{k}$$

y por ello $$\nabla f(2, -1, 4) = 13\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 48\mathbf{k}.$$ ■

El gradiente de una función f tiene muchas aplicaciones. Veremos después que ∇f desempeña un importante papel en la generalización del concepto de derivada parcial.

Una generalización de la diferenciación parcial Recuerde que las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ producen la pendiente de una recta tangente a la traza, o curva de intersección, de una superficie dada por $z = f(x, y)$ y planos verticales que son, respectivamente, paralelos a los ejes de coordenadas x y y. De manera equivalente, $\partial z/\partial x$ es la tasa de cambio de la función f en la dirección dada por el vector $\mathbf{i}$, y $\partial z/\partial y$ es la tasa de cambio de $z = f(x, y)$ en la dirección $\mathbf{j}$. No hay razón para restringir nuestra atención sólo a dos direcciones; podemos encontrar la tasa de cambio de una función diferencial en *cualquier* dirección. Vea la FIGURA 13.6.1. Suponga que Δx y Δy denotan incrementos en x y y, respectivamente, y que $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ es un vector *unitario* en el plano xy que forma un ángulo θ con el eje positivo x y que es paralelo al vector $\mathbf{v}$ de $(x, y, 0)$ a $(x + \Delta x, y + \Delta y, 0)$. Si $h = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} > 0$, entonces $\mathbf{v} = h\mathbf{u}$. Además, considere que el plano perpendicular al plano xy que contiene estos puntos corta la superficie $z = f(x, y)$ en una curva C. Preguntamos:

- ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a C en el punto P con coordenadas $(x, y, f(x, y))$ en la dirección dada por $\mathbf{v}$?

Vea la FIGURA 13.6.2.

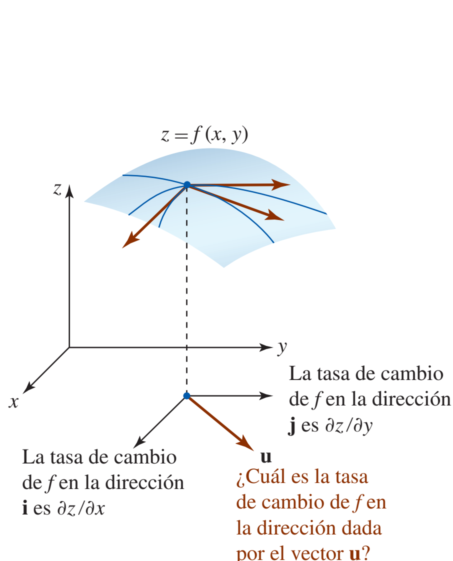


FIGURA 13.6.1 El vector $\mathbf{u}$ determina la dirección

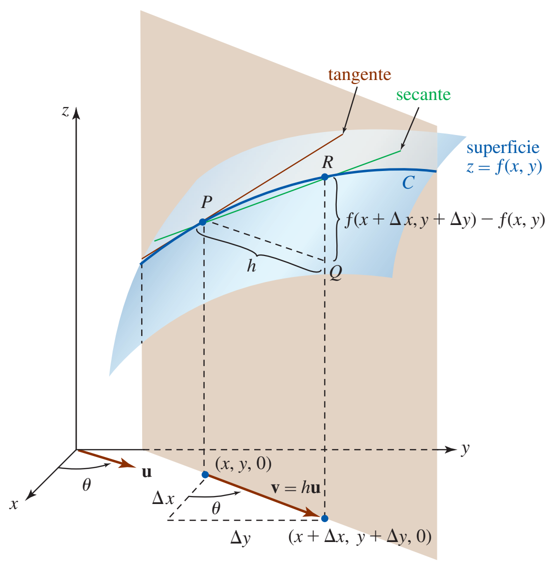


FIGURA 13.6.2 ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva C en P?

De la figura 13.6.2, vemos que $\Delta x = h\cos\theta$ y $\Delta y = h\operatorname{sen}\theta$, por lo que la pendiente de la recta secante indicada que pasa por los puntos P y R sobre C es

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{h} = \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h}. \tag{3}$$

Esperamos que la pendiente de la tangente en P sea el límite de (3) cuando $h \to 0$. Esta pendiente es la tasa de cambio de f en P en la dirección especificada por el vector unitario $\mathbf{u}$. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 13.6.2 Derivada direccional

La **derivada direccional** de una función $z = f(x, y)$ en (x, y) en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ está dada por

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h}, \tag{4}$$

siempre que el límite exista.

Observe que (4) es realmente una generalización de (1) y (2) de la sección 13.3, puesto que:

$$\theta = 0 \text{ implica que } D_{\mathbf{i}} f(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

y

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ implica que } D_{\mathbf{j}} f(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Cálculo de una derivada direccional Si bien (4) podría utilizarse para encontrar $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ relativa a una función dada, como es usual buscaremos un procedimiento más eficiente. El siguiente teorema muestra cómo el concepto de gradiente de una función desempeña un papel fundamental en el cálculo de una derivada direccional.

Teorema 13.6.1 Cálculo de una derivada direccional

Si $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de x y y, y $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ es un vector unitario, entonces

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}. \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN Sean x, y y θ fijas de manera que

$$g(t) = f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)$$

es una función de una sola variable t. Deseamos comparar el valor de $g'(0)$, el cual se encuentra mediante dos métodos diferentes. Primero, por la definición de una derivada,

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0 + h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h}. \tag{6}$$

Segundo, por la regla de la cadena (1) de la sección 13.5,

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_1(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\frac{d}{dt}(x + t\cos\theta) + f_2(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\frac{d}{dt}(y + t\operatorname{sen}\theta) \\ &= f_1(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + f_2(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta. \end{aligned} \tag{7}$$

Aquí los subíndices 1 y 2 se refieren a las derivadas parciales de $f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)$ respecto a $x + t\cos\theta$ y $y + t\operatorname{sen}\theta$. Cuando $t = 0$, advertimos que $x + t\cos\theta$ y $y + t\operatorname{sen}\theta$ son simplemente x y y, y en consecuencia (7) se convierte en

$$g'(0) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta. \tag{8}$$

Al comparar (4), (6) y (8) se produce entonces

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta \\ &= [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \cdot (\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) \\ &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Derivada direccional

Determine la derivada direccional de $f(x, y) = 2x^2y^3 + 6xy$ en (1, 1) en la dirección del vector unitario cuyo ángulo con el eje x positivo sea $\pi/6$.

Solución Puesto que $\partial f/\partial x = 4xy^3 + 6y$ y $\partial f/\partial y = 6x^2y^2 + 6x$ tenemos de (1) de la definición 13.6.1,

$$\nabla f(x, y) = (4xy^3 + 6y)\mathbf{i} + (6x^2y^2 + 6x)\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \nabla f(1, 1) = 10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}.$$

Ahora bien, en $\theta = \pi/6$, $\mathbf{u} + \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ se convierte en

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}.$$

Por tanto, por (5) del teorema 13.6.1,

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 1) = \nabla f(1, 1)\cdot\mathbf{u} = (10\mathbf{i} + 12\mathbf{j})\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = 5\sqrt{3} + 6. \qquad \blacksquare$$

Es importante que usted recuerde que el vector **u** en el teorema 13.6.1 es un vector *unitario*. Si un vector **v** no unitario especifica una dirección, entonces para utilizar (5) debemos normalizar **v** y utilizar $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

EJEMPLO 4 Derivada direccional

Considere el plano que es perpendicular al plano xy y que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(3, 2)$. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de este plano con la superficie $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ en (2, 1, 17) en la dirección de Q?

Solución Queremos determinar $D_{\mathbf{u}}f(2, 1)$ en la dirección dada por el vector $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Sin embargo, puesto que $\overrightarrow{PQ}$ no es un vector unitario, formamos

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\overrightarrow{PQ}|}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

En este caso,

$$\nabla f(x, y) = 8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \nabla f(2, 1) = 16\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

Por tanto, de (5) la pendiente que se desea es

$$D_{\mathbf{u}}f(2, 1) = (16\mathbf{i} + 2\mathbf{j})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) = 9\sqrt{2}. \qquad \blacksquare$$

Funciones de tres variables Para una función $w = f(x, y, z)$ la derivada direccional está definida por

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h\cos\alpha, y + h\cos\beta, z + h\cos\gamma) - f(x, y, z)}{h},$$

donde α, β y γ son los ángulos direccionales del vector **u** medidos con relación a los ejes x, y y z, respectivamente.* No obstante, de la misma manera que antes, podemos demostrar que

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)\cdot\mathbf{u}. \tag{9}$$

Note que, puesto que **u** es un vector unitario, de (11) de la sección 11.3 se deduce que

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \operatorname{comp}_{\mathbf{u}}\nabla f(x, y) \qquad \text{y} \qquad D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \operatorname{comp}_{\mathbf{u}}\nabla f(x, y, z).$$

Además, (9) revela que

$$D_{\mathbf{k}}f(x, y, z) = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

*Advierta que el numerador de (4) puede escribirse como $f(x + h\cos\alpha, y + h\cos\beta) - f(x, y)$, donde $\beta = (\pi/2) - \alpha$.

EJEMPLO 5 Derivada direccional

Encuentre la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy^2 - 4x^2y + z^2$ en $(1, -1, 2)$ en la dirección de $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Solución Tenemos $\partial f/\partial x = y^2 - 8xy$, $\partial f/\partial y = 2xy - 4x^2$ y $\partial f/\partial z = 2z$, por lo que

$$\nabla f(x, y, z) = (y^2 - 8xy)\mathbf{i} + (2xy - 4x^2)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$
$$\nabla f(1, -1, 2) = 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Puesto que $|\mathbf{v}| = |6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}| = 7$ entonces $\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$

es un vector unitario en la dirección indicada. De (9) obtenemos

$$D_{\mathbf{u}}f(1, -1, 2) = (9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}\right) = \frac{54}{7}.$$ ■

Valor máximo de la derivada direccional Considere que f representa una función de dos o tres variables. Puesto que (5) y (9) expresan la derivada direccional como un producto punto, vemos del teorema 11.3.2 que

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}|\cos\phi = |\nabla f|\cos\phi, \quad (|u| = 1), \tag{10}$$

donde ϕ es el ángulo entre ∇f y $\mathbf{u}$ que satisface $0 \le \phi \le \pi$. Debido a que $-1 \le \cos\phi \le 1$ se deduce de (10) que

$$-|\nabla f| \le D_{\mathbf{u}}f \le |\nabla f|.$$

En otras palabras:

- El valor máximo de la derivada direccional es $|\nabla f|$ y ocurre cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que ∇f (cuando $\cos\phi = 1$), (11)

y

- El valor mínimo de la derivada direccional es $-|\nabla f|$ y ocurre cuando $\mathbf{u}$ y ∇f tienen direcciones opuestas (cuando $\cos\phi = -1$). (12)

EJEMPLO 6 Valor máximo de la derivada direccional

En el ejemplo 5 el valor máximo de la derivada direccional de f en $(1, -1, 2)$ es $|\nabla f(1, -1, 2)| = \sqrt{133}$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(1, -1, 2)$ es entonces $-\sqrt{133}$. ■

Puntos gradientes en la dirección del incremento más rápido de *f* Puesto de otra forma, (11) y (12) establecen que:

- El vector gradiente ∇f apunta en la dirección en la cual f crece con mayor rapidez, en tanto que $-\nabla f$ apunta en la dirección en la cual f decrece con mayor rapidez.

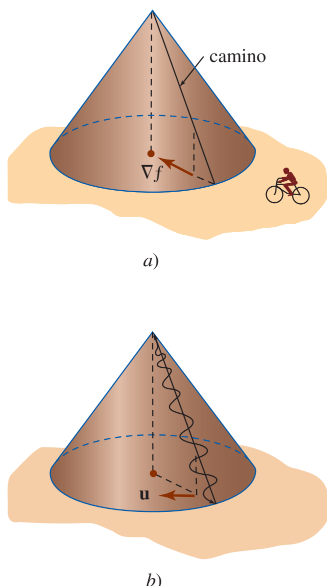


FIGURA 13.6.3 Modelo de la colina inclinada del ejemplo 7

EJEMPLO 7 Un modelo matemático

Cada año en Los Ángeles hay una carrera de bicicletas hasta la cima de una colina por un camino conocido como el más inclinado de la ciudad. Para entender por qué un ciclista, con un mínimo de cordura, ascenderá en zigzag por el camino, vamos a suponer que la gráfica $f(x, y) = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 4$, que se muestra en la FIGURA 13.6.3*a*), es un modelo matemático de la colina. El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = \frac{2}{3}\left[\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}\right] = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{r},$$

donde $\mathbf{r} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ es un vector que apunta hacia el centro de la base circular.

Entonces, la subida más inclinada por la colina es un camino recto cuya proyección en el plano xy es un radio de la base circular. Puesto que $D_{\mathbf{u}}f = \text{comp}_{\mathbf{u}}\nabla f$, un ciclista realizará zigzag, o buscará una dirección $\mathbf{u}$ distinta a ∇f, para reducir esta componente. Vea la figura 13.6.3*b*). ■

EJEMPLO 8 Un modelo matemático

La temperatura en un caja rectangular se aproxima mediante el modelo matemático $T(x, y, z) = xyz(1 - x)(2 - y)(3 - z), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$. Si un mosquito se ubica en $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$, ¿en qué dirección debería volar para enfriarse tan rápido como sea posible?

Solución El gradiente de T es

$$\nabla T(x, y, z) = yz(2 - y)(3 - z)(1 - 2x)\mathbf{i} + xz(1 - x)(3 - z)(2 - 2y)\mathbf{j} + xy(1 - x)(2 - y)(3 - 2z)\mathbf{k}.$$

Por tanto,
$$\nabla T\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \frac{1}{4}\mathbf{k}.$$

Para enfriarse con la mayor rapidez, el mosquito debe volar en la dirección de $\frac{1}{4}\mathbf{k}$; esto es, debe volar hacia el piso de la caja, donde la temperatura es $T(x, y, 0) = 0$. ■

Ejercicios 13.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-42.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-4, calcule el gradiente para la función dada.

1. $f(x, y) = x^2 - x^3y^2 + y^4$

2. $f(x, y) = y - e^{-2x^2y}$

3. $F(x, y, z) = \dfrac{xy^2}{z^3}$

4. $G(x, y, z) = xy \cos yz$

En los problemas 5-8, determine el gradiente de la función dada en el punto indicado.

5. $f(x, y) = x^2 - 4y^2$; $(2, 4)$

6. $f(x, y) = \sqrt{x^3y - y^4}$; $(3, 2)$

7. $f(x, y, z) = x^2z^2 \operatorname{sen} 4y$; $(-2, \pi/3, 1)$

8. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $(-4, 3, 5)$

En los problemas 9 y 10, emplee la definición 13.6.2 para encontrar $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ dado que $\mathbf{u}$ forma el ángulo indicado con el eje positivo.

9. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $\theta = 30°$

10. $f(x, y) = 3x - y^2$; $\theta = 45°$

En los problemas 11-20, encuentre la derivada direccional de la función dada en el punto indicado en la dirección señalada.

11. $f(x, y) = 5x^3y^6$; $(-1, 1), \theta = \pi/6$

12. $f(x, y) = 4x + xy^2 - 5y$; $(3, -1), \theta = \pi/4$

13. $f(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$; $(2, -2), \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

14. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$; $(2, -1), 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

15. $f(x, y) = (xy + 1)^2$; $(3, 2)$, en la dirección de $(5, 3)$

16. $f(x, y) = x^2 \tan y$; $\left(\frac{1}{2}, \pi/3\right)$, en la dirección del eje x negativo.

17. $F(x, y, z) = x^2y^2(2z + 1)^2$; $(1, -1, 1), \langle 0, 3, 3\rangle$

18. $F(x, y, z) = \dfrac{x^2 - y^2}{z^2}$; $(2, 4, -1), \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2y + 2y^2z}$; $(-2, 2, 1)$, en la dirección del eje z negativo.

20. $f(x, y, z) = 2x - y^2 + z^2$; $(4, -4, 2)$, en la dirección del origen.

En los problemas 21 y 22, considere el plano que pasa por los puntos P y Q y que es perpendicular al plano xy. Encuentre la pendiente de la tangente en el punto indicado a la curva de intersección de este plano y la gráfica de la función dada en la dirección de Q.

21. $f(x, y) = (x - y)^2$; $P(4, 2), Q(0, 1)$; $(4, 2, 4)$

22. $f(x, y) = x^3 - 5xy + y^2$; $P(1, 1), Q(-1, 6)$; $(1, 1, -3)$

En los problemas 23-26, encuentre un vector que produzca la dirección en la cual la función dada aumenta más rápidamente en el punto indicado. Encuentre la tasa máxima.

23. $f(x, y) = e^{2x} \operatorname{sen} y$; $(0, \pi/4)$

24. $f(x, y) = xye^{x-y}$; $(5, 5)$

25. $f(x, y, z) = x^2 + 4xz + 2yz^2$; $(1, 2, -1)$

26. $f(x, y, z) = xyz$; $(3, 1, -5)$

En los problemas 27-30, encuentre un vector que produzca la dirección en la cual la función dada disminuye más rápidamente en el punto que se indica. Determine la tasa mínima.

27. $f(x, y) = \tan(x^2 + y^2)$; $(\sqrt{\pi/6}, \sqrt{\pi/6})$

28. $f(x, y) = x^3 - y^3$; $(2, -2)$

29. $f(x, y, z) = \sqrt{xz}\, e^y$; $(16, 0, 9)$

30. $f(x, y, z) = \ln\dfrac{xy}{z}$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

31. Encuentre la(s) derivada(s) direccional(es) de $f(x, y) = x + y^2$ en $(3, 4)$ en la dirección de un vector tangente a la gráfica de $2x^2 + y^2 = 9$ en $(2, 1)$.

32. Si $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x$, encuentre todos los puntos donde $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ en la dirección de $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ es cero.

33. Suponga $\nabla f(a, b) = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Encuentre un vector unitario $\mathbf{u}$ de manera que

a) $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 0$

b) $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ es un máximo

c) $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ es un mínimo

34. Suponga $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 6$. ¿Cuál es el valor de $D_{-\mathbf{u}}f(a, b)$?

35. ***a)*** Si $f(x, y) = x^3 - 3x^2y^2 + y^3$, encuentre la derivada direccional de f en un punto (x, y) en la dirección de $\mathbf{u} = (1/\sqrt{10})(3\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

b) Si $F(x, y) = D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ en el inciso *a*), determine $D_{\mathbf{u}}F(x, y)$.

36. Suponga $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 7$, $D_{\mathbf{v}}f(a, b) = 3$, $\mathbf{u} = \frac{5}{13}\mathbf{i} - \frac{12}{13}\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \frac{5}{13}\mathbf{i} + \frac{12}{13}\mathbf{j}$. Determine $\nabla f(a, b)$.

37. Si $f(x, y) = x^3 - 12x + y^2 - 10y$, encuentre todos los puntos en los cuales $|\nabla f| = 0$.

38. Si $f(x, y) = x^2 - \frac{5}{2}y^2$, dibuje entonces el conjunto de puntos en el plano xy para los cuales $|\nabla f| = 10$.

☰ Aplicaciones

39. Considere la placa rectangular que se muestra en la FIGURA 13.6.4. La temperatura en el punto (x, y) sobre la placa está dada por $T(x, y) = 5 + 2x^2 + y^2$. Determine la dirección que un insecto seguiría, empezando en (4, 2), con el fin de enfriarse lo más rápidamente posible.

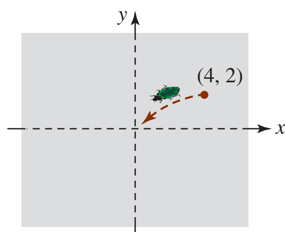


FIGURA 13.6.4 Insecto sobre una placa del problema 39

40. En el problema 39 observe que para (0, 0) es el punto más frío de la placa. Encuentre la trayectoria de búsqueda de enfriamiento del insecto, empezando en (4, 2), que el insecto seguiría hacia el origen. Si $\langle x(t), y(t)\rangle$ es la ecuación vectorial de la trayectoria, entonces use el hecho de que $-\nabla T(x, y) = \langle x'(t), y'(t)\rangle$. ¿Cuál es la razón de lo anterior? [*Sugerencia*: Revise la sección 8.1.]

41. La temperatura T en el punto (x, y) sobre una placa de metal rectangular está dada por $T(x, y) = 100 - 2x^2 - y^2$. Encuentre la trayectoria que tomaría una partícula que busca calor, empezando en (3, 4), cuando ésta se mueve en la dirección en la cual la temperatura aumenta con mayor rapidez.

42. La temperatura T en un punto (x, y, z) en el espacio es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de (x, y, z) al origen. Sabemos que $T(0, 0, 1) = 500$. Encuentre la tasa de cambio de la temperatura T en (2, 3, 3) en la dirección de (3, 1, 1). ¿En cuál dirección a partir de (2, 3, 3) la temperatura T aumenta con mayor rapidez? En (2, 3, 3), ¿cuál es la máxima tasa de cambio de T?

43. Considere el potencial gravitacional

$$U(x, y) = \frac{-Gm}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

donde G y m son constantes. Muestre que U crece o decrece con mayor rapidez a lo largo de una recta que pasa por el origen.

☰ Piense en ello

44. Encuentre una función f tal que

$$\nabla f = (3x^2 + y^3 + ye^{xy})\mathbf{i} + (-2y^2 + 3xy^2 + xe^{xy})\mathbf{j}.$$

En los problemas 45-48, suponga que f y g son funciones diferenciables de dos variables. Demuestre la identidad dada.

45. $\nabla(cf) = c\nabla f$

46. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

47. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

48. $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

49. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i}$ y $r = |\mathbf{r}|$, entonces muestre que $\nabla r = \mathbf{r}/r$.

50. Emplee el problema 49 para mostrar que $\nabla f(r) = f'(r)\mathbf{r}/r$.

51. Sea f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} continua y $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores unitarios. Muestre que $D_{\mathbf{u}}D_{\mathbf{v}}f = D_{\mathbf{v}}D_{\mathbf{u}}f$.

52. Si $\mathbf{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\mathbf{k}$, determine $\nabla \times \mathbf{F}$.

13.7 Planos tangentes y rectas normales

Introducción En la sección 13.4 se mencionó que el análogo tridimensional de una recta tangente a una curva es un plano tangente a una superficie. Para obtener una ecuación de un plano tangente en un punto sobre una superficie debemos regresar a la noción del gradiente de una función de dos o tres variables.

Interpretación geométrica del gradiente Suponga que $f(x, y) = c$ es la *curva de nivel* de la función diferenciable de dos variables $z = f(x, y)$ que pasa por un punto especificado $P(x_0, y_0)$; esto es, el número c se define mediante $f(x_0, y_0) = c$. Si la curva de nivel se parametriza mediante las funciones diferenciables

$$x = x(t),\ y = y(t) \qquad \text{tal que} \qquad x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),$$

entonces por la regla de la cadena, (1) de la sección 13.5, la derivada de $f(x(t), y(t)) = c$ con respecto a t está dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0. \tag{1}$$

Al introducir los vectores

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

(1) puede escribirse como el producto punto $\nabla f \cdot \mathbf{r}' = 0$. Específicamente, en $t = t_0$, tenemos

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \tag{2}$$

Entonces, si $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$, el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ en $P(x_0, y_0)$. Interpretamos que esto significa lo siguiente:

- El gradiente ∇f es perpendicular a la curva de nivel en P.

Vea la FIGURA 13.7.1.

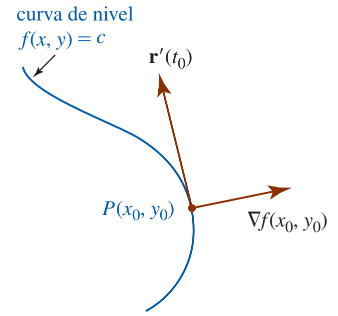


FIGURA 13.7.1 El gradiente es perpendicular a la curva de nivel

EJEMPLO 1 Gradiente en un punto sobre una curva de nivel

Encuentre la curva de nivel de $f(x, y) = -x^2 + y^2$ que pasa por (2, 3). Grafique el gradiente en el punto.

Solución Puesto que $f(2, 3) = -4 + 9 = 5$, la curva de nivel es la hipérbola $-x^2 + y^2 = 5$. Ahora bien,

$$\nabla f(x, y) = -2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \qquad \text{y por ello} \qquad \nabla f(2, 3) = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}.$$

La FIGURA 13.7.2 muestra la curva de nivel y el gradiente $\nabla f(2, 3)$. ■

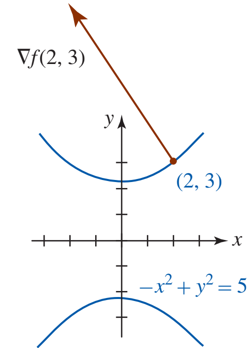


FIGURA 13.7.2 Gradiente del ejemplo 1

Interpretación geométrica del gradiente (continuación) Procediendo como antes, sea $F(x, y, z) = c$ la *superficie de nivel* de una función diferenciable de tres variables $w = F(x, y, z)$ que pasa por $P(x_0, y_0, z_0)$. Si las funciones diferenciables $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ son las ecuaciones paramétricas de una curva C sobre las superficies para las cuales $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, entonces por (3) de la sección 13.5, la derivada de $F(x(t), y(t), z(t)) = c$ con respecto a t es

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

o

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) = 0. \tag{3}$$

En particular, en $t = t_0$, (3) se convierte en

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \tag{4}$$

Entonces, (4) muestra que cuando $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ el vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$. Puesto que este argumento se cumple para cualquier curva diferenciable que pasa por $P(x_0, y_0, z_0)$ sobre la superficie, concluimos que:

- El gradiente ∇F es perpendicular (normal) a la superficie de nivel en P.

Vea la FIGURA 13.7.3.

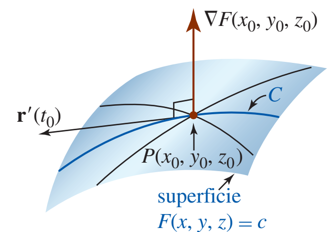


FIGURA 13.7.3 El gradiente es perpendicular a una superficie de nivel

EJEMPLO 2 Gradiente en un punto sobre una superficie de nivel

Encuentre la superficie de nivel de $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ que pasa por (1, 1, 1). Grafique el gradiente en el punto.

Solución Puesto que $F(1, 1, 1) = 3$, la superficie de nivel que pasa por (1, 1, 1) es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. El gradiente de la función es

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

y por ello, en el punto dado,

$$\nabla F(1, 1, 1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

La superficie de nivel y $\nabla F(1, 1, 1)$ se ilustran en la FIGURA 13.7.4. ■

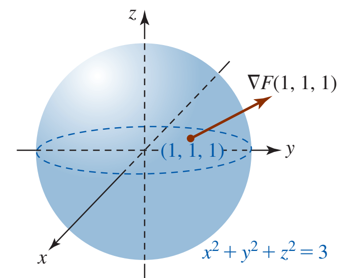


FIGURA 13.7.4 El gradiente es perpendicular a la esfera del ejemplo 2

Plano tangente En capítulos anteriores encontramos ecuaciones de rectas tangentes a gráficas de funciones. En el espacio tridimensional podemos resolver ahora el problema análogo de

determinar las ecuaciones de **plano tangente** a superficies. Suponemos también que $w = F(x, y, z)$ es una función diferenciable y que se da una superficie mediante $F(x, y, z) = c$, donde c es una constante.

Definición 13.7.1 Plano tangente

Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre la gráfica de la superficie de nivel $F(x, y, z) = c$ donde ∇F no es **0**. El **plano tangente** en $P(x_0, y_0, z_0)$ es aquel plano que pasa por P y que es perpendicular a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

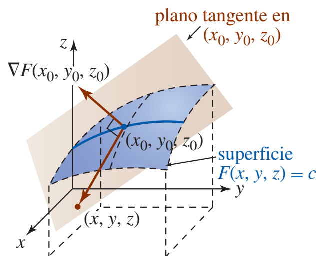


FIGURA 13.7.5 Plano tangente a una superficie

De tal manera, si $P(x, y, z)$ y $P(x_0, y_0, z_0)$ son puntos sobre el plano tangente y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ son sus respectivos vectores de posición, una ecuación vectorial del plano tangente es

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

donde $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$. Vea la FIGURA 13.7.5. Resumimos este último resultado.

Teorema 13.7.1 Ecuación de un plano tangente

Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre la gráfica de $F(x, y, z) = c$, donde ∇F no es **0**. Entonces una ecuación del plano tangente en P es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (5)$$

EJEMPLO 3 Ecuación de un plano tangente

Encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en (1, 1, 1).

Solución Al definir $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, encontramos que la esfera dada es la superficie de nivel $F(x, y, z) = F(1, 1, 1) = 3$ que pasa por (1, 1, 1). En este caso,

$$F_x(x, y, z) = 2x, \quad F_y(x, y, z) = 2y \quad \text{y} \quad F_z(x, y, z) = 2z$$

por lo que

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \nabla F(1, 1, 1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Concluimos de (5) que una ecuación del plano tangente es

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0 \quad \text{o} \quad x + y + z = 3.$$

Con la ayuda de un SAC el plano tangente se muestra en la FIGURA 13.7.6. ■

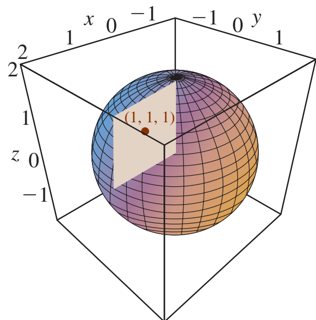


FIGURA 13.7.6 Plano tangente del ejemplo 3

Superficies dadas por $z = f(x, y)$ En el caso de una superficie dada explícitamente mediante una función diferenciable $z = f(x, y)$, definimos $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ o $F(x, y, z) = z - f(x, y)$. Así, un punto (x_0, y_0, z_0) está sobre la gráfica de $z = f(x, y)$ si y sólo si se encuentra también sobre la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$. Lo anterior sigue de $F(x_0, y_0, z_0) = f(x_0, y_0) - z_0 = 0$. En este caso,

$$F_x = f_x(x, y), \quad F_y = f_y(x, y), \quad F_z = -1$$

y por ello (5) se convierte en

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

o

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (6)$$

Una comparación directa de (6) con (7) de la sección 13.4 muestra que una linealización $L(x, y)$ de una función $z = f(x, y)$ que es diferenciable en un punto (x_0, y_0) es una ecuación de un plano tangente en (x_0, y_0).

EJEMPLO 4 Ecuación de un plano tangente

Encuentre una ecuación de un plano tangente a la gráfica del paraboloide $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 4$ en $(1, -1, 5)$.

Solución Definimos $F(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - z + 4$ de manera que la superficie de nivel de F que pasa por el punto dado es $F(x, y, z) = F(1, -1, 5)$ o $F(x, y, z) = 0$. En este caso $F_x = x$, $F_y = y$ y $F_z = -1$, por lo que

$$\nabla F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \nabla F(1, -1, 5) = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Por consiguiente, de (5) la ecuación deseada es

$$(x - 1) - (y + 1) - (z - 5) = 0 \qquad \text{o} \qquad -x + y + z = 3.$$

Vea la FIGURA 13.7.7. ■

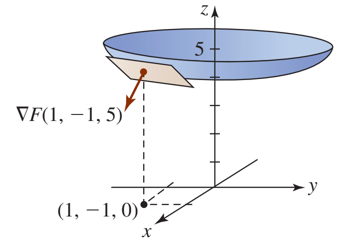


FIGURA 13.7.7 Plano tangente del ejemplo 4



Recta normal Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre la gráfica de $F(x, y, z) = c$ donde ∇F no es $\mathbf{0}$. La recta que contiene a $P(x_0, y_0, z_0)$ que es paralela a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se denomina **recta normal** a la superficie en P. La recta normal es perpendicular al plano tangente a la superficie en P.

EJEMPLO 5 Recta normal

Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta normal a la superficie del ejemplo 4 en $(1, -1, 5)$.

Solución Un vector de dirección para la recta normal en $(1, -1, 5)$ es $\nabla F(1, -1, 5) = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Se sigue de (4) de la sección 11.5 que las ecuaciones paramétricas para la recta normal son $x = 1 + t$, $y = -1 - t$, $z = 5 - t$. ■

Expresada como ecuaciones simétricas, la recta normal a la superficie $F(x, y, z) = c$ en $P(x_0, y_0, z_0)$ está dada por

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

En el ejemplo 5, usted debe verificar que las ecuaciones simétricas de la recta normal en $(1, -1, 5)$ son

$$x - 1 = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 5}{-1}.$$

∇f NOTAS DESDE EL AULA

El agua que fluye hacia abajo por una colina elige una trayectoria en la dirección del mayor cambio en la altura. La FIGURA 13.7.8 muestra los contornos, o curvas de nivel, de una colina. Como se muestra en la figura, una corriente que empieza en el punto P seguirá una trayectoria que es perpendicular a los contornos. Después de leer las secciones 13.7 y 13.8 usted debe ser capaz de explicar la razón.

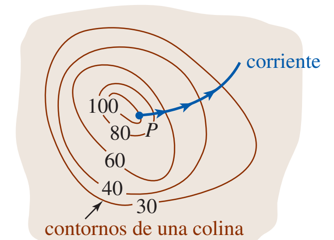


FIGURA 13.7.8 Corriente que fluye colina abajo

Ejercicios 13.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-42.

Fundamentos

En los problemas 1-12, dibuje la curva o superficie de nivel que pasa por el punto indicado. Dibuje el gradiente en el punto.

1. $f(x, y) = x - 2y$; $(6, 1)$

2. $f(x, y) = \dfrac{y + 2x}{x}$; $(1, 3)$

3. $f(x, y) = y - x^2$; $(2, 5)$

4. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $(-1, 3)$

5. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$; $(-2, -3)$

6. $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x}$; $(2, 2)$

7. $f(x, y) = (x - 1)^2 - y^2$; $(1, 1)$

8. $f(x, y) = \dfrac{y - 1}{\operatorname{sen} x}$; $\left(\pi/6, \frac{3}{2}\right)$

9. $f(x, y, z) = y + z$; $(3, 1, 1)$

10. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$; $(1, 1, 3)$

11. $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $(3, 4, 0)$

12. $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z$; $(0, -1, 1)$

En los problemas 13 y 14, determine los puntos sobre la superficie dada en los cuales el gradiente es paralelo al vector indicado.

13. $z = x^2 + y^2$; $4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

14. $x^3 + y^2 + z = 15$; $27\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los problemas 15-24, encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación dada en el punto que se indica.

15. $x^2 + y^2 + z^2 = 9;\quad (-2, 2, 1)$

16. $5x^2 - y^2 + 4z^2 = 8;\quad (2, 4, 1)$

17. $x^2 - y^2 - 3z^2 = 5;\quad (6, 2, 3)$

18. $xy + yz + zx = 7;\quad (1, -3, -5)$

19. $z = 25 - x^2 - y^2;\quad (3, -4, 0)$

20. $xz = 6;\quad (2, 0, 3)$

21. $z = \cos(2x + y);\quad (\pi/2, \pi/4, -1/\sqrt{2})$

22. $x^2y^3 + 6z = 10;\quad (2, 1, 1)$

23. $z = \ln(x^2 + y^2);\quad (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$

24. $z = 8e^{-2y}$ sen $4x;\quad (\pi/24, 0, 4)$

En los problemas 25 y 26, determine los puntos sobre la superficie dada en la cual el plano tangente es paralelo al plano indicado.

25. $x^2 + y^2 + z^2 = 7;\quad 2x + 4y + 6z = 1$

26. $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 33;\quad 8x + 4y + 6z = 5$

27. Encuentre los puntos sobre la superficie $x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 2z = 11$ en los cuales el plano tangente es horizontal.

28. Encuentre los puntos sobre la superficie $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy = 16$ en los cuales el plano tangente es paralelo a

a) el plano xz,
b) el plano yz y
c) el plano xy.

En los problemas 29 y 30, muestre que la segunda ecuación es la de un plano tangente a la gráfica de la primera ecuación en (x_0, y_0, z_0).

29. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1;\quad \dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$

30. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1;\quad \dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$

En los problemas 31 y 32, encuentre ecuaciones paramétricas para la recta normal en el punto indicado.

31. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4;\quad (1, -1, 1)$

32. $z = 2x^2 - 4y^2;\quad (3, -2, 2)$

En los problemas 33 y 34, determine ecuaciones simétricas para la recta normal en el punto indicado.

33. $z = 4x^2 + 9y^2 + 1;\quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3\right)$

34. $x^2 + y^2 - z^2 = 0;\quad (3, 4, 5)$

≡ Piense en ello

35. Muestre que todo plano tangente a la gráfica $z^2 = x^2 + y^2$ pasa por el origen.

36. Muestre que la suma de las intersecciones con los ejes x, y y z de todo plano tangente a la gráfica de $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$, $a > 0$, es el número a.

37. Muestre que toda recta normal a la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pasa por el origen.

38. Se afirma que dos superficies son **ortogonales** en el punto P de intersección si sus rectas normales son perpendiculares en P. Demuestre que si $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ y $\nabla G(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, entonces las superficies dadas por $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ son ortogonales en $P(x_0, y_0, z_0)$ si y sólo si

$$F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z = 0$$

en P.

En los problemas 39 y 40, emplee el resultado del problema 38 para mostrar que las superficies dadas son ortogonales en un punto de intersección. Las superficies del problema 39 se presentan en la FIGURA 13.7.9.

39. $x^2 + y^2 + z^2 = 25;\quad x^2 + y^2 - z^2 = 0$

40. $x^2 - y^2 + z^2 = 4;\quad z = 1/xy^2$

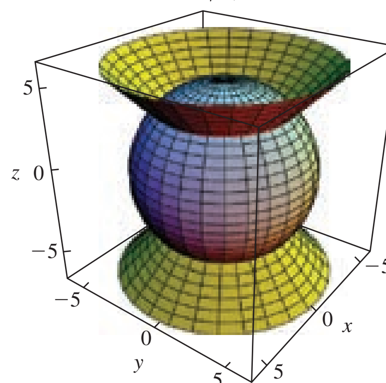


FIGURA 13.7.9 Superficies ortogonales del problema 39

13.8 Extremos de funciones multivariables

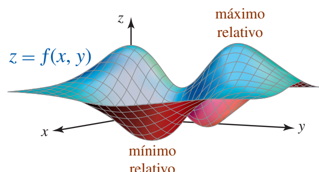


FIGURA 13.8.1 Extremos relativos de f

Introducción Como se muestra en la FIGURA 13.8.1, una función f de dos variables puede tener máximos relativos y mínimos relativos. En esta sección exploramos una manera de determinar estos extremos. Puesto que muchos de los conceptos considerados en esta sección son las contrapartes tridimensionales de las importantes definiciones y teoremas del capítulo 4 para funciones de una sola variable, se recomienda un repaso de las secciones 4.3 y 4.7.

Extremos Empezamos con la definición de **extremos relativos** o **locales** para funciones de dos variables x y y.

Definición 13.8.1 Extremos relativos

i) Un número $f(a, b)$ es un **máximo relativo** de una función $z = f(x, y)$ si $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo (x, y) en algún disco abierto que contenga a (a, b).

ii) Un número $f(a, b)$ es un **mínimo relativo** de una función $z = f(x, y)$ si $f(x, y) \geq f(a, b)$ para todo (x, y) en algún disco abierto que contenga a (a, b).

En aras de la discusión suponga que (a, b) es un punto interior de una región rectangular R en la cual f tiene un máximo relativo en el punto $(a, b, f(a, b))$ y, además, suponga que en las primeras derivadas parciales de f existen en (a, b). Entonces como advertimos en la FIGURA 13.8.2, sobre la curva C_1 de intersección de la superficie y el plano $x = a$, la recta tangente en $(a, b, f(a, b))$ es horizontal y por ello su pendiente en el punto es $f_y(a, b) = 0$. Similarmente, sobre la curva C_2, la cual es la traza de la superficie en el plano $y = b$, tenemos $f_x(a, b) = 0$.

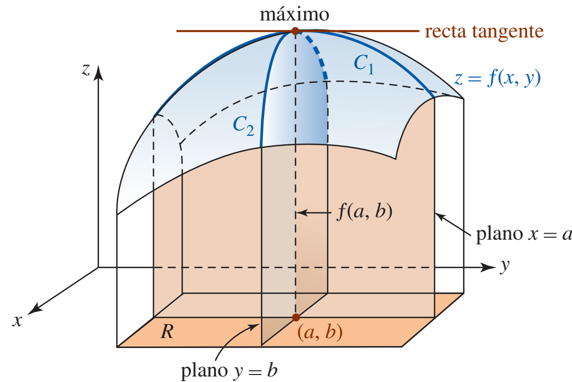


FIGURA 13.8.2 Máximo relativo de una función f

Dicho de otra manera, como lo hicimos en el espacio bidimensional, podemos argumentar que un punto sobre la gráfica de $y = f(x)$ donde la *recta tangente* es horizontal muchas veces conduce a un extremo relativo. En el espacio tridimensional podemos buscar un *plano tangente* horizontal a la gráfica de una función $z = f(x, y)$. Si f tiene un máximo o mínimo relativo en un punto (a, b) y las primeras parciales existen en el punto, entonces una ecuación del plano tangente en $(a, b, f(a, b))$ es

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b). \tag{1}$$

Si el plano es horizontal, su ecuación debe ser $z =$ constante, o de manera más específica, $z = f(a, b)$. Utilizando este último hecho, podemos concluir de (1) que debemos tener $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

Esta discusión sugiere el siguiente teorema.

Teorema 13.8.1 Extremos relativos

Si una función $z = f(x, y)$ tiene un extremo relativo en el punto (a, b) y si las primeras derivadas parciales existen en este punto, entonces

$$f_x(a, b) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y(a, b) = 0.$$

Puntos críticos En la sección 4.3 definimos un **número crítico** c de una función f de una sola variable x como un número en su dominio para el cual $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. En la definición que sigue definimos un **punto crítico** de una función f de dos variables x y y.

Definición 13.8.2 Puntos críticos

Un **punto crítico** de una función $z = f(x, y)$ es un punto (a, b) en el dominio de f para el cual $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, o si una de sus derivadas parciales no existe en el punto.

Los puntos críticos corresponden a puntos donde f podría *posiblemente* tener un extremo relativo. En algunos libros los puntos críticos también reciben el nombre de **puntos estacionarios**. En el caso en que las primeras derivadas parciales existan, notamos que un punto crítico (a, b) se encuentra al resolver las ecuaciones

$$f_x(x, y) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = 0$$

simultáneamente.

EJEMPLO 1 Puntos críticos

Encuentre todos los puntos críticos para $f(x, y) = x^3 + y^3 - 27x - 12y$.

Solución Las primeras derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 27 \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = 3y^2 - 12.$$

Por consiguiente, $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ implican que

$$x^2 = 9 \qquad \text{y} \qquad y^2 = 4$$

y por ello $x = \pm 3$, $y = \pm 2$. Entonces, hay cuatro puntos críticos $(3, 2)$, $(-3, 2)$, $(3, -2)$ y $(-3, -2)$. ■

Prueba de las segundas derivadas parciales El siguiente teorema da condiciones suficientes para establecer extremos relativos. No se dará la demostración del teorema. En términos generales, el teorema 13.8.2 es análogo a la prueba de la segunda derivada (teorema 4.7.3).

Teorema 13.8.2 Prueba de las segundas derivadas parciales

Sea (a, b) un punto crítico de $z = f(x, y)$ y suponga que f_{xx}, f_{yy} y f_{xy} son continuas en un disco centrado en (a, b). Considere que

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2.$$

i) Si $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un **mínimo relativo**.
ii) Si $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un **máximo relativo**.
iii) Si $D(a, b) < 0$, entonces $(a, b, f(a, b))$ **no es un extremo relativo**.
iv) Si $D(a, b) = 0$, entonces la prueba **no es concluyente**.

Repase la sección 4.7 para la relación entre la segunda derivada y la concavidad.

Si usted se siente cómodo al trabajar con determinantes, la función $D(x, y)$ puede escribirse como

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 2 Empleo de la prueba de las segundas derivadas parciales

Determine los extremos de $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - 2xy - 10y - 2x$.

Solución Las primeras derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = 8x - 2y - 2 \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = 4y - 2x - 10.$$

Al resolver las ecuaciones simultáneas

$$8x - 2y = 2 \qquad \text{y} \qquad -2x + 4y = 10$$

obtenemos un punto crítico $(1, 3)$. En este caso,

$$f_{xx}(x, y) = 8, \quad f_{yy}(x, y) = 4, \quad f_{xy}(x, y) = -2$$

y por ello $D(x, y) = (8)(4) - (-2)^2 = 28$. Debido a $D(1, 3) > 0$ y $f_{xx}(1, 3) > 0$, se deduce de la parte *i*) del teorema 13.8.2 que $f(1, 3) = -16$ es un mínimo relativo. ■

EJEMPLO 3 Empleo de la prueba de las segundas derivadas parciales

La gráfica de $f(x, y) = y^2 - x^2$ es el paraboloide hiperbólico dado en la FIGURA 13.8.3. De $f_x(x, y) = -2x$ y $f_y(x, y) = 2y$ vemos que $(0, 0)$ es un punto crítico y que $f(0, 0) = 0$ es el único extremo posible de la función. Sin embargo, antes de usar la prueba de las segundas derivadas parciales, observe que

$$f(0, y) = y^2 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad f(x, 0) = -x^2 \leq 0$$

indica que en una vecindad de $(0, 0)$, los puntos a lo largo del eje y corresponden a valores de la función que son *mayores* o iguales a $f(0, 0) = 0$ y los puntos a lo largo del eje x corresponden a valores de la función que son *menores* o iguales a $f(0, 0) = 0$. Por consiguiente, podemos afirmar que $f(0, 0) = 0$ no es un extremo.

La conclusión anterior es consistente con los resultados de la prueba de las segundas derivadas parciales. De $f_{xx}(x, y) = -2$, $f_{yy}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = 0$ vemos que en el punto crítico $(0, 0)$,

$$\begin{aligned} D(0, 0) &= f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 \\ &= (-2)(2) - (0)^2 = -4 < 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente, concluimos del inciso *iii*) del teorema 13.8.2 que $f(0, 0) = 0$ no es un extremo relativo. ■

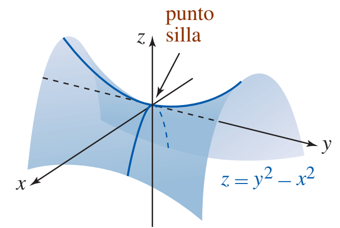


FIGURA 13.8.3 Paraboloide hiperbólico del ejemplo 3

El punto $(0, 0)$ en el ejemplo 3 se dice que es un **punto silla** de la función. En general, el punto crítico (a, b) en el caso *iii*) del teorema 13.8.2 es un punto silla. Si $D(a, b) < 0$ para un punto crítico (a, b), entonces la gráfica de la función f se comporta esencialmente como el paraboloide hiperbólico en forma de silla de montar en la vecindad de (a, b).

EJEMPLO 4 Punto silla

Encuentre los extremos para $f(x, y) = 4xy - x^2 - y^2 - 14x + 4y + 10$.

Solución Las primeras derivadas parciales son $f_x(x, y) = 4y - 2x - 14$ y $f_y(x, y) = 4x - 2y + 4$. Encontramos entonces que la única solución del sistema

$$4y - 2x - 14 = 0 \qquad \text{y} \qquad 4x - 2y + 4 = 0$$

es $x = 1$ y $y = 4$; esto es, $(1, 4)$ es un punto crítico. En este caso, $f_{xx}(x, y) = -2$, $f_{yy}(x, y) = -2$ y $f_{xy}(x, y) = 4$ muestra que

$$D(1, 4) = (-2)(-2) - (4)^2 < 0$$

y por ello $f(1, 4)$ no es un extremo debido a que $(1, 4)$ es un punto silla. La gráfica de f generada por computadora de la FIGURA 13.8.4 sugiere la característica de la forma de paraboloide hiperbólico en una proximidad cercana a $(1, 4)$. ■

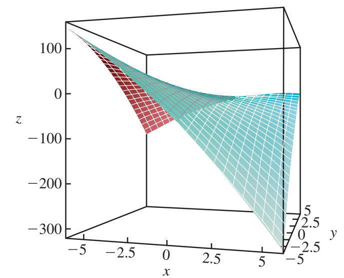


FIGURA 13.8.4 Gráfica de la función del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Empleo de la prueba de las segundas derivadas parciales

Encuentre los extremos de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$.

Solución De las primeras derivadas parciales

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1), \qquad f_y(x, y) = 3y^2 - 6y = 3y(y - 2)$$

y las ecuaciones

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \qquad \text{y} \qquad y(y - 2) = 0$$

encontramos que hay cuatro puntos críticos: $(3, 0)$, $(3, 2)$, $(-1, 0)$, $(-1, 2)$. Puesto que

$$f_{xx} = 6x - 6, \quad f_{yy} = 6y - 6, \quad f_{xy} = 0$$

se deduce que $D(x, y) = 36(x - 1)(y - 1)$. La prueba de las segundas derivadas parciales se resume en la siguiente tabla.

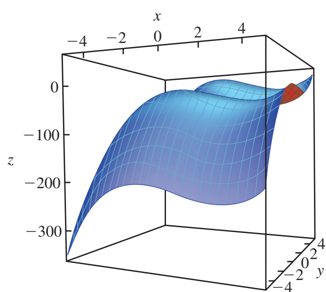


FIGURA 13.8.5 Gráfica de la función del ejemplo 5

Punto crítico (a, b)	$D(a, b)$	$f_{xx}(a, b)$	$f(a, b)$	Conclusión
$(3, 0)$	negativo	positivo	-27	no extremo
$(3, 2)$	positivo	positivo	-31	mín. relativo
$(-1, 0)$	positivo	negativo	5	máx. relativo
$(-1, 2)$	negativo	negativo	1	no extremo

Un estudio de la gráfica de f de la FIGURA 13.8.5 muestra claramente el máximo y el mínimo. ■

Extremos en conjuntos acotados cerrados Recuerde que el teorema del valor extremo para una función f de una variable x (teorema 4.3.1) establece que si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f posee siempre un máximo absoluto y un mínimo absoluto en el intervalo. También vimos que estos extremos absolutos sobre $[a, b]$ ocurren en un punto extremo del intervalo o en un número crítico c en el intervalo abierto (a, b). A continuación se presenta el **teorema del valor extremo** para una función f de dos variables x y y que es continua sobre un conjunto R cerrado y acotado en el plano xy.

Teorema 13.8.3 Teorema del valor extremo

Una función f de dos variables x y y que es continua sobre un conjunto R cerrado y acotado tiene siempre un **máximo absoluto** y un **mínimo absoluto** sobre R.

En otras palabras, cuando $x = f(x, y)$ es continua sobre R, hay números $f(x_1, y_1)$ y $f(x_2, y_2)$ tales que $f(x_1, y_1) \leq f(x, z) \leq f(x_2, y_2)$ para todo (x, y) en R. Los valores $f(x_1, y_1)$ y $f(x_2, y_2)$ son, respectivamente, el máximo y mínimo absolutos sobre el conjunto cerrado R.

Análogo a los extremos de puntos extremos, una función de dos variables puede tener **extremos frontera**; esto es, extremos sobre la frontera del conjunto cerrado.

Guías para encontrar los extremos sobre un conjunto R cerrado y acotado

i) Encuentre el valor de f en los puntos críticos de f en R.
ii) Encuentre todos los valores extremos de f sobre la frontera de R.

El valor más grande de la función en la lista de valores obtenidos de los pasos *i*) y *ii*) es el máximo absoluto de f sobre R; el valor más pequeño de la función de esta lista es el mínimo absoluto de f sobre R.

EJEMPLO 6 Determinación de extremos absolutos

Puesto que $f(x, y) = 6x^2 - 8x + 2y^2 - 5$ es una función polinomial, ésta es continua sobre un conjunto cerrado R definido por $x^2 + y^2 \leq 1$. Encuentre sus extremos absolutos sobre R.

Recuerde que R recibe el nombre de *disco cerrado*.

Solución Encontramos primero cualesquiera puntos críticos de f en el interior de R. De $f_x(x, y) = 12x - 8$ y $f_y(x, y) = 4y$, así como de

$$12x - 8 = 0, \qquad 4y = 0$$

obtenemos el punto crítico $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Como $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 0^2 < 1$, el punto está en el interior de R.

Con el fin de examinar f en la frontera de la región, representamos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ por medio de ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces, sobre la frontera podemos escribir f como una función de una sola variable t:

$$F(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t) = 6\cos^2 t - 8\cos t + 2\operatorname{sen}^2 t - 5.$$

Procedemos ahora como en la sección 4.3. Al diferenciar F con respecto a t y simplificar, obtenemos

$$F'(t) = 8 \operatorname{sen} t(-\cos t + 1).$$

Por consiguiente, $F'(t) = 0$ implica que sen $t = 0$ o cos $t = 1$. A partir de estas ecuaciones encontramos que el único número crítico de F en el intervalo abierto $(0, 2\pi)$ es $t = \pi$. En este número $x = \cos \pi = -1$, $y = \operatorname{sen} \pi = 0$ de manera que el punto correspondiente en R es $(-1, 0)$. Los puntos extremos del intervalo del parámetro $[0, 2\pi]$, $t = 0$ y $t = 2\pi$, corresponden ambos al punto $(1, 0)$ en R. De los valores de la función

$$f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -\frac{23}{3}, \qquad f(-1, 0) = 9, \qquad f(1, 0) = -7$$

vemos que el máximo absoluto de f sobre R es $f(-1, 0) = 9$ y el mínimo absoluto es $f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -\frac{23}{3}$. ■

En el ejemplo 6, podemos entender lo que está sucediendo al completar el cuadrado en x y reescribir la función f como

$$f(x, y) = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 2(y - 0)^2 - \frac{23}{3}. \tag{2}$$

A partir de (2) es evidente que el "vértice" del paraboloide corresponde al punto interior $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ del disco cerrado definido por $x^2 + y^2 \leq 1$ y que $f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -\frac{23}{3}$. La FIGURA 13.8.6*a*) muestra una perspectiva de la gráfica de f; en la figura 13.8.6*b*) hemos superpuesto las gráficas de $z = 6x^2 - 8x + 2y^2 - 5$ y el cilindro definido por $x^2 + y^2 = 1$ sobre los mismos ejes de coordenadas. En la parte *b*) de la figura, el extremo de la frontera $f(-1, 0) = 9$ se marca mediante el punto rojo.

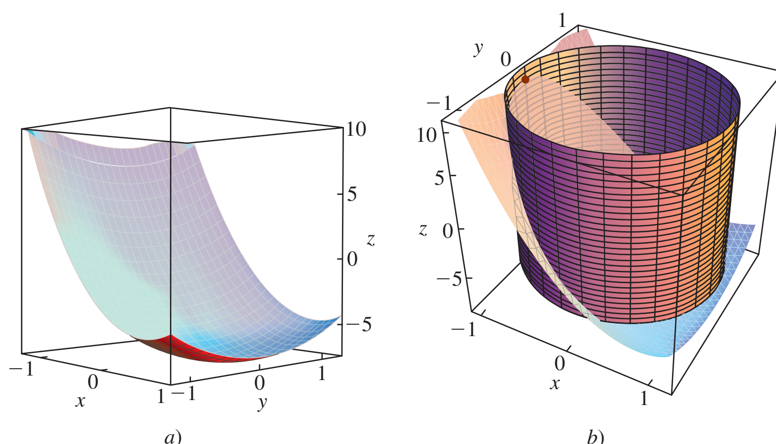


FIGURA 13.8.6 Gráfica de la función en *a*); intersección del cilindro y la superficie en *b*)

NOTAS DESDE EL AULA

i) La prueba de las segundas derivadas parciales tiene un caso inclusivo al igual que la prueba de la segunda derivada. Recuerde que si c es un número crítico de una función $y = f(x)$, entonces la parte *iii*) del teorema 4.7.3 nos lleva a utilizar la prueba de la primera derivada cuando $f''(c) = 0$. Desafortunadamente, para funciones de dos variables no hay una prueba conveniente de la primera derivada a la cual recurrir cuando (a, b) es un punto crítico para el cual $D(a, b) = 0$.

ii) El método de solución para el sistema

$$f_x(x, y) = 0, \qquad f_y(x, y) = 0$$

no siempre será obvio, en especial cuando f_x y f_y no son lineales. No dude en ejercitar sus habilidades algebraicas en los problemas que siguen.

Ejercicios 13.8 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-42.

Fundamentos

En los problemas 1-20, encuentre los extremos relativos de la función indicada.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5$
2. $f(x, y) = 4x^2 + 8y^2$
3. $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 8x + 6y$
4. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 6x + 8y$
5. $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 20x - 10y + 40$
6. $f(x, y) = -4x^2 - 2y^2 - 8x + 12y + 5$
7. $f(x, y) = 4x^3 + y^3 - 12x - 3y$
8. $f(x, y) = -x^3 + 2y^3 + 27x - 24y + 3$
9. $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 2xy - 10x - 2y + 2$
10. $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 5xy - 10x - 5y + 18$
11. $f(x, y) = (2x - 5)(y - 4)$
12. $f(x, y) = (x + 5)(2y + 6)$
13. $f(x, y) = -2x^3 - 2y^3 + 6xy + 10$
14. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy + 27$
15. $f(x, y) = xy - \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{y} + 8$
16. $f(x, y) = -3x^2y - 3xy^2 + 36xy$
17. $f(x, y) = xe^x \operatorname{sen} y$
18. $f(x, y) = e^{y^2 - 3y + x^2 + 4x}$
19. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$
20. $f(x, y) = \operatorname{sen} xy$
21. Determine tres números positivos cuya suma sea 21, tal que su producto P sea un máximo. [*Sugerencia*: Exprese P como una función de sólo dos variables.]
22. Determine las dimensiones de una caja rectangular con un volumen de 1 pie^3 que tiene un área superficial mínima S.
23. Encuentre el punto sobre el plano $x + 2y + z = 1$ más cercano al origen. [*Sugerencia*: Considere el cuadrado de la distancia.]
24. Encuentre la distancia mínima entre el punto (2, 3, 1) y el plano $x + y + z = 1$.
25. Encuentre todos los puntos sobre la superficie $xyz = 8$ que son los más cercanos al origen. Determine la distancia mínima.
26. Encuentre la distancia más corta entre las rectas cuyas ecuaciones paramétricas son
$$L_1: x = t, y = 4 - 2t, z = 1 + t,$$
$$L_2: x = 3 + 2s, y = 6 + 2s, z = 8 - 2s.$$
¿En qué puntos sobre las rectas ocurre el mínimo?
27. Determine el volumen máximo de una caja rectangular con lados paralelos a los planos de coordenadas que puede ser inscrito en el elipsoide
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$
28. El volumen de un elipsoide
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$
es $V = \frac{4}{3}\pi abc$. Muestre que el elipsoide de mayor volumen que satisface $a + b + c =$ constante es una esfera.
29. El pentágono que se muestra en la FIGURA 13.8.7, formado por un triángulo isósceles sobrepuesto sobre un rectángulo, tiene un perímetro fijo P. Calcule x, y y θ de manera que el área del pentágono sea un máximo.

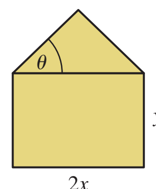


FIGURA 13.8.7 Pentágono del problema 29

30. Un pedazo de latón de 24 pulg de ancho se dobla de manera tal que su sección transversal es un trapezoide isósceles. Vea la FIGURA 13.8.8. Calcule x y θ de manera que el área de la sección transversal sea un máximo. ¿Cuál es el área máxima?

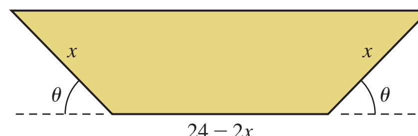


FIGURA 13.8.8 Sección transversal trapezoidal del problema 30

En los problemas 31-34, muestre que la función dada tiene un extremo absoluto pero que el teorema 13.8.2 no es aplicable.

31. $f(x, y) = 16 - x^{2/3} - y^{2/3}$
32. $f(x, y) = 1 - x^4y^2$
33. $f(x, y) = 5x^2 + y^4 - 8$
34. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

En los problemas 35-38, encuentre los extremos absolutos de la función continua dada sobre la región cerrada R definida por $x^2 + y^2 \leq 1$.

35. $f(x, y) = x + \sqrt{3}y$
36. $f(x, y) = xy$
37. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$
38. $f(x, y) = -x^2 - 3y^2 + 4y + 1$
39. Encuentre los extremos absolutos de $f(x, y) = 4x - 6y$ sobre la región cerrada R definida por $\frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1$.
40. Encuentre los extremos absolutos de $f(x, y) = xy - 2x - y + 6$ sobre la región triangular cerrada R con vértices (0, 0), (0, 8) y (4, 0).
41. La función $f(x, y) = \operatorname{sen} xy$ es continua sobre la región rectangular cerrada R definida por $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$.
    a) Encuentre los puntos críticos en la región.
    b) Determine los puntos donde f tiene un extremo absoluto.
    c) Grafique la función sobre la región rectangular.

≡ Aplicaciones

42. Una función de ingresos es

$$R(x, y) = x(100 - 6x) + y(192 - 4y),$$

donde x y y denotan el número de artículos de dos mercancías vendidas. Dado que la función de costo correspondiente es

$$C(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 8x + 20$$

encuentre la ganancia máxima, donde ganancia = ingresos − costo.

43. Se va a construir una caja rectangular cerrada de modo tal que su volumen corresponda a 60 pies^3. El costo del material para la parte superior y el fondo son, respectivamente, de 10 centavos por pie cuadrado y 20 centavos por pie cuadrado. El costo de los lados es de 2 centavos por pie cuadrado. Determine la función de costo $C(x, y)$, donde x y y son la longitud y el ancho de la caja, respectivamente. Calcule las dimensiones de la caja que producirán un costo mínimo.

13.9 Método de mínimos cuadrados

Introducción Al efectuar experimentos, con frecuencia tabulamos datos en la forma de pares ordenados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, con cada x_i distinta. Dados los datos, muchas veces resulta deseable poder extrapolar o predecir y a partir de x encontrando un modelo matemático, esto es, una función que aproxime o "ajuste" los datos. En otras palabras, deseamos una función $f(x)$ tal que

$$f(x_1) \approx y_1, \quad f(x_2) \approx y_2 \quad , \ldots , \quad f(x_n) \approx y_n.$$

Naturalmente, no queremos sólo cualquier función sino una que ajuste los datos lo más cercanamente posible. En la discusión que sigue confinaremos nuestra atención al problema de encontrar un polinomio lineal $f(x) = mx + b$ o una recta que "mejor se ajuste" a los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. El procedimiento para determinar la función lineal se conoce como el **método de mínimos cuadrados**.

EJEMPLO 1 Ajuste de los datos en una recta

Considere los datos (1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 6), (5, 5) que se muestran en la FIGURA 13.9.1*a*). Analizando la figura 13.9.1*b*) y observando que la recta $y = x + 1$ pasa por dos de los puntos dato, podríamos tomar esta recta como aquella que mejor ajusta los datos.

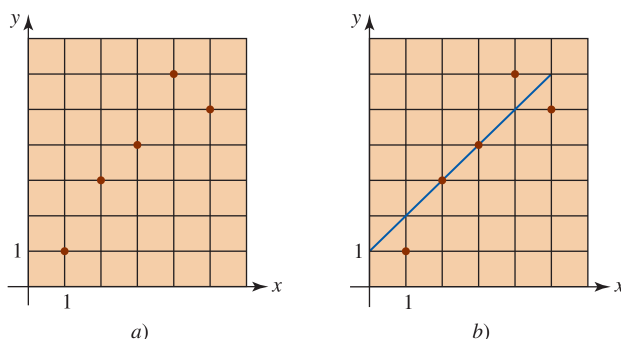


FIGURA 13.9.1 Datos en *a*); una recta que ajusta los datos en *b*) ■

Es evidente que necesitamos algo mejor que una adivinanza visual para determinar la función lineal $y = f(x)$ que de la del ejemplo 1. Requerimos un criterio que defina el concepto de "mejor ajuste" o, como algunas veces se denomina, la "bondad del ajuste".

Si tratamos de relacionar los puntos dato con la función $f(x) = mx + b$, entonces deseamos encontrar m y b que satisfagan el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + b \\ y_2 &= mx_2 + b \\ &\vdots \\ y_n &= mx_n + b. \end{aligned} \tag{1}$$

Desafortunadamente, (1) es un *sistema sobredeterminado*; esto es, el número de ecuaciones es mayor que el número de incógnitas. No esperamos que un sistema de este tipo tenga una solución a menos, desde luego, que todos los puntos dato se encuentren en su totalidad sobre la misma recta.

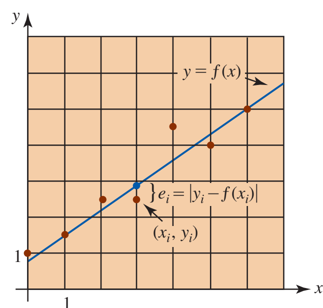


FIGURA 13.9.2 Error en la aproximación de y_i mediante $f(x_i)$

Recta de mínimos cuadrados Si los puntos dato son $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, entonces una manera de determinar qué tan bien la función lineal $f(x) = mx + b$ ajusta los datos consiste en medir las distancias verticales entre los puntos y la gráfica de f:

$$e_i = |y_i - f(x_i)|,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Podemos considerar a cada e_i como el error al aproximar el valor dato y_i por el valor de la función $f(x_i)$. Vea la FIGURA 13.9.2. De manera intuitiva, la función f ajustará mejor los datos si la suma de todas las e_i es un mínimo. En realidad, un enfoque más conveniente al problema es encontrar una función lineal f de manera que la *suma de los cuadrados* de todas las e_i sea un mínimo. Definimos la solución del sistema (1) como aquellos coeficientes m y b que minimizan la expresión

$$\begin{aligned} E &= e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 \\ &= [y_1 - f(x_1)]^2 + [y_2 - f(x_2)]^2 + \cdots + [y_n - f(x_n)]^2 \\ &= [y_1 - (mx_1 + b)]^2 + [y_2 - (mx_2 + b)]^2 + \cdots + [y_n - (mx_n + b)]^2 \end{aligned}$$

o

$$E = \sum_{i=1}^{n} [y_i - mx_i - b]^2. \tag{2}$$

La expresión E se denomina la **suma de los errores cuadráticos**. La recta $y = mx + b$ que minimiza la suma de los errores cuadráticos (2) se define como la **recta de mejor ajuste** y recibe el nombre de **recta de mínimos cuadrados** o **recta de regresión** para los datos (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

El problema queda ahora de la siguiente manera: ¿cómo determinamos m y b para que (2) sea un mínimo? La respuesta puede encontrarse a partir de la prueba de las segundas parciales, teorema 13.8.2.

Si consideramos a (2) como una función de dos variables m y b, entonces para encontrar el valor mínimo de E igualamos las primeras derivadas parciales a cero:

$$\frac{\partial E}{\partial m} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0.$$

Las últimas dos condiciones producen a su vez

$$\begin{aligned} -2\sum_{i=1}^{n} x_i[y_i - mx_i - b] &= 0 \\ -2\sum_{i=1}^{n} [y_i - mx_i - b] &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Desarrollando estas sumas y utilizando $\sum_{i=1}^{n} b = nb$, encontramos que el sistema (3) es el mismo que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)m + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)m + nb &= \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned} \tag{4}$$

Aunque hemos omitido detalles, los valores de m y b que satisfacen el sistema (4) producen el valor mínimo de E. La solución del sistema (4) produce

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{5}$$

EJEMPLO 2 Recta de mínimos cuadrados

Encuentre la recta de mínimos cuadrados para los datos del ejemplo 1. Calcule la suma de los errores cuadráticos E para esta recta y la recta $y = x + 1$.

Solución De acuerdo con los datos (1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 6), (5, 5) identificamos $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 4$, $y_4 = 6$ y $y_5 = 5$. Con estos valores y $n = 5$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 68, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 15, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 19, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 55.$$

La sustitución de estos valores en las fórmulas (5) produce $m = 1.1$ y $b = 0.5$. Entonces, la recta de mínimos cuadrados es $y = 1.1x + 0.5$. Para esta recta la suma de los errores cuadráticos es

$$E = [1 - f(1)]^2 + [3 - f(2)]^2 + [4 - f(3)]^2 + [6 - f(4)]^2 + [5 - f(5)]^2$$
$$= [1 - 1.6]^2 + [3 - 2.7]^2 + [4 - 3.8]^2 + [6 - 4.9]^2 + [5 - 6]^2 = 2.7.$$

Para la recta $y = x + 1$ que estimamos en el ejemplo 1 y que pasa también por dos de los puntos dato, encontramos que la suma de los errores cuadráticos es $E = 3.0$.

Con fines comparativos, la FIGURA 13.9.3 muestra los datos, la recta $y = x + 1$, y la recta de mínimos cuadrados $y = 1.1x + 0.5$. ■

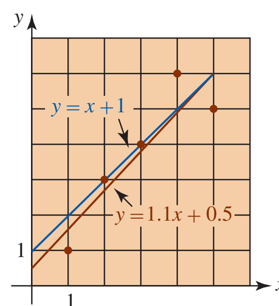


FIGURA 13.9.3 Recta de mínimos cuadrados (roja) del ejemplo 2

Podemos generalizar la técnica de mínimos cuadrados. Por ejemplo, podría interesarnos ajustar los datos dados a un polinomio cuadrático $f(x) = ax^2 + bx + c$ en vez de a un polinomio lineal.

Ejercicios 13.9

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-43.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre la recta de mínimos cuadrados para los datos que se indican.

1. (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 2)
2. (0, −1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)
3. (1, 1), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5)
4. (0, 0), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5)
5. (0, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 9), (5, 8), (6, 10)
6. (1, 2), (2, 2.5), (3, 1), (4, 1.5), (5, 2), (6, 3.2), (7, 5)

≡ Aplicaciones

7. En un experimento se encontró la correspondencia dada en la tabla para la temperatura T (en °C) y la viscosidad cinemática ν (en centistokes) de un aceite con cierto aditivo. Encuentre la recta de mínimos cuadrados $\nu = mT + b$. Utilícela para estimar la viscosidad del aceite en $T = 140$ y $T = 160$.

T	20	40	60	80	100	120
ν	220	200	180	170	150	135

8. En un experimento se encontró la correspondencia que se da en la tabla entre la temperatura T (en °C) y la resistencia eléctrica R (en miliohms). Determine la recta de mínimos cuadrados $R = mT + b$. Emplee esta recta para estimar la resistencia en $T = 700$.

T	400	450	500	550	600	650
R	0.47	0.90	2.0	3.7	7.5	15

≡ Problemas con calculadora/SAC

9. ***a)*** Un conjunto de puntos dato puede aproximarse mediante un *polinomio* de mínimos cuadrados de grado n. Aprenda la sintaxis del SAC que tenga a mano para obtener una recta de mínimos cuadrados (polinomio lineal), una cuadrática de mínimos cuadrados y una cúbica de mínimos cuadrados para ajustar los datos

$$(-5.5, 0.8), \quad (-3.3, 2.5), \quad (-1.2, 3.8),$$
$$(0.7, 5.2), \quad (2.5, 5.6), \quad (3.8, 6.5).$$

b) Emplee un SAC para superponer las gráficas de los datos y la recta de mínimos cuadrados obtenida en el inciso *a)* sobre los mismos ejes de coordenadas. Repita para las gráficas de los datos y la cuadrática de mínimos cuadrados, y luego los datos y la cúbica de mínimos cuadrados.

10. Emplee los datos del censo de Estados Unidos (en millones) desde el año 1900 hasta el 2000

1900	1920	1940	1960	1980	2000
75.994575	105.710620	131.669275	179.321750	226.545805	281.421906

y una recta de mínimos cuadrados para predecir la población en ese país en el año 2020.

13.10 Multiplicadores de Lagrange

Introducción En los problemas 21-30 de los ejercicios 13.8 se le pidió encontrar el máximo o mínimo de una función sujeta a una condición o restricción secundaria dada. La condición secundaria se utilizó para eliminar una de las variables en la función de manera que fuera aplicable la prueba de las segundas derivadas parciales (teorema 13.8.2). En la presente discusión examinamos otro procedimiento para determinar lo que se denomina **extremos con restricciones** de una función.

Antes de definir ese concepto, vamos a considerar un ejemplo.

EJEMPLO 1 Extremos con restricciones

Determine geométricamente si la función $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ tiene un extremo cuando las variables x y y están restringidas por $x + y = 3$.

Solución Como advertimos en la FIGURA 13.10.1, la gráfica de $x + y = 3$ es un plano vertical que interseca el paraboloide dado por $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$. Es claro, de acuerdo con la figura, que la función tiene un *máximo con restricciones* para algunas x_1 y y_1 que satisfacen $0 < x_1 < 3$, $0 < y_1 < 3$ y $x_1 + y_1 = 3$. La tabla de valores numéricos que acompaña la figura también indicaría que este nuevo máximo es $f(1.5, 1.5) = 4.5$. Advierta que no podemos utilizar números como $x = 1.7$ y $y = 2.4$, ya que estos valores no satisfacen la restricción $x + y = 3$.

x	y	$f(x, y)$
0.5	2.5	2.5
1	2	4
1.25	1.75	4.375
1.5	1.5	4.5
1.75	1.25	4.375
2	1	4
2.5	0.5	2.5
3	0	0

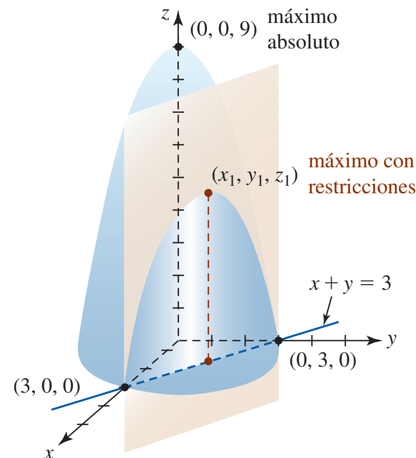


FIGURA 13.10.1 Gráfica de la función y la restricción del ejemplo 1 ■

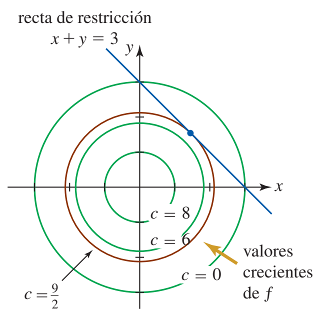


FIGURA 13.10.2 Curvas de nivel y recta de restricción

De manera alterna, podemos analizar el ejemplo 1 por medio de curvas de nivel. Como se ilustra en la FIGURA 13.10.2, valores de función crecientes de f corresponden a valores crecientes de c en las curvas de nivel $9 - x^2 - y^2 = c$. El máximo valor de f (esto es, c) sujeto a la restricción ocurre donde la curva de nivel correspondiente a $c = \frac{9}{2}$ interseca, o más precisamente es tangente a, la recta $x + y = 3$. Al resolver simultáneamente $x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$ y $x + y = 3$ encontramos que el punto de tangencia es $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Funciones de dos variables Para generalizar la discusión anterior, suponga que deseamos:

- Encontrar los extremos de una función $z = f(x, y)$ sujeta a una restricción dada por $g(x, y) = 0$.

Parece plausible de la FIGURA 13.10.3 que para encontrar, digamos, un máximo con restricciones de f, sólo necesitamos encontrar la curva de nivel más alta $f(x, y) = c$ que es tangente a la gráfica de la ecuación de restricción $g(x, y) = 0$. En este caso, recuerde que los gradientes ∇f y ∇g son perpendiculares a las curvas $f(x, y) = c$ y $g(x, y) = 0$, respectivamente. Por consiguiente, si $\nabla g \neq \mathbf{0}$ en un punto P de tangencia de las curvas, entonces ∇f y ∇g son paralelos a P; esto es, yacen a lo largo de una normal común. Por tanto, para algún escalar λ (la letra griega lambda minúscula) distinto de cero, debemos tener $\nabla f = \lambda \nabla g$. Enunciamos este resultado de manera formal.

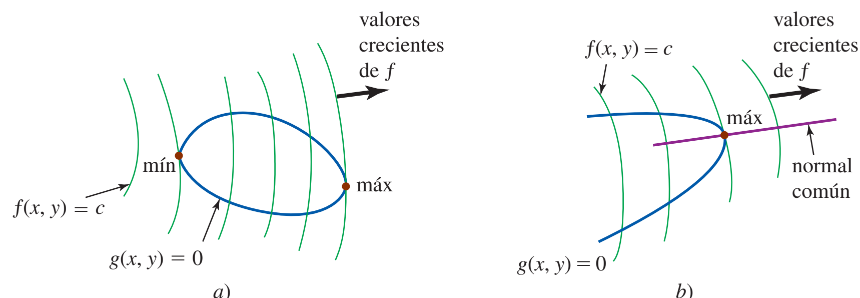


FIGURA 13.10.3 Curvas de nivel de f (verde); ecuación de restricción (azul)

Teorema 13.10.1 Teorema de Lagrange

Suponga que la función $z = f(x, y)$ tiene un extremo en el punto (x_0, y_0) sobre la gráfica de la ecuación restricción $g(x, y) = 0$. Si f y g tienen primeras derivadas parciales continuas en un conjunto abierto que contiene la gráfica de la ecuación de restricción y $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe un número real λ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.

Método de multiplicadores de Lagrange El número real λ para el cual $\nabla f = \lambda \nabla g$ recibe el nombre de **multiplicador de Lagrange**. Después de igualar componentes, la ecuación $\nabla f = \lambda \nabla g$ es equivalente a

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x_0, y_0), \qquad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y).$$

Si f tiene un extremo con restricciones en el punto (x_0, y_0), entonces acabamos de ver que hay un número λ tal que

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= \lambda g_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) &= \lambda g_y(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Las ecuaciones en (1) sugieren el siguiente procedimiento, conocido como **método de los multiplicadores de Lagrange**, para determinar los extremos con restricciones.

Guías para el método de los multiplicadores de Lagrange

i) Para encontrar los extremos de $z = f(x, y)$ sujetos a la restricción $g(x, y) = 0$, resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) &= \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

ii) Entre las soluciones (x, y, λ) del sistema (2) estarán los puntos (x_i, y_i), donde f tiene un extremo. Cuando f tiene un máximo (mínimo), éste será el número más grande (o más pequeño) en la lista de los valores de la función $f(x_i, y_i)$.

EJEMPLO 2 Repaso del ejemplo 1

Emplee el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar el máximo de $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ sujeto a $x + y = 3$.

Solución Con $g(x, y) = x + y - 3$ y $f_x = -2x$, $f_y = -2y$, $g_x = 1$, $g_y = 1$ el sistema en (2) es

$$\begin{aligned} -2x &= \lambda \\ -2y &= \lambda \\ x + y - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Al igualar la primera y la segunda ecuaciones obtenemos $-2x = -2y$ o $x = y$. Al sustituir este resultado en la tercera ecuación, se encuentra que $2y - 3 = 0$ o $y = \frac{3}{2}$. Entonces, $x = y = \frac{3}{2}$ y el máximo con restricciones es $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$. ■

EJEMPLO 3 Empleo de los multiplicadores de Lagrange

Determine los extremos $f(x, y) = y^2 - 4x$ sujetos a $x^2 + y^2 = 9$.

Solución Si definimos $g(x, y) = x^2 + y^2 - 9$, entonces $f_x = -4$, $f_y = 2y$, $g_x = 2x$ y $g_y = 2y$. Por tanto, (2) se convierte en

$$\begin{aligned} -4 &= 2x\lambda \\ 2y &= 2y\lambda \\ x^2 + y^2 - 9 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

De la segunda de estas ecuaciones, $y(1 - \lambda) = 0$, vemos que $y = 0$ o $\lambda = 1$. Primero, si $y = 0$, la tercera ecuación en el sistema produce $x^2 = 9$ o $x = \pm 3$. Por consiguiente, $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ son soluciones del sistema y son puntos en los cuales *f podría* tener un extremo. Continuando, si $\lambda = 1$, entonces la primera ecuación produce $x = -2$. Al sustituir este valor en $x^2 + y^2 - 9 = 0$ obtenemos $y^2 = 5$ o $y = \pm\sqrt{5}$. Dos o más soluciones del sistema son $(-2, -\sqrt{5})$ y $(-2, \sqrt{5})$. De la lista de valores de la función

$$f(-3, 0) = 12, \qquad f(3, 0) = -12, \qquad f(-2, -\sqrt{5}) = 13 \quad \text{y} \quad f(-2, \sqrt{5}) = 13$$

concluimos que f tiene un mínimo con restricciones de -12 en $(3, 0)$ y un máximo con restricciones de 13 en $(-2, -\sqrt{5})$ y en $(-2, \sqrt{5})$.

La FIGURA 13.10.4*a*) muestra la gráfica $f(x, y) = y^2 - 4x$ intersecando el cilindro definido por la ecuación de restricción $x^2 + y^2 = 9$. Los cuatro puntos que encontramos al resolver (3) yacen en el plano *xy* sobre el círculo de radio 3; los tres extremos con restricciones corresponden a los puntos $(3, 0, -12)$, $(-2, -\sqrt{5}, 13)$ y $(-2, \sqrt{5}, 13)$ en el espacio tridimensional sobre la curva de intersección de la superficie del cilindro circular. Alternativamente la figura 13.10.4*b*) muestra tres curvas de nivel de $y^2 - 4x = c$. Dos de las curvas de nivel son tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 9$.

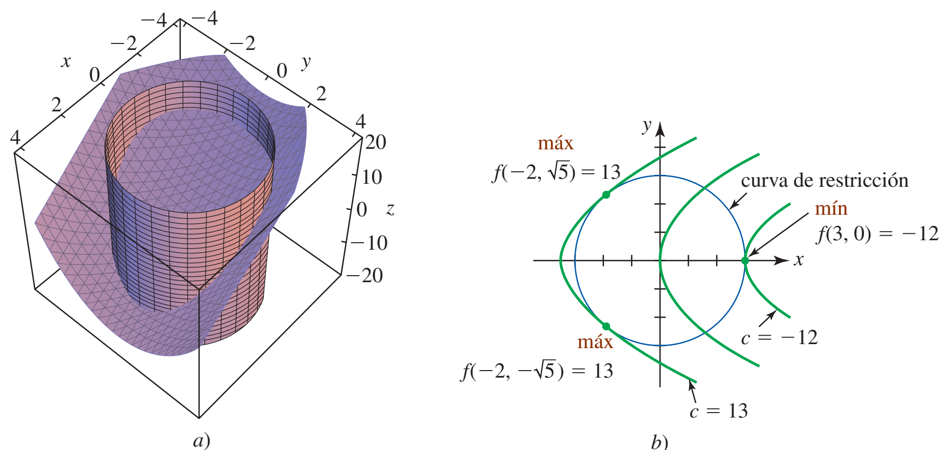


FIGURA 13.10.4 Intersección del cilindro y la superficie en *a*); curvas de nivel de *f* y ecuación de restricción en *b*) ■

Al aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange, en realidad no estamos interesados en determinar los valores de λ que satisfacen el sistema (2). ¿Notó en el ejemplo 1 que no nos molestamos por encontrar λ? En el ejemplo 3, empleamos el valor $\lambda = 1$ para que nos ayudara a encontrar $x = -2$, pero después lo ignoramos.

EJEMPLO 4 Costo mínimo

Un cilindro circular recto cerrado tendrá un volumen de 1 000 pies^3. La parte superior y el fondo del cilindro se construirán con metal que cuesta 2 dólares por pie cuadrado. El costado se formará con metal que cuesta 2.50 dólares por pie cuadrado. Determine el costo mínimo de fabricación.

Solución La función de costo es

$$C(r, h) = \underbrace{2(2\pi r^2)}_{\text{costo del fondo y de la parte superior}} + \underbrace{2.5(2\pi r h)}_{\text{costo del costado}}$$
$$= 4\pi r^2 + 5\pi r h.$$

En este caso, de la restricción $1\,000 = \pi r^2 h$, podemos identificar $g(r, h) = \pi r^2 h - 1\,000$, y por ello las primeras derivadas parciales son $C_r = 8\pi r + 5\pi h$, $C_h = 5\pi r$, $g_r = 2\pi r h$ y $g_h = \pi r^2$. Debemos resolver entonces el sistema

$$\begin{aligned} 8\pi r + 5\pi h &= 2\pi r h \lambda \\ 5\pi r &= \pi r^2 \lambda \\ \pi r^2 h - 1\,000 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Al multiplicar la primera ecuación por r, la segunda por $2h$ y restar, obtenemos

$$8\pi r^2 - 5\pi rh = 0 \qquad \text{o} \qquad \pi r(8r - 5h) = 0.$$

Puesto que $r = 0$ no satisface la ecuación de restricción, tenemos $r = \frac{5}{8}h$. La restricción nos da

$$h^3 = \frac{1\,000 \cdot 64}{25\pi} \qquad \text{o} \qquad h = \frac{40}{\sqrt[3]{25\pi}}.$$

Entonces, $r = 25/\sqrt[3]{25\pi}$ y la única solución de (4) es $\left(25/\sqrt[3]{25\pi}, 40/\sqrt[3]{25}\right)$.

El costo mínimo con restricciones es

$$C\left(\frac{25}{\sqrt[3]{25\pi}}, \frac{40}{\sqrt[3]{25\pi}}\right) = 4\pi\left(\frac{25}{\sqrt[3]{25\pi}}\right)^2 + 5\pi\left(\frac{25}{\sqrt[3]{25\pi}}\right)\left(\frac{40}{\sqrt[3]{25\pi}}\right)$$
$$= 300\sqrt[3]{25\pi} \approx \$1\,284.75.$$ ■

Funciones de tres variables Para encontrar los extremos de una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$, resolvemos un sistema de cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= \lambda g_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) &= \lambda g_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) &= \lambda g_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

EJEMPLO 5 Función de tres variables

Determine los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujetos a $2x - 2y - z = 5$.

Solución Con $g(x, y, z) = 2x - 2y - z - 5$, el sistema (5) es

$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda \\ 2y &= -2\lambda \\ 2z &= -\lambda \\ 2x - 2y - z - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Con $\lambda = x = -y = -2z$, la última ecuación produce $x = \frac{10}{9}$ y por ello $y = -\frac{10}{9}$, $z = -\frac{5}{9}$. De tal manera, un extremo con restricciones es $f\left(\frac{10}{9}, -\frac{10}{9}, -\frac{5}{9}\right) = \frac{225}{81}$. ■

Dos restricciones Con el fin de optimizar una función $w = f(x, y, z)$ sujeta a *dos* restricciones, $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$, debemos introducir un segundo multiplicador de Lagrange μ (la letra griega minúscula mu) y resolver el sistema

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) &= \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) &= \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= 0 \\ h(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

EJEMPLO 6 Dos restricciones

Encuentre el punto sobre la curva C de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el plano $x - y + 3z = 6$ que está más alejada del plano xy. Luego determine el punto sobre C que está más cercano al plano xy.

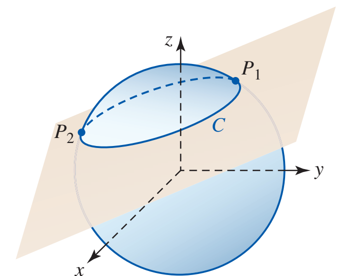


FIGURA 13.10.5 Intersección de una esfera y un plano en el ejemplo 6

Solución La FIGURA 13.10.5 sugiere que existen dos de tales puntos P_1 y P_2 con coordenadas z no negativas. La función f para la cual deseamos encontrar un máximo y un mínimo es simplemente la distancia desde cada uno de estos puntos al plano xy, esto es, $f(x, y, z) = z$.

Si tomamos $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$ y $h(x, y, z) = x - y + 3z - 6$, entonces el sistema (6) es

$$\begin{aligned} 0 &= 2x\lambda + \mu \\ 0 &= 2y\lambda - \mu \\ 1 &= 2z\lambda + 3\mu \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 &= 0 \\ x - y + 3z - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Sumamos la primera y la segunda ecuaciones para obtener $2\lambda(y + x) = 0$. Si $\lambda = 0$, entonces la primera ecuación implica $\mu = 0$, pero la tercera ecuación en el sistema conduce a la contradicción $0 = 1$. Ahora bien, si tomamos $y = -x$, las dos ecuaciones se vuelven

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + z^2 - 9 &= 0 \\ x + x + 3z - 6 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} 2x^2 + z^2 &= 9 \\ 2x + 3z &= 6. \end{aligned}$$

Al resolver el último sistema, obtenemos

$$x = \frac{6}{11} + \frac{9}{22}\sqrt{14}, \quad z = \frac{18}{11} - \frac{3}{11}\sqrt{14}$$

y

$$x = \frac{6}{11} - \frac{9}{22}\sqrt{14}, \quad z = \frac{18}{11} + \frac{3}{11}\sqrt{14}.$$

Entonces, los puntos en C que están más alejado y más cercano al plano xy son, respectivamente,

$$P_1\left(\frac{6}{11} - \frac{9}{22}\sqrt{14}, -\frac{6}{11} + \frac{9}{22}\sqrt{14}, \frac{18}{11} + \frac{3}{11}\sqrt{14}\right)$$

y

$$P_2\left(\frac{6}{11} + \frac{9}{22}\sqrt{14}, -\frac{6}{11} - \frac{9}{22}\sqrt{14}, \frac{18}{11} - \frac{3}{11}\sqrt{14}\right).$$

Las coordenadas aproximadas de P_1 y P_2 son $(-0.99, 0.99, 2.66)$ y $(2.08, -2.08, 0.62)$. ■

Posdata: Un poco de historia **Joseph Louis Lagrange** nació en 1736 como Guiseppe Lodovico Lagrangia en Turín, en el reino de Sardinia, y murió en París en 1813. Lagrange fue el último de los once hijos de su madre y el único que vivió más allá de la infancia. En su adolescencia ya era profesor en la Escuela Real de Artillería en Turín. Invitado ahí gracias a los esfuerzos de Euler y D'Alembert, dedicó veinte productivos años en la corte de Federico el Grande, hasta la posterior muerte de éste en 1786. Luego, Luis XVI lo instaló en el Louvre, donde se dice que fue el favorito de María Antonieta. Deploró los excesos de la Revolución francesa, aunque ayudó al nuevo gobierno a establecer el sistema métrico. Fue el primer profesor de la Escuela Politécnica, donde el cálculo y la teoría de números fueron sus especialidades.



Lagrange

$\frac{\partial z}{\partial x}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

Advierta que en el ejemplo 5 concluimos con las vagas palabras "un extremo con restricciones es". El método de los multiplicadores de Lagrange no tiene un indicador integrado que señale MÁX o MÍN cuando se encuentra un extremo. Además del procedimiento gráfico analizado al principio de esta sección, otra manera de que usted mismo se convenza respecto a la naturaleza del extremo es compararlo con los valores obtenidos al calcular la función dada en otros puntos que satisfagan la ecuación de restricción. De hecho, de esta manera encontramos que $\frac{225}{81}$ del ejemplo 5 es en realidad un *mínimo* con restricciones de la función f.

Ejercicios 13.10

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-43.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, dibuje las gráficas de las curvas de nivel de la función *f* dada y la ecuación de restricción que se indica. Determine si *f* tiene un extremo con restricciones.

1. $f(x, y) = x + 3y$, sujeta a $x^2 + y^2 = 1$

2. $f(x, y) = xy$, sujeta a $\frac{1}{2}x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0$

En los problemas 3-20, utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos con restricciones de la función dada.

3. Problema 1 **4.** Problema 2

5. $f(x, y) = xy$, sujeta a $x^2 + y^2 = 2$

6. $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeta a $2x + y = 5$

7. $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 5$, sujeta a $x - y = 1$

8. $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 + 10$, sujeta a $4x^2 + y^2 = 4$

9. $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeta a $x^4 + y^4 = 1$

10. $f(x, y) = 8x^2 - 8xy + 2y^2$, sujeta a $x^2 + y^2 = 10$

11. $f(x, y) = x^3y$, sujeta a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

12. $f(x, y) = xy^2$, sujeta a $x^2 + y^2 = 27$

13. $f(x, y, z) = x + 2y + z$, sujeta a $x^2 + y^2 + z^2 = 30$

14. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeta a $x + 2y + 3z = 4$

15. $f(x, y, z) = xyz$, sujeta a $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1$, $x > 0, y > 0, z > 0$

16. $f(x, y, z) = xyz + 5$, sujeta a $x^3 + y^3 + z^3 = 24$

17. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$, sujeta a $x + y + z = 1$, $x > 0, y > 0, z > 0$

18. $f(x, y, z) = 4x^2y^2z^2$, sujeta a $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x > 0, y > 0, z > 0$

19. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeta a $2x + y + z = 1$, $-x + 2y - 3z = 4$

20. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeta a $4x + z = 7$, $z^2 = x^2 + y^2$

21. Encuentre el área máxima de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es 4.

22. Encuentre las dimensiones de una caja rectangular abierta con volumen máximo si su área superficial es igual a 75 cm^3. ¿Cuáles son las dimensiones si la caja es cerrada?

Aplicaciones

23. A un tanque cilíndrico recto se le superpone una tapa cónica en la forma que se ilustra en la FIGURA 13.10.6. El radio del tanque es de 3 m y su área superficial total corresponde a 81 πm^2. Encuentre las alturas *x* y *y* de manera que el volumen del tanque sea un máximo. [*Sugerencia*: El área superficial del cono es $3\pi\sqrt{9 + y^2}$.]

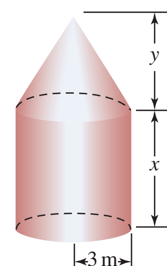
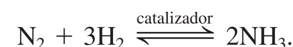


FIGURA 13.10.6 Cilindro con tapa cónica del problema 23

24. En negocios, un índice de utilidad *U* es una función que produce una medida de la satisfacción obtenida a partir de la compra de cantidades variables, *x* y *y*, de dos productos que se venden regularmente. Si $U(x, y) = x^{1/3}y^{2/3}$ es un índice de utilidad, encuentre sus extremos sujetos a $x + 6y = 18$.

25. El **proceso de Haber-Bosch*** produce amoniaco mediante una unión directa de nitrógeno e hidrógeno bajo condiciones de presión *P* y temperatura constantes:



$$N_2 + 3H_2 \xrightleftharpoons{\text{catalizador}} 2NH_3.$$

Las presiones parciales *x*, *y* y *z* del hidrógeno, nitrógeno y amoniaco satisfacen $x + y + z = P$ y la ley de equilibrio $z^2/xy^3 = k$, donde *k* es una constante. La cantidad máxima de amoniaco ocurre cuando se obtiene la presión parcial máxima de este mismo. Determine el valor máximo de *z*.

26. Si una especie de animales tiene *n* fuentes de alimento, el **índice de amplitud** de su nicho ecológico se define como

$$\frac{1}{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

donde x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, es la fracción de la dieta de los animales que proviene de la *i*-ésima fuente de alimentos. Por ejemplo, si la dieta de los pájaros consiste en 50% de insectos, 30% de gusanos y 20% de semillas, el índice de amplitud es

$$\frac{1}{(0.50)^2 + (0.30)^2 + (0.20)^2} = \frac{1}{0.25 + 0.09 + 0.04} = \frac{1}{0.38} \approx 2.63.$$

Advierta que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ y $0 \leq x_i \leq 1$ para toda *i*.

a) Para especies con tres fuentes alimenticias, demuestre que el índice de amplitud se maximiza si $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$.

b) Demuestre que el índice de amplitud con *n* fuentes se maximiza cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/n$.

*__Fritz Haber__ (1868-1934) fue un químico alemán. Por el invento de este proceso, Haber obtuvo el premio Nobel de Química en 1918. Carl Bosch, cuñado de Haber e ingeniero químico, fue quien hizo que este proceso fuera práctico a gran escala. Bosch obtuvo el premio Nobel de Química en 1931. Durante la Primera Guerra Mundial el gobierno alemán utilizó el proceso de Haber-Bosch para producir grandes cantidades de fertilizantes y explosivos. Haber fue posteriormente expulsado de Alemania por Adolfo Hitler y murió en el exilio.

≡ Piense en ello

27. Dé una interpretación geométrica de los extremos en el problema 9.

28. Dé una interpretación geométrica de los extremos en el problema 14.

29. Dé una interpretación geométrica del extremo en el problema 19.

30. Dé una interpretación geométrica del extremo en el problema 20.

31. Encuentre el punto $P(x, y)$, $x > 0$, $y > 0$, sobre la superficie $xy^2 = 1$ que es más cercano al origen. Muestre que el segmento de recta del origen a P es perpendicular a la recta tangente en P.

32. Encuentre el valor máximo de $f(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}$ sobre el plano $x + y + z = k$.

33. Utilice el resultado del problema 32 para probar la desigualdad

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

34. Encuentre el punto sobre la curva C de intersección del cilindro $x^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + 2z = 4$ que está más alejado del plano xz. Encuentre el punto sobre C que es más cercano al plano xz.

Revisión del capítulo 13

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-43.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-10, responda verdadero (V) o falso (F).

1. Si $\text{lím}_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y)$ tiene el mismo valor para un número infinito de aproximaciones (a, b), entonces el límite existe. _____

2. Los dominios de las funciones

$$f(x, y) = \sqrt{\ln(x^2 + y^2 - 16)} \quad \text{y} \quad g(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 16)$$

son los mismos. _____

3. La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en (0, 0). _____

4. La función $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3$ es continua en todas partes. _____

5. Si $\partial z/\partial x = 0$, entonces $z =$ constante. _____

6. Si $\nabla f = \mathbf{0}$, entonces $f =$ constante. _____

7. ∇z es perpendicular a la gráfica de $z = f(x, y)$. _____

8. ∇f apunta en la dirección en la cual f aumenta con mayor rapidez. _____

9. Si f tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces $f_{xy} = f_{yx}$. _____

10. Si $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ en (a, b) entonces $f(a, b)$ es un extremo relativo. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-12, llene los espacios en blanco.

1. $$\lim_{(x,\,y)\to(1,\,1)} \frac{3x^2 + xy^2 - 3xy - 2y^3}{5x^2 - y^2} = __________.$$

2. $f(x, y) = \dfrac{xy^2 + 1}{x - y + 1}$ es continua excepto en los puntos __________.

3. Para $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ la curva de nivel que pasa por $(2, -4)$ es __________.

4. Si $p = g(\eta, \xi)$, $q = h(\eta, \xi)$, entonces $\dfrac{\partial}{\partial \xi} T(p, q) =$ __________.

5. Si $r = g(w)$, $s = h(w)$, entonces $\dfrac{d}{dw} F(r, s) =$ __________.

6. Si s es la distancia que un cuerpo demora en caer en el tiempo t, entonces la aceleración de la gravedad g puede obtenerse de $g = 2s/t^2$. Pequeños errores de Δs y Δt en las mediciones de s y t resultarán en un error aproximado en g de __________.

7. La derivada parcial $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x\,\partial z\,\partial y^2}$ en notación de subíndices es __________.

8. La derivada parcial f_{xyy} en notación ∂ es __________.

9. Si $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y F(t)\,dt$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial y} =$ ________ y $\dfrac{\partial f}{\partial x} =$ __________.

10. En (x_0, y_0, z_0) la función $F(x, y, z) = x + y + z$ aumenta más rápidamente en la dirección de __________.

11. Si $F(x, y, z) = f(x, y)g(y)h(z)$, entonces $F_{xyz} =$ __________.

12. Si $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas de cualquier orden, escriba todas las posibles derivadas parciales de cuarto orden. __________.

C. Ejercicios

En los problemas 1-8, calcule la derivada indicada

1. $z = ye^{-x^3y}$; z_y

2. $z = \ln(\cos(uv))$; z_u

3. $f(r, \theta) = \sqrt{r^3 + \theta^2}$; $f_{r\theta}$

4. $f(x, y) = (2x + xy^2)^2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

5. $z = \cosh(x^2y^3)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

6. $z = (e^{x^2} + e^{-y^2})^2$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$

7. $F(s, t, v) = s^3t^5v^{-4}$; F_{stv}

8. $w = \dfrac{xy}{z} + \dfrac{xz}{y} + \dfrac{yz}{x}$; $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x\,\partial y^2\,\partial z}$

En los problemas 9 y 10, encuentre el gradiente de la función dada en el punto que se indica.

9. $f(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$; $(1, -1)$

10. $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 - 3y^3}{z^4}$; $(1, 2, 1)$

En los problemas 11 y 12, determine la derivada direccional de la función dada en la dirección que se indica.

11. $f(x, y) = x^2y - y^2x$; $D_{\mathbf{u}} f$ en la dirección de $2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

12. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $D_{\mathbf{u}} f$ en la dirección de $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los problemas 13 y 14, dibuje el dominio de la función dada.

13. $f(x, y) = \sqrt{1 - (x + y)^2}$

14. $f(x, y) = \dfrac{1}{\ln(y - x)}$

En los problemas 15 y 16, determine Δz para la función dada.

15. $z = 2xy - y^2$

16. $z = x^2 - 4y^2 + 7x - 9y + 10$

En los problemas 17 y 18, encuentre la diferencial total de la función dada.

17. $z = \dfrac{x - 2y}{4x + 3y}$

18. $A = 2xy + 2yz + 2zx$

19. Determine las ecuaciones simétricas de la recta tangente de $\left(-\sqrt{5}, 1, 3\right)$ para la traza de $z = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ en el plano $x = -\sqrt{5}$.

20. Encuentre la pendiente de la recta tangente en $(2, 3, 10)$ a la curva de intersección de la superficie $z = xy + x^2$ y el plano vertical que pasa por $P(2, 3)$ y $Q(4, 5)$ en la dirección de Q.

21. Considere la función $f(x, y) = x^2y^4$. En $(1, 1)$ ¿cuál es:

a) la tasa de cambio de f en la dirección de $\mathbf{i}$?
b) la tasa de cambio de f en la dirección de $\mathbf{i} - \mathbf{j}$?
c) la tasa de cambio de f en la dirección de $\mathbf{j}$?

22. Sea $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

***a*)** Si $x = 3 \operatorname{sen} 2t$, $y = 4 \cos 2t$, $z = 5t^3$, determine $\dfrac{dw}{dt}$.

***b*)** Si $x = 3 \operatorname{sen}(2t/r)$, $y = 4 \cos(2r/t)$, $z = 5r^3t^3$, encuentre $\dfrac{\partial w}{\partial t}$.

23. Encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = \operatorname{sen} xy$ en $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

24. Determine si hay algunos puntos sobre la superficie $z^2 + xy - 2x - y^2 = 1$ en los cuales el plano tangente es paralelo a $z = 2$.

25. Encuentre una ecuación del plano tangente al cilindro $x^2 + y^2 = 25$ en (3, 4, 6).

26. ¿En qué punto la derivada direccional de $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 - 3x^2$ en la dirección de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es un mínimo?

27. Calcule las dimensiones de una caja rectangular con volumen máximo que está acotada en el primer octante por los planos de coordenadas y el plano $x + 2y + z = 6$. Vea la FIGURA 13.R.1.

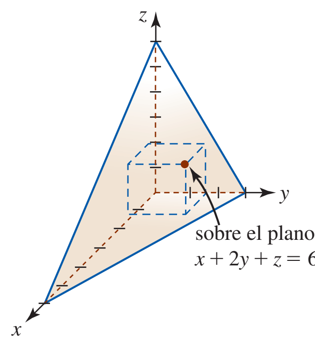


FIGURA 13.R.1 Caja y plano del problema 27

28. Un efecto de la teoría general de la relatividad de Einstein es que un objeto masivo, como una galaxia, puede actuar como una "lente gravitacional"; esto es, si la galaxia está ubicada entre un observador (en la Tierra) y una fuente luminosa (como un cuásar), entonces esa fuente luminosa aparece como un anillo que rodea la galaxia. Si la lente gravitacional es mucho más cercana a la fuente luminosa que al observador, entonces el radio angular θ del anillo (en radianes) se relaciona con la masa M de la lente y su distancia D desde el observador mediante

$$\theta = \left(\frac{GM}{c^2D}\right)^{1/2},$$

donde G es la constante gravitacional y c es la velocidad de la luz. Vea la FIGURA 13.R.2.

***a*)** Resuelva para M en términos de θ y D.

***b*)** Encuentre la diferencial total de M como una función de θ y D.

***c*)** Si el radio angular θ puede medirse con un error no mayor a 2% y la distancia D a la lente puede estimarse con un error no mayor a 10%, ¿cuál es el error porcentual máximo aproximado en el cálculo de la masa M de la lente?

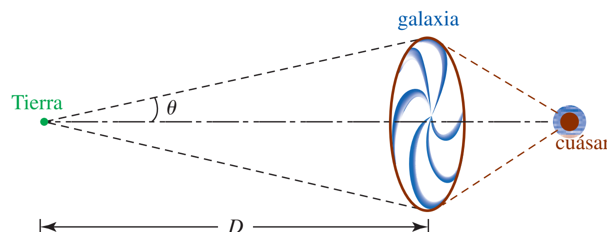


FIGURA 13.R.2 Galaxia del problema 28

29. La velocidad del péndulo cónico que se muestra en la FIGURA 13.R.3 está dada por $v = r\sqrt{g/y}$, donde $g = 980$ cm/s^2. Si r disminuye de 20 a 19 cm y y aumenta de 25 a 26 cm, ¿cuál es el cambio aproximado en la velocidad del péndulo?

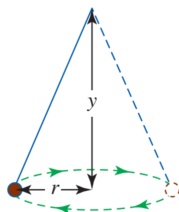


FIGURA 13.R.3 Péndulo cónico del problema 29

30. Encuentre la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en (3, 4) en la dirección de *a*) $\nabla f(1, -2)$ y *b*) $\nabla f(3, 4)$.

31. Las llamadas temperaturas de estado estable dentro de un círculo de radio R están dadas por la **fórmula de la integral de Poisson**.

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2} f(\phi)\, d\phi.$$

Diferenciando formalmente bajo el signo de la integral, demuestre que U satisface la ecuación diferencial parcial

$$r^2 U_{rr} + rU_r + U_{\theta\theta} = 0.$$

32. La **función de producción Cobb-Douglas** $z = f(x, y)$ se define mediante $z = Ax^\alpha y^\beta$, donde A, α y β son constantes. El valor de z recibe el nombre de *salida eficiente* para las entradas x y y. Demuestre que

$$f_x = \frac{\alpha z}{x}, \qquad f_y = \frac{\beta z}{y}, \qquad f_{xx} = \frac{\alpha(\alpha - 1)z}{x^2},$$
$$f_{yy} = \frac{\beta(\beta - 1)z}{y^2} \qquad \text{y} \qquad f_{xy} = f_{yx} = \frac{\alpha\beta z}{xy}.$$

En los problemas 33-36, suponga que $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$. Si las derivadas parciales de orden superior dadas se evalúan en (a, b), determine, si es posible, si $f(a, b)$ es un extremo relativo.

33. $f_{xx} = 4, f_{yy} = 6, f_{xy} = 5$

34. $f_{xx} = 2, f_{yy} = 7, f_{xy} = 0$

35. $f_{xx} = -5, f_{yy} = -9, f_{xy} = 6$

36. $f_{xx} = -2, f_{yy} = -8, f_{xy} = 4$

37. Exprese el área A del triángulo recto como una función de la longitud L de su hipotenusa y uno de sus ángulos agudos θ.

38. En la FIGURA 13.R.4 exprese la altura h de la montaña como una función de los ángulos θ y ϕ.

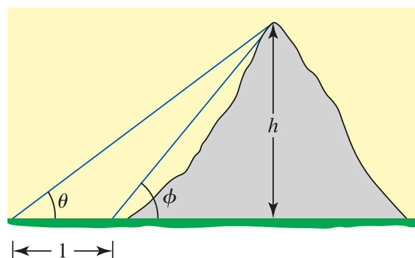


FIGURA 13.R.4 Montaña del problema 38

39. El pasillo de tabique que se muestra en la FIGURA 13.R.5 tiene un ancho uniforme z. Exprese el área A del pasillo en términos de x, y y z.

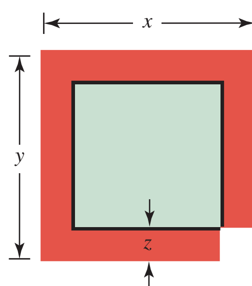


FIGURA 13.R.5 Pasillo del problema 39

40. Una caja abierta hecha de plástico tiene la forma de un paralelepípedo rectangular. Las dimensiones exteriores de la caja se dan en la FIGURA 13.R.6. Si el plástico es de $\frac{1}{2}$ cm de espesor, encuentre el volumen aproximado del plástico.

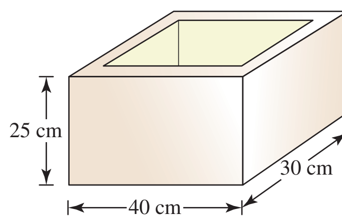


FIGURA 13.R.6 Caja abierta del problema 40

41. Una caja rectangular, que se muestra en la FIGURA 13.R.7, está inscrita en el cono $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 4$. Exprese el volumen V de la caja en términos de x y y.

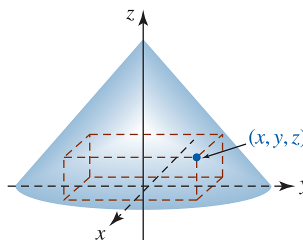


FIGURA 13.R.7 Caja inscrita del problema 41

42. La caja rectangular que se muestra en la FIGURA 13.R.8 tiene una cubierta y 12 compartimentos. La caja está hecha de un plástico pesado que cuesta 1.5 centavos por pulgada cuadrada. Encuentre una función que dé el costo C de construcción de la caja.

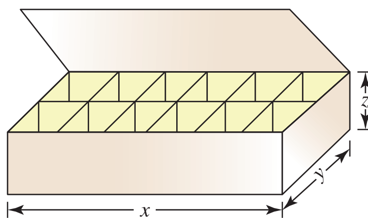
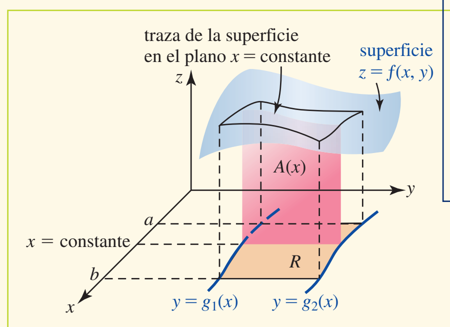


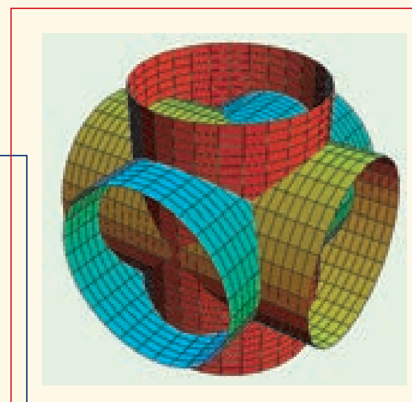
FIGURA 13.R.8 Caja rectangular del problema 42

Capítulo 14

Integrales múltiples







En este capítulo Concluimos nuestro estudio del cálculo de funciones de múltiples variables con las definiciones y aplicaciones de integrales definidas en dos y tres dimensiones. Estas integrales se llaman de modo más común como la **integral doble** y la **integral triple**, respectivamente.

14.1 La integral doble

Introducción Recuerde de la sección 5.4 que la definición de la *integral definida* de una función de una sola variable está dada por el límite de una suma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \tag{1}$$

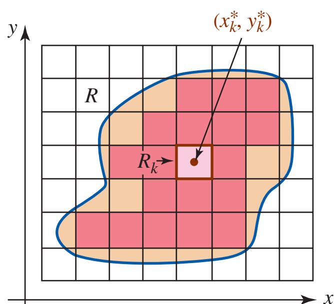


FIGURA 14.1.1 Punto muestra en R_k

Se le pide revisar los pasos que llevaron a esta definición en la página 295. Los pasos preliminares análogos que conducen al concepto de *integral definida bidimensional*, conocidos simplemente como **integral doble** de una función *f* de dos variables, se dan a continuación.

Sea $z = f(x, y)$ una función definida en una región cerrada y acotada R del plano xy. Considere los siguientes cuatro pasos:

- Por medio de una retícula de líneas verticales y horizontales paralelas a los ejes de coordenadas, forme una partición P de R en n subregiones rectangulares R_k de áreas ΔA_k que estén por completo sobre R. Son los rectángulos que se muestran en rojo claro en la FIGURA 14.1.1.
- Sea $\|P\|$ la norma de la partición o la longitud de la diagonal más grande de las n subregiones rectangulares R_k.
- Elija un punto muestra (x_k^*, y_k^*) en cada subregión R_k.
- Forme la suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$.

Así, tenemos la siguiente definición.

Definición 14.1.1 La integral doble

Sea *f* una función de dos variables definida sobre una región cerrada R del plano xy. Entonces la **integral doble de *f* sobre *R***, denotada por $\iint_R f(x, y)\,dA$, se define como

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k. \tag{2}$$

Si el límite en (2) existe, afirmamos que *f* es **integrable sobre *R*** y que R es la **región de integración**. Para una partición P de R en subregiones R_k con (x_k^*, y_k^*) en R_k, una suma de la forma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ se denomina **suma de Riemann**. La partición de R, donde las R_k yacen por completo en R, recibe el nombre de **partición interior** de R. La colección de rectángulos sombreados en las siguientes dos figuras ilustra una partición interna.

Nota: Cuando *f* es continua sobre R, el límite en (2) existe, esto es, *f* es necesariamente integrable sobre R.

EJEMPLO 1 Suma de Riemann

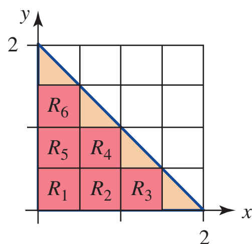


FIGURA 14.1.2 Región de integración R en el ejemplo 1

Considere la región de integración R en el primer cuadrante acotado por las gráficas de $x + y = 2$, $y = 0$ y $x = 0$. Aproxime la integral doble $\iint_R (5 - x - 2y)\,dA$ utilizando una suma de Riemann, las R_k que se muestran en la FIGURA 14.1.2 y los puntos muestra (x_k^*, y_k^*) en el centro geométrico de cada R_k.

Solución De la figura 14.1.2 vemos que $\Delta A_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $k = 1, 2, \ldots, 6$ y las (x_k^*, y_k^*) en las R_k para $k = 1, 2, \ldots, 6$, son a su vez, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$. Por consiguiente, la suma de Riemman es

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k &= f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)\frac{1}{4}\\ &= \frac{17}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{15}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{13}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{11}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{13}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{4}\\ &= \frac{17}{16} + \frac{15}{16} + \frac{13}{16} + \frac{11}{16} + \frac{13}{16} + \frac{9}{16} = 4.875.\end{aligned}$$

■

Volumen Sabemos que cuando $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces la integral definida (1) produce el área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. De manera similar, si $f(x, y) \geq 0$ sobre R, entonces sobre R_k como se muestra en la FIGURA 14.1.3, el producto $f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ puede interpretarse como el volumen de un paralelepípedo, o prisma, rectangular, de altura $f(x_k^*, y_k^*)$ y área de la base ΔA_k. La suma de n volúmenes $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ es una aproximación al volumen V del sólido acotado entre la región R y la superficie $z = f(x, y)$. El límite de esta suma cuando $\|P\| \to 0$, si existe, producirá el **volumen** de este sólido; esto es, si f es no negativa sobre R, entonces

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA. \tag{3}$$

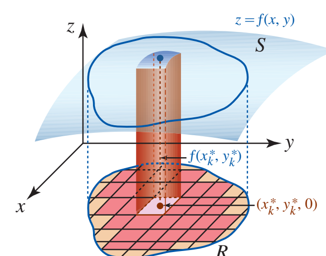


FIGURA 14.1.3 Se construye un paralelepípedo rectangular sobre cada R_k

Los paralelepípedos construidos en las seis R_k que se muestran en la figura 14.1.2 se ilustran en la FIGURA 14.1.4. Puesto que el integrando es no negativo sobre R, el valor de la suma de Riemann dada en el ejemplo 1 representa una aproximación al volumen del sólido acotado entre la región R y la superficie definida por la función $f(x, y) = 5 - x - 2y$.

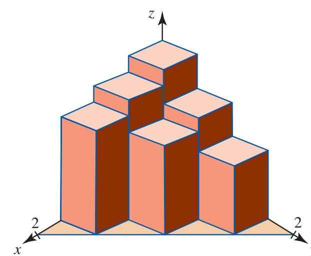


FIGURA 14.1.4 Paralelepípedos rectangulares sobre cada R_k en la figura 14.1.2

Área Cuando $f(x, y) = 1$ sobre R, entonces $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k$ dará simplemente el **área** A de la región; esto es,

$$A = \iint_R dA. \tag{4}$$

Propiedades Las siguientes propiedades de la integral doble son similares a aquellas de la integral definida dadas en los teoremas 5.4.4 y 5.4.5.

Teorema 14.1.1 Propiedades

Sean f y g funciones de dos variables que son integrables sobre una región R del plano xy. Entonces

i) $\displaystyle\iint_R kf(x, y)\, dA = k\iint_R f(x, y)\, dA$, donde k es cualquier constante

ii) $\displaystyle\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA \pm \iint_R g(x, y)\, dA$

iii) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$, donde R_1 y R_2 son subregiones que no se traslapan y $R = R_1 \cup R_2$

iv) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA \geq \iint_R g(x, y)\, dA$ si $f(x, y) \geq g(x, y)$ sobre R.

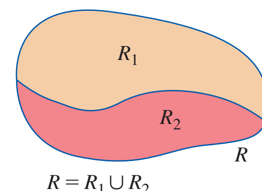


FIGURA 14.1.5 La región R es la unión de dos regiones

La parte *iii)* del teorema 14.1.1 es el equivalente bidimensional de la propiedad del intervalo aditivo

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

(teorema 5.4.5). La FIGURA 14.1.5 ilustra la división de una región en subregiones R_1 y R_2 para las cuales $R = R_1 \cup R_2$. Las regiones R_1 y R_2 pueden no tener puntos en común excepto posiblemente en su frontera común. Además, el teorema 14.1.1*iii)* se extiende a cualquier número finito de subregiones que no se traslapan cuya unión es R. También se sigue del teorema 14.1.1*iv)* que $\iint_R f(x, y)\, dA > 0$ siempre que $f(x, y) > 0$ para todo (x, y) en R.

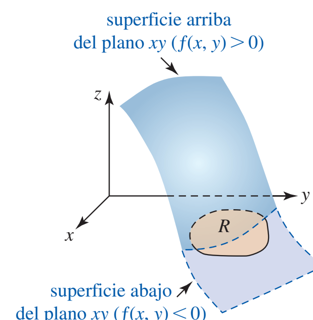


FIGURA 14.1.6 Sobre R la superficie está parcialmente por arriba y parcialmente por abajo del plano xy

Volumen neto Desde luego, no toda integral doble produce volumen. Para la superficie $z = f(x, y)$ que se muestra en la FIGURA 14.1.6, $\iint_R f(x, y)\, dA$ es un número real pero no es el volu-

men puesto que f es no negativa sobre R. Análogo al concepto del área neta que se discutió en la sección 5.4, podemos interpretar la integral doble como la suma del volumen acotado entre la gráfica de f y la región R siempre que $f(x, y) \geq 0$ y el negativo del volumen entre la gráfica de f y la región R siempre que $f(x, y) \leq 0$. En otras palabras, $\iint_R f(x, y)\, dA$ representa un **volumen neto** entre la gráfica de f y el plano xy sobre la región R.

Ejercicios 14.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-44.

Fundamentos

1. Considere la región R en el primer cuadrante que está acotada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 16$, $y = 0$ y $x = 0$. Aproxime la integral doble $\iint_R (x + 3y + 1)\, dA$ utilizando una suma de Riemann y las R_k que se muestran en la FIGURA 14.1.7. Elija los puntos muestra (x_k^*, y_k^*) en el centro geométrico de cada R_k.

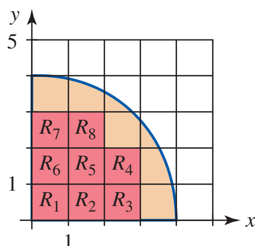


FIGURA 14.1.7 Región de integración del problema 1

2. Considere la región R en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $x + y = 1$, $x + y = 3$, $y = 0$ y $x = 0$. Aproxime la integral doble $\iint_R (2x + 4y)\, dA$ utilizando una suma de Riemann y las R_k que se muestran en la FIGURA 14.1.8. Elija los puntos muestra (x_k^*, y_k^*) en la esquina superior derecha de cada R_k.

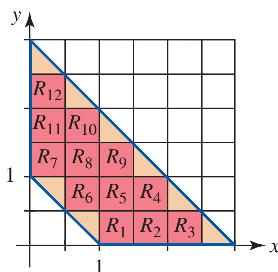


FIGURA 14.1.8 Región de integración del problema 2

3. Considere la región rectangular R que se muestra en la FIGURA 14.1.9. Aproxime la integral doble $\iint_R (x + y)\, dA$ utilizando una suma de Riemann y las R_k que se muestran en la figura. Elija los puntos muestra (x_k^*, y_k^*) en

a) el centro geométrico de cada R_k y

b) la esquina superior izquierda de cada R_k.

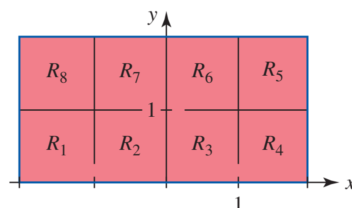


FIGURA 14.1.9 Región de integración del problema 3

4. Considere la región R acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 4$. Ponga una retícula rectangular sobre R correspondiente a las rectas $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$, $x = -1, \ldots, x = 2$, y $y = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1, \ldots, y = 4$. Aproxime la integral doble $\iint_R xy\, dA$ utilizando una suma de Riemann, donde los puntos muestra (x_k^*, y_k^*) se elijan en la esquina inferior derecha de cada rectángulo completo R_k en R.

En los problemas 5-8, evalúe $\iint_R 10\, dA$ sobre la región R dada. Emplee fórmulas geométricas.

5.

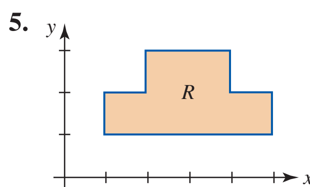


FIGURA 14.1.10 Región de integración del problema 5

6.

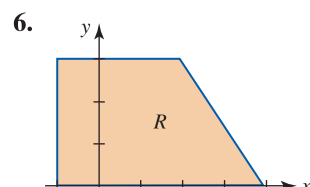


FIGURA 14.1.11 Región de integración del problema 6

7.

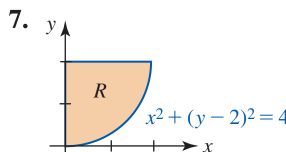


FIGURA 14.1.12 Región de integración del problema 7

8.

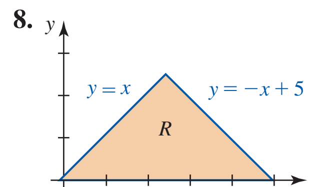


FIGURA 14.1.13 Región de integración del problema 8

9. Considere la región R acotada por el círculo $(x - 3)^2 + y^2 = 9$. ¿La integral doble $\iint_R (x + 5y)\, dA$ representa un volumen? Explique.

10. Considere la región R del segundo cuadrante que está acotada por las gráficas de $-2x + y = 6$, $x = 0$ y $y = 0$.

¿La integral doble $\iint_R (x^2 + y^2)\, dA$ representa un volumen? Explique.

En los problemas 11-16, suponga que $\iint_R x\, dA = 3$, $\iint_R y\, dA = 7$ y el área de R es 8. Evalúe la integral doble dada.

11. $\displaystyle\iint_R 10\, dA$

12. $\displaystyle\iint_R -5x\, dA$

13. $\displaystyle\iint_R (2x + 4y)\, dA$

14. $\displaystyle\iint_R (x - y)\, dA$

15. $\displaystyle\iint_R (3x + 7y + 1)\, dA$

16. $\displaystyle\iint_R y^2\, dA - \iint_R (2 + y)^2\, dA$

En los problemas 17 y 18, considere que R_1 y R_2 son regiones que no se traslapan tales que $R = R_1 \cup R_2$.

17. Si $\iint_{R_1} f(x, y)\, dA = 4$ y $\iint_{R_2} f(x, y)\, dA = 14$, ¿cuál es el valor de $\iint_R f(x, y)\, dA$?

18. Suponga que $\iint_R f(x, y)\, dA = 25$ y $\iint_{R_1} f(x, y)\, dA = 30$. ¿Cuál es el valor de $\iint_{R_2} f(x, y)\, dA$?

14.2 Integrales iteradas

Introducción De manera similar al proceso de la diferenciación parcial podemos definir la **integración parcial**. El concepto de la integración parcial es la clave para un método práctico de evaluación de una integral doble. Puesto que estaremos utilizando la integración indefinida y la definida, le recomendamos ampliamente un repaso del material de la sección 5.1, la sección 5.2 y el capítulo 7.

Integración parcial Si $F(x, y)$ es una función tal que su derivada parcial con respecto a y es una función f, esto es $F_y(x, y) = f(x, y)$, entonces la **integral parcial de f con respecto a y** es

$$\int f(x, y)\, dy = F(x, y) + c_1(x), \qquad (1)$$

donde la función $c_1(x)$ desempeña la parte de la "constante de integración". De manera similar, si $F(x, y)$ es una función tal que $F_x(x, y) = f(x, y)$, entonces la **integral parcial de f con respecto a x** es

$$\int f(x, y)\, dx = F(x, y) + c_2(y). \qquad (2)$$

En otras palabras, para evaluar la integral parcial $\int f(x, y)\, dy$ mantenemos x fija (como si fuera una constante), en tanto que en $\int f(x, y)\, dx$ mantenemos y fija.

EJEMPLO 1 Empleo de (1) y (2)

Evalúe:

a) $\displaystyle\int 6xy^2\, dy$ *b*) $\displaystyle\int 6xy^2\, dx$.

Solución

a) Al mantener a x fija,

$$\int 6xy^2\, dy = 6x \cdot \left(\frac{1}{3}y^3\right) + c_1(x) = 2xy^3 + c_1(x).$$

Comprobación: $\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy^3 + c_1(x)) = \dfrac{\partial}{\partial y}2xy^3 + \dfrac{\partial}{\partial y}c_1(x) = 2x(3y^2) + 0 = 6xy^2.$

b) Al mantener ahora y fija,

$$\int 6xy^2\, dx = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right) \cdot y^2 + c_2(y) = 3x^2y^2 + c_2(y).$$

Usted debe verificar este resultado tomando su derivada parcial con respecto a x. ■

Integración parcial definida Al evaluar una integral definida podemos prescindir de las funciones $c_1(y)$ y $c_2(x)$ en (1) y (2). También en este caso, si $F(x, y)$ es una función tal que $F_y(x, y) = f(x, y)$, entonces la **integral parcial definida con respecto a y** se define como

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy = F(x, y)\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = F(x, g_2(x)) - F(x, g_1(x)). \tag{3}$$

Si $F(x, y)$ es una función tal que $F_x(x, y) = f(x, y)$, entonces la **integral parcial definida con respecto a x** es

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx = F(x, y)\Big]_{h_1(y)}^{h_2(y)} = F(h_2(y), y) - F(h_1(y), y). \tag{4}$$

Las funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$ en (3) y las funciones $h_1(y)$ y $h_2(y)$ en (4) se denominan los **límites de integración**. Desde luego los resultados en (3) y (4) se cumplen cuando los límites de integración son constantes.

EJEMPLO 2 Empleo de (3) y (4)

Evalúe:

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dy$ ***b***) $\displaystyle\int_{-1}^3 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dx.$

Solución

a) Se deduce de (3) que

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dy &= \left[2xy^3 - 4x \ln|y|\right]_1^2 \\ &= (16x - 4x \ln 2) - (2x - 4x \ln 1) \\ &= 14x - 4x \ln 2.\end{aligned}$$

b) De (4),

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dx &= \left(3x^2y^2 - 2\frac{x^2}{y}\right)\Big]_{-1}^3 \\ &= \left(27y^2 - \frac{18}{y}\right) - \left(3y^2 - \frac{2}{y}\right) \\ &= 24y^2 - \frac{16}{y}.\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 3 Empleo de (3)

Evalúe $\displaystyle\int_{x^2}^{x} \operatorname{sen} xy\, dy.$

Solución Puesto que estamos tratando a x como constante, advertimos primero que la integral parcial de sen xy con respecto a y es $(-\cos xy)/x$. Para ver lo anterior, tenemos por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{x}\cos xy\right) = -\frac{1}{x}(-\operatorname{sen} xy)\frac{\partial}{\partial y} xy = -\frac{1}{x}(-\operatorname{sen} xy)\cdot x = \operatorname{sen} xy.$$

Por consiguiente, por (3) la integral parcial definida es

$$\int_{x^2}^{x} \operatorname{sen} xy\, dy = -\frac{\cos xy}{x}\Big]_{x^2}^{x} = \left(-\frac{\cos(x\cdot x)}{x}\right) - \left(-\frac{\cos(x\cdot x^2)}{x}\right) = -\frac{\cos x^2}{x} + \frac{\cos x^3}{x}.$$ ■

Antes de continuar necesitamos examinar algunas regiones especiales en el plano xy.

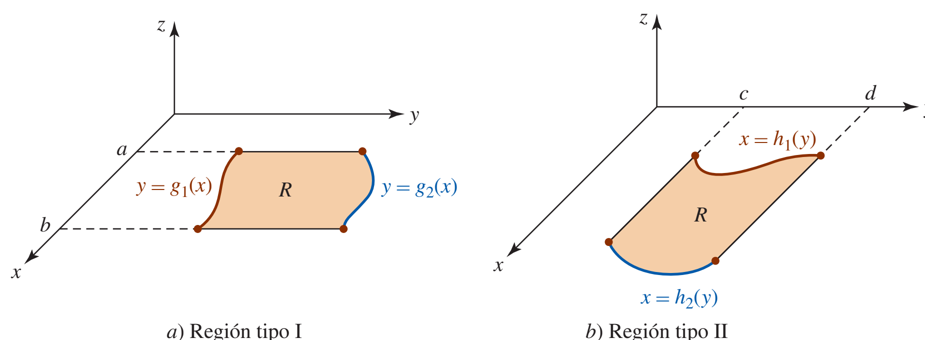
Regiones de tipo I y II La región que se ilustra en la FIGURA 14.2.1*a*),

$$R: a \le x \le b, \quad g_1(x) \le y \le g_2(x),$$

donde las funciones frontera g_1 y g_2 son continuas, se denomina **región tipo I**. En la figura 14.2.1*b*), la región

$$R: c \le y \le d, \quad h_1(y) \le x \le h_2(y),$$

donde h_1 y h_2 son continuas, se denomina **región tipo II**.



a) Región tipo I
b) Región tipo II

FIGURA 14.2.1 Regiones en el plano

Integrales iteradas Puesto que la integral parcial definida $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$ es una función de x únicamente, podríamos, como alternativa, integrar la función resultante con respecto a x. Si f es continua sobre una región R de tipo I, definimos una **integral iterada de f** sobre la región mediante

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx. \tag{5}$$

La idea básica en (5) es realizar integraciones *repetidas* o *sucesivas*. El proceso de dos pasos empieza con una integración parcial definida que produce una función de x, la cual se integra después de la manera usual de $x = a$ a $x = b$. El resultado final de las dos integraciones será un número real. De manera similar, definimos una integral iterada de una función f continua sobre una región R tipo II por medio de

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy. \tag{6}$$

En (5) y (6), R recibe el nombre de **región de integración**.

EJEMPLO 4 Integral iterada

Evalúe la integral iterada de $f(x, y) = 2xy$ sobre la región que se muestra en la FIGURA 14.2.2.

Solución La región es de tipo I y por ello de acuerdo con (5) tenemos

$$\int_{-1}^{2} \int_{x}^{x^2+1} 2xy\, dy\, dx = \int_{-1}^{2} \left[\int_{x}^{x^2+1} 2xy\, dy \right] dx = \int_{-1}^{2} xy^2 \Big]_{x}^{x^2+1} dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [x(x^2 + 1)^2 - x^3]\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}(x^2 + 1)^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{-1}^{2} = \frac{63}{4}.$$ ■

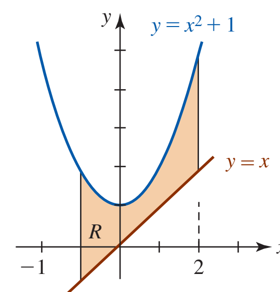


FIGURA 14.2.2 Región R del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Integral iterada

Evalúe $\displaystyle\int_0^4 \int_y^{2y} (8x + e^y)\, dx\, dy.$

Solución Al comparar la integral iterada con (6), vemos que la región de integración es de tipo II. Vea la FIGURA 14.2.3. Iniciamos integraciones sucesivas utilizando (4):

$$\int_0^4 \int_y^{2y} (8x + e^y)\, dx\, dy = \int_0^4 \left[\int_y^{2y} (8x + e^y)\, dx \right] dy = \int_0^4 (4x^2 + xe^y) \Big]_y^{2y} dy$$

$$= \int_0^4 [(16y^2 + 2ye^y) - (4y^2 + ye^y)]\, dy$$

$$= \int_0^4 (12y^2 + ye^y)\, dy \quad \leftarrow \text{integración por partes}$$

$$= \left[4y^3 + ye^y - e^y \right]_0^4 = 257 + 3e^4 \approx 420.79.$$ ■

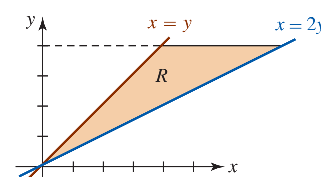


FIGURA 14.2.3 Región R del ejemplo 5

EJEMPLO 6 Integral iterada

Evalúe $\int_{-1}^{3}\int_{1}^{2}\left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right)dy\,dx.$

Solución En el resultado del inciso *a*) del ejemplo 2, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}\int_{1}^{2}\left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right)dy\,dx &= \int_{-1}^{3}\left[\int_{1}^{2}\left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right)dy\right]dx\\ &= \int_{-1}^{3}(14x - 4x\ln 2)\,dx\\ &= (7x^2 - 2x^2\ln 2)\Big]_{-1}^{3} = 56 - 16\ln 2 \approx 44.91.\end{aligned}$$ ■

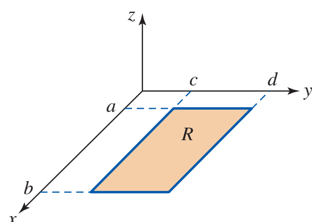


FIGURA 14.2.4 La región rectangular es tanto del tipo I como del tipo II

La inspección de la FIGURA 14.2.4 debe convencerlo de que una región rectangular R definida por $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ es simultáneamente del tipo I y del tipo II. Si f es continua sobre R, puede demostrarse que

$$\int_a^b\int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x, y)\,dx\,dy. \tag{7}$$

Usted debe verificar que

$$\int_1^2\int_{-1}^3\left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right)dx\,dy$$

produce el mismo resultado que la integral iterada del ejemplo 6.

Una región rectangular no es la única región que puede ser tanto de tipo I como de tipo II. Como en (7), si f es continua sobre una región R que es simultáneamente del tipo I y del tipo II, entonces las dos integrales iteradas de f sobre R son iguales. Vea los problemas 47 y 48 de los ejercicios 14.2.

Ejercicios 14.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-44.

Fundamentos

En los problemas 1-10, evalúe la integral parcial dada.

1. $\int dy$
2. $\int (1 - 2y)\,dx$
3. $\int (6x^2y - 3x\sqrt{y})\,dx$
4. $\int (6x^2y - 3x\sqrt{y})\,dy$
5. $\int \frac{1}{x(y + 1)}\,dy$
6. $\int (1 + 10x - 5y^4)\,dx$
7. $\int (12y\cos 4x - 3\operatorname{sen} y)\,dx$
8. $\int \sec^2 3xy\,dy$
9. $\int \frac{y}{\sqrt{2x + 3y}}\,dx$
10. $\int (2x + 5y)^6\,dy$

En los problemas 11-20, evalúe la integral parcial definida dada.

11. $\int_{-1}^{3} (6xy - 5e^y)\,dx$
12. $\int_1^2 \tan xy\,dy$
13. $\int_1^{3x} x^3e^{xy}\,dy$
14. $\int_{\sqrt{y}}^{y^3} (8x^3y - 4xy^2)\,dx$
15. $\int_0^{2x} \frac{xy}{x^2 + y^2}\,dy$
16. $\int_{x^3}^{x} e^{2y/x}\,dy$
17. $\int_{\tan y}^{\sec y} (2x + \cos y)\,dx$
18. $\int_{\sqrt{y}}^{1} y\ln x\,dx$
19. $\int_x^{\pi/2} \cos x\,\operatorname{sen}^3 y\,dy$
20. $\int_{1/2}^{1} y\cos^2 xy\,dx$

En los problemas 21-42, evalúe la integral iterada dada.

21. $\int_1^2\int_{-x}^{x^2} (8x - 10y + 2)\,dy\,dx$
22. $\int_{-1}^{1}\int_0^y (x + y)^2\,dx\,dy$
23. $\int_0^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} (2x - y)\,dx\,dy$
24. $\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos x} (1 + 4y\tan^2 x)\,dy\,dx$
25. $\int_0^{\pi}\int_y^{3y} \cos(2x + y)\,dx\,dy$
26. $\int_1^2\int_0^{\sqrt{x}} 2y\operatorname{sen}\pi x^2\,dy\,dx$
27. $\int_1^{\ln 3}\int_0^x 6e^{x+2y}\,dy\,dx$
28. $\int_0^1\int_0^{2y} e^{-y^2}\,dx\,dy$
29. $\int_0^3\int_{x+1}^{2x+1} \frac{1}{\sqrt{y - x}}\,dy\,dx$
30. $\int_0^1\int_0^y x(y^2 - x^2)^{3/2}\,dx\,dy$

31. $\displaystyle\int_1^9\int_0^x \frac{1}{x^2+y^2}\,dy\,dx$ **32.** $\displaystyle\int_0^{1/2}\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,dy$

33. $\displaystyle\int_1^e\int_1^y \frac{y}{x}\,dx\,dy$ **34.** $\displaystyle\int_1^4\int_1^{\sqrt{x}} 2ye^{-x}\,dy\,dx$

35. $\displaystyle\int_0^6\int_0^{\sqrt{25-y^2}/2} \frac{1}{\sqrt{(25-y^2)-x^2}}\,dx\,dy$

36. $\displaystyle\int_0^2\int_{y^2}^{\sqrt{20-y^2}} y\,dx\,dy$

37. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{\cos y}^{0} e^x \operatorname{sen} y\,dx\,dy$

38. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{y^{1/3}} 6x^2\ln(y+1)\,dx\,dy$

39. $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^x (\cos x - \operatorname{sen} y)\,dy\,dx$ **40.** $\displaystyle\int_1^3\int_0^{1/x} \frac{1}{x+1}\,dy\,dx$

41. $\displaystyle\int_{\pi/12}^{5\pi/12}\int_1^{\sqrt{2\operatorname{sen}2\theta}} r\,dr\,d\theta$ **42.** $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\int_{3\cos\theta}^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta$

En los problemas 43-46, dibuje la región de integración R para la integral iterada que se indica.

43. $\displaystyle\int_0^2\int_1^{2x+1} f(x,y)\,dy\,dx$ **44.** $\displaystyle\int_1^4\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$

45. $\displaystyle\int_{-1}^3\int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$ **46.** $\displaystyle\int_{-1}^2\int_{-x^2}^{x^2+1} f(x,y)\,dy\,dx$

En los problemas 47 y 48, verifique mediante un dibujo que la región tipo I es la misma que la región tipo II. Verifique que las integrales iteradas que se indican son iguales.

47. Tipo I: $\frac{1}{2}x \le y \le \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4$

Tipo II: $y^2 \le x \le 2y, \quad 0 \le y \le 2$

$$\int_0^4\int_{x/2}^{\sqrt{x}} x^2y\,dy\,dx = \int_0^2\int_{y^2}^{2y} x^2y\,dx\,dy$$

48. Tipo I: $-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 1$

Tipo II: $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}, \quad -1 \le y \le 1$

$$\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2x\,dy\,dx = \int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} 2x\,dx\,dy$$

En los problemas 49-52, verifique la igualdad que se indica.

49. $\displaystyle\int_{-1}^2\int_0^3 x^2\,dy\,dx = \int_0^3\int_{-1}^2 x^2\,dx\,dy$

50. $\displaystyle\int_{-2}^2\int_2^4 (2x+4y)\,dx\,dy = \int_2^4\int_{-2}^2 (2x+4y)\,dy\,dx$

51. $\displaystyle\int_1^3\int_0^{\pi} (3x^2y - 4\operatorname{sen} y)\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_1^3 (3x^2y - 4\operatorname{sen} y)\,dx\,dy$

52. $\displaystyle\int_0^1\int_0^2\left(\frac{8y}{x+1} - \frac{2x}{y^2+1}\right)dx\,dy = \int_0^2\int_0^1\left(\frac{8y}{x+1} - \frac{2x}{y^2+1}\right)dy\,dx$

≡ Piense en ello

53. Si f y g son integrales, demuestre que

$$\int_c^d\int_a^b f(x)g(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right).$$

54. Emplee el resultado del problema 53 para evaluar

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xye^{-(2x^2+3y^2)}\,dx\,dy.$$

14.3 Evaluación de integrales dobles

Introducción Las integrales iteradas de la sección anterior proporcionan los medios para evaluar una integral doble $\iint_R f(x, y)\,dA$ sobre una región tipo I o tipo II o una región que puede expresarse como una unión de un número finito de estas regiones. El siguiente resultado se debe al matemático italiano **Guido Fubini** (1879-1943).

Teorema 14.3.1 Teorema de Fubini

Sea f continua sobre una región R.

i) Si R es una región de tipo I, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx. \tag{1}$$

ii) Si R es una región de tipo II, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

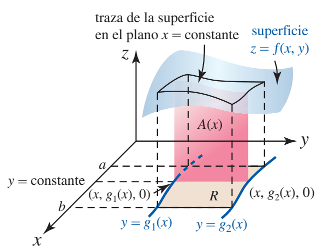


FIGURA 14.3.1 El área $A(x)$ del plano vertical es una integral definida de f

El teorema 14.3.1 es la contraparte de la integral doble del teorema 5.5.1, el teorema fundamental del cálculo. Si bien el teorema 14.3.1 es difícil de probar, podemos tener alguna idea intuitiva de su importancia al considerar volúmenes. Sea R una región de tipo I y $z = f(x, y)$ continua y no negativa sobre R. El área A del plano vertical que se muestra en la FIGURA 14.3.1 es el área bajo la traza de la superficie $z = f(x, y)$ en el plano x = constante y en consecuencia está dado por la integral parcial

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Al sumar todas estas áreas de $x = a$ a $x = b$, obtenemos el volumen V del sólido sobre R y debajo de la superficie:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Sin embargo, como ya hemos visto en (3) de la sección 14.1, este volumen está también dado por la integral doble $V = \iint_R f(x, y)\, dA$. En consecuencia,

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

EJEMPLO 1 Integral doble

Evalúe la integral doble $\iint_R e^{x+3y}\, dA$ sobre la región R acotada por las gráficas de $y = 1$, $y = 2$, $y = x$ y $y = -x + 5$.

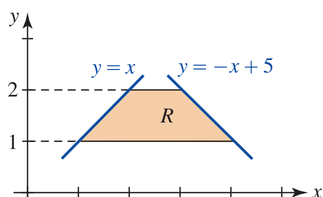


FIGURA 14.3.2 Región R del ejemplo 1

Solución Como se advierte en la FIGURA 14.3.2, R es una región de tipo II; por consiguiente, por (2) integramos primero con respecto a x desde la frontera izquierda $x = y$ hasta la frontera derecha $x = 5 - y$:

$$\begin{aligned}
\iint_R e^{x+3y}\, dA &= \int_1^2 \int_y^{5-y} e^{x+3y}\, dx\, dy \\
&= \int_1^2 e^{x+3y} \Big]_y^{5-y} dy \\
&= \int_1^2 (e^{5+2y} - e^{4y})\, dy \\
&= \left(\frac{1}{2}e^{5+2y} - \frac{1}{4}e^{4y}\right)\Big]_1^2 \\
&= \frac{1}{2}e^9 - \frac{1}{4}e^8 - \frac{1}{2}e^7 + \frac{1}{4}e^4 \approx 2\,771.64.
\end{aligned}$$ ■

Como una ayuda para reducir una integral doble a una integral iterada con límites de integración correctos, resulta útil visualizar, como se sugiere en la discusión anterior, la integral doble como un proceso de suma. Sobre una región de tipo I la integral iterada $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$ es primero una sumatoria en la dirección de y. De manera gráfica, esto se indica mediante la flecha vertical en la FIGURA 14.3.3*a*); el rectángulo típico en la flecha tiene un área $dy\, dx$. El dy situado antes del dx significa que los "volúmenes" $f(x, y)\, dy\, dx$ de los paralelepípedos construidos sobre los rectángulos se suman verticalmente con respecto a y desde la curva frontera inferior $y = g_1(x)$ hasta la curva frontera superior $y = g_2(x)$. El dx que sigue al dy significa que el resultado de cada sumatoria vertical se suma después horizontalmente con respecto a x de izquierda $(x = a)$ a derecha $(x = b)$. Se hacen comentarios similares con relación a las integrales dobles sobre regiones de tipo II. Vea la figura 14.3.3*b*). Recuerde de (4) de la sección 14.1 que cuando $f(x, y) = 1$, la integral doble $A = \iint_R dA$ produce el área de la región. Entonces, la figura 14.3.3*a*) muestra que $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx$ suma verticalmente las áreas rectangulares y después horizontalmente, en tanto que la figura 14.3.3*b*) muestra que $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, dy$ suma horizontalmente las áreas rectangulares y después verticalmente.

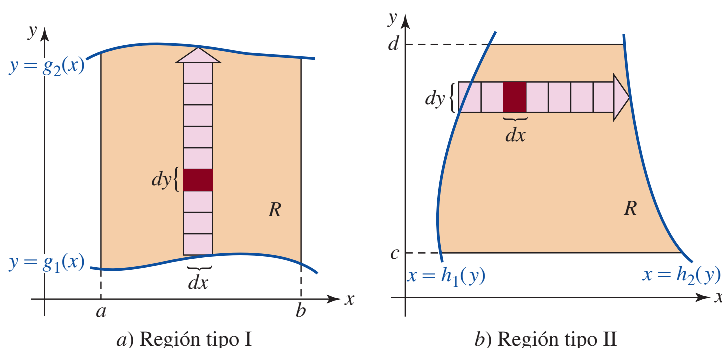


FIGURA 14.3.3 En *a*) la primera integración es con respecto a *y*; en *b*) la primera integración es con respecto a *x*

EJEMPLO 2 Área mediante integración doble

Emplee la integral doble para determinar el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$.

Solución Las gráficas y sus puntos de intersección se muestran en la FIGURA 14.3.4. Puesto que R es evidentemente del tipo I, tenemos de (1)

$$\begin{aligned} A = \iint_R dA &= \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{8-x^2} dy\,dx \\ &= \int_{-2}^{2}[(8 - x^2) - x^2]\,dx \\ &= \int_{-2}^{2}(8 - 2x^2)\,dx \\ &= \left(8x - \frac{2}{3}x^3\right)\Big]_{-2}^{2} = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

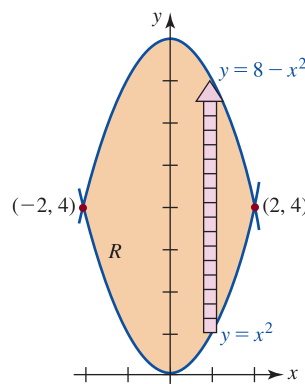


FIGURA 14.3.4 Región R del ejemplo 2

Nota: Usted debe reconocer

$$A = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\,dx = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\,dx$$

como la fórmula (3) de la sección 6.2 para el área acotada entre dos gráficas sobre el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 3 Volumen mediante doble integración

Utilice la integral doble para calcular el volumen V del sólido en el primer octante que está acotado por los planos de coordenadas y las gráficas del plano $z = 3 - x - y$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solución De la FIGURA 14.3.5*a*) vemos que el volumen está dado por $V = \iint_R (3 - x - y)\,dA$. Puesto que la figura 14.3.5*b*) muestra que la región de integración R es tipo I, tenemos de (1),

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x - y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(3y - xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Big]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \left(3\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2\right) dx \quad \leftarrow \text{sustitución trigonométrica} \\ &= \left[\frac{3}{2}\,\text{sen}^{-1}x + \frac{3}{2}x\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{4}\pi - \frac{2}{3} \approx 1.69. \end{aligned}$$

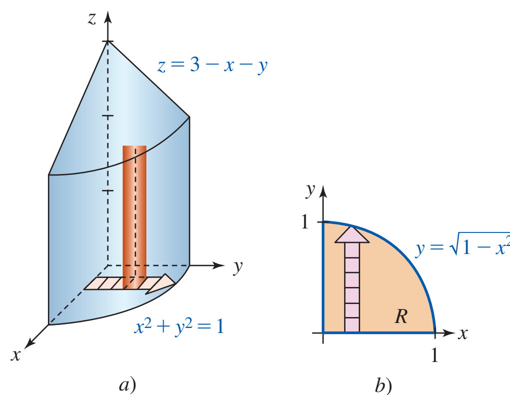


FIGURA 14.3.5 En el ejemplo 3, superficies en *a*); región de integración en *b*)

La reducción de una integral doble ya sea a las integrales iteradas (1) o (2) depende de *a*) el tipo de región y *b*) la función misma. Los siguientes dos ejemplos ilustran cada caso.

EJEMPLO 4 Integral doble

Evalúe $\iint_R (x + y)\, dA$ sobre la región acotada por las gráficas de $x = y^2$ y $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Solución La región, que se muestra en la FIGURA 14.3.6*a*), puede escribirse como la unión $R = R_1 \cup R_2$ de las dos regiones tipo I. Al resolver la ecuación $y^2 = 2y + 3$ o $(y + 1)(y - 3) = 0$ encontramos que los puntos de intersección de las dos gráficas son $(1, -1)$ y $(9, 3)$. Por tanto, de (1) y el teorema 14.1.1*iii*), tenemos

$$\iint_R (x + y)\, dA = \iint_{R_1} (x + y)\, dA + \iint_{R_2} (x + y)\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x + y)\, dy\, dx + \int_1^9 \int_{x/2-3/2}^{\sqrt{x}} (x + y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Big]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx + \int_1^9 \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Big]_{x/2-3/2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 2x^{3/2}\, dx + \int_1^9 \left(x^{3/2} + \frac{11}{4}x - \frac{5}{8}x^2 - \frac{9}{8}\right) dx$$

$$= \frac{4}{5}x^{5/2}\Big]_0^1 + \left(\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{11}{8}x^2 - \frac{5}{24}x^3 - \frac{9}{8}x\right)\Big]_1^9 \approx 46.93.$$

Solución alterna Al interpretar la región como una región individual de tipo II, vemos de la figura 14.3.6*b*) que

$$\iint_R (x + y)\, dA = \int_{-1}^3 \int_{y^2}^{2y+3} (x + y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-1}^3 \left(\frac{1}{2}x^2 + xy\right)\Big]_{y^2}^{2y+3} dy$$

$$= \int_{-1}^3 \left(-\frac{1}{2}y^4 - y^3 + 4y^2 + 9y + \frac{9}{2}\right) dy$$

$$= \left(-\frac{1}{10}y^5 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{4}{3}y^3 + \frac{9}{2}y^2 + \frac{9}{2}y\right)\Big]_{-1}^3 \approx 46.93.$$

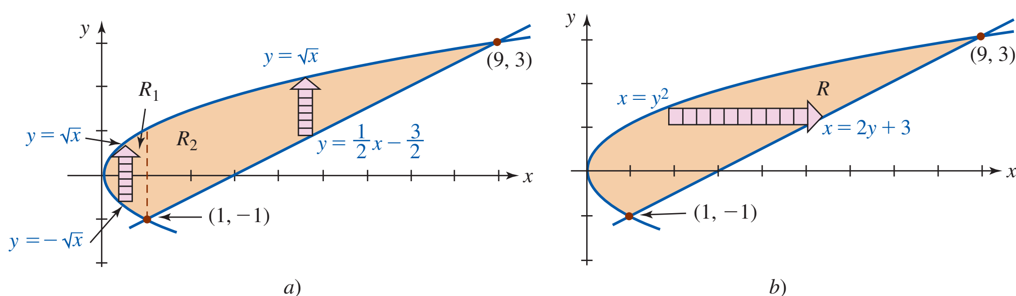


FIGURA 14.3.6 En el ejemplo 4, unión de dos regiones de tipo I en *a*); región de tipo II en *b*)

Advierta que la respuesta en el ejemplo 4 no representa el volumen del sólido sobre R y debajo del plano $z = x + y$. ¿Por qué no?

Inversión del orden de integración Como ilustra el ejemplo 4, un problema puede volverse más sencillo cuando el orden de integración se **cambia** o **invierte**. Además, algunas integrales iteradas que quizá sea imposible evaluar utilizando un orden de integración puedan, tal vez, evaluarse utilizando el orden de integración inverso.

EJEMPLO 5 Integral doble

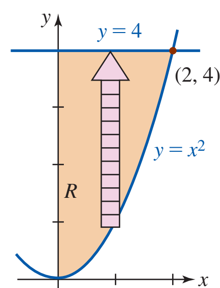
Evalúe $\iint_R xe^{y^2}\,dA$ sobre la región R en el primer cuadrante acotado por las gráficas de $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$.

Solución Cuando se observa como una región de tipo I, tenemos de la FIGURA 14.3.7*a*), $0 \le x \le 2$, $x^2 \le y \le 4$, por lo que

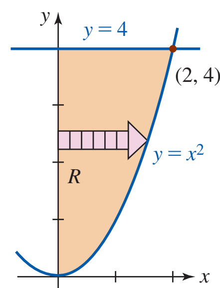
$$\iint_R xe^{y^2}\,dA = \int_0^2\int_{x^2}^4 xe^{y^2}\,dy\,dx.$$

La dificultad aquí es que la integral parcial definida $\int_{x^2}^4 xe^{y^2}\,dy$ no puede evaluarse debido a que e^{y^2} no tiene una antiderivada como función elemental con respecto a y. Sin embargo, como vemos en la figura 14.3.7*b*), podemos interpretar la misma región como una de tipo II definida por $0 \le y \le 4$, $0 \le x \le \sqrt{y}$. Por consiguiente, de (2),

$$\begin{aligned}\iint_R xe^{y^2}\,dA &= \int_0^4\int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2}\,dx\,dy\\ &= \int_0^4 \frac{1}{2}x^2e^{y^2}\Big]_0^{\sqrt{y}}\,dy\\ &= \int_0^4 \frac{1}{2}ye^{y^2}\,dy\\ &= \frac{1}{4}e^{y^2}\Big]_0^4 = \frac{1}{4}(e^{16} - 1).\end{aligned}$$



a) Región tipo I



b) Región tipo II

FIGURA 14.3.7 Región de integración del ejemplo 5

$\iint_R$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Como se mencionó después del ejemplo 1, es posible definir la integral doble en términos de un doble límite de una doble suma tal como

$$\sum_i\sum_j f(x_i^*, y_j^*)\Delta y_j\,\Delta x_i \qquad \text{o} \qquad \sum_j\sum_i f(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i\,\Delta y_j.$$

No daremos los detalles.

ii) Se le sugiere aprovechar las simetrías para minimizar su trabajo cuando calcule áreas y volúmenes mediante integración doble. En el caso de volúmenes, asegúrese de que *tanto* la región R *como* la superficie sobre la región posean simetrías correspondientes. Vea el problema 19 en los ejercicios 14.3.

iii) Antes de intentar evaluar la integral doble, trate *siempre* de dibujar una imagen exacta de la región R de integración.

Ejercicios 14.3 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-44.

Fundamentos

En los problemas 1-10, evalúe la integral doble sobre la región R que está acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Elija el orden de integración más conveniente.

1. $\iint_R x^3y^2\,dA;\quad y = x, y = 0, x = 1$
2. $\iint_R (x + 1)\,dA;\quad y = x, x + y = 4, x = 0$
3. $\iint_R (2x + 4y + 1)\,dA;\quad y = x^2, y = x^3$
4. $\iint_R xe^y\,dA;\quad R$ la misma que en el problema 1
5. $\iint_R 2xy\,dA;\quad y = x^3, y = 8, x = 0$
6. $\iint_R \dfrac{x}{\sqrt{y}}\,dA;\quad y = x^2 + 1, y = 3 - x^2$
7. $\iint_R \dfrac{y}{1 + xy}\,dA;\quad y = 0, y = 1, x = 0, x = 1$
8. $\iint_R \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{y}\,dA;\quad x = y^2, x = 0, y = 1, y = 2$
9. $\iint_R \sqrt{x^2 + 1}\,dA;\quad x = y, x = -y, x = \sqrt{3}$
10. $\iint_R x\,dA;\quad y = \tan^{-1}x, y = 0, x = 1$

En los problemas 11 y 12, evalúe $\iint_R (x + y)\,dA$ para la región dada R.

11.

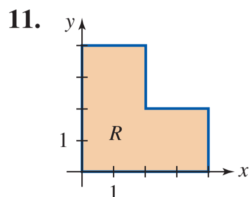


FIGURA 14.3.8 Región de integración del problema 11

12.

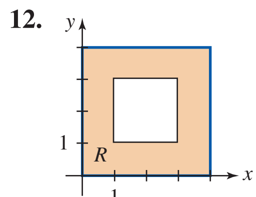


FIGURA 14.3.9 Región de integración del problema 12

En los problemas 13-18, emplee la integral doble para calcular el área de la región R que está acotada por las gráficas de las ecuaciones que se indican.

13. $y = -x, y = 2x - x^2$
14. $x = y^2, x = 2 - y^2$
15. $y = e^x, y = \ln x, x = 1, x = 4$
16. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, x + y = 4$
17. $y = -2x + 3, y = x^3, x = -2$
18. $y = -x^2 + 3x, y = -2x + 4, y = 0, 0 \le x \le 2$
19. Considere el sólido acotado por las gráficas de $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4 - y$ y $z = 0$ que se muestran en la FIGURA 14.3.10. Elija y evalúe la integral correcta que represente al volumen V del sólido.

a) $4\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\,dy\,dx$

b) $2\int_{-2}^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\,dy\,dx$

c) $2\int_{-2}^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\,dx\,dy$

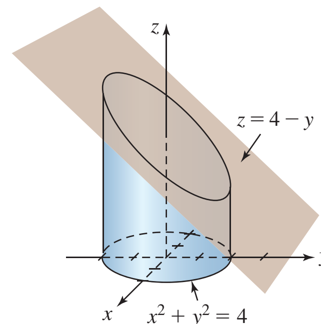


FIGURA 14.3.10 Sólido del problema 19

20. El sólido acotado por los cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ y $y^2 + z^2 = r^2$ recibe el nombre de **bicilindro**. Un octavo del sólido se muestra en la FIGURA 14.3.11. Elija y evalúe la integral correcta correspondiente al volumen V del bicilindro.

a) $4\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (r^2 - y^2)^{1/2}\,dy\,dx$

b) $8\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} (r^2 - y^2)^{1/2}\,dx\,dy$

c) $8\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} (r^2 - x^2)^{1/2}\,dy\,dx$

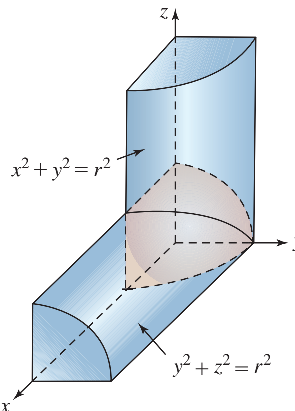


FIGURA 14.3.11 Sólido del problema 20

En los problemas 21-30, determine el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

21. $2x + y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

22. $z = 4 - y^2, x = 3, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

23. $x^2 + y^2 = 4, x - y + 2z = 4, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

24. $y = x^2, y + z = 3, z = 0$

25. $z = 1 + x^2 + y^2, 3x + y = 3, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

26. $z = x + y, x^2 + y^2 = 9, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

27. $yz = 6, x = 0, x = 5, y = 1, y = 6, z = 0$

28. $z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2, z = 0$

29. $z = 4 - y^2, x^2 + y^2 = 2x, z = 0$

30. $z = 1 - x^2, z = 1 - y^2, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

Si $f_2(x, y) \geq f_1(x, y)$ para todo (x, y) en una región R, entonces el volumen del sólido acotado por las dos superficies sobre R es

$$V = \iint_R [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, dA.$$

En los problemas 31-34, determine el volumen acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

31. $x + 2y + z = 4, z = x + y, x = 0, y = 0$, primer octante

32. $z = x^2 + y^2, z = 9$

33. $z = x^2, z = -x + 2, x = 0, y = 0, y = 5$, primer octante

34. $2z = 4 - x^2 - y^2, z = 2 - y$

En los problemas 35-40, invierta el orden de integración.

35. $\int_0^2 \int_0^{y^2} f(x, y)\, dx\, dy$ **36.** $\int_{-5}^5 \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$

37. $\int_0^3 \int_1^{e^x} f(x, y)\, dy\, dx$ **38.** $\int_0^2 \int_{y/2}^{3-y} f(x, y)\, dx\, dy$

39. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{x}} f(x, y)\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y)\, dy\, dx$

40. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y)\, dx\, dy$

En los problemas 41-46, evalúe la integral iterada que se indica invirtiendo el orden de integración.

41. $\int_0^1 \int_x^1 x^2\sqrt{1 + y^4}\, dy\, dx$ **42.** $\int_0^1 \int_{2y}^2 e^{-y/x}\, dx\, dy$

43. $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos\sqrt{x^3}\, dx\, dy$ **44.** $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$

45. $\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{1 + y^4}\, dy\, dx$ **46.** $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx\, dy$

El **valor promedio** f_{pro} de una función continua $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy se define como

$$f_{\text{pro}} = \frac{1}{A}\iint_R f(x, y)\, dA, \qquad (3)$$

donde A es el área de R. En los problemas 47 y 48, determine f_{pro} para la función y la región R dadas.

47. $f(x, y) = xy$; R definida mediante $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$

48. $f(x, y) = 9 - x^2 - 3y^2$; R acotada mediante la elipse $x^2 + 3y^2 = 9$

≡ Piense en ello

49. De (3) podemos escribir $\iint_R f(x, y)\, dA = f_{\text{pro}} \cdot A$, donde A es el área de R. Discuta acerca de la interpretación geométrica de este resultado en el caso $f(x, y) > 0$ sobre R.

50. Sea R una región rectangular acotada por las rectas $x = a$, $x = b$, $y = c$ y $y = d$, donde $a < b, c < d$.

a) Muestre que

$$\iint_R \cos 2\pi(x + y)\, dA = \frac{1}{4\pi^2}(S_1S_2 - C_1C_2)$$

$$\iint_R \operatorname{sen} 2\pi(x + y)\, dA = -\frac{1}{4\pi^2}(C_1S_2 + S_1C_2),$$

donde

$S_1 = \operatorname{sen} 2\pi b - \operatorname{sen} 2\pi a, \quad S_2 = \operatorname{sen} 2\pi d - \operatorname{sen} 2\pi c$
$C_1 = \cos 2\pi b - \cos 2\pi a, \quad C_2 = \cos 2\pi d - \cos 2\pi c.$

b) Muestre que si al menos uno de los dos lados perpendiculares de R tiene una longitud entera, entonces

$$\iint_R \cos 2\pi(x + y)\, dA = 0 \quad \text{y} \quad \iint_R \operatorname{sen} 2\pi(x + y)\, dA = 0.$$

c) Inversamente, muestre que si

$$\iint_R \cos 2\pi(x + y)\, dA = 0 \quad \text{y} \quad \iint_R \operatorname{sen} 2\pi(x + y)\, dA = 0,$$

entonces al menos uno de los dos lados perpendiculares de R debe tener longitud entera. [*Sugerencia*: Considere $0 = (S_1S_2 - C_1C_2)^2 + (C_1S_2 + S_1C_2)^2$.]

51. Sea R una región rectangular que se ha dividido en n subregiones rectangulares $R_1, R_2, \ldots, R_n$ que no se traslapan y cuyos lados son todos paralelos a los lados horizontal y vertical de R. Vea la FIGURA 14.3.12. Suponga que cada rectángulo interior tiene la propiedad de que uno de sus dos lados perpendiculares tiene longitud entera. Muestre que R tiene la misma propiedad. [*Sugerencia*: Recurra al problema 50 y al teorema 14.1.1*iii*).]

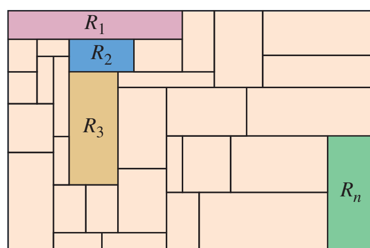


FIGURA 14.3.12 Región rectangular del problema 51

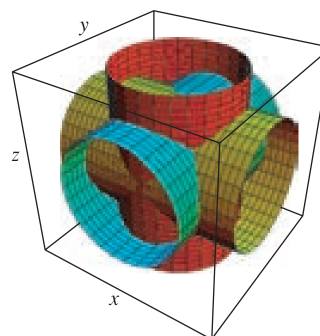


FIGURA 14.3.13 Tres cilindros del mismo radio se intersecan en ángulos rectos en el problema 52

≡ Proyectos

52. El sólido acotado por la intersección de tres cilindros $x^2 + y^2 = r^2$, $y^2 + z^2 = r^2$ y $x^2 + z^2 = r^2$ recibe el nombre de **tricilindro**. Vea la FIGURA 14.3.13. Realice una búsqueda en internet y encuentre una figura del sólido real. Determine el volumen del sólido.

14.4 Centro de masa y momentos

Introducción En la sección 6.10 vimos que si ρ es una densidad (masa por área unitaria), entonces la masa de una mancha de materia, o lámina, bidimensional que coincide con una región acotada por las gráficas de $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$m = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho \Delta A_k = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho f(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b \rho f(x)\, dx. \tag{1}$$

La densidad ρ en (1) puede ser una función de x; cuando ρ = constante se dice que la lámina es homogénea.

Veremos después que si la densidad de ρ es una función de dos variables, entonces la masa m de una lámina está dada por una integral doble.

Láminas con densidad variable: centro de masa Si una lámina que corresponde a una región R en el plano xy tiene una densidad variable $\rho(x, y)$ (unidades de masa por área unitaria), donde ρ es no negativa y continua sobre R, entonces de manera análoga a (1) definimos su **masa** m por la integral doble

$$m = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k \quad \text{o} \quad m = \iint_R \rho(x, y)\, dA. \tag{2}$$

Como en la sección 6.10, definimos las coordenadas del **centro de masa** de la lámina por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}, \tag{3}$$

donde

$$M_y = \iint_R x\rho(x, y)\, dA \quad \text{y} \quad M_x = \iint_R y\rho(x, y)\, dA \tag{4}$$

son los **momentos** de la lámina alrededor de los ejes y y x, respectivamente. El centro de masa es el punto donde consideramos que se concentra toda la masa de la lámina. Si $\rho(x, y)$ es una constante, se dice que la lámina será homogénea y su centro de masa recibe el nombre de **centroide** de la lámina.

EJEMPLO 1 Centro de masa

Una lámina tiene la forma de la región R en el primer cuadrante que está acotado por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$. Determine su centro de masa si la densidad es $\rho(x, y) = y$.

Solución De la FIGURA 14.4.1 vemos que

$$\begin{aligned} m &= \iint_R y\,dA = \int_0^{\pi/4}\int_{\text{sen}\,x}^{\cos x} y\,dy\,dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}y^2\Big]_{\text{sen}\,x}^{\cos x} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)\,dx \qquad \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx \\ &= \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2x\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

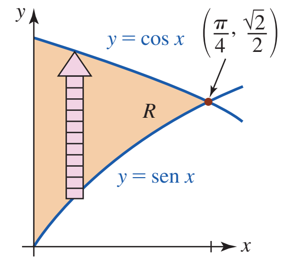


FIGURA 14.4.1 Lámina del ejemplo 1

Ahora,

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_R xy\,dA = \int_0^{\pi/4}\int_{\text{sen}\,x}^{\cos x} xy\,dy\,dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}xy^2\Big]_{\text{sen}\,x}^{\cos x} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} x\cos 2x\,dx \qquad \leftarrow \text{integración por partes} \\ &= \left(\frac{1}{4}x\,\text{sen}\,2x + \frac{1}{8}\cos 2x\right)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{16}(\pi - 2). \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_R y^2\,dA = \int_0^{\pi/4}\int_{\text{sen}\,x}^{\cos x} y^2\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} (\cos^3 x - \text{sen}^3 x)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} [\cos x(1 - \text{sen}^2 x) - \text{sen}\,x(1 - \cos^2 x)]\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left(\text{sen}\,x - \frac{1}{3}\text{sen}^3 x + \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{18}(5\sqrt{2} - 4). \end{aligned}$$

Por consiguiente, de (3), las coordenadas del centro de masa de la lámina son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{1}{16}(\pi - 2)}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}(\pi - 2),$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{18}(5\sqrt{2} - 4)}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{9}(10\sqrt{2} - 8).$$

Las coordenadas aproximadas del centro de masa son (0.29, 068). ■

EJEMPLO 2 Centro de masa

Una lámina tiene la forma de la región R acotada por la gráfica de la elipse $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1$, $0 \le y \le 4$ y $y = 0$. Encuentre su centro de masa si la densidad es $\rho(x, y) = |x|y$.

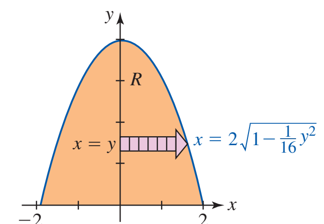


FIGURA 14.4.2 Lámina en el ejemplo 2

Solución De la FIGURA 14.4.2 vemos que la región es simétrica con respecto al eje y. Además, puesto que $\rho(-x, y) = \rho(x, y)$, la densidad ρ es simétrica alrededor de este eje. De esta manera,

la coordenada y del centro de masa debe estar sobre el eje de simetría, y por ello tenemos $\bar{x} = 0$. Utilizando simetría, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} m &= \iint_R |x|y\, dA = 2\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{1-y^2/16}} xy\, dx\, dy \\ &= \int_0^4 x^2y\Big]_0^{2\sqrt{1-y^2/16}} dy \\ &= 4\int_0^4 \left(y - \frac{1}{16}y^3\right) dy \\ &= 4\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{64}y^4\right)\Big]_0^4 = 16. \end{aligned}$$

De modo similar,

$$M_x = \iint_R |x|y^2\, dA = 2\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{1-y^2/16}} xy^2 dx\, dy = \frac{512}{15}.$$

De (3)

$$\bar{y} = \frac{\frac{512}{15}}{16} = \frac{32}{15}.$$

Las coordenadas del centro de masa son $\left(0, \frac{32}{15}\right)$. ■

No concluimos del ejemplo 2 que el centro de masa debe estar siempre sobre un eje de simetría de una lámina. Tenga en mente que la función de densidad $\rho(x, y)$ también debe ser simétrica con respecto a ese eje.

Momentos de inercia Las integrales M_x y M_y en (4) reciben el nombre de **primeros momentos** de una lámina alrededor del eje x y el eje y, respectivamente. Los llamados **segundos momentos** de una lámina o **momento de inercia** en torno a los ejes x y y son, a su vez, definidos por las integrales dobles

$$I_x = \iint_R y^2\rho(x, y)\, dA \qquad \text{e} \qquad I_y = \iint_R x^2\rho(x, y)\, dA. \tag{5}$$

Un momento de inercia es el equivalente rotacional de la masa. Para el movimiento traslacional, la energía cinética está dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$, donde m es la masa y v es la velocidad lineal. La energía cinética de una partícula de masa m que rota a una distancia r del eje es $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$, donde $I = mr^2$ es su momento de inercia alrededor del eje de rotación y ω es su velocidad angular.

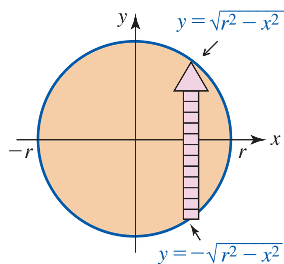


FIGURA 14.4.3 Disco del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Momento de inercia

Encuentre el momento de inercia alrededor del eje y del delgado disco homogéneo de masa m que se presenta en la FIGURA 14.4.3.

Solución Puesto que el disco es homogéneo, su densidad es la constante $\rho(x, y) = m/\pi r^2$. Por consiguiente, de (5),

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_R x^2\rho(x, y)\, dA = \iint_R x^2\left(\frac{m}{\pi r^2}\right) dA \\ &= \frac{m}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} x^2\, dy\, dx \end{aligned}$$

$$= \frac{2m}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} x^2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx \qquad \leftarrow \text{sustitución trigonométrica}$$

$$= \frac{2mr^2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{sen}^2\,\theta\cos^2\,\theta\,d\theta \qquad \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble}$$

$$= \frac{mr^2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{sen}^2\,2\theta\,d\theta \qquad \leftarrow \text{fórmula de mitad de ángulo}$$

$$= \frac{mr^2}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos\,4\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}mr^2. \qquad ■$$

Radio de giro El radio de giro de una lámina de masa m y el momento de inercia I alrededor de un eje se definen por medio de

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}. \tag{6}$$

Puesto que (6) implica que $I = mR_g^2$, el radio de giro se interpreta como la distancia radial que la lámina, considerada como una masa puntual, puede girar alrededor del eje sin cambiar la inercia rotacional del cuerpo. En el ejemplo 3, el radio de giro es $R_g = \sqrt{I_y/m} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}mr^2\right)/m} = \frac{1}{2}r$.

Ejercicios 14.4 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-44.

Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre el centro de masa de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

1. $x = 0, x = 4, y = 0, y = 3;\quad \rho(x, y) = xy$

2. $x = 0, y = 0, 2x + y = 4;\quad \rho(x, y) = x^2$

3. $y = x, x + y = 6, y = 0;\quad \rho(x, y) = 2y$

4. $y = |x|, y = 3;\quad \rho(x, y) = x^2 + y^2$

5. $y = x^2, x = 1, y = 0;\quad \rho(x, y) = x + y$

6. $x = y^2, x = 4;\quad \rho(x, y) = y + 5$

7. $y = 1 - x^2, y = 0$; densidad ρ en un punto P directamente proporcional a la distancia desde el eje x.

8. $y = \text{sen}\,x, 0 \le x \le \pi, y = 0$; densidad ρ en el punto P directamente proporcional a la distancia desde el eje y.

9. $y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0;\quad \rho(x, y) = y^3$

10. $y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0;\quad \rho(x, y) = x^2$

En los problemas 11-14, determine el momento de inercia alrededor del eje x de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

11. $x = y - y^2, x = 0;\quad \rho(x, y) = 2x$

12. $y = x^2, y = \sqrt{x};\quad \rho(x, y) = x^2$

13. $y = \cos x, -\pi/2 \le x \le \pi/2, y = 0$; $\rho(x, y) = k$ (constante)

14. $y = \sqrt{4 - x^2}, x = 0, y = 0$, primer cuadrante; $\rho(x, y) = y$

En los problemas 15-18, encuentre el momento de inercia alrededor del eje y de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

15. $y = x^2, x = 0, y = 4$, primer cuadrante; $\rho(x, y) = y$

16. $y = x^2, y = \sqrt{x};\quad \rho(x, y) = x^2$

17. $y = x, y = 0, y = 1, x = 3;\quad \rho(x, y) = 4x + 3y$

18. Misma R y densidad que en el problema 7.

En los problemas 19 y 20, encuentre el radio de giro alrededor del eje indicado de la lámina que tiene la forma y densidad dadas.

19. $x = \sqrt{a^2 - y^2}, x = 0;\quad \rho(x, y) = x$; eje y

20. $x + y = a, a > 0, x = 0, y = 0$; $\rho(x, y) = k$ (constante); eje x.

21. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la gráfica de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Si la densidad es $\rho(x, y) = 1$, encuentre:

a) el momento de inercia alrededor del eje x de la lámina,
b) el momento de inercia alrededor del eje y de la lámina,
c) el radio de giro alrededor del eje x [*Sugerencia*: El área de la elipse es πab.],
d) el radio de giro alrededor del eje y.

22. La sección transversal de un perfil aerodinámico experimental es la lámina que se muestra en la FIGURA 14.4.4. El arco ABC es elíptico, en tanto que los dos arcos AD y CD son parabólicos. Encuentre el momento de inercia alrededor del eje x de la lámina bajo la suposición de que la densidad es $\rho(x, y) = 1$.

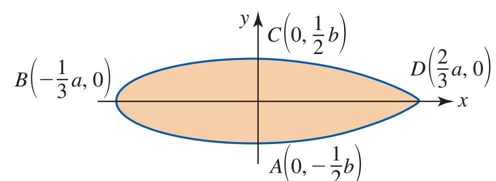


FIGURA 14.4.4 Perfil aerodinámico del problema 22

En los problemas 23-26, encuentre el momento de inercia polar I_0 de la lámina que tiene la forma y la densidad dadas. El **momento de inercia polar** de una lámina con respecto al origen se define como

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dA = I_x + I_y.$$

23. $x + y = a, a > 0, x = 0, y = 0; \quad \rho(x, y) = k$ (constante)

24. $y = x^2, y = \sqrt{x}; \quad \rho(x, y) = x^2$ [*Sugerencia*: Vea los problemas 12 y 16.]

25. $x = y^2 + 2, x = 6 - y^2;$ densidad ρ en un punto P inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a partir del origen.

26. $y = x, y = 0, y = 3, x = 4; \quad \rho(x, y) = k$ (constante)

27. Encuentre el radio de giro del problema 23.

28. Demuestre que el momento de inercia polar con respecto al origen alrededor del centro de una delgada placa rectangular homogénea de masa m, con ancho w y longitud l es $I_0 = \frac{1}{12}m(l^2 + w^2)$.

14.5 Integrales dobles en coordenadas polares

Introducción Suponga que R es una región acotada por las gráficas de las ecuaciones polares $r = g_1(\theta)$, $r = g_2(\theta)$ y los rayos $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, y que f es una función de r y θ que es continua sobre R. Con el fin de definir la integral doble de f sobre R, empleamos rayos y círculos concéntricos para dividir la región en una retícula de "rectángulos polares" o subregiones R_k. Vea la FIGURA 14.5.1*a*) y *b*). El área ΔA_k de una subregión típica R_k, que se muestra en la figura 14.5.1*c*), es la diferencia de áreas de dos sectores circulares:

$$\begin{aligned}\Delta A_k &= \frac{1}{2}r_{k+1}^2\Delta\theta_k - \frac{1}{2}r_k^2\Delta\theta_k = \frac{1}{2}(r_{k+1}^2 - r_k^2)\Delta\theta_k \\ &= \frac{1}{2}(r_{k+1} + r_k)(r_{k+1} - r_k)\Delta\theta_k = r_k^*\Delta r_k\Delta\theta_k,\end{aligned}$$

donde $\Delta r_k = r_{k+1} - r_k$ y r_k^* denotan el radio promedio $\frac{1}{2}(r_{k+1} + r_k)$.

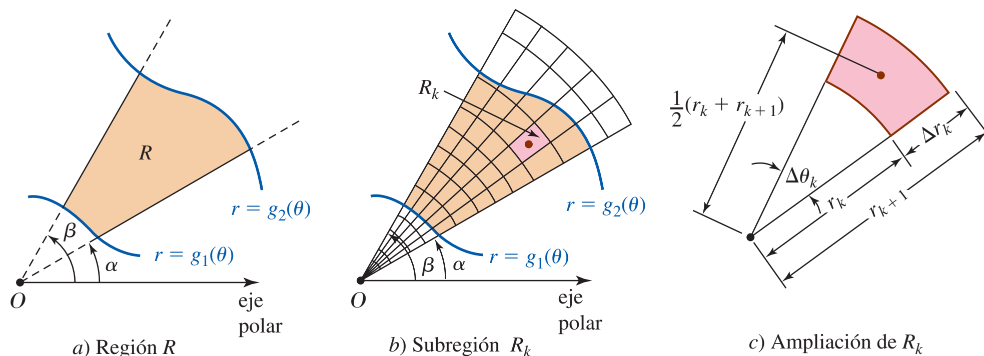


FIGURA 14.5.1 Partición de R usando coordenadas polares

Eligiendo un punto muestra (r_k^*, θ_k^*) en cada R_k, la integral doble de f sobre R es

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*)r_k^*\Delta r_k\Delta\theta_k = \iint_R f(r, \theta)\, dA.$$

La integral doble se evalúa entonces por medio de la integral iterada

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta)r\, dr\, d\theta. \tag{1}$$

Por otro lado, si la región R es como se indica en la FIGURA 14.5.2, la integral doble de f sobre R es entonces

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r, \theta)r\, d\theta\, dr. \tag{2}$$

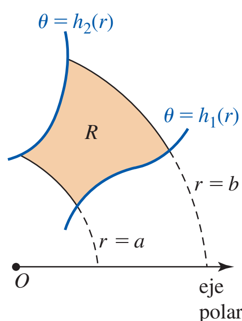


FIGURA 14.5.2 Región R de integración en (2)

EJEMPLO 1 Centro de masa

Encuentre el centro de masa de la lámina que corresponde a la región acotada por la curva llamada pétalo de rosa $r = 2\text{ sen }2\theta$ en el primer cuadrante si la densidad en el punto P en la lámina es directamente proporcional a la distancia desde el origen polar.

Solución Al variar θ de 0 a $\pi/2$, obtenemos la gráfica de la FIGURA 14.5.3. En este caso, la distancia desde el origen polar es $d(0, P) = |r|$. Por consiguiente, la densidad de la lámina es $\rho(r, \theta) = k|r|$, donde k es una constante de proporcionalidad. De (2) de la sección 14.4, tenemos

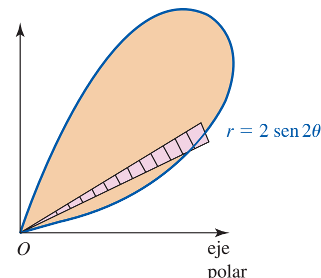


FIGURA 14.5.3 Lámina del ejemplo 1

$$\begin{aligned} m &= \iint_R k|r|\,dA = k\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\text{ sen }2\theta} (r)r\,dr\,d\theta \\ &= k\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}r^3\Big]_0^{2\text{ sen }2\theta} d\theta \\ &= \frac{8}{3}k\int_0^{\pi/2} \text{sen}^3\,2\theta\,d\theta \\ &= \frac{8}{3}k\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\,2\theta\ \text{sen }2\theta\,d\theta \qquad \leftarrow \text{identidad trigonométrica} \\ &= \frac{8}{3}k\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2\theta)\text{sen }2\theta\,d\theta \\ &= \frac{8}{3}k\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{6}\cos^3 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{16}{9}k. \end{aligned}$$

Puesto que $x = r\cos\theta$, podemos escribir el primer momento $M_y = k\iint_R x|r|\,dA$ como

$$\begin{aligned} M_y &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\text{ sen }2\theta} r^3\cos\theta\,dr\,d\theta \\ &= k\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}r^4\cos\theta\Big]_0^{2\text{ sen }2\theta} d\theta \\ &= 4k\int_0^{\pi/2} (\text{sen }2\theta)^4\cos\theta\,d\theta \qquad \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble} \\ &= 4k\int_0^{\pi/2} (2\text{ sen }\theta\cos\theta)^4\cos\theta\,d\theta \\ &= 64k\int_0^{\pi/2} \text{sen}^4\theta\cos^5\theta\,d\theta \\ &= 64k\int_0^{\pi/2} \text{sen}^4\theta(1 - \text{sen}^2\theta)^2\cos\theta\,d\theta \\ &= 64k\int_0^{\pi/2} (\text{sen}^4\theta - 2\text{ sen}^6\theta + \text{sen}^8\theta)\cos\theta\,d\theta \\ &= 64k\left(\frac{1}{5}\text{sen}^5\theta - \frac{2}{7}\text{sen}^7\theta + \frac{1}{9}\text{sen}^9\theta\right)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{512}{315}k. \end{aligned}$$

De manera similar, utilizando $y = r\text{ sen }\theta$, encontramos

$$M_x = k\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\text{ sen }2\theta} r^3\text{ sen }\theta\,dr\,d\theta = \frac{512}{315}k.$$

Aquí las coordenadas rectangulares del centro de masa son

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\frac{512}{315}k}{\frac{16}{9}k} = \frac{32}{35}.$$



En el ejemplo 1 podríamos haber señalado el hecho de que $M_x = M_y$ y, consecuentemente, $\bar{x} = \bar{y}$ a partir de que la lámina y la función de densidad son simétricas alrededor del rayo $\theta = \pi/4$.

Cambio de variables: coordenadas rectangulares a polares En algunos casos una integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$ que es difícil o incluso imposible de evaluar utilizando coordenadas rectangulares puede evaluarse fácilmente cuando se recurre a un cambio de variables. Si suponemos que f es continua sobre la región R, y si R puede describirse en coordenadas polares como $0 \le g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) r\, dr\, d\theta. \tag{3}$$

La ecuación (3) es particularmente útil cuando f contiene la expresión $x^2 + y^2$, puesto que, en coordenadas polares, no podemos escribir

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

EJEMPLO 2 Cambio de variables

Use coordenadas polares para evaluar

$$\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5 + x^2 + y^2}\, dy\, dx.$$

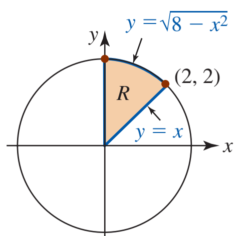


FIGURA 14.5.4 Región R de integración del ejemplo 2

Solución A partir de $x \le y \le \sqrt{8 - x^2}$, $0 \le x \le 2$, hemos dibujado la región R de integración en la FIGURA 14.5.4. Puesto que $x^2 + y^2 = r^2$, la descripción polar de la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ es $r = \sqrt{8}$. En consecuencia, en coordenadas polares, la región de R está dada por $0 \le r \le \sqrt{8}$, $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$. De acuerdo con $1/(5 + x^2 + y^2) = 1/(5 + r^2)$, la integral original se convierte en

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5 + x^2 + y^2}\, dy\, dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{5 + r^2}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{5 + r^2} (2r\, dr)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(5 + r^2) \Big]_0^{\sqrt{8}} d\theta \\
&= \frac{1}{2}(\ln 13 - \ln 5) \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \\
&= \frac{1}{2}(\ln 13 - \ln 5)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} \ln \frac{13}{5}.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Volumen

Encuentre el volumen del sólido que está bajo el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y sobre la región acotada por la gráfica de la circunferencia $x^2 + y^2 - y = 0$.

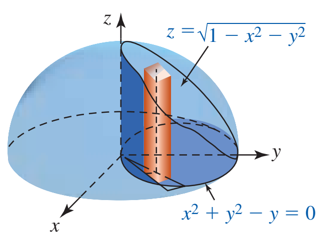


FIGURA 14.5.5 Sólido dentro de un hemisferio del ejemplo 3

Solución De la FIGURA 14.5.5 vemos que

$$V = \iint_R \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dA.$$

En coordenadas polares las ecuaciones del hemisferio y la circunferencia se vuelven, respectivamente, $z = \sqrt{1 - r^2}$ y $r = \operatorname{sen}\theta$. Ahora, usando simetría tenemos

$$\begin{aligned}
V = \iint_R \sqrt{1 - r^2}\, dA &= 2\int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen}\theta} (1 - r^2)^{1/2} r\, dr\, d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2}\right]_0^{\operatorname{sen}\theta} d\theta
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\left[1-(1-\text{sen}^2\,\theta)^{3/2}\right]d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\left[1-(\cos^2\theta)^{3/2}\right]d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^3\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\left[1-(1-\text{sen}^2\,\theta)\cos\theta\right]d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\left(\theta-\text{sen}\,\theta+\frac{1}{3}\text{sen}^3\,\theta\right)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\pi-\frac{4}{9}\approx 0.60.$$ ■

Área Advierta que en (1) si $f(r, \theta) = 1$, entonces el **área** de la región R en la figura 14.5.1*a*) está dada por

$$A = \iint_R dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r\,dr\,d\theta. \tag{4}$$

La misma observación se cumple para (2) y la figura 14.5.2 cuando $f(r, \theta) = 1$.

$\iint_R$ NOTAS DESDE EL AULA

Se le pide reexaminar el ejemplo 3. La gráfica de la circunferencia $r = \text{sen}\,\theta$ se obtiene al variar θ de 0 a π. Sin embargo, efectúe la integración iterada

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{\text{sen}\,\theta}(1-r^2)^{1/2}\,r\,dr\,d\theta$$

y vea si obtiene la respuesta *incorrecta* $\pi/3$. ¿Dónde está el error?

Ejercicios 14.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-44.

Fundamentos

En los problemas 1-4, emplee la integral doble en coordenadas polares para calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones polares que se indican.

1. $r = 3 + 3\,\text{sen}\,\theta$ **2.** $r = 2 + \cos\theta$

3. $r = 2\,\text{sen}\,\theta$, $r = 1$, área común

4. $r = 8\,\text{sen}\,4\theta$, un pétalo

En los problemas 5-10, encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

5. Un pétalo de $r = 5\cos 3\theta$, $z = 0$, $z = 4$

6. $x^2 + y^2 = 4$, $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = 0$

7. Entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$, $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $z = 0$

8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 25$, $z = 0$

9. $r = 1 + \cos\theta$, $z = y$, $z = 0$, primer octante

10. $r = \cos\theta$, $z = 2 + x^2 + y^2$, $z = 0$

En los problemas 11-16, encuentre el centro de masa de la lámina que tiene la forma y densidad dadas.

11. $r = 1$, $r = 3$, $x = 0$, $y = 0$, primer cuadrante; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)

12. $r = \cos\theta$; densidad ρ en el punto P directamente proporcional a la distancia desde el origen.

13. $y = \sqrt{3}x$, $y = 0$, $x = 3$; $\rho(r, \theta) = r^2$

14. $r = 4\cos 2\theta$, pétalo sobre el eje polar; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)

15. Fuera de $r = 2$ y y dentro de $r = 2 + 2\cos\theta$, $y = 0$, primer cuadrante; densidad ρ en el punto P inversamente proporcional a la distancia desde el origen.

16. $r = 2 + 2\cos\theta$, $y = 0$, primero y segundo cuadrantes; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)

En los problemas 17-20, encuentre el momento de inercia indicado de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

17. $r = a$; $\rho(r, \theta) = k$ (constante); I_x

18. $r = a$; $\rho(r, \theta) = \dfrac{1}{1 + r^4}$; I_x

19. Fuera de $r = a$ y dentro de $r = 2a\cos\theta$; densidad ρ en un punto P inversamente proporcional al cubo de la distancia desde el origen; I_y

20. Fuera de $r = 1$ y dentro de $r = 2\,\text{sen}\,2\theta$, primer cuadrante; $\rho(r, \theta) = \sec^2\theta$; I_y

En los problemas 21-24, determine el **momento polar de inercia** $I_0 = \iint_R r^2\rho(r, \theta)\,dA = I_x + I_y$ de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

21. $r = a$; $\rho(r, \theta) = k$ (constante). [*Sugerencia*: Use el problema 17 y el hecho de que $I_x = I_y$.]

22. $r = \theta$, $0 \le \theta \le \pi$, $y = 0$; densidad ρ en un punto P proporcional a la distancia desde el origen.

23. $r\theta = 1$, $\frac{1}{3} \le \theta \le 1$, $r = 1$, $r = 3$, $y = 0$; densidad ρ en un punto P inversamente proporcional a la distancia desde el origen. [*Sugerencia*: Integre primero con respecto a θ.]

24. $r = 2a\cos\theta$; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)

En los problemas 25-32, evalúe la integral iterada que se indica cambiando a coordenadas polares.

25. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

26. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}/2}\int_{y}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy$

27. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$

28. $\displaystyle\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\sqrt{\pi-x^2}} \text{sen}\,(x^2 + y^2)\,dy\,dx$

29. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,dy\,dx + \int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

30. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{2y-y^2}} (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$

31. $\displaystyle\int_{-5}^{5}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} (4x + 3y)\,dy\,dx$

32. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy$

33. La integral impropia $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ es importante en la teoría de probabilidad, estadística y otras áreas de las matemáticas aplicadas. Si I denota la integral, entonces debido a que la variable de integración es una variable sustituta tenemos

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \qquad \text{e} \qquad I = \int_0^\infty e^{-y^2}dy.$$

En vista del problema 53 de los ejercicios 14.2 se tiene

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Emplee coordenadas polares para evaluar la última integral. Calcule el valor de I.

34. Evalúe $\iint_R (x + y)\,dA$ sobre la región que se muestra en la FIGURA 14.5.6.

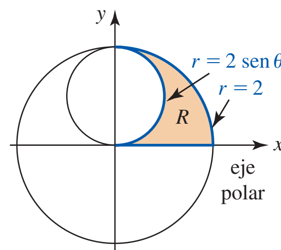


FIGURA 14.5.6 Región R del problema 34

≡ Aplicaciones

35. El tanque de hidrógeno líquido en el transbordador espacial tiene la forma de un cilindro circular recto con una tapa semielipsoidal en cada extremo. El radio de la parte cilíndrica del tanque es de 4.2 m. Determine el volumen del tanque que se muestra en la FIGURA 14.5.7.

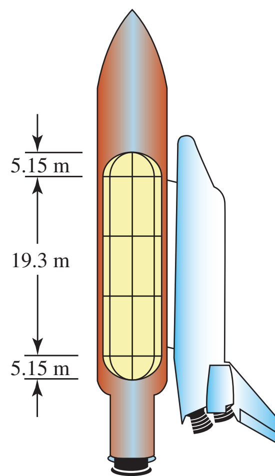


FIGURA 14.5.7 Transbordador espacial del problema 35

36. En algunos estudios de la diseminación de enfermedades de plantas, el número de infecciones por área unitaria como una función de la distancia desde la planta fuente infectada se describe por medio de una fórmula del tipo

$$I(r) = a(r + c)^{-b},$$

donde $I(r)$ es el número de infecciones por unidad de área a una distancia radial r de la planta fuente infectada, y a, b y c son parámetros (positivos) que dependen de la enfermedad.

a) Deduzca una fórmula para el número total de infecciones dentro de un círculo de radio R centrado en la planta fuente infectada; esto es, evalúe $\iint_C I(r)\,dA$, donde C es una región circular de radio R centrada en el origen. Suponga que el parámetro b no es 1 o 2.

b) Muestre que si $b > 2$, entonces el resultado en el inciso *a*) tiende a un límite finito cuando $R \to \infty$.

c) Para la roya del maíz común, el número de infecciones por metro cuadrado se modela como

$$I(r) = 68.585(r + 0.248)^{-2.351},$$

donde r se mide en metros. Encuentre el número total de infecciones.

37. Las densidades de población urbana decaen exponencialmente con la distancia desde el distrito comercial central (DCC); esto es,

$$D(r) = D_0 e^{-r/d},$$

donde $D(r)$ es la densidad de población a una distancia radial r desde el DCC, D_0 es la densidad en el centro y d es un parámetro.

a) Utilizando la fórmula $P = \iint_C D(r)\,dA$, encuentre una expresión para la población total que vive dentro de una región circular C de radio R del DCC.

b) Empleando

$$\frac{\displaystyle\iint_C rD(r)\,dA}{\displaystyle\iint_C D(r)\,dA}$$

determine una expresión para los viajes promedio (distancia recorrida) al DCC de la gente que vive dentro de la región C.

c) Utilizando los resultados de los incisos *a*) y *b*), encuentre la población total y los viajes promedio cuando $R \to \infty$.

38. Se argumenta que el costo, en términos de tiempo, dinero o esfuerzo, de colectar o distribuir material a o desde una localidad es proporcional a la integral $\iint_R r\,dA$, donde R es la región que se cubre y r denota la distancia al sitio de colección/distribución. Suponga, por ejemplo, que un quitanieves se envía a limpiar un área de estacionamiento circular de diámetro D. Muestre que quitar la nieve y acumularla en el perímetro es aproximadamente 70% más costoso que acumular toda la nieve en el centro del estacionamiento. [*Sugerencia*: Establezca por separado la integral para cada caso, empleando una ecuación de coordenadas polares para el círculo con el sitio de colección en el origen.]

14.6 Área de la superficie

Introducción En la sección 6.5 vimos que la longitud de un arco de la gráfica $y = f(x)$ desde $x = a$ a $x = b$ está dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{1}$$

El problema en tres dimensiones, que es la contraparte del problema de la longitud de arco, es encontrar el área $A(S)$ de la porción de la superficie dada por la función $z = f(x, y)$ que tiene primeras derivadas parciales continuas sobre una región cerrada R en el plano xy. Una superficie S de este tipo se dice que es **continua**.

Construcción de una integral Suponga, como se muestra en la FIGURA 14.6.1*a*), que una partición interior P de R se forma utilizando líneas paralelas a los ejes x y y. La partición P consiste entonces de n elementos rectangulares R_k de área $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ que yacen por completo dentro de R. Deje que $(x_k, y_k, 0)$ denote cualquier punto en un elemento R_k. Como se advierte en la figura 14.6.1*a*), al proyectar los lados de R_k hacia arriba, determinamos dos cantidades: una porción del parche S_k de la superficie y una porción de T_k de un plano tangente en $(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$. Parece razonable suponer que cuando R_k es pequeño, el área ΔT_k de T_k es aproximadamente la misma que el área ΔS_k del parche S_k.

Para determinar el área de T_k vamos a elegir $(x_k, y_k, 0)$ en una esquina de R_k como se muestra en la figura 14.6.1*b*). Los vectores indicados **u** y **v**, los cuales forman dos lados de T_k, están dados por

$$\mathbf{u} = \Delta x_k \mathbf{i} + f_x(x_k, y_k)\Delta x_k \mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = \Delta y_k \mathbf{j} + f_y(x_k, y_k)\Delta y_k \mathbf{k},$$

donde $f_x(x_k, y_k)$ y $f_y(x_k, y_k)$ son las pendientes de las rectas que contienen a **u** y **v**, respectivamente. En este caso de (10) de la sección 11.4 sabemos que $\Delta T_k = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$, donde

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_k & 0 & f_x(x_k, y_k)\Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & f_y(x_k, y_k)\Delta y_k \end{vmatrix}$$

$$= [-f_x(x_k, y_k)\mathbf{i} - f_y(x_k, y_k)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\,\Delta x_k \Delta y_k.$$

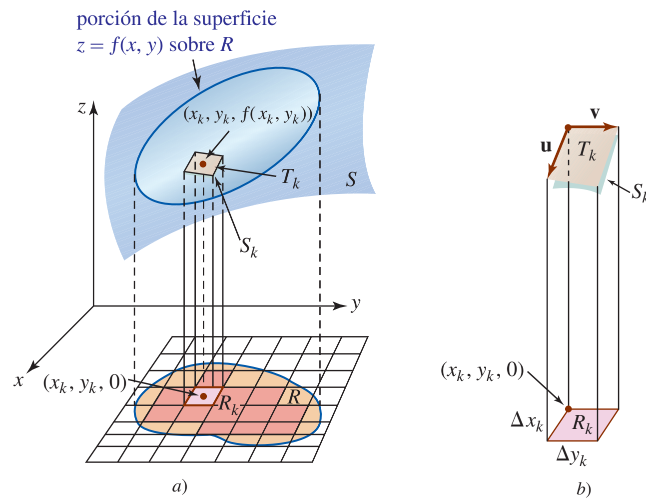


FIGURA 14.6.1 Superficie en *a*); ampliación de R_k, S_k y T_k en *b*)

En otras palabras,

$$\Delta T_k = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1}\,\Delta x_k \Delta y_k.$$

En consecuencia, el área $A(S)$ es aproximadamente

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2}\,\Delta x_k \Delta y_k.$$

Al tomar el límite de la suma anterior cuando $\|P\| \to 0$ se llega a la siguiente definición.

Definición 14.6.1 Área de la superficie

Sea f una función para la cual las primeras derivadas parciales f_x y f_y son continuas sobre una región cerrada R. Entonces el **área de la superficie** sobre R está dada por

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA. \qquad (2)$$

Nota: Podría haberse adivinado la forma (2) extendiendo naturalmente la estructura de una variable de (1) a dos variables.

EJEMPLO 1 Empleo de (2)

Determine el área de la superficie de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está sobre el plano xy y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = b^2$, $0 < b < a$.

Solución Si se define $z = f(x, y)$ por $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, entonces

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

y por ello
$$1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Por consiguiente, (2) es

$$A(S) = \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA,$$

donde R se indica en la FIGURA 14.6.2. Para evaluar esta integral doble, cambiamos a coordenadas polares. El círculo $x^2 + y^2 = b^2$ se convierte en $r = b, 0 \le \theta \le 2\pi$:

$$\begin{aligned} A(S) &= a\int_0^{2\pi}\int_0^b (a^2 - r^2)^{-1/2} r\, dr d\theta \\ &= a\int_0^{2\pi} -(a^2 - r^2)^{-1/2}\Big]_0^b d\theta \\ &= a\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi a\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right). \end{aligned}$$

■

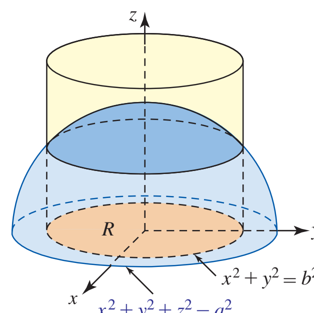


FIGURA 14.6.2 Superficie del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Empleo de (2)

Encuentre el área de la superficie de las porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que están dentro del cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Solución El área de superficie en cuestión consiste en las dos regiones sombreadas y oscuras de la superficie (arriba y debajo del plano xy) en la FIGURA 14.6.3. Como en el ejemplo 1, (2) se simplifica en

$$A(S) = 2\iint_R \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, dA,$$

donde R es la región acotada por la gráfica de $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. El factor adicional de (2) en la integral surge del uso de la simetría. En este caso, en coordenadas polares la frontera de R es simplemente $r = 2\cos\theta$. De tal modo,

$$\begin{aligned} A(S) &= 4\int_0^{\pi}\int_0^{2\cos\theta} (4 - r^2)^{-1/2} r\, dr d\theta \\ &= 8(\pi - 2) \approx 9.13. \end{aligned}$$

■

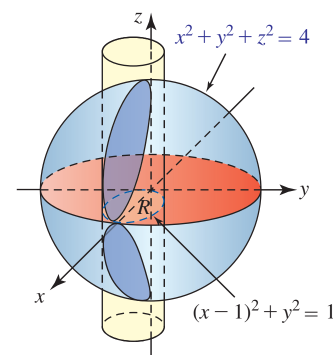


FIGURA 14.6.3 Superficie del ejemplo 2

Diferencial del área de la superficie La función

$$dS = \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA \tag{3}$$

recibe el nombre de **diferencial del área de la superficie**. Emplearemos esta función en las secciones 15.6 y 15.9.

Ejercicios 14.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-45.

Fundamentos

1. Encuentre el área de la superficie de aquella porción del plano $2x + 3y + 4z = 12$ que está acotada por los planos de coordenadas en el primer octante.
2. Determine el área de la superficie de aquella porción del plano $2x + 3y + 4z = 12$ que está arriba de la región en el primer cuadrante acotada por la gráfica $r = \text{sen}\, 2\theta$.
3. Determine el área de la superficie de aquella porción del cilindro $x^2 + z^2 = 16$ que está sobre la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 5$.
4. Encuentre el área de la superficie de aquella porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está debajo del plano $z = 2$.
5. Determine el área de la superficie de aquella porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está arriba del plano xy.
6. Encuentre el área de la superficie de las porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ que están dentro del cono $z^2 = x^2 + y^2$.
7. Encuentre el área de la superficie de aquella porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está arriba de la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas $x = 0$, $y = 0$, $4x^2 + y^2 = 25$. [*Sugerencia*: Integre primero con respecto a x.]
8. Encuentre el área de la superficie de aquella porción de la gráfica de $z = x^2 - y^2$ que está en el primer octante dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
9. Encuentre el área de la superficie de las porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que están dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$.
10. Encuentre el área de la superficie de las porciones del cono $z^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ que están dentro del cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Vea la FIGURA 14.6.4.

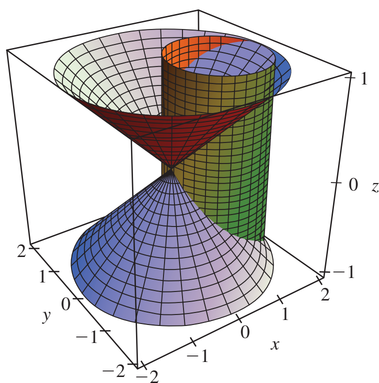


FIGURA 14.6.4 Cono de intersección y cilindro del problema 10

11. Encuentre el área de la superficie de las porciones del cilindro $y^2 + z^2 = a^2$ que están dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. [*Sugerencia*: Vea la figura 14.3.11.]

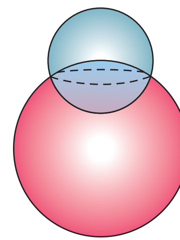
12. Emplee el resultado dado en el ejemplo 1 para demostrar que el área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$. [*Sugerencia*: Considere el límite cuando $b \to a$.]

13. Determine el área de la superficie de aquella porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está acotada entre $y = c_1$ y $y = c_2$, $0 < c_1 < c_2 < a$. [*Sugerencia*: Emplee coordenadas polares en el plano xz.]

14. Demuestre que el área que se encontró en el problema 13 es la misma que el área de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ entre $y = c_1$ y $y = c_2$.

≡ Piense en ello

15. Como se ilustra en la FIGURA 14.6.5, una esfera de radio 1 tiene su centro sobre la superficie de una esfera de radio $a > 1$. Determine el área de la superficie de esa porción de la esfera mayor que es cortada por la esfera más pequeña.


FIGURA 14.6.5 Esferas de intersección del problema 15

16. Sobre la superficie de un globo o, más precisamente, sobre la superficie de la Tierra, las fronteras de los estados de Colorado y Wyoming son ambas "rectángulos esféricos". (En este problema suponemos que la Tierra es una esfera perfecta.) Colorado está acotado por las líneas de longitud 102 °O y 109 °O y las líneas de latitud 37 °N y 41 °N. Wyoming está acotado por las longitudes 104 °O y 111 °O y las latitudes 41 °N y 45 °N. Vea la FIGURA 14.6.6.

a) Sin calcular explícitamente sus áreas, determine cuál de los estados es más grande y explique por qué.

b) ¿En qué porcentaje Wyoming es más grande (o más pequeño) que Colorado? [*Sugerencia*: Suponga que el radio de la Tierra es R. Proyecte un rectángulo esférico en el hemisferio norte que sea determinado por las latitudes θ_1 y θ_2 y las longitudes ϕ_1 y ϕ_2 sobre el plano xy.]

c) Un libro de referencia indica que las áreas de los estados mencionados son 104 247 mi^2 y 97 914 mi^2. ¿Cómo se compara esta respuesta con su respuesta en el inciso *b*)?

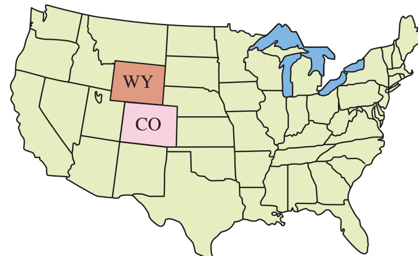


FIGURA 14.6.6 Dos rectángulos esféricos del problema 16

14.7 La integral triple

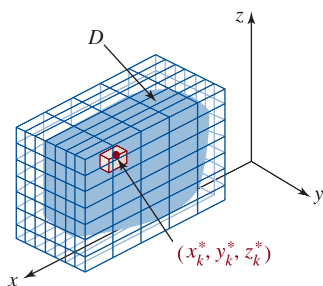


FIGURA 14.7.1 Punto muestra en D_k

Introducción Los pasos que conducen a la definición de la *integral definida tridimensional*, o **integral triple**, $\iiint_D f(x, y, z)\, dV$ son bastante similares a los de la integral doble.

Sea $w = f(x, y, z)$ definida sobre una región cerrada y acotada D del espacio tridimensional.

- Por medio de una retícula tridimensional de planos verticales y horizontales paralelos a los planos de coordenadas, forme una partición P de D en n subregiones (cajas) D_k de volúmenes ΔV_k que se encuentre por completo dentro de D. Vea la FIGURA 14.7.1.
- Considere que $\|P\|$ es la norma de la partición o longitud de la diagonal más larga de la caja D_k.
- Elija un punto muestra (x_k^*, y_k^*, z_k^*) en cada subregión D_k.
- Forme la suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$.

Una suma de la forma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$, donde (x_k^*, y_k^*, z_k^*) es un punto arbitrario dentro de cada D_k y ΔV_k denota el volumen de cada D_k, recibe el nombre de **suma de Riemann**. El tipo de partición utilizado, donde todos los D_k yacen por completo dentro de D, se denomina **partición interior** de D.

Definición 14.7.1 La integral triple

Sea f una función de tres variables definida sobre una región cerrada D del espacio tridimensional. Entonces la **integral triple de f sobre D**, denotada por medio de $\iiint_D f(x, y, z)\, dV$, se define como

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right) \Delta V_k. \qquad (1)$$

Como en nuestras discusiones anteriores sobre la integral, cuando f es continua sobre D, entonces el límite en (1) existe; esto es, f es **integrable** sobre D. Las propiedades de integración básicas de una integral triple son las mismas que aquellas de la integral doble dadas en el teorema 14.1.1.

Evaluación mediante integrales iteradas Si la región D está acotada por arriba por la gráfica de $z = g_2(x, y)$ y acotada por abajo por la gráfica de $z = g_1(x, y)$, entonces es posible demostrar que la integral triple (1) puede expresarse como una integral doble de la integral parcial $\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz$; esto es,

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA, \qquad (2)$$

donde R es la proyección ortogonal de D sobre el plano xy. En particular, si R es una región de tipo I definida por:

$$R: a \leq x \leq b,\ h_1(x) \leq y \leq h_2(x),$$

entonces, como se ilustra en la FIGURA 14.7.2, la integral triple de f sobre D puede escribirse como una integral iterada:

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx. \qquad (3)$$

Para evaluar la integral iterada en (3) empezamos evaluando la integral definida parcial

$$\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz$$

en la cual x y y se mantienen fijas.

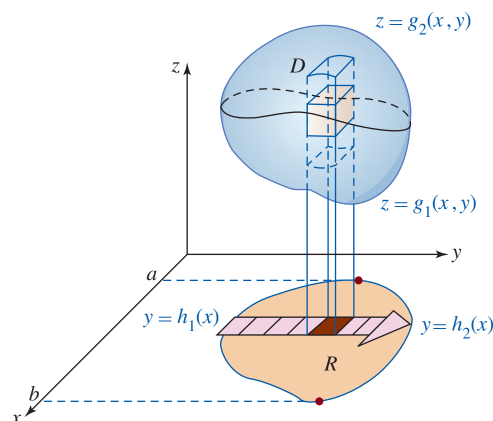


FIGURA 14.7.2 Región tipo I en el plano xy

Por otro lado, si R es una región de tipo II:

$$R: c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y),$$

entonces (2) se convierte en

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy. \qquad (4)$$

En una integral doble hay sólo dos posibles órdenes de integración: $dy\,dx$ y $dx\,dy$. Las integrales triples en (3) y (4) ilustran dos de *seis* posibles órdenes de integración:

$$\begin{array}{ccc} dz\,dy\,dx & dz\,dx\,dy & dy\,dx\,dz \\ dx\,dy\,dz & dx\,dz\,dy & dy\,dz\,dx. \end{array}$$

Las dos últimas diferenciales nos indican el plano de coordenadas en el cual se localiza la región R. Por ejemplo, la integral iterada correspondiente al orden de integración $dx\,dz\,dy$ tendría la forma

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{g_1(y,\,z)}^{g_2(y,\,z)} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy.$$

La interpretación geométrica de esta integral y la región R de integración en el plano yz se muestran en la FIGURA 14.7.3.

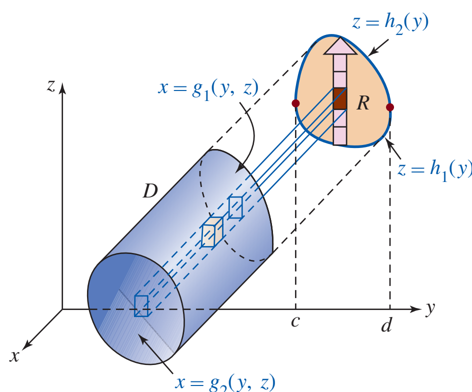


FIGURA 14.7.3 Región tipo I en el plano yz

Aplicaciones A continuación se listan algunas de las aplicaciones estándar de la integral triple.

Volumen: Si $f(x, y, z) = 1$, entonces el **volumen** del sólido D es

$$V = \iiint_D dV.$$

Masa: Si $\rho(x, y, z)$ es la densidad (masa por volumen unitario), entonces la **masa** del sólido D está dada por

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dV.$$

Primeros momentos: Los **primeros momentos** del sólido alrededor de los planos de coordenadas indicados por los subíndices están dados por

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x, y, z)\, dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y\rho(x, y, z)\, dV, \quad M_{yz} = \iiint_D x\rho(x, y, z)\, dV.$$

Centro de masa: Las coordenadas del **centro de masa** de D están dadas por

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Centroide: Si $\rho(x, y, z) =$ constante, el centro de masa de D recibe el nombre de **centroide** del sólido.

Segundos momentos: Los **segundos momentos**, o **momentos de inercia**, de D alrededor de los ejes de coordenadas indicados por los subíndices están dados por

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV.$$

Radio de giro: Como en la sección 14.4, si I es un momento de inercia del sólido en torno a un eje dado, entonces el **radio de giro** es

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}.$$

EJEMPLO 1 Volumen

Encuentre el volumen del sólido en el primer octante acotado por las gráficas de $z = 1 - y^2$, $y = 2x$ y $x = 3$.

Solución Como se indica en la FIGURA 14.7.4*a*), la primera integración con respecto a z será de 0 a $1 - y^2$. Además, de la figura 14.7.4*b*) vemos que la proyección del sólido D sobre el plano xy es una región de tipo II. Por consiguiente, a continuación integramos, con respecto a x, de $y/2$ a 3. La última integración es con respecto a y de 0 a 1. De tal manera,

$$\begin{aligned} V = \iiint_D dV &= \int_0^1 \int_{y/2}^3 \int_0^{1-y^2} dz\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \int_{y/2}^3 (1 - y^2)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 (x - xy^2)\Big]_{y/2}^3 dy \\ &= \int_0^1 \left(3 - 3y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3\right) dy \\ &= \left(3y - y^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{8}y^4\right)\Big]_0^1 = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

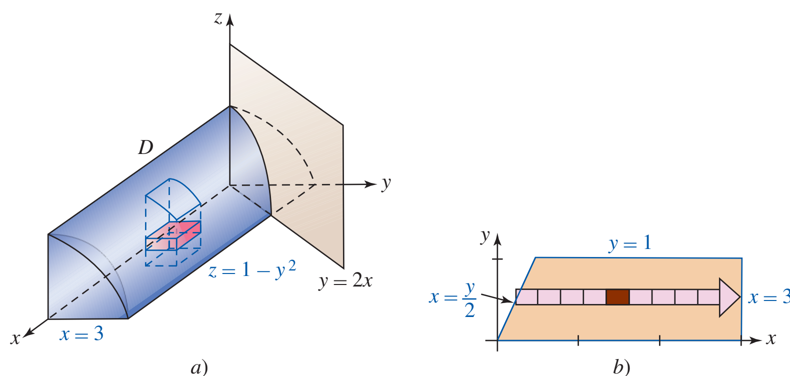


FIGURA 14.7.4 Sólido del ejemplo 1 ■

El lector debe observar que el volumen en el ejemplo 1 podría haberse obtenido con la misma facilidad por medio de una integral doble.

EJEMPLO 2 Volumen

Calcule la integral triple que produce el volumen del sólido que tiene la forma determinada por el cono de un manto $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ y el paraboloide $x = 6 - y^2 - z^2$.

Solución Al sustituir $y^2 + z^2 = x^2$ en $y^2 + z^2 = 6 - x$, encontramos que $x^2 = 6 - x$ o $(x + 3)(x - 2) = 0$. Así, las dos superficies se intersecan en el plano $x = 2$. La proyección sobre el plano yz de la curva de intersección es $y^2 + z^2 = 4$. Al utilizar simetría y referirnos a la FIGURA 14.7.5*a*) y *b*), vemos que

$$V = \iiint_D dV = 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{6-y^2-z^2} dx\,dz\,dy.$$

Si bien la evaluación de esta integral es directa, sin duda resulta "descuidada". Regresaremos a esta integral en la siguiente sección después de haber examinado integrales triples en otros sistemas de coordenadas.

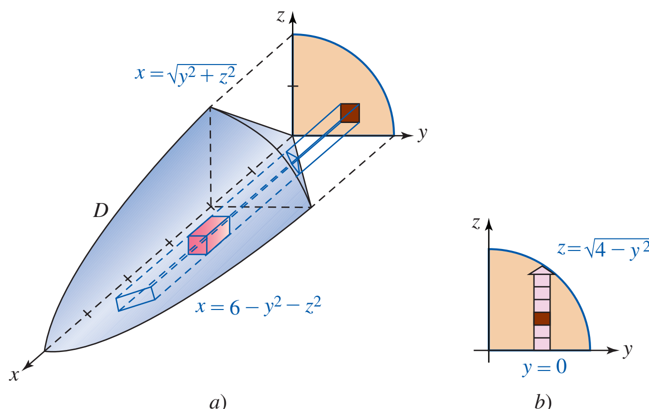


FIGURA 14.7.5 Sólido del ejemplo 2 ■

EJEMPLO 3 Centro de masa

Un sólido tiene la forma determinada por las gráficas del cilindro $|x| + |y| = 1$ y los planos $z = 2$ y $z = 4$. Encuentre su centro de masa si la densidad está dada por $\rho(x, y, z) = kz$, con k una constante.

Solución El sólido y su proyección ortogonal sobre una región R del tipo I en el plano xy se ilustran en la FIGURA 14.7.6*a*). La ecuación $|x| + |y| = 1$ es equivalente a cuatro rectas:

$$x + y = 1, x > 0, y > 0; \qquad x - y = 1, x > 0, y < 0;$$
$$-x + y = 1, x < 0, y > 0; \qquad -x - y = 1, x < 0, y < 0.$$

Puesto que la función de densidad $\rho(x, y, z) = kz$ es simétrica sobre R, concluimos que el centro de masa yace sobre el eje z; esto es, necesitamos calcular sólo m y M_{xy}. De la simetría y la figura 14.7.6*b*) se concluye que

$$\begin{aligned} m &= 4\int_0^1\int_0^{1-x}\int_2^4 kz\,dz\,dy\,dx = 4k\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{1}{2}z^2\Big]_2^4 dy\,dx \\ &= 24k\int_0^1\int_0^{1-x} dy\,dx \\ &= 24k\int_0^1 (1 - x)\,dx \\ &= 24k\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big]_0^1 = 12k, \\ M_{xy} &= 4\int_0^1\int_0^{1-x}\int_2^4 kz^2\,dz\,dy\,dx = 4k\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{1}{3}z^3\Big]_2^4 dy\,dx \\ &= \frac{224}{3}k\int_0^1\int_0^{1-x} dy\,dx = \frac{112}{3}k. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{112}{3}k}{12k} = \frac{28}{9}.$$

Las coordenadas del centro de masa son entonces $\left(0, 0, \frac{28}{9}\right)$.

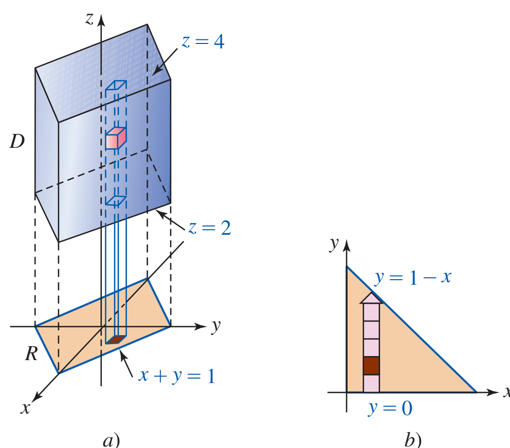


FIGURA 14.7.6 Sólido del ejemplo 3

EJEMPLO 4 Repaso del ejemplo 3

Determine el momento de inercia del sólido del ejemplo 3 alrededor del eje z. Encuentre el radio de giro.

Solución Sabemos que $I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)kz\, dV$. Con simetría podemos escribir esta integral triple como

$$\begin{aligned} I_z &= 4k\int_0^1\int_0^{1-x}\int_2^4 (x^2 + y^2)z\, dz\, dy\, dx \\ &= 4k\int_0^1\int_0^{1-x} (x^2 + y^2)\frac{1}{2}z^2\Big]_2^4 dy\, dx \\ &= 24k\int_0^1\int_0^{1-x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx \\ &= 24k\int_0^1 \left(x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\Big]_0^{1-x} dx \\ &= 24k\int_0^1 \left[x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(1 - x)^3\right] dx \\ &= 24k\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}(1 - x)^4\right]_0^1 = 4k. \end{aligned}$$

Del ejemplo 3 es claro que $m = 12k$ y por ello se deduce que el radio de giro es

$$R_g = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = \sqrt{\frac{4k}{12k}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

El último ejemplo ilustra cómo cambiar el orden de integración en una integral triple.

EJEMPLO 5 Cambio del orden de integración

Cambie el orden de integración en

$$\int_0^6\int_0^{4-2x/3}\int_0^{3-x/2-3y/4} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

a $dy\, dx\, dz$.

Solución Como se observa en la FIGURA 14.7.7*a*), la región D es el sólido en el primer octante acotado por los tres planos de coordenadas y el plano $2x + 3y + 4z = 12$. Con referencia a la figura 14.7.7*b*) y la tabla incluida, concluimos que

$$\int_0^6\int_0^{4-2x/3}\int_0^{3-x/2-3y/4} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \int_0^3\int_0^{6-2z}\int_0^{4-2x/3-4z/3} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz.$$

Orden de integración	Primera integración	Segunda integración	Tercera integración
$dz\,dy\,dx$	0 a $3 - x/2 - 3y/4$	0 a $4 - 2x/3$	0 a 6
$dy\,dx\,dz$	0 a $4 - 2x/3 - 4z/3$	0 a $6 - 2z$	0 a 3

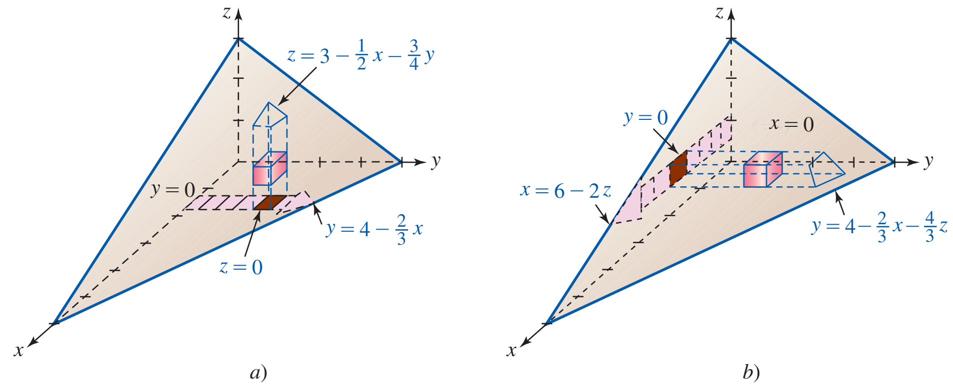


FIGURA 14.7.7 Cambio de integración de $dz\,dy\,dx$ a $dy\,dx\,dz$ en el ejemplo 5 ■

Ejercicios 14.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-45.

Fundamentos

En los problemas 1-8, evalúe la integral iterada que se indica.

1. $\int_2^4 \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 (x + y + z)\,dx\,dy\,dz$

2. $\int_1^3 \int_1^x \int_2^{xy} 24xy\,dz\,dy\,dx$

3. $\int_0^6 \int_0^{6-x} \int_0^{6-x-z} dy\,dz\,dx$

4. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\sqrt{y}} 4x^2z^3\,dz\,dy\,dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{y^2} \int_0^y \cos\left(\frac{x}{y}\right) dz\,dx\,dy$

6. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{y}}^2 \int_0^{e^{x^2}} x\,dz\,dx\,dy$

7. $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x^2-y^2} xye^z\,dz\,dx\,dy$

8. $\int_0^4 \int_0^{1/2} \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}\,dy\,dx\,dz$

9. Evalúe $\iiint_D z\,dV$, donde D es la región en el primer octante acotada por las gráficas de $y = x$, $y = x - 2$, $y = 1$, $y = 3$, $z = 0$ y $z = 5$.

10. Evalúe $\iiint_D (x^2 + y^2)\,dV$, donde D es la región acotada por las gráficas de $y = x^2$, $z = 4 - y$ y $z = 0$.

En los problemas 11 y 12, cambie el orden de integración indicado en cada uno de los otros cinco órdenes.

11. $\int_0^2 \int_0^{4-2y} \int_{x+2y}^4 f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy$

12. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{36-9x^2}/2} \int_1^3 f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$

En los problemas 13 y 14, considere el sólido dado en la figura. Plantee, pero no evalúe, las integrales que producen el volumen V del sólido utilizando los órdenes de integración indicados.

13.

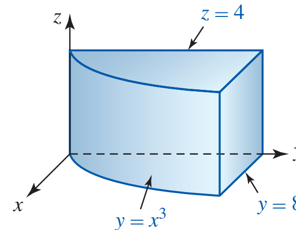


FIGURA 14.7.8 Sólido del problema 13

a) $dz\,dy\,dx$
b) $dx\,dz\,dy$
c) $dy\,dx\,dz$

14.

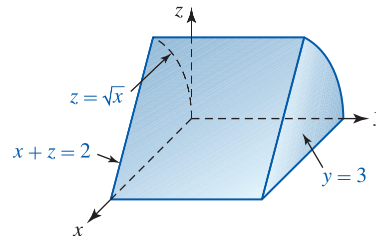


FIGURA 14.7.9 Sólido del problema 14

a) $dx\,dz\,dy$
b) $dy\,dx\,dz$
c) $dz\,dx\,dy$ [*Sugerencia*: Esto requerirá dos integrales.]

En los problemas 15-20, dibuje la región D cuyo volumen V está dado por la integral iterada.

15. $\int_0^4 \int_0^3 \int_0^{2-2z/3} dx\,dz\,dy$

16. $4\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_4^{\sqrt{25-x^2-y^2}} dz\,dx\,dy$

17. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^5 dz\,dy\,dx$

18. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 dz\,dy\,dx$

19. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dz\,dy$

20. $\int_1^3 \int_0^{1/x} \int_0^3 dy\,dz\,dx$

En los problemas 21-24, encuentre el volumen V del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

21. $x = y^2$, $4 - x = y^2$, $z = 0$, $z = 3$

22. $x^2 + y^2 = 4$, $z = x + y$, los planos de coordenadas, el primer octante.

23. $y = x^2 + z^2, y = 8 - x^2 - z^2$

24. $x = 2, y = x, y = 0, z = x^2 + y^2, z = 0$

25. Encuentre el centro de masa del sólido dado en la figura 14.7.8 si la densidad ρ en el punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano xy.

26. Encuentre el centroide del sólido de la figura 14.7.9 si la densidad ρ es constante.

27. Determine el centro de masa del sólido acotado por las gráficas de $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$ y $y = 3$ si la densidad ρ en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano xz.

28. Encuentre el centro de masa del sólido acotado por las gráficas de $y = x^2$, $y = x$, $z = y + 2$ y $z = 0$ si la densidad ρ en el punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano xy.

En los problemas 29 y 30, plantee, pero no evalúe, las integrales iteradas que producen la masa m del sólido que tiene la forma y densidad indicadas.

29. $x^2 + y^2 = 1, z + y = 8, z - 2y = 2;$
$\rho(x, y, z) = x + y + 4$

30. $x^2 + y^2 - z^2 = 1, z = -1, z = 2; \rho(x, y, z) = z^2$ [*Sugerencia*: No use $dz\, dy\, dx$.]

31. Calcule el momento de inercia del sólido de la figura 14.7.8 alrededor del eje y si la densidad ρ es como se indica en el problema 25. Determine el radio de giro.

32. Calcule el momento de inercia del sólido de la figura 14.7.9 alrededor del eje x si la densidad ρ es constante. Determine el radio de giro.

33. Calcule el momento de inercia alrededor del eje z del sólido en el primer octante que está acotado por los planos de coordenadas y la gráfica $x + y + z = 1$ si la densidad ρ es constante.

34. Determine el momento de inercia alrededor del eje y del sólido acotado por las gráficas $z = y, z = 4 - y, z = 1, z = 0, x = 2$ y $x = 0$ si la densidad ρ en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano yz.

En los problemas 35 y 36, plantee, pero no evalúe, la integral iterada que produce el momento de inercia indicado del sólido que tiene la forma y densidad que se señalan.

35. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 5$; densidad ρ en un punto P directamente proporcional a la distancia desde el origen; I_z

36. $x^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = 1$; densidad ρ en el punto P directamente proporcional a la distancia desde el plano yz; I_y

14.8 Integrales triples en otros sistemas de coordenadas

Introducción A partir de la geometría de una región en el espacio tridimensional, la evaluación de una integral triple sobre la región puede a menudo facilitarse al utilizar un nuevo sistema de coordenadas.

Coordenadas cilíndricas El sistema de coordenadas cilíndricas combina la descripción polar de un punto en el plano con la descripción rectangular de la componente z de un punto en el espacio. Como se advierte en la FIGURA 14.8.1*a*), las coordenadas cilíndricas de un punto P se denotan mediante la triada ordenada (r, θ, z). La palabra *cilíndricas* surge del hecho de que un punto P en el espacio está determinado por la intersección de los planos $z =$ constante, $\theta =$ constante, con un cilindro $r =$ constante. Vea la figura 14.8.1*b*).

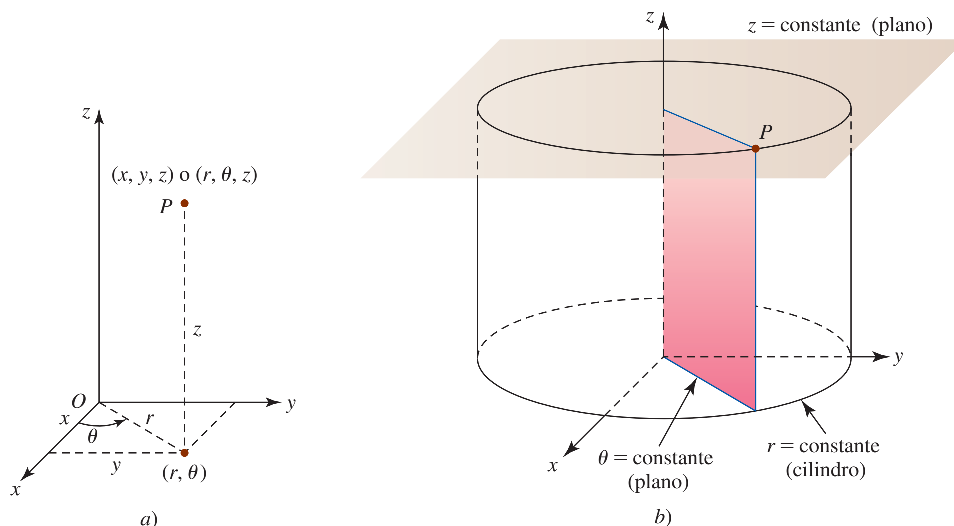


FIGURA 14.8.1 Coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio tridimensional

Coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares De la figura 14.8.1*a*) también vemos que las coordenadas rectangulares (x, y, z) de un punto se obtienen de las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) mediante las ecuaciones.

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = z. \tag{1}$$

EJEMPLO 1 Centro de masa

Convierta $(8, \pi/3, 7)$ en coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares.

Solución De (1),

$$x = 8\cos\frac{\pi}{3} = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$
$$y = 8\,\text{sen}\frac{\pi}{3} = 8\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$$
$$z = 7.$$

Entonces, $(8, \pi/3, 7)$ es equivalente a $(4, 4\sqrt{3}, 7)$ en coordenadas rectangulares. ■

Coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas Para convertir las coordenadas rectangulares (x, y, z) de un punto en coordenadas cilíndricas (r, θ, z), usamos

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad z = z. \tag{2}$$

EJEMPLO 2 Centro de masa

Convierta $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right)$ en coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas.

Solución De (2) vemos que

$$r^2 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 4$$
$$\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$$
$$z = 1.$$

Si tomamos $r = 2$, entonces, consistente con el hecho de que $x < 0$ y $y > 0$, tomamos $\theta = 3\pi/4$. Si utilizamos $\theta = \tan^{-1}(-1) = -\pi/4$, entonces es posible usar $r = -2$. Advierta que las combinaciones $r = 2$, $\theta = -\pi/4$ y $r = -2$, $\theta = 3\pi/4$ son inconsistentes. En consecuencia, $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right)$ es equivalente a $(2, 3\pi/4, 1)$ en coordenadas cilíndricas. Vea la FIGURA 14.8.2. ■

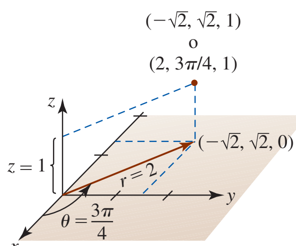


FIGURA 14.8.2. Conversión de coordenadas rectangulares en coordenadas cilíndricas en el ejemplo 2

Integrales triples en coordenadas cilíndricas Recuerde de la sección 14.5 que el área de un "rectángulo polar" es $\Delta A = r^*\Delta r\Delta\theta$, donde r^* es el radio promedio. De la FIGURA 14.8.3*a*) vemos que el volumen de una "cuña cilíndrica" es simplemente

$$\Delta V = (\text{área de la base}) \cdot (\text{altura}) = r^*\Delta r\Delta\theta\Delta z.$$

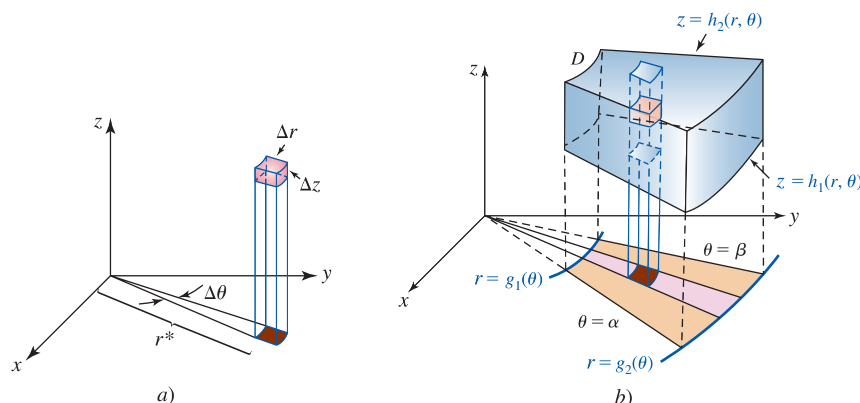


FIGURA 14.8.3 Cuña cilíndrica en *a*); región en el espacio tridimensional en *b*)

Entonces, si $f(r, \theta, z)$ es una función continua sobre la región D, como se ilustra en la figura 14.8.3*b*), la integral triple de F sobre D está dada por

$$\iiint_D f(r, \theta, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{h_1(r,\theta)}^{h_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\, dz \right] dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r,\theta)}^{h_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta.$$

EJEMPLO 3 Centro de masa

Un sólido en el primer octante tiene la forma determinada por la gráfica del cono de un solo manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los planos $z = 1$, $x = 0$ y $y = 0$. Determine el centro de masa si la densidad está dada por $\rho(r, \theta, z) = r$.

Solución En vista de (2), la ecuación del cono es $z = r$. Por consiguiente, vemos de la FIGURA 14.8.4 que

$$m = \iiint_D r\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 r(r\, dz\, dr\, d\theta)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 z \Big]_r^1 dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2 - r^3)\, dr\, d\theta = \frac{1}{24}\pi,$$

$$M_{xy} = \iiint_D zr\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 zr^2\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{1}{2} z^2 r^2 \Big]_r^1 dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2 - r^4)\, dr\, d\theta = \frac{1}{30}\pi.$$

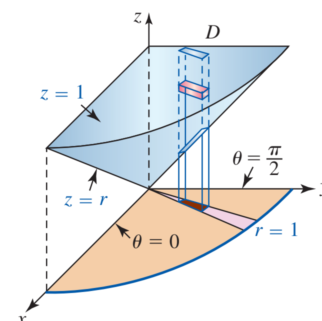


FIGURA 14.8.4 Sólido del ejemplo 3

Empleando $y = r \operatorname{sen} \theta$ y $x = r \cos \theta$, tenemos también que

$$M_{xz} = \iiint_D r^2 \operatorname{sen} \theta\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 r^3 \operatorname{sen} \theta\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 z \operatorname{sen} \theta \Big]_r^1 dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^3 - r^4) \operatorname{sen} \theta\, dr\, d\theta = \frac{1}{20},$$

$$M_{yz} = \iiint_D r^2 \cos \theta\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 r^3 \cos \theta\, dz\, dr\, d\theta = \frac{1}{20}.$$

Por consiguiente,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{24}\pi} = \frac{6}{5\pi} \approx 0.38,$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{24}\pi} = \frac{6}{5\pi} \approx 0.38,$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{1}{30}\pi}{\frac{1}{24}\pi} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

El centro de masa tiene las coordenadas aproximadas (0.38, 0.38, 0.8). ■

EJEMPLO 4 Centro de masa

Evalúe la integral de volumen

$$V = 4\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{6-y^2-z^2} dx\,dz\,dy$$

del ejemplo 2 en la sección 14.7.

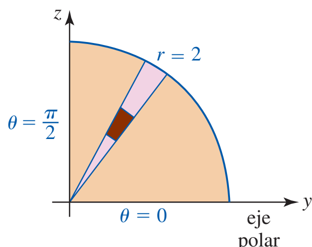


FIGURA 14.8.5 Versión polar de la figura 14.7.5*b*)

Solución Si introducimos coordenadas polares en el plano yz mediante $y = r\cos\theta$, $z = r\,\text{sen}\,\theta$, entonces las coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio tridimensional son (r, θ, x). La descripción polar de la figura 14.7.5*b*) está dada en la FIGURA 14.8.5. En este caso, puesto que $y^2 + z^2 = r^2$, tenemos

$$x = \sqrt{y^2 + z^2} = r \qquad \text{y} \qquad x = 6 - y^2 - z^2 = 6 - r^2.$$

Por consiguiente, la integral se transforma en

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_r^{6-r^2} r\,dx\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 rx\Big]_r^{6-r^2} dr\,d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (6r - r^3 - r^2)\,dr\,d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\left(3r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{3}r^3\right)\Big]_0^2 d\theta \\ &= \frac{64}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{32}{3}\pi. \end{aligned}$$

■

Coordenadas esféricas Como se ve en la FIGURA 14.8.6*a*), las **coordenadas esféricas** de un punto P están dadas por la triada ordenada (ρ, ϕ, θ), donde ρ es la distancia del origen a P, ϕ es el ángulo entre el eje z positivo y el vector $\overrightarrow{OP}$, y θ es el ángulo medido desde el eje x positivo hasta la proyección del vector $\overrightarrow{OQ}$ de $\overrightarrow{OP}$. El ángulo θ es el mismo ángulo que en coordenadas polares y cilíndricas. La figura 14.8.6*b*) muestra que un punto P en el espacio está determinado por la intersección de un cono ϕ = constante, un plano θ = constante y una esfera ρ = constante; de ahí surge el nombre de coordenadas "esféricas".

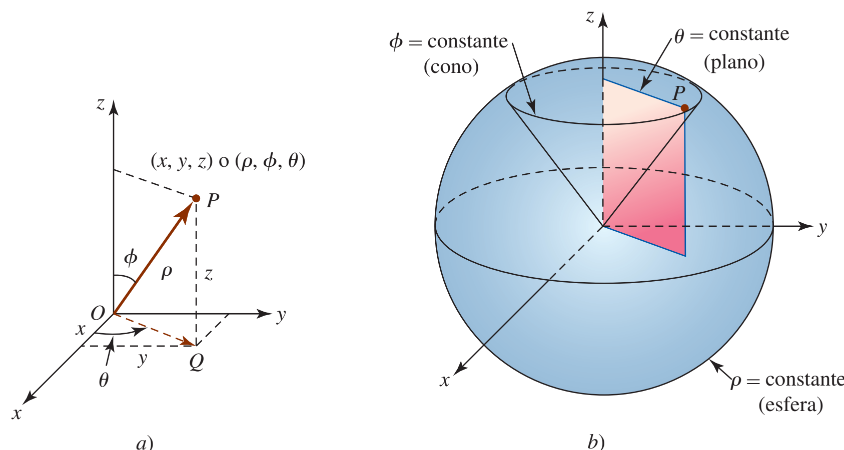


FIGURA 14.8.6 Coordenadas esféricas de un punto en el espacio tridimensional

Coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares y cilíndricas Para transformar coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) a coordenadas rectangulares (x, y, z), observamos de la figura 14.8.6*a*) que

$$x = |\overrightarrow{OQ}|\cos\theta, \quad y = |\overrightarrow{OQ}|\,\text{sen}\,\theta, \quad z = |\overrightarrow{OP}|\cos\phi.$$

Puesto que $|\overrightarrow{OQ}| = \rho\,\text{sen}\,\phi$ y $|\overrightarrow{OP}| = \rho$, las ecuaciones anteriores se convierten en

$$x = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \quad y = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \quad z = \rho\cos\phi. \tag{3}$$

Suele tomarse $\rho \geq 0$ y $0 \leq \phi \leq \pi$. Además, puesto que $|\overrightarrow{OQ}| = \rho \text{ sen } \phi = r$, las fórmulas

$$r = \rho \text{ sen } \phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho \cos \phi \tag{4}$$

nos permiten transformar las coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) en coordenadas cilíndricas (r, θ, z). ■

EJEMPLO 5 Centro de masa

Convierta las coordenadas esféricas $(6, \pi/4, \pi/3)$ en

a) coordenadas rectangulares y ***b***) coordenadas cilíndricas.

Solución

a) Identificando $\rho = 6$, $\phi = \pi/4$ y $\theta = \pi/3$, encontramos de (3) que

$$x = 6 \text{ sen} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = 6\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$y = 6 \text{ sen} \frac{\pi}{4} \text{ sen} \frac{\pi}{3} = 6\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{6}$$

$$z = 6 \cos \frac{\pi}{4} = 6\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}.$$

Las coordenadas rectangulares del punto son $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{6}, 3\sqrt{2}\right)$.

b) De (4) obtenemos

$$r = 6 \text{ sen} \frac{\pi}{4} = 6\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 6 \cos \frac{\pi}{4} = 6\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}.$$

De tal modo, las coordenadas cilíndricas del punto son $\left(3\sqrt{2}, \pi/3, 3\sqrt{2}\right)$. ■

Coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas Para convertir las coordenadas rectangulares (x, y, z) en coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ), usamos

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{5}$$

Integrales triples en coordenadas esféricas Como se observa en la FIGURA 14.8.7, el volumen de una "cuña esférica" está dado por la aproximación

$$\Delta V \approx \rho^2 \text{ sen } \phi \, \Delta\rho \, \Delta\phi \, \Delta\theta.$$

De tal modo, en una integral triple de una función continua en coordenadas esféricas $f(\rho, \phi, \theta)$, la diferencial de volumen dV es

$$dV = \rho^2 \text{ sen } \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Por consiguiente, una integral triple común en coordenadas esféricas tiene la forma

$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta) \, dV = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(\phi, \theta)}^{h_2(\phi, \theta)} f(\rho, \phi, \theta) \, \rho^2 \text{ sen } \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

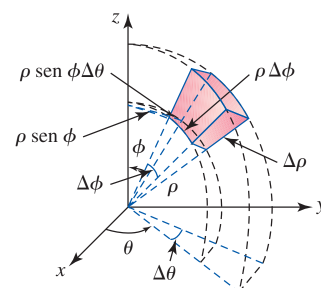


FIGURA 14.8.7 Cuña esférica

EJEMPLO 6 Centro de masa

Emplee coordenadas esféricas para determinar el volumen del sólido del ejemplo 3.

Solución Empleando (3),

$$z = 1 \text{ se vuelve } \rho \cos \phi = 1 \text{ o } \rho = \sec \phi,$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ se vuelve } \phi = \pi/4.$$

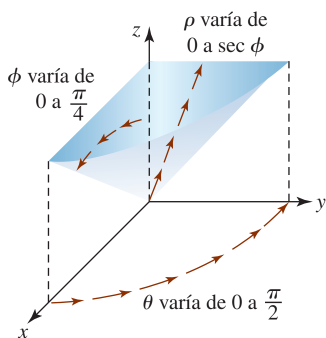


FIGURA 14.8.8 Sólido del ejemplo 3

Como se indica en la FIGURA 14.8.8, $V = \iiint_D dV$ escrita como una integral iterada es

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{3}\rho^3\Big]_0^{\sec\phi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4} \sec^3\phi \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4} \tan\phi \sec^2\phi\, d\phi\, d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\tan^2\phi\Big]_0^{\pi/4} d\theta \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{12}\pi.
\end{aligned}
$$

■

EJEMPLO 7 Centro de masa

Determine el momento de inercia en torno al eje z del sólido homogéneo acotado entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $a < b$.

Utilizamos un símbolo diferente para la densidad para evitar la confusión con el símbolo ρ de coordenadas esféricas.

Solución Si $\delta(\rho, \phi, \theta) = k$ es la densidad, entonces

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)k\, dV.$$

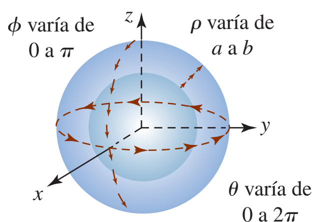


FIGURA 14.8.9 Límites de integración del ejemplo 7

De (3) encontramos $x^2 + y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi$, y de la primera ecuación en (5) vemos que las ecuaciones de las esferas son simplemente $\rho = a$ y $\rho = b$. Vea la FIGURA 14.8.9. Consecuentemente, en coordenadas esféricas la integral anterior se vuelve

$$
\begin{aligned}
I_z &= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{b} \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi(\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta) \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{b} \rho^4 \operatorname{sen}^3\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{5}\rho^5 \operatorname{sen}^3\phi\Big]_a^{b} d\phi\, d\theta \\
&= \frac{1}{5}k(b^5 - a^5)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (1 - \cos^2\phi) \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta \\
&= \frac{1}{5}k(b^5 - a^5)\int_0^{2\pi}\left(-\cos\phi + \frac{1}{3}\cos^3\phi\right)\Big]_0^{\pi} d\theta \\
&= \frac{4}{15}k(b^5 - a^5)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{8}{15}\pi k(b^5 - a^5).
\end{aligned}
$$

■

$\iiint_D$ NOTAS DESDE EL AULA

Las coordenadas esféricas se usan en la navegación. Si consideramos a la Tierra como una esfera de radio fijo centrada en el origen, entonces un punto P puede ubicarse especificando dos ángulos θ y ϕ. Como se muestra en la FIGURA 14.8.10, cuando ϕ se mantiene constante, la curva resultante se denomina **paralela**. Los valores fijos de θ producen curvas llamadas **círculos grandes**. La mitad de uno de estos círculos grandes que une los polos norte y sur recibe el nombre de **meridiano**. La intersección de una paralela y un meridiano produce la posición de un punto P. Si $0° \leq \phi \leq 180°$ y $-180° \leq \theta \leq 180°$, se dice que los ángulos $90° - \phi$ y θ son, respectivamente, la **latitud** y **longitud** de P. El **meridiano primo** corresponde a una longitud de 0°. La latitud del ecuador es 0°; las latitudes de los polos norte y sur son, a su vez, +90° (o 90° norte) y −90° (o 90° sur).

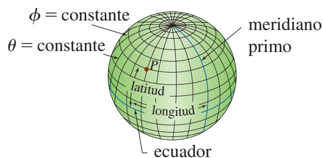


FIGURA 14.8.10 Latitudes y longitudes

Ejercicios 14.8 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-45.

Fundamentos

En los problemas 1-6, convierta el punto dado de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares.

1. $(10, 3\pi/4, 5)$
2. $(2, 5\pi/6, -3)$
3. $(\sqrt{3}, \pi/3, -4)$
4. $(4, 7\pi/4, 0)$
5. $(5, \pi/2, 1)$
6. $(10, 5\pi/3, 2)$

En los problemas 7-12, convierta el punto dado de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas.

7. $(1, -1, -9)$
8. $(2\sqrt{3}, 2, 17)$
9. $(-\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2)$
10. $(1, 2, 7)$
11. $(0, -4, 0)$
12. $(\sqrt{7}, -\sqrt{7}, 3)$

En los problemas 13-16, convierta la ecuación dada a coordenadas cilíndricas.

13. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
14. $x + y - z = 1$
15. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
16. $x^2 + z^2 = 16$

En los problemas 17-20, convierta la ecuación dada a coordenadas rectangulares.

17. $z = r^2$
18. $z = 2r \operatorname{sen} \theta$
19. $r = 5 \sec \theta$
20. $\theta = \pi/6$

En los problemas 21-24, use una integral triple y coordenadas cilíndricas para determinar el volumen del sólido que está acotado por las gráficas de las ecuaciones que se indican.

21. $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 16, z = 0$
22. $z = 10 - x^2 - y^2, z = 1$
23. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 25, z = 0$
24. $y = x^2 + z^2, 2y = x^2 + z^2 + 4$

En los problemas 25-28, emplee una integral triple y coordenadas cilíndricas para determinar la cantidad indicada.

25. El centroide del sólido homogéneo acotado por el hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$.

26. El centro de masa del sólido acotado por las gráficas de $y^2 + z^2 = 16$, $x = 0$ y $x = 5$, donde la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano yz.

27. El momento de inercia en torno al eje z del sólido acotado por arriba por el hemisferio $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ y por abajo por el plano $z = 2$, donde la densidad en un punto P es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el eje z.

28. El momento de inercia alrededor del eje x del sólido acotado por el cono de un solo manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 1$, donde la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el eje z.

En los problemas 29-34, convierta el punto dado de coordenadas esféricas a

***a*)** coordenadas rectangulares y
***b*)** coordenadas cilíndricas.

29. $(\frac{2}{3}, \pi/2, \pi/6)$
30. $(5, 5\pi/4, 2\pi/3)$
31. $(8, \pi/4, 3\pi/4)$
32. $(\frac{1}{3}, 5\pi/3, \pi/6)$
33. $(4, 3\pi/4, 0)$
34. $(1, 11\pi/6, \pi)$

En los problemas 35-40, convierta los puntos dados de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas.

35. $(-5, -5, 0)$
36. $(1, -\sqrt{3}, 1)$
37. $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 1)$
38. $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2})$
39. $(3, -3, 3\sqrt{2})$
40. $(1, 1, -\sqrt{6})$

En los problemas 41-44, convierta la ecuación dada a coordenadas esféricas.

41. $x^2 + y^2 + z^2 = 64$
42. $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$
43. $z^2 = 3x^2 + 3y^2$
44. $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

En los problemas 45-48, convierta la ecuación dada a coordenadas rectangulares.

45. $\rho = 10$
46. $\phi = \pi/3$
47. $\rho = 2 \sec \phi$
48. $\rho \operatorname{sen}^2 \phi = \cos \phi$

En los problemas 49-52, emplee una integral triple y coordenadas esféricas para determinar el volumen del sólido que está acotado por las gráficas de las ecuaciones que se indican:

49. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 = 9$

50. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, y = x, y = \sqrt{3}x, z = 0$, primer octante

51. $z^2 = 3x^2 + 3y^2, x = 0, y = 0, z = 2$, primer octante

52. En el interior por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y en el exterior por $z^2 = x^2 + y^2$

En los problemas 53-56, emplee una integral triple y coordenadas esféricas para encontrar la cantidad indicada.

53. El centroide del sólido homogéneo acotado por el cono de un solo manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

54. El centro de masa del sólido acotado por el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$, donde la densidad en el punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano xy.

55. La masa del sólido acotado por arriba por el hemisferio $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ y por debajo por el plano $z = 4$, donde la densidad en un punto P es inversamente proporcional a la distancia desde el origen [*Sugerencia*: Exprese el límite ϕ superior de integración como un coseno inverso.]

56. El momento de inercia en torno al eje z del sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, donde la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el origen.

14.9 Cambio de variables en integrales múltiples

Introducción En muchos casos resulta conveniente efectuar una sustitución, o cambio de variable, en una integral para evaluarla. La idea en el teorema 5.5.3 puede refrasearse como sigue: si f es continua y $x = g(u)$ tiene una derivada continua y $dx = g'(u)\,du$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))\,g'(u)\,du, \tag{1}$$

Si la función g es uno a uno, entonces tiene una inversa y por ello $c = g^{-1}(a)$ y $d = g^{-1}(b)$.

donde los límites y de integración de c y d están definidos por $a = g(c)$ y $b = g(d)$. Hay tres aspectos que deben subrayarse en (1). Para cambiar la variable en una integral definida reemplazamos x donde aparece en el integrando por $g(u)$, cambiamos el intervalo de integración $[a, b]$ sobre el eje x al intervalo correspondiente $[c, d]$ sobre el eje u, y sustituimos dx por una función múltiplo (a saber, la derivada de g) de du. Si escribimos $J(u) = g'(u)$, entonces (1) tiene la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))\,J(u)\,du. \tag{2}$$

Por ejemplo, empleando $x = 2\operatorname{sen}\theta$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, tenemos

$$\underset{\text{límites de } x}{\int_0^2} \overbrace{\sqrt{4 - x^2}}^{f(x)}\,dx = \underset{\text{límites de } \theta}{\int_0^{\pi/2}} \overbrace{2\cos\theta}^{f(2\,\mathrm{sen}\,\theta)}\,\overbrace{(2\cos\theta)}^{J(\theta)}\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \pi.$$

Integrales dobles Aunque el cambio de variables en una integral múltiple no es directo como el procedimiento en (1), se mantendrá la idea básica que se ilustra en (2). Para cambiar variables en una integral doble necesitamos dos ecuaciones, tales como

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{3}$$

Para que haya analogía con (2), esperamos que un cambio de variables en una integral doble tome la forma

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v))\,J(u, v)\,dA', \tag{4}$$

donde S es la región en el plano uv correspondiente a la región R en el plano xy, y $J(u, v)$ es alguna función que depende de las derivadas parciales de las ecuaciones en (3). El símbolo dA' en el lado derecho de (4) representa ya sea a $du\,dv$ o $dv\,du$.

En la sección 14.5 discutimos brevemente cómo cambiar una integral doble $\iint_R f(x, y)\,dA$ de coordenadas rectangulares a coordenadas polares. Recuerde que en el ejemplo 2 de esa sección las sustituciones

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \tag{5}$$

llevaron a

$$\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5 + x^2 + y^2}\,dy\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{5 + r^2}\,r\,dr\,d\theta. \tag{6}$$

Como advertimos en la FIGURA 14.9.1, la introducción de coordenadas polares cambia la región original de integración R en el plano xy a una más conveniente *región rectangular* de integración S en el plano $r\theta$. Notamos también que al comparar (4) con (6), podemos identificar $J(r, \theta) = r$ y $dA' = dr\,d\theta$.

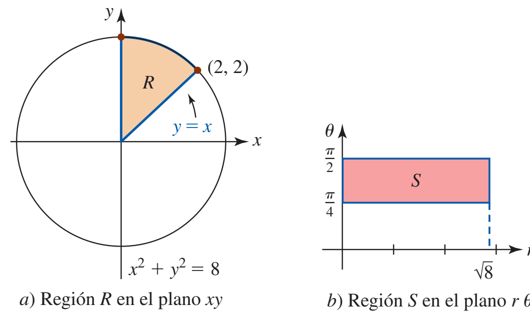


FIGURA 14.9.1 Regiones en dos planos diferentes

Las ecuaciones de cambio de variable en (3) definen una **transformación** o **mapeo** T del plano uv al plano xy:

$$T(u, v) = (x, y).$$

Un punto (x_0, y_0) en el plano xy está determinado a partir de $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$ y se dice que es una **imagen** de (u_0, v_0), esto es, $T(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$.

EJEMPLO 1 Transformación de una región

Encuentre la imagen de la región S que se muestra en la FIGURA 14.9.2*a*), bajo la transformación $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$.

Solución Empezamos determinando las imágenes de los lados de S que hemos indicado mediante S_1, S_2 y S_3.

S_1: En el lado $v = 0$ de manera que $x = u^2$, $y = u^2$. Al eliminar u se produce entonces $y = x$. En este caso, imagine que el movimiento es a lo largo de la frontera de (1, 0) a (2, 0) (esto es, $1 \leq u \leq 2$). Las ecuaciones $x = u^2$ y $y = u^2$ indican entonces que x varía de $x = 1$ a $x = 4$ y y varía simultáneamente de $y = 1$ a $y = 4$. En otras palabras, en el plano xy la imagen de S_1 es el segmento de recta $y = x$ de (1, 1) a (4, 4).

S_2: En esta frontera $u^2 + v^2 = 4$ y también $x = 4$. En este caso, conforme nos movemos del punto (2, 0) a $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, la ecuación restante $y = u^2 - v^2$ indica que y varía de $y = 2^2 - 0^2 = 4$ a $y = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 1$. En este caso la imagen de S_2 es el segmento de recta vertical $x = 4$ que empieza en (4, 4) y desciende hasta (4, 1).

S_3: Puesto que $u^2 - v^2 = 1$, obtenemos $y = 1$. Sin embargo, a medida que nos movemos sobre esta frontera desde $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ hasta (1, 0), la ecuación $x = u^2 + v^2$ indica que x varía de $x = 4$ a $x = 1$. La imagen de S_3 es el segmento de recta horizontal $y = 1$ que empieza en (4, 1) y termina en (1, 1).

La imagen de S es la región R dada en la figura 14.9.2*b*). ■

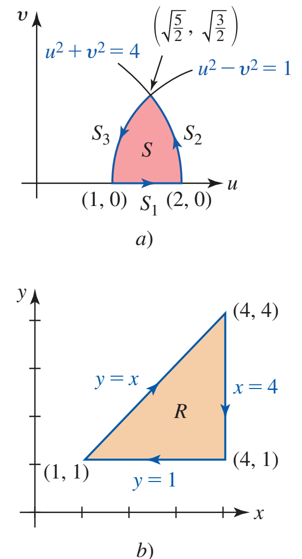


FIGURA 14.9.2 La imagen de S es R

Observe en el ejemplo 1 que recorrimos la frontera de S en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, y la frontera de R se recorre en la dirección de las manecillas. Afirmamos que la transformación de la frontera de S ha *inducido* una orientación en la frontera de R.

Aunque una prueba de la fórmula del cambio de variables en una integral múltiple está más allá del nivel de este texto, señalaremos *algunas* de las suposiciones subyacentes que se hacen alrededor de las ecuaciones (3) y las regiones R y S:

- Las funciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ tienen primeras derivadas parciales continuas sobre S.
- La transformación es uno a uno.
- Cada una de las regiones R y S consiste en una curva cerrada simple continua por secciones y su interior.
- El determinante de segundo orden

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad (7)$$

no es cero y no cambia de signo sobre S.

Jacobiano Se dice que una transformación T es **uno a uno** si cada punto (x_0, y_0) en R es la imagen bajo T del punto único (u_0, v_0) en S. Dicho de otro modo, ningún par de puntos en S tiene la misma imagen en R. Con la restricción de que $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, las ecuaciones en (5) definen una transformación uno a uno desde el plano $r\theta$ hasta el plano xy. El determinante en (7) se denomina **determinante jacobiano**, o simplemente **jacobiano**, de la transformación T y es la clave para el cambio de variables en una integral múltiple. El jacobiano de la transformación definida por las ecuaciones en (3) se denota por medio del símbolo

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

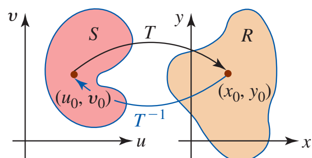


FIGURA 14.9.3 Transformaciones entre regiones

De manera similar a la noción de una función uno a uno introducida en la sección 1.5, una transformación uno a uno T tiene una **transformación inversa** T^{-1} tal que

$$T^{-1}(x_0, y_0) = (u_0, v_0).$$

Esto es, (u_0, v_0) es la imagen bajo T^{-1} de (x_0, y_0). Vea la FIGURA 14.9.3. Si es posible resolver en (3) para u y v en términos de x y y, entonces la transformación inversa se define mediante el par de ecuaciones

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \tag{8}$$

El jacobiano de la transformación inversa T^{-1} es

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{9}$$

y se relaciona con el jacobiano (7) de la transformación T por medio de

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1. \tag{10}$$

EJEMPLO 2 Jacobiano

El jacobiano de la transformación $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = r. \quad ■$$

Dirigiremos ahora nuestra atención al punto principal de esta discusión: cómo cambiar variables en una integral múltiple. La idea que se expresa en (4) es válida; la función $J(u, v)$ viene a ser el valor absoluto del jacobiano; esto es, $J(u, v) = |\partial(x, y)/\partial(u, v)|$. De acuerdo con las suposiciones planteadas antes, tenemos el siguiente resultado para las integrales dobles.

Teorema 14.9.1 Cambio de variables en una integral doble

Si $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ es una transformación que mapea una región S en el plano uv hacia la región R en el plano xy y f es una función continua sobre R, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA'. \tag{11}$$

La fórmula (3) de la sección 14.5 para cambiar una integral doble a coordenadas polares es sólo un caso especial de (11) con

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = |r| = r$$

puesto que $r \geq 0$. En (6), entonces, tenemos $J(r, \theta) = |\partial(x, y)/\partial(r, \theta)| = r$.

Un cambio de variables en una integral múltiple puede utilizarse para una simplificación del integrando o para una simplificación de la región de integración. El cambio de variables real utilizado muchas veces se inspira en función de la estructura del integrando $f(x, y)$ o por las ecuaciones que definen la región R. Como consecuencia, la transformación se define mediante ecuaciones de la forma dada en (8); esto es, estamos tratando con la transformación inversa. Los siguientes dos ejemplos ilustran estas ideas.

EJEMPLO 3 Cambio de variables

Evalúe $\int_R \operatorname{sen}(x + 2y) \cos(x - 2y)\, dA$ sobre la región R que se muestra en la FIGURA 14.9.4*a*).

Solución La dificultad al evaluar esta integral doble es claramente el integrando. La presencia de los términos $x + 2y$ y $x - 2y$ nos lleva a definir el cambio de variables

$$u = x + 2y \qquad \text{y} \qquad v = x - 2y.$$

Estas ecuaciones mapearán R sobre la región S en el plano uv. Como en el ejemplo 1, transformamos los lados de la región.

S_1: $y = 0$ implica $u = x$ y $v = x$ o $v = u$. A medida que nos movemos de $(2\pi, 0)$ a $(0, 0)$ vemos que los puntos imagen correspondientes en el plano uv yacen sobre el segmento de recta $v = u$ de $(2\pi, 2\pi)$ a $(0, 0)$.

S_2: $x = 0$ implica $u = 2y$ y $v = -2y$ o $v = -u$. A medida que nos movemos de $(0, 0)$ a $(0, \pi)$, los puntos imagen correspondientes en el plano uv yacen sobre el segmento de recta $v = -u$ de $(0, 0)$ a $(2\pi, -2\pi)$.

S_3: $x + 2y = 2\pi$ implica $u = 2\pi$. Conforme nos movemos de $(0, \pi)$ a $(2\pi, 0)$, la ecuación $v = x - 2y$ muestra que v varía de $v = -2\pi$ a $v = 2\pi$. De tal modo, la imagen de S_3 es el segmento de recta vertical $u = 2\pi$ que empieza en $(2\pi, -2\pi)$ y se extiende hasta $(2\pi, 2\pi)$. Vea la figura 14.9.4*b*).

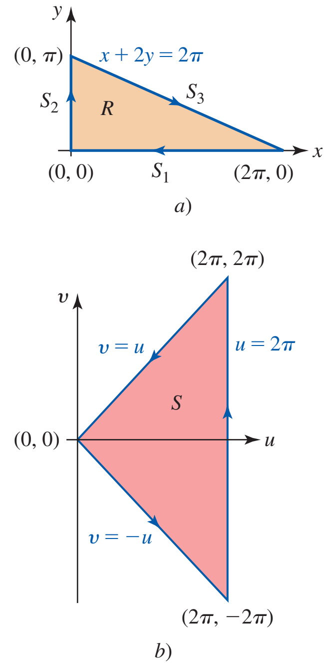


FIGURA 14.9.4 Regiones R y S del ejemplo 3

Ahora, al resolver las ecuaciones $u = x + 2y$, $v = x - 2y$ para x y y en términos de u y v, obtenemos

$$x = \frac{1}{2}(u + v) \qquad \text{y} \qquad y = \frac{1}{4}(u - v).$$

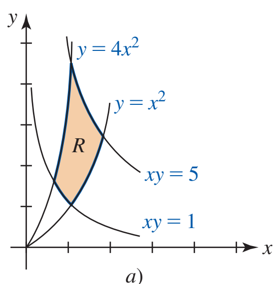
Por tanto,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}.$$

Por consiguiente, de (11) encontramos que

$$\begin{aligned}
\iint_R \operatorname{sen}(x + 2y)\cos(x - 2y)\, dA &= \iint_S \operatorname{sen} u \cos v \left|-\frac{1}{4}\right| dA' \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_{-u}^{u} \operatorname{sen} u \cos v \, dv\, du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \Big]_{-u}^{u} du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 u \, du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2u)\, du \\
&= \frac{1}{4}\left(u - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2u\right)\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\pi.
\end{aligned}$$

■



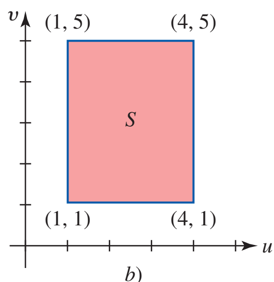


FIGURA 14.9.5 Regiones R y S del ejemplo 4

EJEMPLO 4 Cambio de variables

Evalúe $\iint_R xy\, dA$ sobre la región R que se muestra en la FIGURA 14.9.5*a*).

Solución En este caso el integrando es bastante simple, pero la integración sobre la región R resultaría tediosa, ya que tendríamos que expresar $\iint_R xy\, dA$ como la suma de tres integrales. (Verifique lo anterior.)

Las ecuaciones de las fronteras de R sugieren el cambio de variables

$$u = \frac{y}{x^2} \qquad \text{y} \qquad v = xy. \tag{12}$$

La obtención de la imagen de R es directa en este caso, puesto que las imágenes de las curvas que conforman las cuatro fronteras son simplemente $u = 1$, $u = 4$, $v = 1$ y $v = 5$. En otras palabras, la imagen de la región R es la región rectangular S: $1 \le u \le 4$, $1 \le v \le 5$. Vea la figura 14.9.5*b*).

Ahora, en vez de tratar de resolver las ecuaciones en (12) para x y y en términos de u y v, es posible obtener el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ calculando $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ y utilizando (10). Tenemos

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{2y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{3y}{x^2}$$

y por ello de (10),

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = -\frac{x^2}{3y} = -\frac{1}{3u}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \iint_R xy\, dA &= \iint_S v \left| -\frac{1}{3u} \right| dA' \\ &= \frac{1}{3}\int_1^4 \int_1^5 \frac{v}{u}\, dv\, du \\ &= \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{u}\left(\frac{1}{2}v^2\right)\Big]_1^5 du \\ &= 4\int_1^4 \frac{1}{u}\, du = 4 \ln u \Big]_1^4 = 4 \ln 4. \end{aligned}$$

■

Integrales triples Para cambiar variables en una integral triple, consideremos

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w) \tag{13}$$

como una transformación T uno a uno de la región E en el espacio uvw a la región D en el espacio xyz. Si las funciones en (13) satisfacen las contrapartes de tres variables de las condiciones listadas en la página 791 y el jacobiano de tercer orden

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

no es cero y no cambia de signo sobre E, entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 14.9.2 Cambio de variables en una integral triple

Si $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ es una transformación que mapea una región E en el espacio uvw hacia una región D en el espacio xyz y f es una función continua sobre E, entonces

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dV = \iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| dV'. \qquad (14)$$

Dejamos como ejercicio mostrar que si T es la transformación de coordenadas esféricas a rectangulares definida por

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi,$$

entonces

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \operatorname{sen} \phi. \qquad (15)$$

Vea el problema 28 en los ejercicios 14.9.

Posdata: Un poco de historia **Carl Gustav Jacob Jacobi** (1804-1851) nació en Potsdam en el seno de una rica familia alemana. El joven Carl Gustav fue notable en muchas áreas de estudio, pero su habilidad y amor por los intrincados cálculos algebraicos lo llevaron a la vida de un pobre matemático y maestro. Sufrió un colapso nervioso en 1843 debido a exceso de trabajo. Su disertación para obtener el doctorado en filosofía se relacionó con un tema ahora conocido por cualquier estudiante de cálculo: fracciones parciales. Sin embargo, las grandes contribuciones de Jacobi a las matemáticas se produjeron en el campo de las funciones elípticas y de la teoría de números. También realizó aportaciones importantes a la teoría de determinantes y a la simplificación de dicha teoría. Si bien Jacobi fue principalmente un matemático "puro", todo estudiante de dinámica y mecánica cuántica reconocerá su contribución a esas áreas a través de sus famosas ecuaciones de Hamilton-Jacobi.



Jacobi

Ejercicios 14.9

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-45.

Fundamentos

1. Considere una transformación T definida por $x = 4u - v$, $y = 5u + 4v$. Encuentre las imágenes de los puntos (0, 0), (0, 2), (4, 0) y (4, 2) en el plano uv bajo T.
2. Considere una transformación T definida por $x = \sqrt{v - u}$, $y = v + u$. Encuentre las imágenes de los puntos (1, 1), (1, 3) y $(\sqrt{2}, 2)$ en el plano xy bajo T^{-1}.

En los problemas 3-6, encuentre la imagen del conjunto S bajo la transformación dada.

3. S: $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le u$; $\quad x = 2u + v$, $y = u - 3v$
4. S: $-1 \le u \le 4$, $1 \le v \le 5$; $\quad u = x - y$, $v = x + 2y$
5. S: $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2$; $\quad x = u^2 - v^2$, $y = uv$
6. S: $1 \le u \le 2$, $1 \le v \le 2$; $\quad x = uv$, $y = v^2$

En los problemas 7-10, determine el jacobiano de la transformación T del plano uv al plano xy.

7. $x = ve^{-u}$, $y = ve^{u}$
8. $x = e^{3u} \operatorname{sen} v$, $y = e^{3u} \cos v$
9. $u = \dfrac{y}{x^2}$, $v = \dfrac{y^2}{x}$
10. $u = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{-2y}{x^2 + y^2}$

11. ***a)*** Encuentre la imagen de la región S: $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$ bajo la transformación $x = u - uv$, $y = uv$.
    b) Explique por qué la transformación no es uno a uno sobre la frontera de S.
12. Determine dónde es cero el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ de la transformación en el problema 11.

En los problemas 13-22, evalúe la integral dada por medio de los cambios de variable que se indican.

13. $\iint_R (x + y)\,dA$, donde R es la región acotada por las gráficas de $x - 2y = -6$, $x - 2y = 6$, $x + y = -1$, $x + y = 3$; $u = x - 2y$, $v = x + y$
14. $\displaystyle\iint_R \frac{\cos\frac{1}{2}(x - y)}{3x + y}\,dA$, donde R es la región acotada por las gráficas de $y = x$, $y = x - \pi$, $y = -3x + 3$, $y = -3x + 6$; $u = x - y$, $v = 3x + y$
15. $\displaystyle\iint_R \frac{y^2}{x}\,dA$, donde R es la región acotada por las gráficas $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $x = y^2$, $x = \frac{1}{2}y^2$; $u = x^2/y$, $v = y^2/x$

16. $\iint_R (x^2 + y^2)^{-3} dA$, donde R es la región acotada por los círculos $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 6y$; $u = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$ [*Sugerencia*: De $u^2 + v^2$.]

17. $\iint_R (x^2 + y^2)\, dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $x^2 - y^2 = a$, $x^2 - y^2 = b$, $2xy = c$, $2xy = d$, $0 < a < b$, $0 < c < d$; $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$

18. $\iint_R (x^2 + y^2)\text{sen}\, xy\, dA$, donde R es la región acotada por las gráficas de $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 2$, $xy = -2$; $u = x^2 - y^2$, $v = xy$

19. $\displaystyle\iint_R \frac{x}{y + x^2}\, dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $x = 1$, $y = x^2$, $y = 4 - x^2$; $x = \sqrt{v - u}$, $y = v + u$

20. $\iint_R y\, dA$, donde R es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(2, 3)$ y $(-4, 1)$; $x = 2u - 4v$, $y = 3u + v$

21. $\iint_R y^4\, dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 4x$; $u = xy$, $v = y/x$

22. $\iiint_D (4z + 2x - 2y)\, dV$, donde D es el paralelepípedo $1 \le y + z \le 3$, $-1 \le -y + z \le 1$, $0 \le x - y \le 3$; $u = y + z$, $v = -y + z$, $w = x - y$

En los problemas 23-26, evalúe la integral doble por medio de un cambio de variables apropiado.

23. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{(y-x)/(y+x)}\, dy\, dx$ **24.** $\displaystyle\int_{-2}^0 \int_0^{x+2} e^{y^2 - 2xy + x^2}\, dy\, dx$

25. $\iint_R (6x + 3y)\, dA$, donde R es la región trapezoidal en el primer cuadrante con vértices $(1, 0)$, $(4, 0)$, $(2, 4)$ y $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

26. $\iint_R (x + y)^4 e^{x-y}\, dA$, donde R es la región cuadrada con vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 1)$

27. Evalúe la integral doble $\iint_R \left(\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2\right) dA$, donde R es la región elíptica cuya frontera es la gráfica de $\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$. Emplee la sustitución $u = \frac{1}{5}x$, $v = \frac{1}{3}y$ y coordenadas polares.

28. Verifique que el jacobiano de la transformación dada en (14) es $\partial(x, y, z)/\partial(\rho, \phi, \theta) = \rho^2 \text{ sen } \phi$.

29. Emplee $V = \iiint_D dV$ y las sustituciones $u = x/a$, $v = y/b$, $w = z/c$ para mostrar que el volumen del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ es $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

≡ Aplicaciones

30. Un problema en termodinámica consiste en determinar el trabajo realizado por una máquina de Carnot. Este trabajo se define como el área de la región R en el primer cuadrante acotado por las isotermas $xy = a$, $xy = b$, $0 < a < b$ y las adiabáticas $xy^{1.4} = c$, $xy^{1.4} = d$, $0 < c < d$. Emplee $A = \iint_R dA$ y una sustitución apropiada para calcular el área que se muestra en la FIGURA 14.9.6.

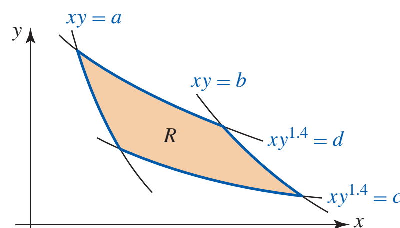


FIGURA 14.9.6 Región R del problema 30

Revisión del capítulo 14

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-46.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-6, indique si el enunciado dado es verdadero (V) o falso (F).

1. $\displaystyle\int_{-2}^3 \int_1^5 e^{x^2 - y}\, dx\, dy = \int_1^5 \int_{-2}^3 e^{x^2 - y}\, dy\, dx$ _____

2. Si $\int f(x, y)\, dx = F(x, y) + c_2(y)$ es una integral parcial, entonces $F_x(x, y) = f(x, y)$. _____

3. Si I es la integral parcial definida $\displaystyle\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$, entonces $\partial I/\partial y = 0$. _____

4. Para toda función continua f, $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y)\, dy\, dx = 2\int_0^1 \int_{x^2}^1 f(x, y)\, dy\, dx$. _____

5. El centro de masa de una lámina que posee simetría yace sobre el eje de simetría de la lámina. _____

6. En coordenadas cilíndricas y esféricas la ecuación del plano $y = x$ es la misma. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-12, llene los espacios en blanco.

1. $\int_{y^2+1}^{5}\left(8y^3 - \frac{5y}{x}\right) dx =$ __________.

2. Si R_1 y R_2 son regiones que no se traslapan tales como $R = R_1 \cup R_2$, $\iint_R f(x, y)\, dA = 10$ y $\iint_{R_2} f(x, y)\, dA = -6$, entonces $\iint_{R_1} f(x, y)\, dA =$ __________.

3. $\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} dx\, dy$ produce el área de un __________.

4. La región acotada por las gráficas de $9x^2 + y^2 = 36$, $y = -2$, $y = 5$ es una región de tipo __________ .

5. $\int_{2}^{4} f_y(x, y)\, dy =$ __________.

6. Si $\rho(x, y, z)$ es la densidad, entonces la integral iterada que produce la masa de un sólido acotado por el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ es __________.

7. $\int_{0}^{2}\int_{y^2}^{2y} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{_}^{_}\int_{_}^{_} f(x, y)\, dy\, dx$

8. Las coordenadas rectangulares del punto $(6, 5\pi/3, 5\pi/6)$ dadas en coordenadas esféricas son __________.

9. Las coordenadas cilíndricas del punto $(2, \pi/4, 2\pi/3)$ dadas en coordenadas esféricas son __________.

10. La región R acotada por las gráficas $y = 4 - x^2$ y $y = 0$ es tanto del tipo I como del tipo II. Interpretada como una región tipo II, $\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{_}^{_}\int_{_}^{_} f(x, y)$ ________________.

11. La ecuación del paraboloide $z = x^2 + y^2$ en coordenadas cilíndricas es __________, en tanto que en coordenadas esféricas su ecuación es __________.

12. La región cuya área es $A = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\operatorname{sen}\theta} r\, dr\, d\theta$ es __________.

C. Ejercicios

En los problemas 1-14, evalúe la integral dada.

1. $\int (12x^2 e^{-4xy} - 5x + 1)\, dy$

2. $\int \frac{1}{4 + 3xy}\, dx$

3. $\int_{y^3}^{y} y^2 \operatorname{sen} xy\, dx$

4. $\int_{1/x}^{e^x} \frac{x}{y^2}\, dy$

5. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{2x} ye^{y-x}\, dy\, dx$

6. $\int_{0}^{4}\int_{x}^{4} \frac{1}{16 + x^2}\, dy\, dx$

7. $\int_{0}^{1}\int_{x}^{\sqrt{x}} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy\, dx$

8. $\int_{e}^{e^2}\int_{0}^{1/x} \ln x\, dy\, dx$

9. $\int_{0}^{5}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos\theta} 3r^2\, dr\, d\theta\, dz$

10. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{0}^{\operatorname{sen} z}\int_{0}^{\ln x} e^y\, dy\, dx\, dz$

11. $\iint_R 5\, dA$, donde R está acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 64$

12. $\iint_R dA$, donde R está acotada por la cardioide $r = 1 + \cos\theta$

13. $\iint_R (2x + y)\, dA$, donde R está acotada por las gráficas de $y = \frac{1}{2}x$, $x = y^2 + 1$, $y = 0$

14. $\iiint_D x\, dV$, donde D está acotada por los planos $z = x + y$, $z = 6 - x - y$, $x = 0$, $y = 0$

15. Empleando coordenadas rectangulares, exprese

$$\iint_R \frac{1}{x^2 + y^2}\, dA$$

como una integral iterada, donde R es la región en el primer cuadrante que está acotada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$ y $y = x$. No evalúe.

16. Evalúe la integral doble del problema 15 utilizando coordenadas polares.

En los problemas 17 y 18, dibuje la región de integración.

17. $\int_{-2}^{2}\int_{-x^2}^{x^2} f(x, y)\, dy\, dx$

18. $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{x^2+y^2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

19. Invierta el orden de integración y evalúe

$$\int_0^1\int_y^{\sqrt[3]{y}} \cos x^2\, dx\, dy.$$

20. Considere $\iiint_D f(x, y, z)\, dV$, donde D es la región en el primer octante acotada por los planos $z = 8 - 2x - y$, $z = 4$, $x = 0$, $y = 0$. Exprese la integral triple como seis diferentes integrales iteradas.

En los problemas 21 y 22, utilice un sistema de coordenadas apropiado para evaluar la integral dada.

21. $\int_0^2\int_{1/2}^{1}\int_0^{\sqrt{x-x^2}} (4z + 1)\, dy\, dx\, dz$

22. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^4\, dz\, dy\, dx$

23. Encuentre el área de la superficie de la porción de la gráfica de $z = xy$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

24. Utilice una integral doble para encontrar el volumen del sólido que se muestra en la FIGURA 14.R.1.

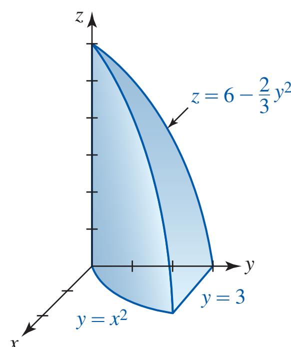


FIGURA 14.R.1 Sólido del problema 24

25. Exprese el volumen del sólido que se muestra en la FIGURA 14.R.2 como una o más integrales iteradas utilizando el orden de integración

a) *dy dx* ***b***) *dx dy*.

Elija el inciso *a*) o el inciso *b*) para determinar el volumen.

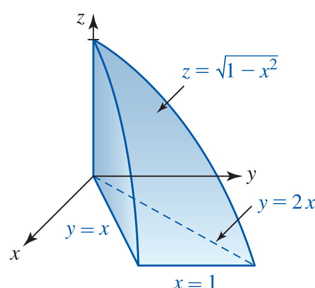


FIGURA 14.R.2 Sólido del problema 25

26. Una lámina tiene la forma de la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^3$. Encuentre el centro de masa si la densidad ρ en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el origen.

27. Determine el momento de inercia de la lámina descrita en el problema 26 en torno al eje y.

28. Encuentre el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ utilizando una integral triple en *a*) coordenadas rectangulares, *b*) coordenadas cilíndricas y *c*) coordenadas esféricas.

29. Determine el volumen del sólido que está acotado entre los conos $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 3$.

30. Determine el volumen del sólido que se muestra en la FIGURA 14.R.3.

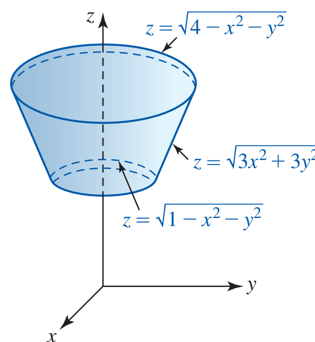


FIGURA 14.R.3 Sólido del problema 30

31. Evalúe la integral $\iint_R (x^2 + y^2)\sqrt[3]{x^2 - y^2}\, dA$, donde R es la región acotada por las gráficas de $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y $y = 1$ por medio del cambio de variables $u = 2xy$, $v = x^2 - y^2$.

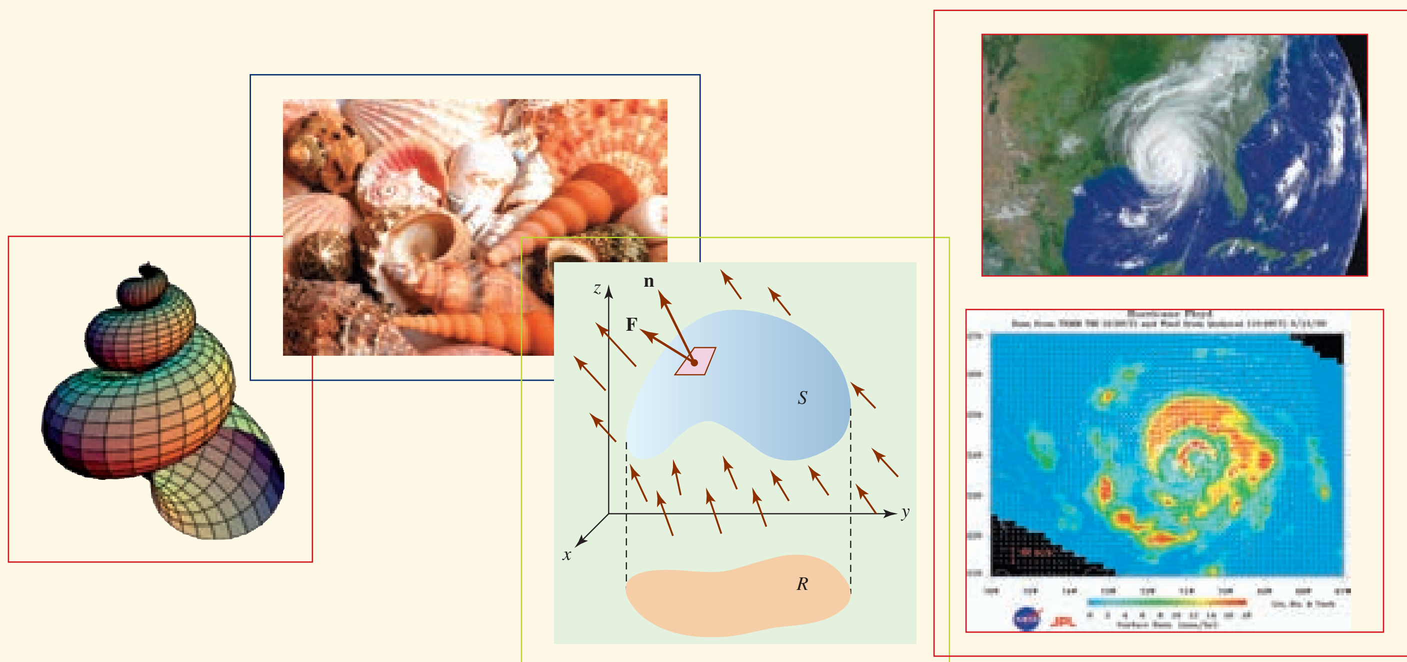
32. Evalúe la integral

$$\iint_R \frac{1}{\sqrt{(x - y)^2 + 2(x + y) + 1}}\, dA,$$

donde R es la región acotada por las gráficas de $y = x$, $x = 2$ y $y = 0$ mediante el cambio de variables $x = u + uv$, $y = v + uv$.

Capítulo 15

Cálculo integral vectorial



En este capítulo Hasta este punto en nuestro estudio del cálculo, hemos encontrado tres tipos de integrales: la integral definida, la integral doble y la integral triple. En este capítulo se presentan dos nuevos tipos de integrales: las integrales de línea y las integrales de superficie. El desarrollo de estos conceptos depende en gran medida de los métodos vectoriales. En la sección 15.2 se introduce un nuevo tipo de función vectorial: una función que no define a una curva sino más bien a un campo de vectores.

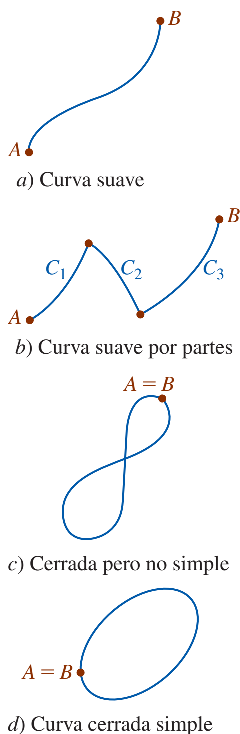


FIGURA 15.1.1 Tipos de curvas

15.1 Integrales de línea

Introducción La noción de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, esto es, *integración de una función de una sola variable definida sobre un intervalo*, puede generalizarse a la *integración de una función de varias variables definidas a lo largo de una curva*. Para este fin necesitamos introducir cierta terminología acerca de curvas.

Terminología Suponga que C es una curva parametrizada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, y que A y B son los puntos inicial y terminal $(x(a), y(a))$ y $(x(b), y(b))$, respectivamente. Afirmamos que:

- C es una **curva suave** si $x'(t)$ y $y'(t)$ son continuas sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y no son simultáneamente cero sobre el intervalo abierto (a, b).
- C es una **curva suave por partes** si consiste en un número finito de curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$ unidas extremo por extremo; esto es, $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$.
- C es una **curva cerrada** si $A = B$.
- C es una **curva simple** si no se cruza a sí misma entre A y B.
- C es una **curva cerrada simple** si $A = B$ y la curva no se cruza a sí misma.
- Si C no es una curva cerrada, entonces la **orientación** impuesta sobre C es la dirección que corresponde a los valores crecientes de t.

Cada tipo de curva definida antes se ilustra en la FIGURA 15.1.1.

Esta misma terminología lleva de manera natural a las curvas en espacio tridimensional. Por ejemplo, una curva espacial C definida por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \le t \le b$, es suave si las derivadas x', y' y z' son continuas sobre $[a, b]$ y no simultáneamente cero sobre (a, b).

Una desafortunada elección de nombre. El término "integrales curvilíneas" sería más apropiado.

Integrales de línea en el plano Sea $z = f(x, y)$ una función definida en alguna región bidimensional que contiene a la curva suave C definida por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$. Los siguientes pasos conducen a las definiciones de tres **integrales de línea** en el plano.

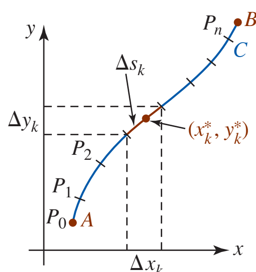


FIGURA 15.1.2 Punto muestra sobre el subarco k-ésimo

- Sea
$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$
una partición del intervalo paramétrico $[a, b]$ y considere que los puntos correspondientes sobre la curva C, o puntos de partición, son
$$A = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = B.$$
- Los puntos de partición $P_k = (x(t_k), y(t_k))$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ dividen a C en n subarcos de longitudes Δs_k. Considere que la proyección de cada subarco sobre los ejes x y y tienen longitudes Δx_k y Δy_k, respectivamente.
- Sea $\|P\|$ la longitud del subarco más largo.
- Escoja un punto muestra (x_k^*, y_k^*) sobre cada subarco como se ilustra en la FIGURA 15.1.2. Este punto corresponde a un número t_k^* en el subintervalo k-ésimo $[t_{k-1}, t_k]$ en la partición del intervalo del parámetro $[a, b]$.
- Forme las sumas
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta x_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta s_k.$$

Tomamos el límite de estas tres sumas cuando $\|P\| \to 0$. Las integrales que resultan se resumen a continuación.

Definición 15.1.1 Integrales de línea en el plano

Sea f una función de dos variables x y y definida en una región del plano que contiene una curva suave C.

i) La **integral de línea de f con respecto a x** a lo largo de C de A a B es

$$\int_C f(x, y)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k. \tag{1}$$

(*continúa*)

ii) La **integral de línea de *f* con respecto a *y*** a lo largo de C de A a B es

$$\int_C f(x, y)\, dy = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*) \Delta y_k. \tag{2}$$

iii) La **integral de línea de *f* con respecto a la longitud de arco** s a lo largo de C de A a B es

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*) \Delta s_k. \tag{3}$$

Es posible demostrar que si $f(x, y)$ es continua sobre C, entonces las integrales definidas en (1), (2) y (3) existen. Asumiremos la continuidad de f como un hecho.

Interpretación geométrica En el caso de dos variables, la integral de línea con respecto a la longitud de arco $\int_C f(x, y)\, ds$ puede interpretarse de manera geométrica cuando $f(x, y) \geq 0$ sobre C. En la definición 15.1.1 el símbolo Δs_k representa la longitud del subarco k-ésimo sobre la curva C. Sin embargo, de la figura 15.1.2 tenemos la aproximación $\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. Con esta interpretación de Δs_k, vemos de la FIGURA 15.1.3*a*) que el producto $f(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k$ es el área de un rectángulo vertical de altura $f(x_k^*, y_k^*)$ y ancho Δs_k. La integral $\int_C f(x, y)\, ds$ representa entonces el área de un lado de una "cerca" o "cortina" que se extiende a partir de la curva C en el plano xy hacia arriba de la gráfica de $f(x, y)$ y que corresponde a los puntos (x, y) sobre C. Vea la figura 15.1.3*b*).

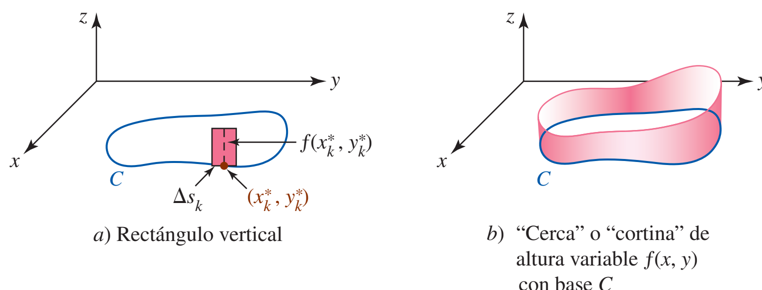


FIGURA 15.1.3 Interpretación geométrica de *iii*) de la definición 15.1.1

Método de evaluación: *C* definida paramétricamente Las integrales de línea en la definición 15.1.1 se evalúan de dos maneras, dependiendo de si la curva C está definida paramétricamente o mediante una función explícita. En cualquier caso, la idea básica es convertir la integral de línea en una integral definida de una sola variable. Si C es una curva suave parametrizada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces $dx = x'(t)\, dt$, $dy = y'(t)\, dt$, y por ello (1) y (2) se vuelven, respectivamente,

$$\int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt, \tag{4}$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt. \tag{5}$$

Además, utilizando (5) de la sección 6.5 y la parametrización dada, encontramos que $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$. Por consiguiente, (3) puede escribirse como

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \tag{6}$$

EJEMPLO 1 Empleo de (4), (5) y (6)

Evalúe

a) $\int_C xy^2\, dx$, ***b***) $\int_C xy^2\, dy$, ***c***) $\int_C xy^2\, ds$

sobre el cuarto de círculo C definido por $x = 4 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Vea la FIGURA 15.1.4.

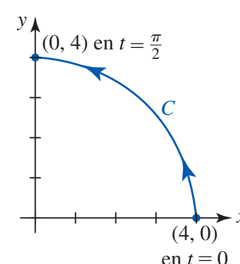


FIGURA 15.1.4 Curva C del ejemplo 1

Solución

a) De (4),

$$\int_C xy^2\,dx = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\,\text{sen}^2 t)}^{y^2}\overbrace{(-4\,\text{sen}\,t\,dt)}^{dx}$$
$$= -256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^3 t\cos t\,dt$$
$$= -256\left[\frac{1}{4}\text{sen}^4 t\right]_0^{\pi/2} = -64.$$

b) De (5),

$$\int_C xy^2\,dy = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\,\text{sen}^2 t)}^{y^2}\overbrace{(4\cos t\,dt)}^{dy}$$
$$= 256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t\cos^2 t\,dt \quad \leftarrow \text{use la fórmula del ángulo doble para el seno}$$
$$= 256\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\text{sen}^2 2t\,dt \quad \leftarrow \text{use la fórmula del ángulo mitad para el seno}$$
$$= 64\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 4t)\,dt$$
$$= 32\left[t-\frac{1}{4}\text{sen}\,4t\right]_0^{\pi/2} = 16\pi.$$

c) De (6),

$$\int_C xy^2\,ds = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\,\text{sen}^2 t)}^{y^2}\overbrace{\sqrt{16(\cos^2 t+\text{sen}^2 t)}\,dt}^{ds}$$
$$= 256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t\cos t\,dt$$
$$= 256\left[\frac{1}{3}\text{sen}^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{256}{3}.$$

■

Método de evaluación: *C* definida por $y = g(x)$ Si la curva C está definida por una función explícita $y = g(x)$, $a \le x \le b$, es posible utilizar x como un parámetro. Con $dy = g'(x)\,dx$ y $ds = \sqrt{1+[g'(x)]^2}\,dx$, las integrales de línea (1), (2) y (3) se vuelven, a su vez,

$$\int_C f(x, y)\,dx = \int_a^b f(x, g(x))\,dx, \tag{7}$$

$$\int_C f(x, y)\,dy = \int_a^b f(x, g(x))\,g'(x)\,dx, \tag{8}$$

$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x, g(x))\sqrt{1+[g'(x)]^2}\,dx. \tag{9}$$

Una integral de línea a lo largo de una curva C *suave por partes* se define como la *suma* de las integrales sobre las distintas curvas suaves cuya unión compone a C. Por ejemplo, en el caso de (3), si C está compuesta por curvas suaves C_1 y C_2, entonces

$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_{C_1} f(x, y)\,ds + \int_{C_2} f(x, y)\,ds.$$

Notación En muchas aplicaciones, las integrales de línea aparecen como una suma

$$\int_C P(x, y)\,dx + \int_C Q(x, y)\,dy.$$

Es una práctica común escribir esta suma sin el segundo símbolo integral como

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \qquad \text{o simplemente} \qquad \int_C P\,dx + Q\,dy. \tag{10}$$

EJEMPLO 2 Uso de (7), (8) y (10)

Evalúe $\int_C xy\,dx + x^2\,dy$, donde C está dada por $y = x^3$, $\;-1 \le x \le 2$.

Solución La curva C se ilustra en la FIGURA 15.1.5 y se define mediante la función explícita $y = x^3$. Por consiguiente, podemos usar x como el parámetro. Con $dy = 3x^2\,dx$, se deduce de (7) y (8) que

$$\int_C xy\,dx + x^2\,dy = \int_{-1}^{2} x\overbrace{(x^3)}^{y}\,dx + x^2\overbrace{(3x^2\,dx)}^{dy}$$

$$= \int_{-1}^{2} 4x^4\,dx = \frac{4}{5}x^5\Big]_{-1}^{2} = \frac{132}{5}.$$ ■

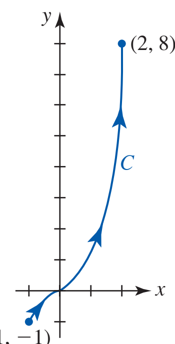


FIGURA 15.1.5 Curva C en el ejemplo 2

EJEMPLO 3 La curva C definida por partes

Evalúe $\int_C y^2\,dx - x^2\,dy$ sobre la curva cerrada C que se muestra en la FIGURA 15.1.6*a*).

Solución Puesto que C es suave por partes, expresamos la integral como una suma de integrales. Simbólicamente, escribimos

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3},$$

donde C_1, C_2 y C_3 son las curvas que se muestran en la figura 15.1.6*b*). En C_1, usamos x como parámetro. Puesto que $y = 0$, $dy = 0$,

$$\int_{C_1} y^2\,dx - x^2\,dy = \int_0^2 0\,dx - x^2(0) = 0.$$

En C_2, usamos y como parámetro. De $x = 2$, $dx = 0$ tenemos

$$\int_C y^2\,dx - x^2\,dy = \int_0^4 y^2(0) - 4\,dy =$$

$$= -\int_0^4 4\,dy = -4y\Big]_0^4 = -16.$$

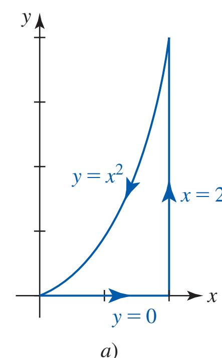
Por último, en C_3, usamos de nuevo x como parámetro. De $y = x^2$, obtenemos $dy = 2x\,dx$ y por ello

$$\int_{C_3} y^2\,dx - x^2\,dy = \int_2^0 x^4\,dx - x^2(2x\,dx)$$

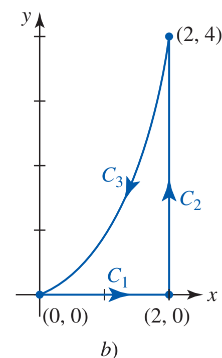
$$= \int_2^0 (x^4 - 2x^3)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4\right)\Big]_2^0 = \frac{8}{5}.$$

Por consiguiente, $$\int_C y^2\,dx - x^2\,dy = 0 + (-16) + \frac{8}{5} = -\frac{72}{5}.$$ ■



a)



b)

FIGURA 15.1.6 Curva C en el ejemplo 3

Propiedades Es importante advertir que una integral de línea es independiente de la parametrización de la curva C siempre que a C se le dé la misma orientación por medio de todos los conjuntos de ecuaciones paramétricas que definen la curva. Vea el problema 33 en los ejercicios 15.1. Recuerde que la dirección positiva de una curva parametrizada C corresponde a valores crecientes del parámetro t.

Suponga, como se ilustra en la FIGURA 15.1.7, que el símbolo $-C$ denota la curva que tiene los mismos puntos pero la orientación opuesta de C. En ese caso es posible demostrar que

Para integrales definidas ordinarias, esta propiedad es equivalente a $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

$$\int_{-C} P\,dx + Q\,dy = -\int_C P\,dx + Q\,dy$$

o

$$\int_{-C} P\,dx + Q\,dy + \int_C P\,dx + Q\,dy = 0. \tag{11}$$

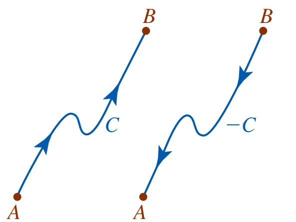


FIGURA 15.1.7 Las curvas C y $-C$ tienen orientaciones opuestas

Por ejemplo, en el inciso *a*) del ejemplo 1 vimos que $\int_C xy^2\,dx = -64$ y por ello (11) puede escribirse como $\int_{-C} xy^2\,dx = 64$.

Integrales de línea en el espacio

Suponga que C es una curva suave en espacio tridimensional definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \le t \le b$. Si f es una función de tres variables definida en alguna región del espacio tridimensional que contiene a C, podemos definir *cuatro* integrales de línea a lo largo de la curva:

$$\int_C f(x, y, z)\,dx, \quad \int_C f(x, y, z)\,dy, \quad \int_C f(x, y, z)\,dz \quad \text{y} \quad \int_C f(x, y, z)\,ds.$$

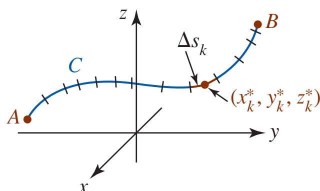


FIGURA 15.1.8 Punto muestra sobre el subarco k-ésimo

La primera, segunda y cuarta integrales se definen de manera análoga a (1), (2) y (3) de la definición 15.1.1. Por ejemplo, si C se divide en n subarcos de longitud Δs_k como se muestra en la FIGURA 15.1.8, entonces

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta s_k.$$

La nueva integral en la lista, la **integral de línea de f con respecto a z** a lo largo de C de A a B, se define como

$$\int_C f(x, y, z)\,dz = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta z_k. \tag{12}$$

Método de evaluación

Utilizando las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \le t \le b$, podemos evaluar las integrales de línea a lo largo de la curva en el espacio C de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int_C f(x, y, z)\,dx &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))x'(t)\,dt,\\
\int_C f(x, y, z)\,dy &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))y'(t)\,dt,\\
\int_C f(x, y, z)\,dz &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))z'(t)\,dt,\\
\int_C f(x, y, z)\,ds &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt.
\end{aligned} \tag{13}$$

Si C se define mediante la función vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, entonces la última integral en (13) puede escribirse

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))|\mathbf{r}'(t)|\,dt. \tag{14}$$

Examinaremos una integral que es análoga a (14) en la sección 15.6.

Como en (10), en el espacio tridimensional a menudo estamos interesados en integrales de línea de la forma de una suma:

$$\int_C P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

EJEMPLO 4 Integral de línea en espacio tridimensional

Evalúe $\int_C y\,dx + x\,dy + z\,dz$, donde C es la hélice $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Solución Al sustituir las expresiones para x, y y z junto con $dx = -2\,\text{sen}\,t\,dt$, $dy = 2\cos t\,dt$, $dz = dt$ obtenemos

$$\int_C y\,dx + x\,dy + z\,dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{-4\,\text{sen}^2 t\,dt + 4\cos^2 t\,dt}_{4(\cos^2 t\,-\,\text{sen}^2 t)} + t\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4\cos 2t + t)\,dt \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble}$$

$$= \left(2\,\text{sen}\,2t + \frac{1}{2}t^2\right)\Bigg]_0^{2\pi} = 2\pi^2. \qquad \blacksquare$$

Ejercicios 15.1 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-46.

Fundamentos

En los problemas 1-4, evalúe $\int_C f(x, y)\,dx$, $\int_C f(x, y)\,dy$ y $\int_C f(x, y)\,ds$ sobre la curva indicada C.

1. $f(x, y) = 2xy;\quad x = 5\cos t,\ y = 5\,\text{sen}\,t,\ 0 \le t \le \pi/4$

2. $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + 2x;\quad x = 2t,\ y = t^2,\ 0 \le t \le 1$

3. $f(x, y) = 3x^2 + 6y^2;\ \ y = 2x + 1,\ -1 \le x \le 0$

4. $f(x, y) = x^2/y^3;\quad y = \frac{3}{2}x^{2/3},\ 1 \le x \le 8$

5. Evalúe $\int_C (x^2 - y^2)\,ds$, donde C está dada por $x = 5\cos t$, $y = 5\,\text{sen}\,t$, $0 \le t \le 2\pi$.

6. Evalúe $\int_C (2x + 3y)\,dy$, donde C está dada por $x = 3\,\text{sen}\,2t$, $y = 2\cos 2t$, $0 \le t \le \pi$.

En los problemas 7 y 8, evalúe $\int_C f(x, y, z)\,dx$, $\int_C f(x, y, z)\,dy$, $\int_C f(x, y, z)\,dz$ y $\int_C f(x, y, z)\,ds$ sobre la curva indicada C.

7. $f(x, y, z) = z;\quad x = \cos t,\ y = \text{sen}\,t,\ z = t,\ 0 \le t \le \pi/2$

8. $f(x, y, z) = 4xyz;\quad x = \frac{1}{3}t^3,\ y = t^2,\ z = 2t,\ 0 \le t \le 1$

En los problemas 9-12, evalúe $\int_C (2x + y)\,dx + xy\,dy$ sobre la curva dada C entre $(-1, 2)$ y $(2, 5)$.

9. $y = x + 3$

10. $y = x^2 + 1$

11.

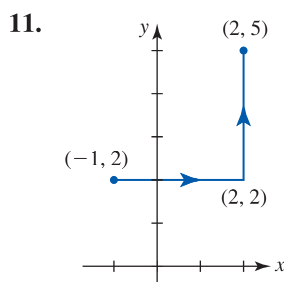


FIGURA 15.1.9 Curva del problema 11

12.

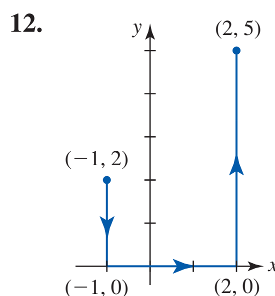


FIGURA 15.1.10 Curva del problema 12

En los problemas 13-16, evalúe $\int_C y\,dx + x\,dy$ sobre la curva dada C entre $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

13. $y = x^2$

14. $y = x$

15. C consiste en los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(0, 1)$ y de $(0, 1)$ a $(1, 1)$.

16. C consiste en los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ y de $(1, 0)$ a $(1, 1)$.

17. Evalúe $\int_C (6x^2 + 2y^2)\,dx + 4xy\,dy$, donde C está dada por $x = \sqrt{t}$, $y = t$, $4 \le t \le 9$.

18. Evalúe $\int_C -y^2\,dx + xy\,dy$, donde C está dada por $x = 2t$, $y = t^3$, $0 \le t \le 2$.

19. Evalúe $\int_C 2x^3y\,dx + (3x + y)\,dy$, donde C está dada por $x = y^2$ de $(1, -1)$ a $(1, 1)$.

20. Evalúe $\int_C 4x\,dx + 2y\,dy$, donde C está dada por $x = y^3 + 1$ de $(0, -1)$ a $(9, 2)$.

En los problemas 21 y 22, evalúe $\int_C (x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy$ sobre la curva C dada.

21.

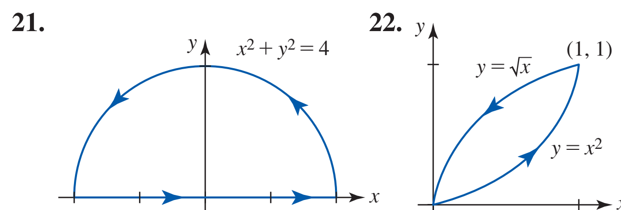


FIGURA 15.1.11 Curva del problema 21

22.

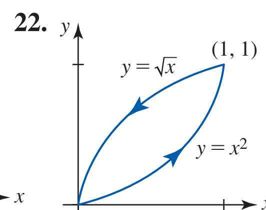


FIGURA 15.1.12 Curva del problema 22

En los problemas 23 y 24, evalúe $\int_C x^2y^3\,dx - xy^2\,dy$ sobre la curva C dada.

23.

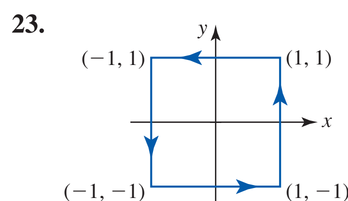


FIGURA 15.1.13 Curva del problema 23

24.

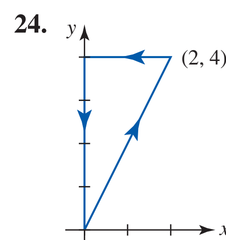


FIGURA 15.1.14 Curva del problema 24

25. Evalúe $\int_{-C} y\,dx - x\,dy$, donde C está dada por $x = 2\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\,t$, $0 \le t \le \pi$.

26. Evalúe $\int_{-C} x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy$, donde C está dada por $y = x^4$, $-1 \le x \le 1$.

En los problemas 27-30, evalúe $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ sobre la curva C dada entre $(0, 0, 0)$ y $(6, 8, 5)$.

27. C consiste en los segmentos de recta de $(0, 0, 0)$ a $(2, 3, 4)$ y de $(2, 3, 4)$ a $(6, 8, 5)$.

28. C definida por $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \frac{5}{4}t^2\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$

29.

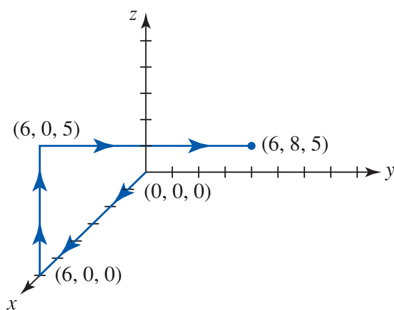


FIGURA 15.1.15 Curva del problema 29

30.

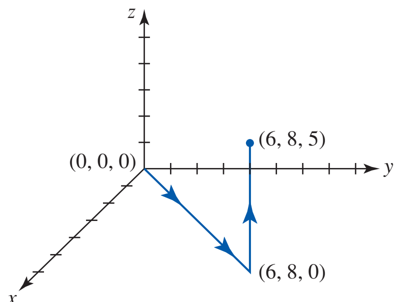


FIGURA 15.1.16 Curva del problema 30

31. Evalúe $\int_C 10x\,dx - 2xy^2\,dy + 6xz\,dz$ donde C está definida por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.

32. Evalúe $\int_C 3x\,dx - y^2\,dy + z^2\,dz$ donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ y

C_1: el segmento de recta de (0, 0, 0) a (1, 1, 0).
C_2: el segmento de recta de (1, 1, 0) a (1, 1, 1).
C_3: el segmento de recta de (1, 1, 1) a (0, 0, 0).

33. Verifique que la integral de línea $\int_C y^2\,dx + xy\,dy$ tiene el mismo valor sobre C para cada una de las siguientes parametrizaciones:

$$C:\ x = 2t + 1,\ y = 4t + 2,\ 0 \le t \le 1$$
$$C:\ x = t^2,\ y = 2t^2,\ 1 \le t \le \sqrt{3}$$
$$C:\ x = \ln t,\ y = 2\ln t,\ e \le t \le e^3.$$

34. Considere las tres curvas entre (0, 0) y (2, 4).

$$C_1:\ x = t,\ y = 2t,\ 0 \le t \le 2$$
$$C_2:\ x = t,\ y = t^2,\ 0 \le t \le 2$$
$$C_3:\ x = 2t - 4,\ y = 4t - 8,\ 2 \le t \le 3.$$

Demuestre que $\int_{C_1} xy\,ds = \int_{C_3} xy\,ds$, pero $\int_{C_1} xy\,ds \ne \int_{C_2} xy\,ds$. Explique.

≡ Aplicaciones

35. Si $\rho(x, y)$ es la densidad de un alambre (masa por longitud unitaria), entonces $m = \int_C \rho(x, y)\,ds$ es la masa del alambre. Calcule la masa de un alambre que tiene la forma del semicírculo $x = 1 + \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le \pi$, si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el eje y.

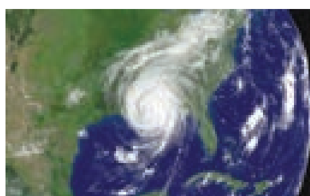
36. Las coordenadas del centro de masa de un alambre con densidad variable están dadas por

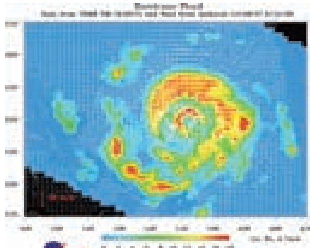
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m},$$

donde

$$m = \int_C \rho(x, y)\,ds,\ \ M_x = \int_C y\rho(x, y)\,ds,\ M_y = \int_C x\rho(x, y)\,ds.$$

Encuentre el centro de masa del alambre del problema 35.

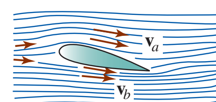




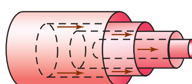
Huracán

15.2 Integrales de línea de campos vectoriales

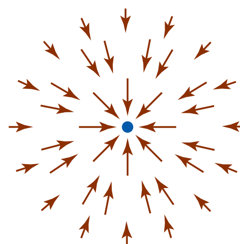
Introducción El movimiento del viento o el flujo de fluidos pueden describirse mediante un *campo de velocidades* en el que es posible asignar un vector en cada punto representando la velocidad de una partícula en el punto. Vea la FIGURA 15.2.1*a*) y *b*). Advierta que, en el campo de velocidades sobrepuesto a una imagen de satélite de un huracán en la foto al margen, los vectores muestran claramente la rotación característica en el sentido contrario al de las manecillas del reloj de los vientos dentro de un área de baja presión. Los vectores más largos cerca del centro



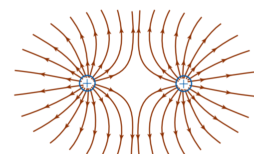
a) Flujo de aire alrededor de un ala de avión: $|\mathbf{v}_a| > |\mathbf{v}_b|$



b) Flujo laminar de la sangre en una arteria; las capas cilíndricas de sangre fluyen más rápido cerca del centro de la arteria



c) Campo de fuerza inversa al cuadrado; la magnitud de la fuerza de atracción es más grande cerca de la partícula



d) Líneas de fuerza alrededor de dos cargas iguales positivas

FIGURA 15.2.1 Ejemplos de campos vectoriales

del campo indican vientos de mayor velocidad que los de la periferia del campo. El concepto de un *campo de fuerza* desempeña un papel importante en mecánica, electricidad y magnetismo. Vea la figura 15.2.1*c*) y *d*). En esta sección estudiaremos una nueva función vectorial que describe a un campo de vectores, o **campo vectorial**, bidimensional o tridimensional y la conexión entre los campos vectoriales y las integrales de línea.

Campos vectoriales Un **campo vectorial** en el espacio bidimensional es una función de valores vectoriales

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

que asocia un único vector bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$ con cada punto (x, y) en una región R en el plano xy sobre el cual están definidas las funciones componentes escalares P y Q. De manera similar, un campo vectorial en el espacio tridimensional es una función

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

que asocia un único vector tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$ con cada punto (x, y, z) en una región D del espacio tridimensional con un sistema de coordenadas xyz.

EJEMPLO 1 Campo vectorial en el espacio bidimensional

Grafique el campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Solución Una manera de proceder consiste simplemente en elegir puntos en el plano xy y después graficar el vector $\mathbf{F}$ en cada punto. Por ejemplo, en (1, 1) dibujaríamos el vector $\mathbf{F}(1, 1) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Para el campo vectorial dado es posible dibujar de manera sistemática vectores de la misma longitud. Observe que $|\mathbf{F}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, y por ello los vectores de la misma longitud k deben yacer a lo largo de la curva definida por $\sqrt{x^2 + y^2} = k$; esto es, en cualquier punto sobre el círculo $x^2 + y^2 = k^2$, un vector tendría la misma longitud k. Por simplicidad vamos a elegir círculos que tienen algunos puntos en ellos con coordenadas enteras. Por ejemplo, para $k = 1$, $k = \sqrt{2}$ y $k = 2$ tenemos:

En $x^2 + y^2 = 1$: En los puntos (1, 0), (0, 1), (−1, 0), (0, −1), los vectores correspondientes $\mathbf{j}$, $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$, $\mathbf{i}$ tienen la misma longitud 1.
En $x^2 + y^2 = 2$: En los puntos (1, 1), (−1, 1), (−1, −1), (1, −1), los vectores correspondientes $-\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $-\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ tienen la misma longitud $\sqrt{2}$.
Sobre $x^2 + y^2 = 4$: En los puntos (2, 0), (0, 2), (−2, 0), (0, −2), los vectores correspondientes $2\mathbf{j}$, $-2\mathbf{i}$, $-2\mathbf{j}$, $2\mathbf{i}$ tienen la misma longitud 2.

Los vectores en estos puntos se ilustran en la FIGURA 15.2.2. ■

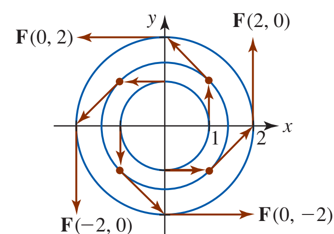
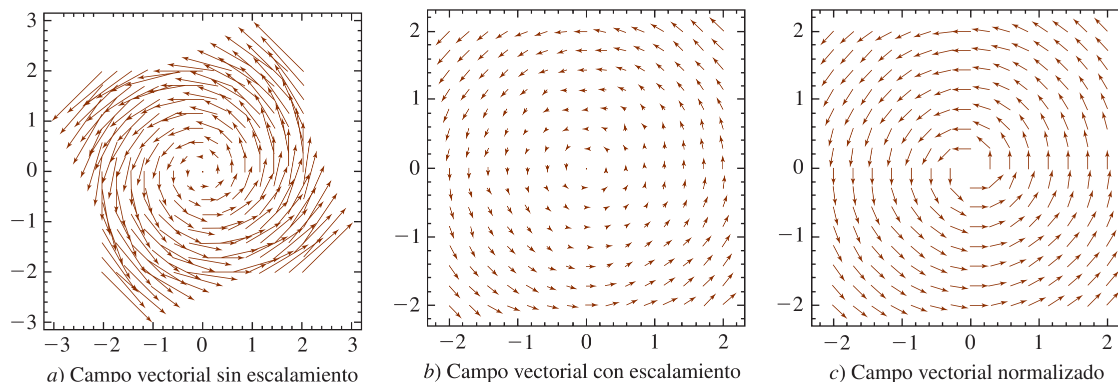


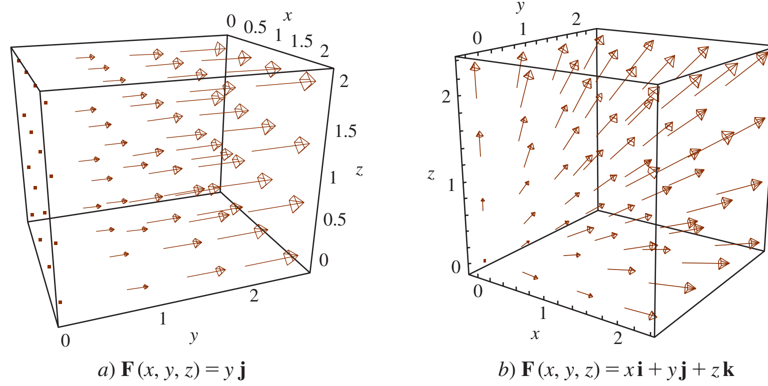
FIGURA 15.2.2 Campo vectorial bidimensional del ejemplo 1

En general, es casi imposible dibujar campos vectoriales a mano y por ello debemos confiar en tecnologías como las de un SAC. En la FIGURA 15.2.3 hemos mostrado una versión generada por computadora del campo vectorial del ejemplo 1. Muchas veces cuando los vectores se dibujan con su longitud correcta, el campo vectorial luce amontonado con vectores que se traslapan. Vea la figura 15.2.3*a*). Un SAC escalará los vectores de manera tal que los que se muestran tienen longitudes proporcionales a su longitud verdadera. Vea la figura 15.2.3*b*). En la figura 15.2.3*c*) se pre-


a) Campo vectorial sin escalamiento
b) Campo vectorial con escalamiento
c) Campo vectorial normalizado
FIGURA 15.2.3 Campo vectorial del ejemplo 1

senta la versión normalizada del mismo campo vectorial; en otras palabras, todos los vectores tienen la misma longitud unitaria. Advierta que la pequeña inclinación en las representaciones del campo vectorial de la figura 15.2.3 se deben al hecho de que el SAC calcula y grafica el vector en la dirección apropiada con el punto inicial (su cola) del vector ubicada en un punto especificado.

En la FIGURA 15.2.4 se ilustran dos campos vectoriales en el espacio tridimensional.



a) $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{j}$ *b)* $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

FIGURA 15.2.4 Campos vectoriales en el espacio tridimensional

Conexión con integrales de línea Podemos recurrir al concepto de un campo vectorial bidimensional o tridimensional para escribir una integral de línea general de un modo compacto. Por ejemplo, suponga que el campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ se define a lo largo de una curva paramétrica C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, y considere que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ es el vector de posición de los puntos sobre C. Entonces la derivada de $\mathbf{r}(t)$,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

nos lleva a definir la diferencial de $\mathbf{r}(t)$ como

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}. \tag{1}$$

Puesto que
$$\mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r} = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

podemos escribir entonces una **integral de línea de F a lo largo de *C*** como

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{2}$$

Similarmente, para una integral de línea sobre una curva en el espacio C,

$$\int_C P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{3}$$

donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \quad \text{y} \quad d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}.$$

Si $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $a \le t \le b$, entonces para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ en (2) definimos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = P(x(t), y(t))\mathbf{i} + Q(x(t), y(t))\mathbf{j} \tag{4}$$

y usamos (1) en la forma $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\,dt$ para escribir

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt. \tag{5}$$

El resultado en (5) se extiende de manera natural a (3) para campos vectoriales tridimensionales definidos a lo largo de una curva en el espacio C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$.

EJEMPLO 2 Empleo de (5)

Evalúe $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ y C está definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}, -1 \le t \le 1$.

Solución De (4) tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (e^{-t}e^t)\mathbf{i} + (e^t)^2\mathbf{j}\\ &= \mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Puesto que $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\,dt = (-e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j})\,dt$,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot d\mathbf{r} &= (\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j})\cdot(-e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j})\,dt\\ &= (-e^{-t} + e^{3t})\,dt\end{aligned}$$

y por ello de (5)

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{1}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt &= \int_{-1}^{1}(-e^{-t} + e^{3t})\,dt\\ &= \left(e^{-t} + \frac{1}{3}e^{3t}\right)\Big]_{-1}^{1}\\ &= \left(e^{-1} + \frac{1}{3}e^{3}\right) - \left(e + \frac{1}{3}e^{-3}\right)\\ &\approx 4.3282.\end{aligned}$$

El campo vectorial **F** y la curva C se muestran en la FIGURA 15.2.5. ■

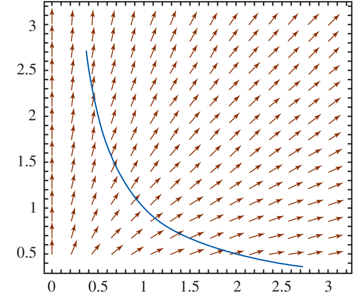


FIGURA 15.2.5 Curva y campo vectorial del ejemplo 2

Trabajo En la sección 11.3 vimos que el trabajo W realizado por una fuerza constante **F** que causa un desplazamiento en línea recta **d** de un objeto es $W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d}$. En la sección 6.8 se demostró que el trabajo realizado al mover un objeto de $x = a$ a $x = b$ por la fuerza $F(x)$ que varía en magnitud pero no en dirección está dado por la integral definida $W = \int_a^b F(x)\,dx$. En general, un campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ que actúa en cada punto sobre una curva suave C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, varía tanto en magnitud como en dirección. Vea la FIGURA 15.2.6*a*). Si A y B son los puntos $(x(a), y(a))$ y $(x(b), y(b))$, respectivamente, preguntamos:

- ¿Cuál es el trabajo realizado por **F** cuando su punto de aplicación se mueve a lo largo de C de A a B?

Para responder esta pregunta, suponga que C se divide en n subarcos de longitudes Δs_k y que (x_k^*, y_k^*) es un punto muestra sobre el subarco k-ésimo. Sobre cada subarco $\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*)$ es una fuerza constante. Si, como se muestra en la figura 15.2.6*b*), la longitud del vector

$$\Delta\mathbf{r}_k = (x_k - x_{k-1})\mathbf{i} + (y_k - y_{k-1})\mathbf{j} = \Delta x_k\mathbf{i} + \Delta y_k\mathbf{j}$$

es una aproximación a la longitud del subarco k-ésimo, entonces el trabajo aproximado realizado por **F** sobre el subarco es

$$\begin{aligned}\big(|\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*)|\cos\theta\big)\,|\Delta\mathbf{r}_k| &= \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*)\cdot\Delta\mathbf{r}_k\\ &= P(x_k^*, y_k^*)\,\Delta x_k + Q(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k.\end{aligned}$$

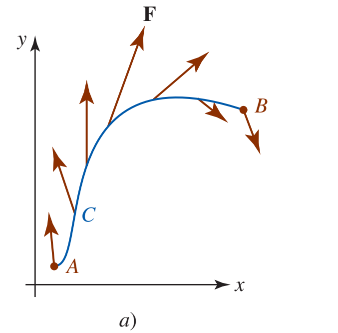
Sumando estos elementos de trabajo y tomando el límite, podemos definir de manera natural el trabajo realizado por **F** como la integral de línea de **F** a lo largo de C:

$$W = \int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \qquad \text{o} \qquad W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{6}$$

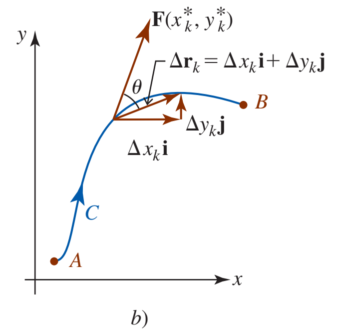
En el caso de un campo de fuerza que actúa en puntos sobre una curva en el espacio tridimensional, el trabajo $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ se define como en (3).

En este caso, ya que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$



a)



b)

FIGURA 15.2.6 Vector de fuerza variable **F** que actúa a lo largo de C

dejamos $d\mathbf{r} = \mathbf{T}\, ds$, donde $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ es, como vimos en la sección 12.1, una tangente unitaria a C. Por consiguiente,

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \text{comp}_{\mathbf{T}}\mathbf{F}\, ds. \tag{7}$$

En otras palabras,

- El trabajo efectuado por una fuerza **F** a lo largo de una curva C se debe por completo a la componente tangencial de **F**.

EJEMPLO 3 Trabajo

Determine el trabajo realizado por

a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ y ***b)*** $\mathbf{F} = \frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$

a lo largo de la curva C trazada por $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \text{sen}\, t\mathbf{j}$ desde $t = 0$ a $t = \pi$.

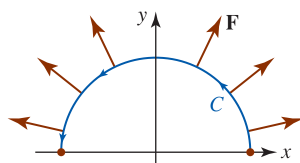


FIGURA 15.2.7 Vector de fuerza **F** que actúa a lo largo de C en el inciso *a)* del ejemplo 3

Solución

a) La función vectorial $\mathbf{r}(t)$ produce las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \text{sen}\, t$, $0 \leq t \leq \pi$, que reconocemos como un medio círculo. Como se advierte en la FIGURA 15.2.7, el campo de fuerza **F** es perpendicular a C en todo punto. (Vea el problema 1 de los ejercicios 15.2.) Puesto que las componentes tangenciales de **F** son cero, esperamos que el trabajo realizado a lo largo de C sea cero. Para ver esto usamos (5):

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_0^{\pi} (\cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\, t\,\mathbf{j}) \cdot (-\text{sen}\, t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})\, dt \\ &= \int_0^{\pi} (-\cos t\ \text{sen}\, t + \text{sen}\, t \cos t)\, dt = 0. \end{aligned}$$

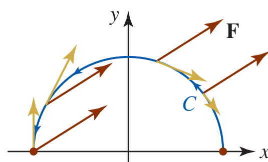


FIGURA 15.2.8 Vector de fuerza **F** que actúa a lo largo de C en el inciso *b)* del ejemplo 3

b) En la FIGURA 15.2.8 los vectores en dorado son las proyecciones de **F** sobre los vectores tangente unitarios. El trabajo realizado por **F** es

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \left(\frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) \cdot (-\text{sen}\, t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \left(-\frac{3}{4}\text{sen}\, t + \frac{1}{2}\cos t\right) dt \\ &= \left(\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{2}\text{sen}\, t\right)\Big]_0^{\pi} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Las unidades de trabajo dependen de las unidades de $|\mathbf{F}|$ y de las unidades de distancia. ■

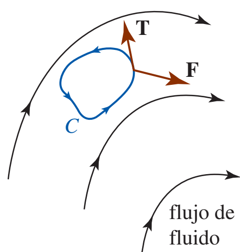


FIGURA 15.2.9 Curva cerrada en un campo de velocidades

Circulación Una integral de línea de un campo vectorial **F** a lo largo de una curva cerrada simple C se dice que será la **circulación** de **F** alrededor de C; esto es.

$$\text{circulación} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds. \tag{8}$$

En particular, si **F** es el campo de velocidades de un fluido, entonces la circulación (8) es una medida de la cantidad por la cual el fluido tiende a girar por la curva C rotando, o circulando, alrededor de ella. Por ejemplo, si **F** es perpendicular a **T** para todo (x, y) sobre C, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 0$ y la curva no se mueve en absoluto. Por otro lado, $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds > 0$ y $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds < 0$ significa que el fluido tiende a rotar C en dirección contraria a la de las manecillas del reloj y en el sentido de las manecillas del reloj, respectivamente. Vea la FIGURA 15.2.9.

Campos vectoriales gradiente Asociado con una función f de dos o tres variables hay un campo vectorial. Para una función de dos variables $f(x, y)$, el gradiente

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \tag{9}$$

define un campo vectorial bidimensional llamado **campo gradiente** de *f*. Para una función de tres variables $f(x, y, z)$, el campo gradiente tridimensional de *f* se define como

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}. \tag{10}$$

EJEMPLO 4 Campo gradiente

Determine el campo gradiente de $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Solución Por definición, el campo gradiente de *f* es

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}.$$ ■

Recuerde de la sección 13.1 que las curvas definidas por $f(x, y) = c$, para *c* adecuada, se denominan **curvas de nivel** de *f*. En el ejemplo 5, las curvas de nivel de *f* son la familia de hipérbolas $x^2 - y^2 = c$, donde *c* es una constante. Con la ayuda de un SAC, hemos superpuesto en la FIGURA 15.2.10 un muestreo de las curvas de nivel $x^2 - y^2 = c$ (azul) y vectores en el campo gradiente $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ (rojo). Para un mayor énfasis visual hemos elegido graficar todos los vectores en el campo de manera que sus longitudes sean las mismas. Cada vector en el campo gradiente $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ es perpendicular a alguna curva de nivel. En otras palabras, si la cola o punto inicial de un vector coincide con un punto (x, y) sobre una curva de nivel, entonces el vector es perpendicular a la curva de nivel en (x, y).

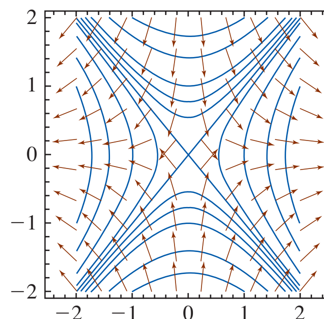


FIGURA 15.2.10 Curvas de nivel de *f* y campo gradiente de *f* en el ejemplo 4

Campos vectoriales conservativos Un campo vectorial **F** se dice que es **conservativo** si **F** puede escribirse como un gradiente de una función escalar ϕ. En otras palabras, **F** es conservativo si existe una función ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$. La función ϕ recibe el nombre de **función potencial** de **F**.

EJEMPLO 5 Campo vectorial conservativo

Demuestre que el campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es conservativo.

Solución Considere la función $\phi(x, y) = xy$. El gradiente de la función escalar ϕ es

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Como $\nabla\phi = \mathbf{F}(x, y)$ concluimos que $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo y que ϕ es una función potencial de **F**. El campo vectorial se presenta en la FIGURA 15.2.11. ■

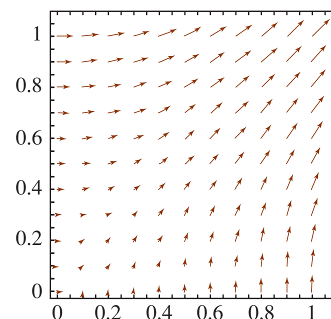


FIGURA 15.2.11 Campo vectorial conservativo del ejemplo 5

Desde luego, no todo campo vectorial es un campo conservativo aunque muchos campos vectoriales encontrados en física son conservativos. (Vea el problema 51 en los ejercicios 15.2.) Para los propósitos presentes, la importancia de los campos vectoriales conservativos será evidente en la siguiente sección cuando continuemos con nuestro estudio de integrales de línea.

Ejercicios 15.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-46.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, grafique algunos vectores representativos en el campo vectorial dado.

1. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{j}$
6. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{j}$

En los problemas 7-10, asocie la figura dada con uno de los campos vectoriales en *a*)-*d*).

a) $\mathbf{F}(x, y) = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
b) $\mathbf{F}(x, y) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
c) $\mathbf{F}(x, y) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
d) $\mathbf{F}(x, y) = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

7.

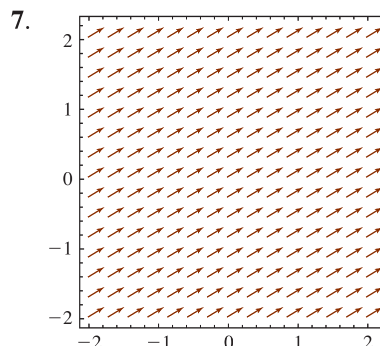


FIGURA 15.2.12 Campo vectorial del problema 7

8.

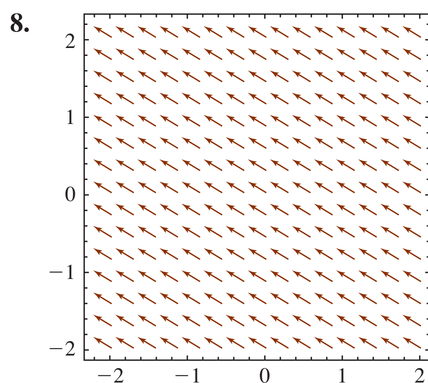


FIGURA 15.2.13 Campo vectorial del problema 8

9.

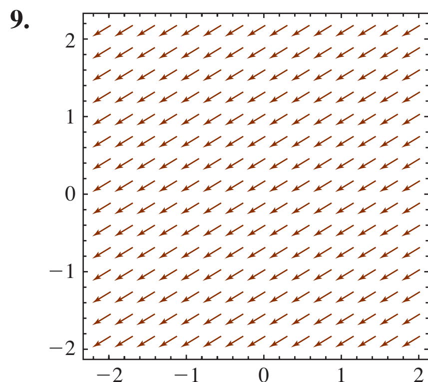


FIGURA 15.2.14 Campo vectorial del problema 9

10.

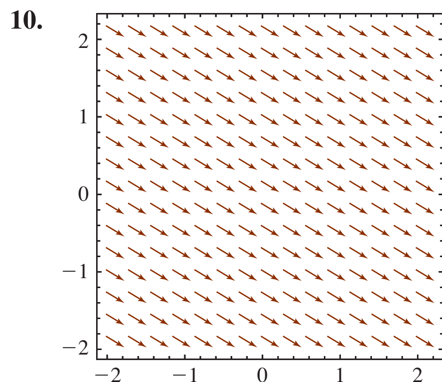


FIGURA 15.2.15 Campo vectorial del problema 10

En los problemas 11-14, asocie la figura dada con uno de los campos vectoriales en *a*)-*d*).

***a*)** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

***b*)** $\mathbf{F}(x, y, z) = -z\mathbf{k}$

***c*)** $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$

***d*)** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

11.

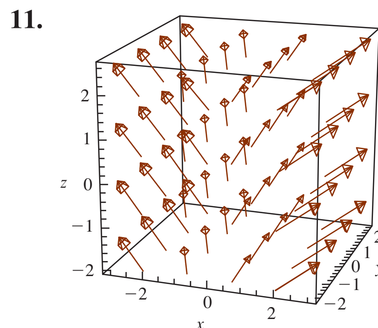


FIGURA 15.2.16 Campo vectorial del problema 11

12.

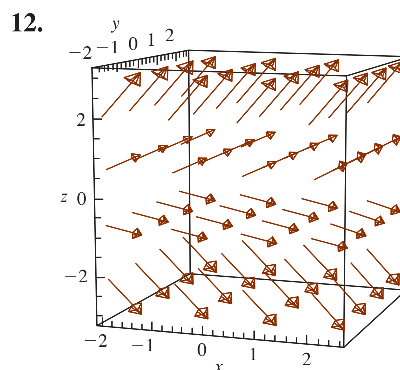


FIGURA 15.2.17 Campo vectorial del problema 12

13.

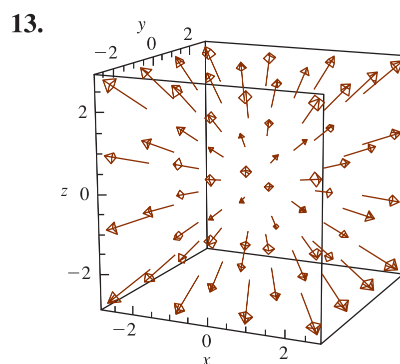


FIGURA 15.2.18 Campo vectorial del problema 13

14.

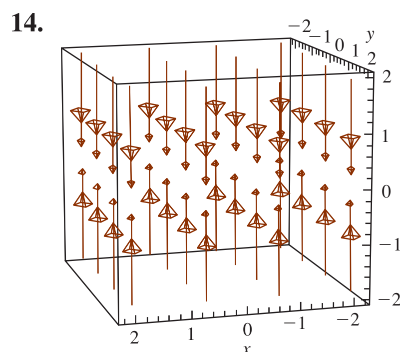


FIGURA 15.2.19 Campo vectorial del problema 14

En los problemas 15-20, evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

15. $\mathbf{F}(x, y) = y^3\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$, $0 \le t \le \ln 2$

16. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2$

17. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + (6t + 1)\mathbf{j}$, $-1 \le t \le 1$

18. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le \pi/6$

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$;
$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j} + xye^{xyz}\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

21. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de $y = \ln x$ desde $(1, 0)$ a $(e, 1)$.

22. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + 4y^2\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de la curva suave por partes que consiste en los segmentos de recta de $(-2, 2)$ a $(0, 0)$ y de $(0, 0)$ a $(2, 3)$.

23. Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (x + 2y)\mathbf{i} + (6y - 2x)\mathbf{j}$ que actúa una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del triángulo con vértices (1, 1), (3, 1) y (3, 2).

24. Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ que actúa a lo largo de la curva dada por $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ de $t = 1$ a $t = 3$.

25. Encuentre el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}(x, y) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ que actúa una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 9$.

26. En un campo de fuerza inverso al cuadrado $\mathbf{F} = c\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, donde c es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, determine el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la recta de (1, 1, 1) a (3, 3, 3).

27. Para el campo vectorial gradiente que se obtuvo en el ejemplo 4, determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = \nabla f$ que actúa a lo largo de $\mathbf{r}(t) = 5 \cos t\mathbf{i} + 5 \operatorname{sen} t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

28. Para el campo vectorial conservativo del ejemplo 5, encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ que actúa a lo largo de $\mathbf{r}(t) = 2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 10 \cos t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

29. Un campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y)$ actúa en cada punto sobre una curva C, que es la unión de C_1, C_2 y C_3 mostrada en la FIGURA 15.2.20. $|\mathbf{F}|$ se mide en libras y la distancia se mide en pies utilizando la escala dada en la figura. Emplee los vectores representativos que se muestran para aproximar el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de C. [*Sugerencia*: Emplee $W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$.]

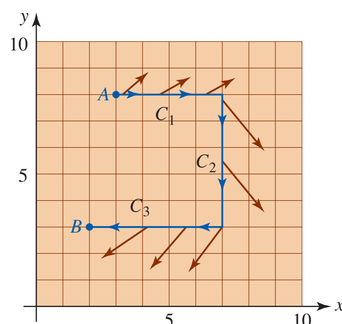


FIGURA 15.2.20 Curva C y campo de fuerza $\mathbf{F}$ del problema 29

30. Suponga que una curva suave C es descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ para $a \le t \le b$. Sean la aceleración, la velocidad y la rapidez dadas por $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ y $v = |\mathbf{v}|$, respectivamente. Empleando la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, demuestre que, en la ausencia de fricción, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover una partícula de masa constante m desde el punto A en $t = a$ hasta el punto B en $t = b$ es el mismo que el cambio en la energía cinética:

$$K(B) - K(A) = \frac{1}{2}m[v(b)]^2 - \frac{1}{2}m[v(a)]^2.$$

$$\left[\textit{Sugerencia}\text{: Considere } \frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}.\right]$$

En los problemas 31-36, encuentre el campo gradiente de la función f dada.

31. $f(x, y) = \frac{1}{6}(3x - 6y)^2$ **32.** $f(x, y) = x - y + 2x \cos 5xy$

33. $f(x, y, z) = x \tan^{-1} yz$ **34.** $f(x, y, z) = x - x^2yz^4$

35. $f(x, y, z) = y + z - xe^{-y^2}$

36. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^4 + 3z^6)$

En los problemas 37-40, asocie el campo vectorial conservativo dado $\mathbf{F}$ con una de las funciones potencial en *a*)-*d*).

a) $\phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - 5$ ***b***) $\phi(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$

c) $\phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 4$ ***d***) $\phi(x, y) = 2x + \frac{1}{2}y^2 + 1$

37. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ **38.** $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$

39. $\mathbf{F}(x, y) = 2\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ **40.** $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

En los problemas 41-44, el campo vectorial dado es conservativo. Mediante ensayo y error, determine una función potencial ϕ para $\mathbf{F}$.

41. $\mathbf{F}(x, y) = \cos x\mathbf{i} + (1 - \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$

42. $\mathbf{F}(x, y) = e^{-y}\mathbf{i} - xe^{-y}\mathbf{j}$

43. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 12z^2\mathbf{k}$

44. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 45-50, utilice un SAC para superponer las gráficas del campo gradiente de f y las curvas de nivel de f sobre el mismo conjunto de ejes coordenados.

45. $f(x, y) = x + 3y$ **46.** $f(x, y) = x - y^2$

47. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ **48.** $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

49. $f(x, y) = e^{-x} \cos y$ **50.** $f(x, y) = \cos(x + y)$

≡ Piense en ello

51. Todo campo de fuerzas inverso al cuadrado $\mathbf{F} = c\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, donde c es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, es conservativo. Demuestre lo anterior determinando la función potencial $\phi(x, y, z)$ para $\mathbf{F}$.

52. ¿Dos funciones diferentes f y g pueden tener el mismo campo gradiente?

15.3 Independencia de la trayectoria

Introducción En esta sección nos referiremos a una curva C suave por partes entre un punto inicial A y un punto terminal B como una **trayectoria** o **trayectoria de integración**. El valor de una integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ suele depender de la trayectoria de integración. En otras palabras, si C_1 y C_2 son dos trayectorias diferentes entre los mismos puntos A y B, entonces en general esperamos que $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \ne \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Sin embargo, hay excepciones muy importantes. La noción de un campo vectorial conservativo $\mathbf{F}$ desempeña un papel importante en la discusión que sigue. Se le sugiere repasar este concepto en la sección 15.2.

Nota: Para evitar la repetición innecesaria suponemos todo el tiempo que **F** es un campo vectorial continuo en alguna región bidimensional o tridimensional, que sus funciones componentes tienen primeras derivadas parciales continuas en la región, y que la trayectoria C yace por completo en esta última.

EJEMPLO 1 Independencia de la trayectoria

La integral $\int_C y\,dx + x\,dy$ tiene el mismo valor en cada trayectoria C entre (0, 0) y (1, 1) que se muestra en la FIGURA 15.3.1. Quizá recuerde de los problemas 13-16 de los ejercicios 15.1 que sobre estas trayectorias

$$\int_C y\,dx + x\,dy = 1.$$

También se le sugiere verificar $\int_C y\,dx + x\,dy = 1$ sobre las curvas $y = x^3$, $y = x^4$ y $y = \sqrt{x}$ entre (0, 0) y (1, 1). La relevancia de todo esto sugiere que la integral $\int_C y\,dx + x\,dy$ no depende de la trayectoria que une a estos dos puntos. Proseguimos con esta discusión en el ejemplo 2.

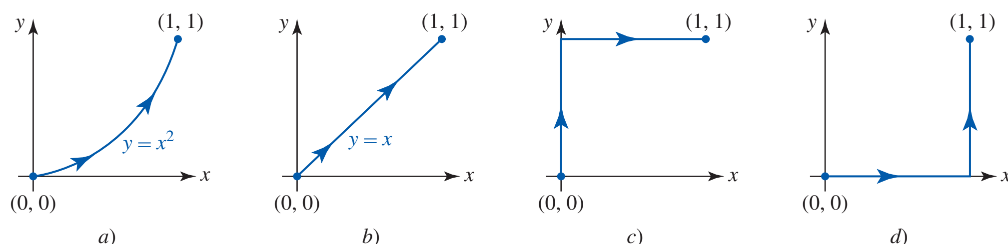


FIGURA 15.3.1 La integral de línea del ejemplo 1 es la misma sobre cuatro trayectorias ■

La integral en el ejemplo 1 puede interpretarse como la integral de línea de un campo vectorial **F** a lo largo de una trayectoria C. Si $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ y $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$, entonces $\int_C y\,dx + x\,dy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. En el ejemplo 5 de la sección 15.2 se demostró que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es conservativo encontrando la función potencial $\phi(x, y) = xy$ para **F**. Recuerde que esto significa que $\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi$.

Un teorema fundamental El siguiente teorema establece una importante relación entre el valor de una integral de línea sobre una trayectoria que yace dentro de un campo vectorial conservativo. Además, proporciona un medio de evaluar estas integrales de línea de manera que es análogo al teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a), \tag{1}$$

donde $f(x)$ es una antiderivada de $f'(x)$. En el siguiente teorema, conocido como **teorema fundamental para integrales de línea**, el gradiente de una función escalar ϕ,

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j},$$

desempeña la parte de la derivada $f'(x)$ en (1).

Teorema 15.3.1 Teorema fundamental

Suponga que C es la trayectoria en una región abierta R del plano xy dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} = y(t)\mathbf{j}$, $a \le t \le b$. Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo en R y ϕ es una función potencial para **F**, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A), \tag{2}$$

donde $A = (x(a), y(a))$ y $B = (x(b), y(b))$.

DEMOSTRACIÓN Probaremos el teorema para una trayectoria suave C. Puesto que ϕ es una función potencial para $\mathbf{F}$ tenemos

$$\mathbf{F} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Usando después $\mathbf{r}'(t) = (dx/dt)\mathbf{i} + (dy/dt)\mathbf{j}$ es posible escribir la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de la trayectoria C como

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt\\ &= \int_a^b\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt.\end{aligned}$$

En vista de la regla de la cadena (teorema 13.5.1),

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

y por ello se concluye que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \frac{d\phi}{dt}\,dt\\ &= \phi(x(t), y(t))\Big]_a^b\\ &= \phi(x(b), y(b)) - \phi(x(a), y(a))\\ &= \phi(B) - \phi(A).\end{aligned}$$

■

Para curvas suaves por partes, la prueba anterior debe modificarse considerando cada arco suave de la curva C.

Independencia de la trayectoria Si el valor de una integral de línea es el mismo para *cada* trayectoria en una región que conecta el punto inicial A y el punto terminal B, entonces se dice que la integral será **independiente de la trayectoria**. En otras palabras, una integral de línea $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ de $\mathbf{F}$ a lo largo de C es independiente de la trayectoria si $\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ para cualesquiera dos trayectorias C_1 y C_2 entre A y B. El teorema 15.3.1 muestra que si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo en una región abierta bidimensional o tridimensional, entonces $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ depende sólo de los puntos inicial y terminal A y B de la trayectoria C, y no de C misma. En otras palabras, las integrales de línea de campos vectoriales conservativos son independientes de la trayectoria. Dichas integrales a menudo se escriben

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla\phi\cdot d\mathbf{r}. \tag{3}$$

EJEMPLO 2 Repaso del ejemplo 1

Evalúe $\int_C y\,dx + x\,dy$, donde C es la trayectoria con punto inicial (0, 0) y punto terminal (1, 1).

Solución La trayectoria C que se muestra en la FIGURA 15.3.2 representa cualquier curva suave por partes con puntos inicial y terminal (0, 0) y (1, 1). Hemos visto varias veces que $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo definido en cada punto del plano xy y que $\phi(x, y) = xy$ es una función potencial para $\mathbf{F}$. De tal modo, en vista de (2) del teorema 15.3.1 y (3), podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_C y\,dx + x\,dy &= \int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \nabla\phi\cdot d\mathbf{r}\\ &= xy\Big]_{(0,0)}^{(1,1)}\\ &= 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1.\end{aligned}$$

■

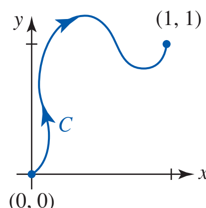
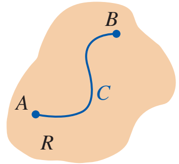


FIGURA 15.3.2 Curva suave por partes del ejemplo 2

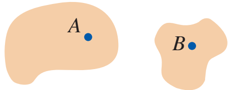
Al usar el teorema fundamental del cálculo (1), *cualquier* antiderivada de $f'(x)$ puede utilizarse, tal como $f(x) + K$, donde K es una constante. De manera similar, una función potencial para el campo vectorial del ejemplo 2 es $\phi(x, y) = xy + K$, donde K es una constante. Podemos descartar esta constante al usar (2) del teorema 15.3.1 puesto que

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (\phi(B) + K) - (\phi(A) + K) = \phi(B) - \phi(A).$$

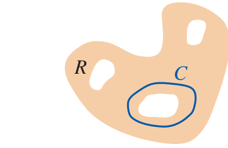
Antes de proceder necesitamos considerar algunas regiones especiales en el plano.



a) Región conexa R



b) R no es conexa



c) Región R múltiplemente conexa

FIGURA 15.3.3 Regiones en el plano

Terminología Afirmamos que una región (en el plano o en el espacio) es **conexa** si cada par de puntos A y B en la región puede unirse mediante una curva suave por partes que yace por completo en la región. Una región R en el plano es **simplemente conexa** si es conexa y toda curva cerrada simple C que yace del todo dentro de la región puede reducirse, o contraerse, hasta un punto sin abandonar R. La última condición significa que si C es cualquier curva cerrada simple que yace por completo en R, entonces la región en el interior de C también yace por completo en R. Poniéndolo en términos generales, una región simplemente conexa no tiene hoyos en ella. La región R en la FIGURA 15.3.3*a*) es una región simplemente conexa. En la figura 15.3.3*b*) la región R que se muestra no es conexa, o **disconexa**, puesto que A y B no pueden unirse mediante una curva C suave por partes que esté en R. La región en la figura 15.3.3*c*) es conexa pero no simplemente conexa porque tiene tres hoyos en ella. La curva representativa C en la figura rodea a uno de los hoyos, y por ello no puede contraerse hasta un punto sin dejar la región. Esta última región se dice que es **múltiplemente conexa**.

En una región conexa abierta R, las nociones de independencia de la trayectoria y un campo vectorial conservativo son equivalentes. Esto significa: si $\mathbf{F}$ es conservativo en R, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C, e inversamente, si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

Enunciamos lo anterior de manera formal en el siguiente teorema.

Teorema 15.3.2 Conceptos equivalentes

En una región conexa abierta R, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C si y sólo si el campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo en R.

DEMOSTRACIÓN Si $\mathbf{F}$ es conservativo en R, entonces ya hemos visto que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C como una consecuencia del teorema 15.3.1.

Por conveniencia probamos el inverso para una región R en el plano. Suponga que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en R y que (x_0, y_0) y (x, y) son puntos arbitrarios en la región R. Sea la función $\phi(x, y)$ definida como

$$\phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

donde C es una trayectoria arbitraria en R de (x_0, y_0) a (x, y) y $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$. Vea la FIGURA 15.3.4*a*). Después de esto se elige un punto (x_1, y), $x_1 \neq x$, de manera que el segmento de recta de (x_1, y) a (x, y) esté en R. Vea la figura 15.3.4*b*). Luego por la independencia de la trayectoria podemos escribir

$$\phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

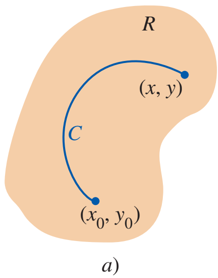
En este caso,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy$$

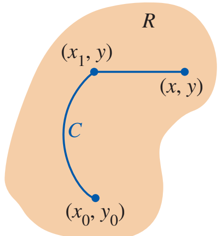
puesto que la primera integral no depende de x. Sin embargo, sobre el segmento de recta entre (x_1, y) y (x, y), y es constante de manera que $dy = 0$. Por consiguiente, $\int_{(x_1, y)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} P\,dx$.

Por la forma de la derivada del teorema fundamental del cálculo (teorema 5.5.2) tenemos entonces

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx = P(x, y).$$



a)



b)

FIGURA 15.3.4 Región R en la prueba del teorema 15.3.2

De igual modo es posible demostrar que $\partial\phi/\partial y = Q(x, y)$. En consecuencia, de

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \mathbf{F}(x, y)$$

concluimos que $\mathbf{F}$ es conservativo. ■

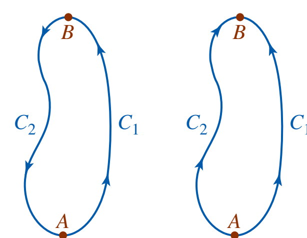
Integrales alrededor de trayectorias cerradas Recuerde de la sección 15.1 que una trayectoria, o curva, C se dice que es cerrada cuando su punto inicial A es el mismo que el punto terminal B. Si C es una curva paramétrica definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, entonces C es **cerrada** cuando $A = B$, esto es, $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del teorema 15.3.1.

Teorema 15.3.3 Conceptos equivalentes

En una región conexa abierta R, $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria si y sólo si $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada C en R.

DEMOSTRACIÓN Primero demostramos que si $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, entonces $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada C en R. Para ver esto vamos a suponer que A y B son cualesquiera dos puntos sobre C y que $C = C_1 \cup C_2$, donde C_1 es una trayectoria de A a B y C_2 es una trayectoria de B a A. Vea la FIGURA 15.3.5*a*). En ese caso,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}, \tag{4}$$



a) $C = C_1 \cup C_2$ *b*) $C = C_1 \cup (-C_2)$

FIGURA 15.3.5 Trayectorias en la prueba del teorema 15.3.3

donde $-C_2$ es ahora una trayectoria de A a B. Debido a la independencia de la trayectoria, $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. De tal modo, (4) implica que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$.

A continuación, si probamos el inverso de que si $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada C en R, entonces $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria. Dejemos que C_1 y C_2 representen cualesquiera dos trayectorias de A a B y por ello $C = C_1 \cup (-C_2)$ es una trayectoria cerrada. Vea la figura 15.3.5*b*). Se sigue de $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ o

$$0 = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

que $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. Por consiguiente, $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria. ■

Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo definido sobre una región conexa abierta y C es una trayectoria cerrada que yace por completo en la región. Cuando los resultados de los teoremas anteriores se juntan concluimos que

$$\mathbf{F} \text{ conservativo} \Leftrightarrow \text{independencia de la trayectoria} \Leftrightarrow \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{5}$$

El símbolo $\Leftrightarrow$ en (5) se lee "equivalente a" o "si y sólo si".

Prueba para un campo conservativo Las implicaciones en (5) muestran que si la integral de línea $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ no es independiente de la trayectoria, entonces el campo vectorial no es conservativo. Sin embargo, hay una forma más sencilla de determinar si $\mathbf{F}$ es conservativo. El siguiente teorema es una prueba para un campo vectorial conservativo que recurre a las derivadas parciales de las funciones componentes de $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$.

Teorema 15.3.4 Prueba para un campo conservativo

Suponga que $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo en una región abierta R y que P y Q son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en R. Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{6}$$

para todo (x, y) en R. Inversamente, si se cumple la igualdad (6) para todo (x, y) en una región R simplemente conexa, entonces $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ es conservativo en R.

DEMOSTRACIÓN PARCIAL Probamos la primera mitad del teorema. Suponemos que las funciones componentes del campo vectorial conservativo $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta R. Puesto que $\mathbf{F}$ es conservativo, existe una función potencial ϕ tal que

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Así, $P = \partial\phi/\partial x$ y $Q = \partial\phi/\partial y$. En este caso

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}.$$

Del teorema 13.3.1, las derivadas parciales mixtas de segundo orden son iguales y por ello $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ como se quería demostrar. ■

EJEMPLO 3 Empleo del teorema 15.3.4

El campo vectorial conservativo $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ en el ejemplo 2 es continuo y tiene funciones componentes cuyas primeras derivadas parciales son continuas en toda la región abierta R consistente en todo el plano xy. Con las identificaciones $P = y$ y $Q = x$ se deduce de (6) del teorema 15.3.4,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$ ■

EJEMPLO 4 Empleo del teorema 15.3.4

Determine si el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 2y^3)\mathbf{i} + (x + 5y)\mathbf{j}$ es conservativo.

Solución Con $P = x^2 - 2y^3$ y $Q = x + 5y$, encontramos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6y^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$ para todos los puntos en el plano, se sigue del teorema 15.3.4 que $\mathbf{F}$ no es conservativo. ■

EJEMPLO 5 Empleo del teorema 15.3.4

Determine si el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -ye^{-xy}\mathbf{i} - xe^{-xy}\mathbf{j}$ es conservativo.

Solución Con $P = -ye^{-xy}$ y $Q = -xe^{-xy}$, encontramos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = xye^{-xy} - e^{-xy} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Las componentes de $\mathbf{F}$ son continuas y tienen derivadas parciales continuas. De tal modo, (6) se cumple en todo el plano xy, que es una región simplemente conexa. Del inverso del teorema 15.3.4 concluimos que $\mathbf{F}$ es conservativo. ■

Tenemos una pregunta más importante que responder en esta sección:

- Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo, ¿cómo se encuentra una función potencial ϕ para $\mathbf{F}$? (7)

El inciso *b*) del siguiente ejemplo utiliza la integración parcial. Se recomienda un repaso de la sección 14.2.

En el siguiente ejemplo damos la respuesta a la pregunta planteada en (7).

EJEMPLO 6 Integral que es independiente de la trayectoria

a) Demuestre que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 - 6xy + 6)\mathbf{i} + (2xy - 3x^2 - 2y)\mathbf{j}$, es independiente de la trayectoria C entre $(-1, 0)$ y $(3, 4)$.

b) Encuentre una función potencial ϕ para $\mathbf{F}$.

c) Evalúe $\displaystyle\int_{(-1,0)}^{(3,4)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

Solución

***a*)** Al identificar $P = y^2 - 6xy + 6$ y $Q = 2xy - 3x^2 - 2y$ se obtiene

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y - 6x = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

El campo vectorial **F** es conservativo porque (6) se cumple en todo el plano xy y como consecuencia la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria entre cualesquiera dos puntos A y B en el plano.

***b*)** Debido a que **F** es conservativo, hay una función potencial ϕ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 - 6xy + 6 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xy - 3x^2 - 2y. \tag{8}$$

El empleo de integración parcial respecto a la primera expresión en (8) produce

$$\phi = \int (y^2 - 6xy + 6)\, dx = xy^2 - 3x^2y + 6x + g(y), \tag{9}$$

donde $g(y)$ es la "constante" de integración. A continuación tomamos la derivada parcial de (9) con respecto a y y la igualamos con la segunda expresión en (8):

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xy - 3x^2 + g'(y) = 2xy - 3x^2 - 2y.$$

De la última igualdad encontramos $g'(y) = -2y$. Al integrar de nuevo se obtiene $g(y) = -y^2 + C$, donde C es una constante. De tal manera,

$$\phi = xy^2 - 3x^2y + 6x - y^2 + C. \tag{10}$$

***c*)** Ahora podemos usar el teorema 15.3.2 y la función potencial (10) (sin la constante):

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{(-1,0)}^{(3,4)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (xy^2 - 3x^2y + 6x - y^2)\Big]_{(-1,0)}^{(3,4)} \\ &= (48 - 108 + 18 - 16) - (-6) = -52.\end{aligned}$$

■

Nota: Puesto que se mostró que la integral en el ejemplo 6 es independiente de la trayectoria en el inciso *a*), podemos evaluarla sin determinar una función potencial. Tenemos la posibilidad de integrar a lo largo de cualquier curva conveniente conectando los puntos dados. En particular, la recta $y = x + 1$ es una curva de este tipo. Al usar x como parámetro se produce en ese caso

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (y^2 - 6xy + 6)\, dx + (2xy - 3x^2 - 2y)\, dy \\ &= \int_{-1}^{3} [(x+1)^2 - 6x(x+1) + 6]\, dx + [2x(x+1) - 3x^2 - 2(x+1)]\, dx \\ &= \int_{-1}^{3} (-6x^2 - 4x + 5)\, dx = -52.\end{aligned}$$

Campos vectoriales conservativos tridimensionales Para un campo vectorial conservativo tridimensional

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

y una curva espacial suave por partes $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$, la forma básica de (2) es la misma:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} \\ &= \phi(B) - \phi(A) = \phi(x(b), y(b), z(b)) - \phi(x(a), y(a), z(a)).\end{aligned} \tag{11}$$

Si C es una curva en el espacio tridimensional, una integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria siempre que el campo vectorial tridimensional

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

sea conservativo. El análogo tridimensional del teorema 15.3.4 resulta similar. Si **F** es conservativo y P, Q y R son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en alguna región abierta del espacio tridimensional, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}. \tag{12}$$

Inversamente, si (12) se cumple en toda una región apropiada del espacio tridimensional, entonces **F** es conservativo.

EJEMPLO 7 Integral que es independiente de la trayectoria

a) Demuestre que la integral de línea

$$\int_C (y + yz)\,dx + (x + 3z^3 + xz)\,dy + (9yz^2 + xy - 1)\,dz$$

es independiente de la trayectoria entre (1, 1, 1) y (2, 1, 4).

b) Evalúe $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

Solución

a) Con las identificaciones

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + yz)\mathbf{i} + (x + 3z^3 + xz)\mathbf{j} + (9yz^2 + xy - 1)\mathbf{k},$$

$$P = y + yz, \qquad Q = x + 3z^2 + xz \qquad \text{y} \qquad R = 9yz^2 + xy - 1,$$

vemos que las igualdades

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + z = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = y = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = 9z^2 + x = \frac{\partial R}{\partial y}$$

se cumplen en todo el espacio tridimensional. De (12) concluimos que **F** es conservativo y, por tanto, la integral es independiente de la trayectoria.

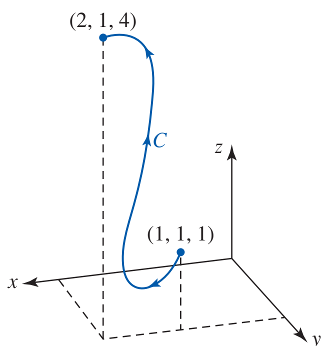


FIGURA 15.3.6 Trayectoria representativa C del ejemplo 7

b) La trayectoria C que se muestra en la FIGURA 15.3.6 representa cualquier trayectoria con puntos inicial y terminal (1, 1, 1) y (2, 1, 4). Para evaluar la integral ilustramos de nuevo cómo encontrar una función potencial $\phi(x, y, z)$ para **F** utilizando integración parcial.

En primer lugar sabemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = R.$$

Integrando la primera de estas tres ecuaciones con respecto a x se obtiene

$$\phi = xy + xyz + g(y, z).$$

La derivada de esta última expresión con respecto a y debe ser entonces igual a Q:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = x + 3z^3 + xz.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 3z^3 \qquad \text{implica} \qquad g = 3yz^3 + h(z).$$

En consecuencia, $$\phi = xy + xyz + 3yz^3 + h(z).$$

La derivada parcial de esta última expresión con respecto a z debe ser ahora igual a la función R:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = xy + 9yz^2 + h'(z) = 9yz^2 + xy - 1.$$

De esto obtenemos $h'(z) = -1$ y $h(z) = -z + K$. Descartando K, es posible escribir

$$\phi = xy + xyz + 3yz^3 - z. \tag{13}$$

Por último, de (2) y la función potencial (13) obtenemos

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} (y + yz)\,dx + (x + 3z^3 + xz)\,dy + (9yz^2 + xy - 1)\,dz$$

$$= (xy + xyz + 3yz^3 - z)\Big]_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} = 198 - 4 = 194. \qquad ■$$

Conservación de la energía En un campo de fuerza conservativo **F**, el trabajo realizado por la fuerza sobre una partícula que se mueve de la posición A a la posición B es el mismo para todas las trayectorias entre estos puntos. Además, el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de una trayectoria cerrada es *cero*. Vea el problema 31 en los ejercicios 15.3. Por esta razón, un campo de fuerzas de este tipo se dice que es **conservativo**. En un campo conservativo **F** se cumple la *ley de conservación de la energía mecánica*: para una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria en un campo conservativo,

$$\textit{energía cinética} + \textit{energía potencial} = \textit{constante}.$$

Vea el problema 37 en los ejercicios 15.3.

$\int_C$ NOTAS DESDE EL AULA

Una fuerza de fricción tal como la resistencia del aire es *no conservativa*. Las fuerzas no conservativas son *disipativas* en cuanto a que su acción reduce la energía cinética sin un aumento correspondiente en la energía potencial. Enunciado de otra manera, si el trabajo realizado $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ depende de la trayectoria, entonces **F** es no conservativo.

Ejercicios 15.3 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-46.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-10, demuestre que la integral dada es independiente de la trayectoria. Evalúe de dos maneras:

a) encuentre una función potencial ϕ, y

b) integre a lo largo de cualquier trayectoria conveniente entre los puntos.

1. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(2,2)} x^2\,dx + y^2\,dy$

2. $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xy\,dx + x^2\,dy$

3. $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(3,2)} (x + 2y)\,dx + (2x - y)\,dy$

4. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(\pi/2,0)} \cos x \cos y\,dx + (1 - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dy$

5. $\displaystyle\int_{(4,1)}^{(4,4)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{y^2}$ en cualquier trayectoria que no cruce el eje x

6. $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(3,4)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en cualquier trayectoria que no pase por el origen

7. $\displaystyle\int_{(1,2)}^{(3,6)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},\ \mathbf{F} = (2y^2x - 3)\mathbf{i} + (2yx^2 + 4)\mathbf{j}$

8. $\displaystyle\int_{(-1,1)}^{(0,0)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},\ \mathbf{F} = (5x + 4y)\mathbf{i} + (4x - 8y^3)\mathbf{j}$

9. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(2,8)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},\ \mathbf{F} = (y^3 + 3x^2y)\mathbf{i} + (x^3 + 3y^2x + 1)\mathbf{j}$

10. $\displaystyle\int_{(-2,0)}^{(1,0)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},\ \mathbf{F} = (2x - y \operatorname{sen} xy - 5y^4)\mathbf{i} - (20xy^3 + x \operatorname{sen} xy)\mathbf{j}$

En los problemas 11-18, determine si el campo vectorial dado es un campo conservativo. Si es así, encuentre la función potencial ϕ para **F**.

11. $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y^3 + 3)\mathbf{i} + (3x^4y^2 + 1)\mathbf{j}$

12. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + 3y^2(x^2 + 1)\mathbf{j}$

13. $\mathbf{F}(x, y) = y^2 \cos xy^2\mathbf{i} - 2xy \operatorname{sen} xy^2\mathbf{j}$

14. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^{-2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$

15. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 + y)\mathbf{i} + (x + y^3)\mathbf{j}$

16. $\mathbf{F}(x, y) = 2e^{2y}\mathbf{i} + xe^{2y}\mathbf{j}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + (3y^2 - z)\mathbf{j} - y\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - ze^{-y})\mathbf{j} + (e^{-y} - 1)\mathbf{k}$.

En los problemas 19 y 20, encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (2x + e^{-y})\mathbf{i} + (4y - xe^{-y})\mathbf{j}$ a lo largo de la curva indicada.

19.

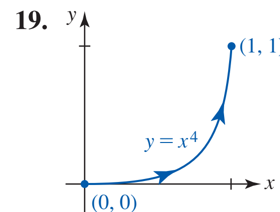


FIGURA 15.3.7 Curva del problema 19

20.

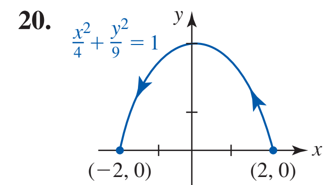


FIGURA 15.3.8 Curva del problema 20

En los problemas 21-26, muestre que la integral dada es independiente de la trayectoria. Evalúe.

21. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,4,8)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

22. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} 2x\,dx + 3y^2\,dy + 4z^3\,dz$

23. $\displaystyle\int_{(1,0,0)}^{(2,\pi/2,1)} (2x \operatorname{sen} y + e^{3z})\,dx + x^2 \cos y\,dy + (3xe^{3z} + 5)\,dz$

24. $\displaystyle\int_{(1,2,1)}^{(3,4,1)} (2x + 1)\,dx + 3y^2\,dy + \frac{1}{z}\,dz$

25. $\displaystyle\int_{(1,1,\ln 3)}^{(2,2,\ln 3)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r};\ \mathbf{F} = e^{2z}\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} + 2xe^{2z}\mathbf{k}$

26. $\displaystyle\int_{(-2,3,1)}^{(0,0,0)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r};\ \mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$

En los problemas 27 y 28, evalúe $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y - yz \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + (x + z\cos x)\mathbf{j} + y\cos x\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + (1 + \cos t)^2\mathbf{j} + 4\operatorname{sen}^3 t\mathbf{k},\ 0 \le t \le \pi/2$

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2 - e^z)\mathbf{i} + (2y - 1)\mathbf{j} + (2 - xe^z)\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $(-1, 1, -1)$ a $(2, 4, 8)$

≡ Aplicaciones

29. La ley del cuadrado inverso de atracción gravitacional entre dos masas m_1 y m_2 está dada por $\mathbf{F} = -Gm_1m_2\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo. Encuentre una función potencial para $\mathbf{F}$.

30. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = 8xy^3z\mathbf{i} + 12x^2y^2z\mathbf{j} + 4x^2y^3\mathbf{k}$ que actúa a lo largo de la hélice $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ de $(2, 0, 0)$ a $(1, \sqrt{3}, \pi/3)$. De $(2, 0, 0)$ a $(0, 2, \pi/2)$. [*Sugerencia*: Demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo.]

31. Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza conservativo, demuestre que el trabajo realizado a lo largo de cualquier trayectoria cerrada simple es cero.

32. Una partícula en el plano es atraída al origen con una fuerza $\mathbf{F} = |\mathbf{r}|^n\mathbf{r}$, donde n es un entero positivo y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es el vector de posición de la partícula. Demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo. Encuentre el trabajo realizado al mover la partícula entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

≡ Piense en ello

En los problemas 33 y 34, demuestre que el campo vectorial dado $\mathbf{F}$ es conservativo. Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ sin determinar la función potencial para $\mathbf{F}$.

33. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\cos y\mathbf{i} + x^2 \operatorname{sen} y\mathbf{j}$; C es $\mathbf{r}(t) = 2^{t-1}\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\pi/t)\mathbf{j},\ 1 \le t \le 2$

34. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} y\mathbf{i} + x\cos y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; C es $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + te^{\sqrt{1-t}}\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1$

35. Suponga que C_1 y C_2 son dos trayectorias en una región abierta simplemente conexa que tiene los mismos puntos inicial y terminal. Si $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{3}{4}$ y $\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{11}{14}$, ¿qué dice esto acerca del campo vectorial $\mathbf{F}$?

36. Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}.$$

a) Muestre que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, pero demuestre que $\mathbf{F}$ es no conservativo. [*Sugerencia*: Evalúe $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi$.]

b) Explique por qué esto no viola el teorema 15.3.4.

37. Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza conservativo con función potencial ϕ. En física la función $p = -\phi$ se denomina *energía potencial*. Puesto que $\mathbf{F} = -\nabla p$, la segunda ley de Newton se convierte en

$$m\mathbf{r}'' = -\nabla p \qquad \text{o} \qquad m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mathbf{0}.$$

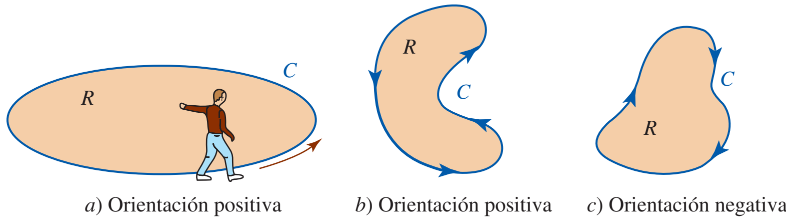
Integrando $m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} + \nabla p\cdot\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ con respecto a t, deduzca la ley de conservación de la energía mecánica: $\frac{1}{2}mv^2 + p = \text{constante}$. [*Sugerencia*: Vea el problema 30 en los ejercicios 15.2.]

38. Suponga que C es una curva suave entre los puntos A (en $t = a$) y B (en $t = b$) y que p es la energía potencial, definida en el problema 37. Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza conservativo y $K = \frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética, demuestre que $p(B) + K(B) = p(A) + K(A)$.

15.4 Teorema de Green

Introducción En esta sección examinamos uno de los teoremas más importantes del cálculo integral vectorial. Veremos que este teorema relaciona una integral de línea alrededor de una curva *cerrada* simple suave por partes con una integral doble sobre la región acotada por la curva. Le recomendamos que repase la terminología de la página 802 de la sección 15.1 y la página 818 de la sección 15.3.

Integrales de línea sobre curvas cerradas simples Suponga que C es una curva cerrada simple suave por partes que forma la frontera de una región simplemente conexa R. Decimos que la **orientación positiva** alrededor de C es la dirección en la que un punto sobre la curva debe moverse, o la dirección en la que una persona debe caminar, para completar un solo recorrido de C manteniendo la región R a la izquierda. Vea la FIGURA 15.4.1*a*). Como se ilustra en las figuras 15.4.1*b*) y 15.4.1*c*), las orientaciones *positiva* y *negativa* corresponden a recorridos de C *en sentido contrario al de las manecillas del reloj* y *en el sentido de las manecillas del reloj*, respectivamente.



a) Orientación positiva *b*) Orientación positiva *c*) Orientación negativa

FIGURA 15.4.1 Orientaciones de curvas cerradas simples

El siguiente teorema recibe el nombre de **teorema de Green**.

Teorema 15.4.1 Teorema de Green

Suponga que C es una curva cerrada simple suave por partes con una orientación positiva que limita una región simplemente conexa R. Si P, Q, $\partial P/\partial y$ y $\partial Q/\partial x$ son continuas sobre R, entonces

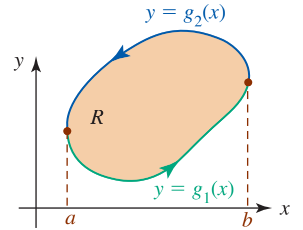
$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA. \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN PARCIAL Debemos probar (1) sólo para una región R que es simultáneamente de tipo I y de tipo II:

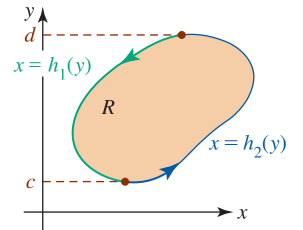
$$R:\quad g_1(x) \le y \le g_2(x), \quad a \le x \le b$$
$$R:\quad h_1(y) \le x \le h_2(y), \quad c \le y \le d.$$

Empleando la FIGURA 15.4.2*a*), tenemos

$$-\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dA = -\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx$$
$$= -\int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]\,dx$$
$$= \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx + \int_b^a P(x, g_2(x))\,dx$$
$$= \int_C P(x, y)\,dx. \tag{2}$$



a) R como una región tipo I



b) R como una región tipo II

FIGURA 15.4.2 Región R utilizada en la prueba del teorema 15.4.1

De manera similar, de la figura 15.4.2*b*),

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$
$$= \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)]\,dy$$
$$= \int_c^d Q(h_2(y), y)\,dy + \int_d^c Q(h_1(y), y)\,dy$$
$$= \int_C Q(x, y)\,dy. \tag{3}$$

La suma de los resultados en (2) y (3) produce (1). ■

Si bien la prueba anterior no es válida para regiones más complicadas, el teorema se aplica a esas regiones, tal como la que se ilustra en la FIGURA 15.4.3. La demostración consiste en descomponer R en un número finito de subregiones para las cuales (1) puede aplicarse y después se suman los resultados.

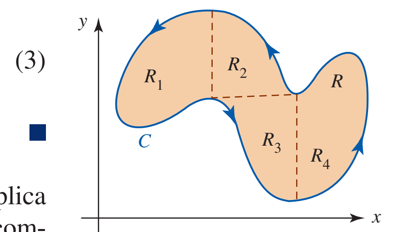


FIGURA 15.4.3 Región R descompuesta en cuatro subregiones

La integración en la dirección positiva sobre una curva cerrada simple C a menudo se denota por medio de

$$\oint_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \quad \text{o} \quad \oint_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy. \tag{4}$$

El pequeño círculo sobrepuesto sobre el signo integral en el primer término en (4) subraya el hecho de que la integración es a lo largo de una curva cerrada; la flecha en el círculo en el segundo término en (4) refuerza la noción de que la integración es a lo largo de una curva cerrada C con orientación positiva. Aunque $\int_C$, $\oint_C$ y $\oint_C$ significan lo mismo en esta sección, usaremos el segundo signo integral por el resto de la discusión de manera que usted adquiera cierta familiaridad con esta notación alterna.

EJEMPLO 1 Empleo del teorema de Green

Evalúe $\oint_C (x^2 - y^2)\, dx + (2y - x)\, dy$, donde C consiste en la frontera de la región en el primer cuadrante que está acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^3$.

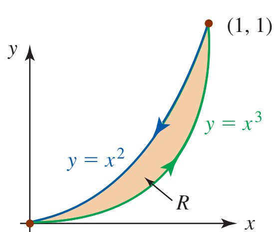


FIGURA 15.4.4 Trayectoria C y región R del ejemplo 1

Solución Si $P(x, y) = x^2 - y^2$ y $Q(x, y) = 2y - x$, entonces $\partial P/\partial y = -2y$ y $\partial Q/\partial x = -1$. De (1) y la FIGURA 15.4.4 tenemos

$$\begin{aligned}\oint_C (x^2 - y^2)\, dx + (2y - x)\, dy &= \iint_R (-1 + 2y)\, dA \\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (-1 + 2y)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 (-y + y^2)\Big]_{x^3}^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 (-x^6 + x^4 + x^3 - x^2)\, dx = -\frac{11}{420}.\end{aligned}$$ ■

Observamos que la integral de línea del ejemplo 1 podría haberse evaluado de manera directa utilizando la variable x como un parámetro. Sin embargo, cuando usted trabaje en el siguiente ejemplo, considere el problema de evaluar de la manera usual la integral de línea dada.

EJEMPLO 2 Empleo del teorema de Green

Evalúe $\oint_C (x^5 + 3y)\, dx + (2x - e^{y^3})\, dy$, donde C es el círculo $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 4$.

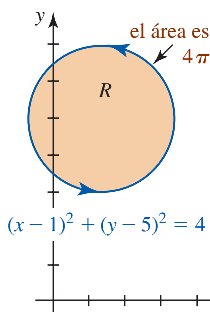


FIGURA 15.4.5 Trayectoria C y región R del ejemplo 2

Solución Al identificar $P(x, y) = x^5 + 3y$ y $Q(x, y) = 2x - e^{y^3}$, tenemos $\partial P/\partial y = 3$ y $\partial Q/\partial x = 2$. Por consiguiente, (1) produce

$$\oint_C (x^5 + 3y)\, dx + (2x - e^{y^3})\, dy = \iint_R (2 - 3)\, dA = -\iint_R dA.$$

En este caso la integral doble $\iint_R dA$ produce el área de la región R acotada por el círculo de radio 2 que se muestra en la FIGURA 15.4.5. Puesto que el área del círculo es $\pi 2^2 = 4\pi$, se deduce que

$$\oint_C (x^5 + 3y)\, dx + (2x - e^{y^3})\, dy = -4\pi.$$ ■

EJEMPLO 3 Trabajo

Determine el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F} = (-16y + \operatorname{sen} x^2)\mathbf{i} + (4e^y + 3x^2)\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de una curva cerrada simple C que se muestra en la FIGURA 15.4.6.

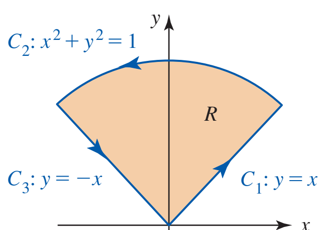


FIGURA 15.4.6 Trayectoria C y región R del ejemplo 3

Solución De (6) de la sección 15.2, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ está dado por

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (-16y + \operatorname{sen} x^2)\, dx + (4e^y + 3x^2)\, dy$$

y por ello, de acuerdo con el teorema de Green,

$$W = \iint_R (6x + 16)\, dA.$$

En vista de la región R, la última integral se maneja mejor en coordenadas polares. En coordenadas polares R se define mediante $0 \le r \le 1$, $\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4$, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} W &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^1 (6r\cos\theta + 16) r\, dr\, d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2r^3 \cos\theta + 8r^2)\Big]_0^1 d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2\cos\theta + 8)\, d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Teorema de Green no aplicable

Sea C la curva poligonal cerrada consistente en los cuatro segmentos de recta C_1, C_2, C_3 y C_4 que se muestran en la FIGURA 15.4.7. El teorema de Green *no* es aplicable a la integral de línea

$$\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

ya que P, Q, $\partial P/\partial y$ y $\partial Q/\partial x$ no son continuas en el origen. ■

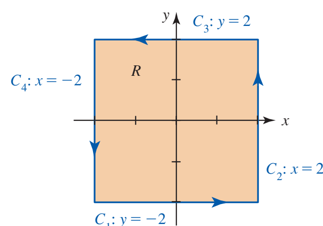
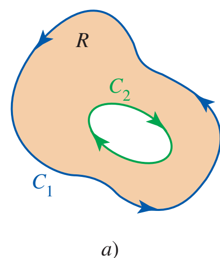


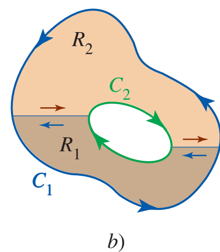
FIGURA 15.4.7 Trayectoria C y región R del ejemplo 4

Teorema de Green para regiones múltiplemente conexas El teorema de Green también puede extenderse a una región R con hoyos, esto es, una región que no es simplemente conexa. Recuerde de la sección 15.3 que una región con hoyos se dice que es múltiplemente conexa. En la FIGURA 15.4.8*a*) hemos mostrado una región R acotada por una curva C que consiste en dos curvas cerradas simples C_1 y C_2; esto es $C = C_1 \cup C_2$. La curva C está orientada positivamente, ya que si recorremos C_1 en dirección contraria a la de las manecillas del reloj y a C_2 en la dirección de las manecillas, la región R siempre está a la izquierda. Si después de esto introducimos cortes cruzados horizontales como se ilustra en la figura 15.4.8*b*), la región R se divide en dos subregiones R_1 y R_2. Al aplicar el teorema de Green a R_1 y R_2, se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA &= \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\ &= \oint_{C_1} P\, dx + Q\, dy + \oint_{C_2} P\, dx + Q\, dy \qquad (5) \\ &= \oint_C P\, dx + Q\, dy. \end{aligned}$$



a)



b)

FIGURA 15.4.8 Región R con un hoyo

El último resultado sigue del hecho de que las integrales de línea sobre los cortes cruzados (trayectorias con orientaciones opuestas) se cancelarán entre sí. Vea (11) de la sección 15.1.

EJEMPLO 5 Aplicación de (5)

Evalúe $\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$, donde $C = C_1 \cup C_2$ es la frontera de la región sombreada R que se presenta en la FIGURA 15.4.9.

Solución Como

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

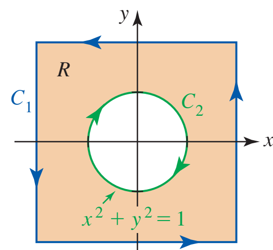


FIGURA 15.4.9 Trayectoria C y región R del ejemplo 5

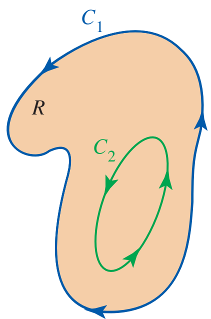


FIGURA 15.4.10 La integral de línea sobre C_1 es la misma que sobre C_2

son continuas sobre la región R acotada por C, se deduce de (5) que

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \iint_R \left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] dA = 0.$$ ■

Como consecuencia de la discusión anterior al ejemplo 5, podemos establecer un resultado para integrales de línea que nos permite, en ciertas circunstancias, sustituir una trayectoria cerrada complicada por una trayectoria que es más simple. Suponga, como se muestra en la FIGURA 15.4.10, que C_1 y C_2 son dos trayectorias cerradas simples suaves por partes que no se intersecan y que tienen la misma orientación positiva o contraria a la de las manecillas del reloj. Suponga además que P y Q tienen primeras derivadas parciales continuas tales que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en la región R acotada entre C_1 y C_2. Entonces de (5) y (11) de la sección 15.1 se tiene

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \oint_{-C_2} P\,dx + Q\,dy = 0$$

o

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy. \tag{6}$$

EJEMPLO 6 Repaso del ejemplo 4

Evalúe la integral de línea del ejemplo 4.

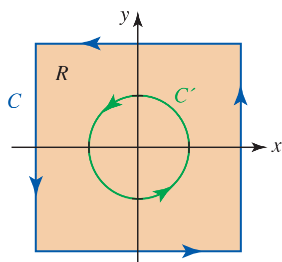


FIGURA 15.4.11 Las curvas cerradas C y C' del ejemplo 6

Solución Un método para evaluar la integral de línea es escribir

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

y después evaluar las cuatro integrales sobre los segmentos de recta C_1, C_2, C_3 y C_4 que se muestran en la figura 15.4.7. De modo alterno, si advertimos que el círculo C': $x^2+y^2=1$ que se muestra en la FIGURA 15.4.11 yace por completo dentro de C, entonces del ejemplo 5 es claro que $P = -y/(x^2+y^2)$ y $Q = x/(x^2+y^2)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en la región R acotada entre C y C'. Además,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en R. Por consiguiente, se deduce de (6) que

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \oint_{C'} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Utilizando la parametrización $x = \cos t$, $y = \text{sen}\, t$, $0 \le t \le 2\pi$ para C' obtenemos

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy &= \int_0^{2\pi} [-\text{sen}\, t(-\text{sen}\, t) + \cos t(\cos t)]\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\text{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.\end{aligned} \tag{7}$$ ■

Es interesante advertir que el resultado en (7):

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 2\pi$$

es verdadero para toda curva cerrada simple suave por partes C con el origen en su interior. Sólo necesitamos elegir C' como $x^2 + y^2 = a^2$, donde a es lo suficientemente pequeña para que el círculo esté por completo dentro de C.

Posdata: Un poco de historia **George Green** (1793-1841) nació en Knottingham, Inglaterra, hijo de padres trabajadores. El joven George abandonó la escuela después de sólo cuatro cursos y a la edad de 9 años empezó a trabajar en la panadería de su padre. Después de que su padre murió en 1829, Green empleó el dinero que obtuvo de la venta de la panadería para seguir estudios en matemáticas y ciencias. De manera fundamentalmente autodidacta, Green produjo varios artículos antes de entrar a la Universidad de Cambridge a la edad de 40 años. Con recursos propios publicó *Un ensayo acerca de la aplicación del análisis matemático en las teorías de la electricidad y el magnetismo* en 1828, en el cual introdujo su famoso teorema de Green. A la edad de 45 años obtuvo su licenciatura y permaneció en Cambridge, donde se convirtió en miembro del profesorado en Gonville and Caius College. El trabajo seminal de Green en matemáticas, electricidad y magnetismo fue prácticamente ignorado después de su muerte en 1841, aunque a la larga atrajo la atención de la comunidad científica y matemática gracias a los esfuerzos de William Thomson (Lord Kelvin) en 1845.

Ejercicios 15.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-47.

Fundamentos

En los problemas 1-4, verifique el teorema de Green evaluando ambas integrales.

1. $\oint_C (x - y)\,dx + xy\,dy = \iint_R (y + 1)\,dA$, donde C es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 3)$

2. $\oint_C 3x^2y\,dx + (x^2 - 5y)\,dy = \iint_R (2x - 3x^2)\,dA$, donde C es el rectángulo con vértices $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$

3. $\oint_C -y^2\,dx + x^2\,dy = \iint_R (2x + 2y)\,dA$, donde C es el círculo $x = 3\cos t$, $y = 3\,\mathrm{sen}\,t$, $0 \le t \le 2\pi$

4. $\oint_C -2y^2\,dx + 4xy\,dy = \iint_R 8y\,dA$, donde C es la frontera de la región en el primer cuadrante determinada por las gráficas de $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = -x + 2$

En los problemas 5-14, emplee el teorema de Green para evaluar la integral de línea dada.

5. $\oint_C 2y\,dx + 5x\,dy$, donde C es el círculo $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$

6. $\oint_C (x + y^2)\,dx + (2x^2 - y)\,dy$, donde C es la frontera de la región determinada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 4$

7. $\oint_C (x^4 - 2y^3)\,dx + (2x^3 - y^4)\,dy$, donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 4$

8. $\oint_C (x - 3y)\,dx + (4x + y)\,dy$, donde C es el rectángulo con vértices $(-2, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$, $(-2, 2)$

9. $\oint_C 2xy\,dx + 3xy^2\,dy$, donde C es el triángulo con vértices $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$

10. $\oint_C e^{2x}\,\mathrm{sen}\,2y\,dx + e^{2x}\cos 2y\,dy$, donde C es la elipse $9(x - 1)^2 + 4(y - 3)^2 = 36$

11. $\oint_C xy\,dx + x^2\,dy$, donde C es la frontera de la región determinada por las gráficas de $x = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x \ge 0$

12. $\oint_C e^{x^2}\,dx + 2\tan^{-1}x\,dy$, donde C es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 1)$

13. $\oint_C \frac{1}{3}y^3\,dx + (xy + xy^2)\,dy$, donde C es la frontera de la región en el primer cuadrante determinado por las gráficas de $y = 0$, $x = y^2$, $x = 1 - y^2$

14. $\oint_C xy^2\,dx + 3\cos y\,dy$, donde C es la frontera de la región en el primer cuadrante determinada por las gráficas de $y = x^2$, $y = x^3$

En los problemas 15 y 16, evalúe la integral dada sobre cualquier curva cerrada simple suave por partes C.

15. $\oint_C ay\,dx + bx\,dy$

16. $\oint_C P(x)\,dx + Q(y)\,dy$

En los problemas 17 y 18, sea R la región acotada por una curva cerrada simple suave por partes C. Demuestre el resultado que se indica.

17. $\oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx =$ área de R

18. $\frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy =$ área de R

En los problemas 19 y 20, emplee los resultados de los problemas 17 y 18 para determinar el área de la región acotada por la curva cerrada que se indica.

19. La hipocicloide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\,t$, $a > 0$, $0 \le t \le 2\pi$

20. La elipse $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$, $a > 0$, $b > 0$, $0 \le t \le 2\pi$

21. ***a)*** Demuestre que

$$\int_C -y\,dx + x\,dy = x_1y_2 - x_2y_1,$$

donde C es el segmento de recta del punto (x_1, y_1) a (x_2, y_2).

b) Use el inciso *a)* y el problema 18 para demostrar que el área A del polígono con vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . . , (x_n, y_n), marcado en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, es

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + \frac{1}{2}(x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + \frac{1}{2}(x_ny_1 - x_1y_n).$$

22. Emplee el inciso *b*) del problema 21 para encontrar el área del cuadrilátero con vértices (−1, 3), (1, 1), (4, 2) y (3, 5).

En los problemas 23 y 24, evalúe la integral de línea dada donde $C = C_1 \cup C_2$ es la frontera de la región sombreada R.

23. $\oint_C (4x^2 - y^3)\,dx + (x^3 + y^2)\,dy$

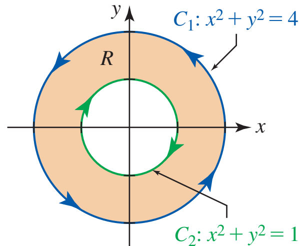


FIGURA 15.4.12 Curva C del problema 23

24. $\oint_C (\cos x^2 - y)\,dx + \sqrt{y^2 + 1}\,dy$

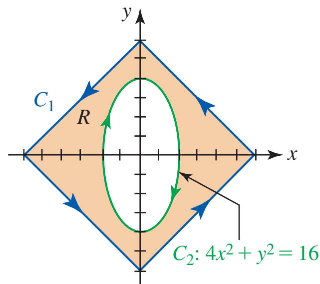


FIGURA 15.4.13 Curva C del problema 24

En los problemas 25 y 26, proceda como en el ejemplo 6 para evaluar la integral de línea dada.

25. $\oint_C \dfrac{-y^3\,dx + xy^2\,dy}{(x^2 + y^2)^2}$, donde C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$

26. $\oint_C \dfrac{-y}{(x + 1)^2 + 4y^2}\,dx + \dfrac{x + 1}{(x + 1)^2 + 4y^2}\,dy$, donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 16$

En los problemas 27 y 28, emplee el teorema de Green para evaluar la integral doble dada por medio de una integral de línea. [*Sugerencia*: Encuentre funciones apropiadas P y Q.]

27. $\iint_R x^2\,dA$, donde R es la región acotada por la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$

28. $\iint_R [1 - 2(y - 1)]\,dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por el círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ y $x = 0$

En los problemas 29 y 30, emplee el teorema de Green para el trabajo realizado por la fuerza **F** dada alrededor de la curva cerrada en la FIGURA 15.4.14.

29. $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ **30.** $\mathbf{F} = -xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$

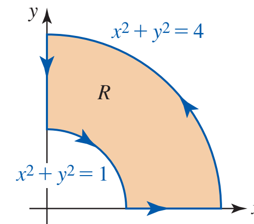


FIGURA 15.4.14 Curva C de los problemas 29 y 30

Aplicaciones

31. Sea R una región acotada por una curva cerrada simple suave por partes C. Demuestre que las coordenadas del **centroide** de la región están dadas por

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy, \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx.$$

32. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

Piense en ello

33. Sean P y Q continuas y con primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa del plano xy. Si $\int_A^B P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria, demuestre que $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$ sobre cada curva cerrada simple suave por partes C en la región.

34. Si f es una función de dos variables que satisface la ecuación diferencial de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

en una región simplemente conexa R, demuestre que $\int_C f_y\,dx - f_x\,dy$ es independiente de la trayectoria en R.

15.5 Superficies paramétricas y áreas

Introducción Hemos visto que las curvas bidimensionales pueden definirse por medio de una función $y = f(x)$, una ecuación $g(x, y) = 0$, o paramétricamente por medio de un conjunto de ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$. Una curva C descrita por una función continua $y = f(x)$ puede parametrizarse dejando $x = t$ de manera que las ecuaciones paramétricas son $x = t$, $y = f(t)$. Se requieren *dos* variables para parametrizar una superficie S en el espacio tridi-

mensional definida por una función de dos variables $z = g(x, y)$. Si $x = u$ y $y = v$, entonces las ecuaciones paramétricas para S son $x = u$, $y = v$, $z = g(u, v)$.

Superficies paramétricas En general, un conjunto de tres funciones de dos variables,

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{1}$$

se llaman **ecuaciones paramétricas**. Las variables u y v reciben el nombre de **parámetros** y el conjunto de puntos (x, y, z) en el espacio tridimensional definido por (1) recibe el nombre de **superficie paramétrica** S. El par ordenado (u, v) proviene de una región R en el plano uv llamado **dominio del parámetro**. El dominio del parámetro es la contraparte bidimensional del intervalo del parámetro unidimensional correspondiente a una curva paramétrica C. Una superficie S también puede describirse mediante una función de valores vectoriales de dos variables

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}. \tag{2}$$

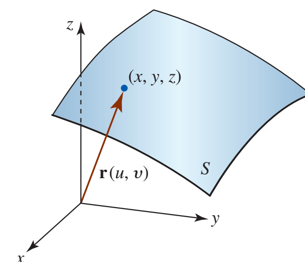


FIGURA 15.5.1 Vector de posición de un punto sobre la superficie S

Para (u_0, v_0) dado en R, el vector $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ es el vector de posición de un punto P sobre la superficie S. En otras palabras, cuando (u, v) varía sobre la región R, se traza la superficie S a partir del movimiento de la punta de $\mathbf{r}(u, v)$. Vea la FIGURA 15.5.1.

Las parametrizaciones de superficies son muy importantes en las gráficas de computadoras. Muchas de las figuras tridimensionales complicadas generadas en los capítulos 12, 13 y 14 se obtuvieron utilizando un SAC y una representación paramétrica de la superficie. Por ejemplo, la superficie similar a una concha de mar que se ilustra en la FIGURA 15.5.2*a*) se generó utilizando *Mathematica* y las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 2(1 - e^{u/5\pi})\cos u \cos^2(v/2), \\ y &= 2(-1 + e^{u/5\pi})\operatorname{sen} u \cos^2(v/2), \\ z &= 1 - e^{u/3\pi} - \operatorname{sen} v + e^{u/5\pi} \operatorname{sen} v, \end{aligned}$$

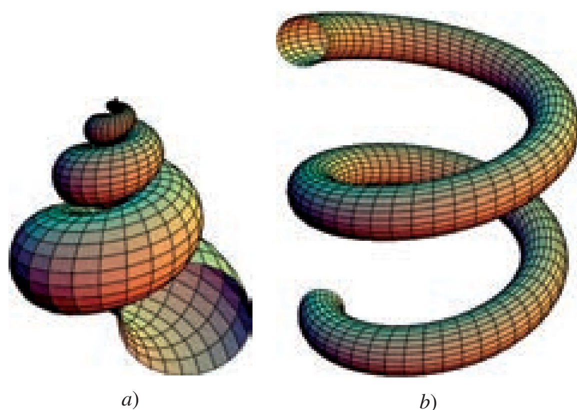
sobre el dominio del parámetro R en el plano uv definido por las desigualdades $0 \le u \le 8\pi$, $0 \le v \le 2\pi$. En la sección 12.1 vimos que la función vectorial de una sola variable

$$\mathbf{r}(u) = \cos u\mathbf{i} + \operatorname{sen} u\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

describe una curva en el espacio tridimensional conocida como una hélice circular que se enrolla a lo largo del eje z. Una variación de esta ecuación utilizando dos variables:

$$\mathbf{r}(u, v) = (3 + \operatorname{sen} v)\cos u\mathbf{i} + (3 + \operatorname{sen} v)\operatorname{sen} u\mathbf{j} + (u + \cos v)\mathbf{k},$$

describe lo que podría denominarse una *superficie tubular helicoidal*. Vea la figura 15.5.2*b*).



a) *b*)

FIGURA 15.5.2 Superficies paramétricas

EJEMPLO 1 Superficie paramétrica

Encuentre ecuaciones paramétricas para el cono de un manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución Si dejamos $x = u$ y $y = v$, la superficie paramétrica está dada por las ecuaciones $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{u^2 + v^2}$. Alternativamente, el cono se describe mediante la función vectorial $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{i} + \sqrt{u^2 + v^2}\mathbf{k}$. ■

EJEMPLO 2 Gráficas

a) La FIGURA 15.5.3*a*) muestra la parte del cono de un manto $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ del ejemplo 1 correspondiente a los valores del parámetro $-1 \le u \le 1$, $-1 \le v \le 1$. Los lados truncados de la figura se deben al hecho de que la superficie interseca la caja que se exhibe en la figura. Por ejemplo, la curva de intersección (traza) de la superficie y el plano vertical $u = 1$ ($x = 1$) corresponden a una rama de la hipérbola definida por $z = \sqrt{1 + v^2} = \sqrt{1 + y^2}$. Los puntos más altos del cono ocurren en las cuatro esquinas superiores de la caja; cada uno de los pares de parámetros (1, 1), (1, −1), (−1, 1) y (−1, −1) producen $z = \sqrt{2}$.

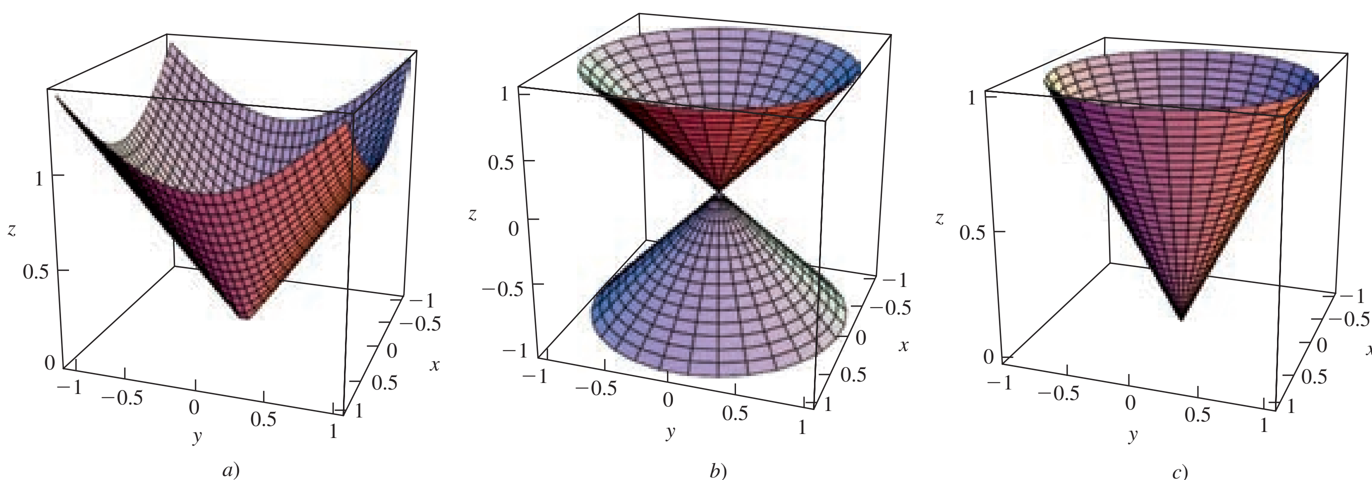


FIGURA 15.5.3 Superficies paramétricas del ejemplo 2

b) Empleando coordenadas polares, la parametrización

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = r \tag{3}$$

Verifique esto demostrando que $x^2 + y^2 = z^2$

también define un cono. La gráfica de (3) en la figura 15.5.3*b*) para $-1 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, es un cono de doble manto truncado por los planos horizontales $r = -1$ ($z = -1$) y $r = 1$ ($z = 1$). Cambiando los valores del parámetro a $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, las ecuaciones paramétricas (3) producen el manto superior del cono que se muestra en la figura 15.5.3*c*). ■

El dominio R del parámetro definido por las desigualdades del inciso *a*) del ejemplo 2 es una región rectangular en el plano uv. Vea la FIGURA 15.5.4*a*). Advertimos de paso que un dominio R del parámetro no necesariamente es una región rectangular. Si el dominio R del parámetro del inciso *b*) del ejemplo 2 se define mediante $-\infty \le r \le \infty$, $0 \le \theta \le 2\pi$, generamos el cono completo de doble manto. Este conjunto de desigualdades simultáneas define una tira horizontal infinita en el plano $= r\theta$. Vea la figura 15.5.4*b*).

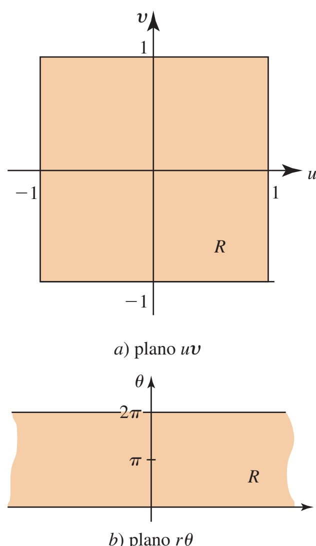


FIGURA 15.5.4 El dominio del parámetro *a*) es una región rectangular; el dominio del parámetro *b*) es una tira infinita

EJEMPLO 3 Superficie paramétrica

Encuentre las ecuaciones paramétricas del cilindro circular $y^2 + z^2 = 1$ para $3 \le x \le 8$.

Solución Si usamos $y = \cos v$ y $z = \text{sen}\, v$, entonces es claro que $y^2 + z^2 = \cos^2 v + \text{sen}^2 v = 1$. Para obtener la superficie lateral completa del cilindro usamos los valores $0 \le v \le 2\pi$. Luego dejamos $x = u$, donde $3 \le u \le 8$. De tal modo, las ecuaciones paramétricas para esta superficie son

$$x = u, \quad y = \cos v, \quad z = \text{sen}\, v, \qquad 3 \le u \le 8,\ 0 \le v \le 2\pi.$$

La gráfica de estas ecuaciones sobre la región rectangular R definida por las desigualdades $3 \le u \le 8$, $0 \le v \le 2\pi$ se presenta en la FIGURA 15.5.5. ■

Resulta prácticamente imposible identificar incluso superficies bien conocidas cuando se dan en forma paramétrica o vectorial. Sin embargo, en algunos casos una superficie puede identificarse al eliminar los parámetros.

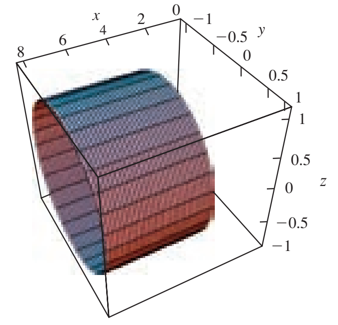


FIGURA 15.5.5 Cilindro del ejemplo 3

EJEMPLO 4 Eliminación de parámetros

Identifique la superficie con la función vectorial $\mathbf{r}(u, v) = (2u - v)\mathbf{i} + (u + v + 1)\mathbf{j} + u\mathbf{k}$.

Solución Las ecuaciones paramétricas de la superficie son

$$x = 2u - v, \quad y = u + v + 1, \quad z = u.$$

La suma de x y y produce $x + y = 3u + 1$. Puesto que $z = u$, reconocemos $x + y = 3z + 1$ o $x + y - 3z = 1$ como la ecuación de un plano. ■

En el ejemplo 4, el plano completo se obtiene dejando que (u, v) varíe sobre el dominio del parámetro consistente en el plano uv completo, esto es, para $-\infty < u < \infty, -\infty < v < \infty$.

EJEMPLO 5 Eliminación de parámetros

Las ecuaciones

$$x = a \text{ sen } \phi \cos \theta, \quad y = a \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta, \quad z = a \cos \phi \tag{4}$$

son las ecuaciones paramétricas de una esfera de radio $a > 0$. Para ver esto elevamos al cuadrado las ecuaciones en (4) y sumamos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \text{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + a^2 \text{ sen}^2 \phi \text{ sen}^2 \theta + a^2 \cos^2 \phi \\ &= a^2 \text{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta) + a^2 \cos^2 \phi \\ &= a^2 \text{sen}^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi \\ &= a^2(\text{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi) = a^2. \end{aligned}$$

La gráfica de (4) para $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$, se muestra en la FIGURA 15.5.6. ■

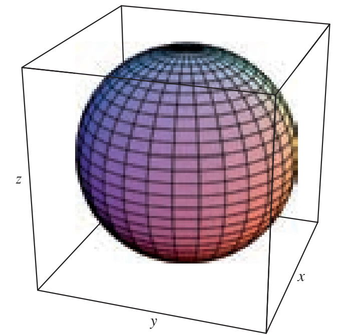


FIGURA 15.5.6 Esfera del ejemplo 5

Los parámetros ϕ y θ en (4) son los ángulos polar y azimutal utilizados en coordenadas esféricas. Se le sugiere repasar las fórmulas en (3) de la sección 14.8 que convierte las coordenadas esféricas de un punto a coordenadas rectangulares.

Bastidor de una superficie Las curvas negras que son evidentes en cada una de las superficies generadas por computadora de las figuras 15.5.2, 15.5.3, 15.5.5 y 15.5.6 se llaman **bastidor de una superficie** S. Un bastidor de una superficie se obtiene manteniendo constante uno de los parámetros en (1) o (2) mientras se deja variar el otro parámetro. Por ejemplo, si $v = v_0 =$ constante, entonces

$$\mathbf{r}(u, v_0) = x(u, v_0)\mathbf{i} + y(u, v_0)\mathbf{j} + z(u, v_0)\mathbf{k} \tag{5}$$

es una función de valores vectoriales de una sola variable. En consecuencia, (5) es una ecuación de una curva tridimensional C_1 que yace sobre la superficie S trazada por $\mathbf{r}(u, v)$. De manera similar, si $u = u_0 =$ constante, entonces

$$\mathbf{r}(u_0, v) = x(u_0, v)\mathbf{i} + y(u_0, v)\mathbf{j} + z(u_0, v)\mathbf{k} \tag{6}$$

es una ecuación vectorial de la curva C_2 sobre la superficie S. En otras palabras, C_1 y C_2 son bastidores de S. Para un valor ϕ_0 elegido de $0 \le \phi \le \pi$, y un valor θ_0 de $0 \le \theta \le 2\pi$, los bastidores sobre la esfera de la figura 15.5.6 están definidas por

$$\mathbf{r}(\phi_0, \theta) = a \text{ sen } \phi_0 \cos \theta\mathbf{i} + a \text{ sen } \phi_0 \text{ sen } \theta\mathbf{j} + a \cos \phi_0 \mathbf{k} \tag{7}$$

y

$$\mathbf{r}(\phi, \theta_0) = a \text{ sen } \phi \cos \theta_0\mathbf{i} + a \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta_0\mathbf{j} + a \cos \phi\mathbf{k}. \tag{8}$$

Las ecuaciones vectoriales en (7) y (8) son, respectivamente, un círculo y un semicírculo. Para $\phi_0 =$ constante el círculo $\mathbf{r}(\phi_0, \theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, yace sobre la esfera paralela al plano xy y es equivalente a un círculo de **latitud** fija sobre un globo terráqueo. Para $\theta_0 =$ constante el semicírculo definido por $\mathbf{r}(\phi, \theta_0)$, $0 \le \phi \le \pi$, pasa tanto por el polo norte (cuando $\phi = 0$ obtene-

mos $(0, 0, a)$) y por el polo sur (cuando $\phi = \pi$ obtenemos $(0, 0, -a)$) de la esfera y recibe el nombre de **meridiano**. En un globo, un meridiano corresponde a una **longitud** fija.

Plano tangente a una superficie paramétrica Para los valores de parámetro constantes $u = u_0$, $v = v_0$, el vector

$$\mathbf{r}(u_0, v_0) = x(u_0, v_0)\mathbf{i} + y(u_0, v_0)\mathbf{j} + z(u_0, v_0)\mathbf{k} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

define un punto (x_0, y_0, z_0) sobre una superficie S. Además, las funciones vectoriales de una sola variable

$$\mathbf{r}(u, v_0) = x(u, v_0)\mathbf{i} + y(u, v_0)\mathbf{j} + z(u, v_0)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}(u_0, v) = x(u_0, v)\mathbf{i} + y(u_0, v)\mathbf{j} + z(u_0, v)\mathbf{k}$$

definen los bastidores de superficie C_1 y C_2 que yacen sobre S. Como el vector $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ está definido por ambas funciones vectoriales, C_1 y C_2 se intersecan en (x_0, y_0, z_0). Las derivadas parciales de (2) con respecto a u y v se definen con los vectores que se obtienen al tomar las derivadas parciales de las funciones componentes:

Estas derivadas parciales también se denotan por medio de $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}.$$

De tal modo, si $\partial\mathbf{r}/\partial u \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0), representa una tangente vectorial al bastidor de superficie C_1 (v = constante = v_0) mientras que $\partial\mathbf{r}/\partial v \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0) es un vector que es tangente al bastidor de superficie C_2 (u = constante = u_0). De (2) de la sección 11.4, el producto cruz $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v$ se define mediante

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

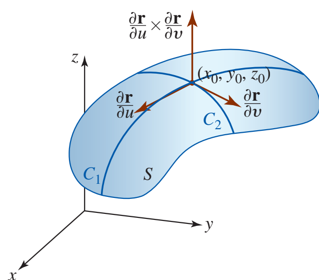


FIGURA 15.5.7 Superficie paramétrica

La condición de que el vector $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v$ no es $\mathbf{0}$ en (u_0, v_0) asegura la existencia de un plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0). De hecho, el plano tangente en $\mathbf{r}(u_0, y_0)$ o (x_0, y_0, z_0) se define como el plano determinado por $\partial\mathbf{r}/\partial u$ y $\partial\mathbf{r}/\partial v$. Puesto que el producto cruz es perpendicular a ambos vectores $\partial\mathbf{r}/\partial u$ y $\partial\mathbf{r}/\partial v$, el vector (9) es normal al plano tangente a la superficie S en (x_0, y_0, z_0). Vea la FIGURA 15.5.7.

Superficie suave Suponga que S es una superficie paramétrica cuya ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v)$ tiene primeras derivadas parciales continuas sobre una región R del plano uv. Se dice que la superficie S es **suave en** $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ si los vectores tangentes $\partial\mathbf{r}/\partial u$ y $\partial\mathbf{r}/\partial v$ en las direcciones u y v satisfacen $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0). Se afirma que la superficie S es **suave sobre** $\boldsymbol{R}$ si $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v \neq \mathbf{0}$ para todos los puntos (u, v) en R. En términos generales, una superficie suave no tiene esquinas, puntos afilados o interrupciones. Una superficie S **suave por partes** es una que puede escribirse como $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$, donde las superficies $S_1, S_2, \ldots, S_n$ son suaves.

EJEMPLO 6 Plano tangente a una superficie paramétrica

Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie paramétrica definida por $x = u^2 + v$, $y = v$, $z = u + v^2$ en el punto correspondiente a $u = 3$, $v = 0$.

Solución En $u = 3$, $v = 0$, el punto sobre la superficie es $(9, 0, 3)$. Si la superficie se define por medio de la función vectorial $\mathbf{r}(u, v) = (u^2 + v)\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u + v^2)\mathbf{k}$, entonces

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 2u\mathbf{i} + \mathbf{k}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2v\mathbf{k}$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2v \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + (1 - 4uv)\mathbf{j} + 2u\mathbf{k}.$$

Al evaluar el vector anterior en $u = 3$, $v = 0$, se obtiene la normal $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ a la superficie en (9, 0, 3). Una ecuación del plano tangente en ese punto es

$$(-1)(x - 9) + (y - 0) + 6(z - 3) = 0 \qquad \text{o} \qquad z = \tfrac{1}{6}x - \tfrac{1}{6}y + \tfrac{3}{2}.$$

La gráfica de la superficie y el plano tangente se presentan en la FIGURA 15.5.8. ■

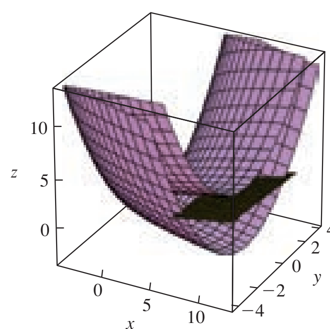


FIGURA 15.5.8 Superficie paramétrica y plano tangente en el ejemplo 6

Construcción de una integral A continuación bosquejamos los pasos que llevan a una definición de integral del **área de una superficie paramétrica**. Puesto que la discusión es similar a la que llevó a la definición 14.6.1, se recomienda un repaso de ese material. Suponga que la función vectorial $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ traza una superficie S cuando (u, v) varía sobre un dominio R del parámetro en el plano uv. Para simplificar la discusión supondremos que R es una región rectangular

$$R = \{(u, v) |\, a \le u \le b, c \le v \le d\}$$

como se ilustra en la FIGURA 15.5.9*a*). Usamos una partición regular, esto es, dividimos R en n rectángulos cada uno con el mismo ancho Δu y la misma altura Δv y dejamos que R_k denote la subregión rectangular k-ésima. Si (u_k, v_k) son las coordenadas de la esquina izquierda inferior de R_k, y las otras esquinas pueden expresarse como $(u_k + \Delta u, v_k)$, $(u_k + \Delta u, v_k + \Delta v)$, $(u_k, v_k + \Delta v)$ por lo que el área de R_k es $\Delta A = \Delta u\,\Delta v$. Las imágenes de los puntos en R_k determinan un parche S_k sobre la superficie S, donde el punto rojo en la figura 15.5.9*b*) es el punto que corresponde a $\mathbf{r}(u_k, v_k)$. Ahora dos de los bordes de S_k pueden aproximarse por medio de los vectores

$$\mathbf{r}(u_k + \Delta u, v_k) - \mathbf{r}(u_k, v_k) = \frac{\mathbf{r}(u_k + \Delta u, v_k) - \mathbf{r}(u_k, v_k)}{\Delta u}\Delta u \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u$$

$$\mathbf{r}(u_k, v_k + \Delta v) - \mathbf{r}(u_k, v_k) = \frac{\mathbf{r}(u_k, v_k + \Delta v) - \mathbf{r}(u_k, v_k)}{\Delta v}\Delta v \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v.$$

Como se advierte en la figura 15.5.9*c*), estos vectores forman en realidad dos de los bordes de un paralelogramo T_k que yace en el plano tangente en $\mathbf{r}(u_k, v_k)$. El área ΔT_k del paralelogramo T_k aproxima el área ΔS_k de S_k:

$$\Delta T_k = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v\right| = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\Delta u\,\Delta v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\Delta A \approx \Delta S_k.$$

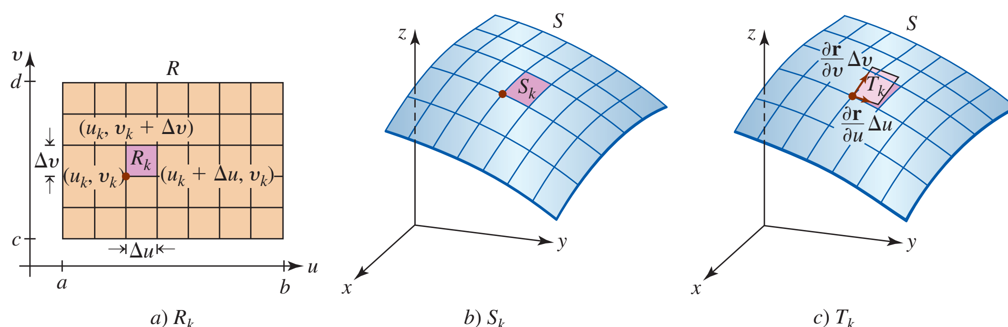


FIGURA 15.5.9 Dominio R del parámetro *a*); superficie correspondiente S en *b*) y *c*)

La suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\Delta A$$

produce una aproximación del área $A(s)$ de la porción de la superficie S que corresponde a los puntos en R. Es válido entonces que el área exacta sea

$$A(S) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\Delta A. \tag{10}$$

Definición 15.5.1 Área de una superficie

Sea S una superficie paramétrica suave definida por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}.$$

Si cada punto sobre S corresponde a exactamente un punto (u, v) en el dominio R del parámetro en el plano uv, entonces el área de S es

$$A(S) = \iint_R \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dA. \qquad (11)$$

Como vimos en la introducción a esta sección, una superficie descrita por una función explícita $z = g(x, y)$ puede parametrizarse mediante las ecuaciones $x = u, y = v, z = g(u, v)$. Para esta parametrización, (11) de inmediato se reduce a

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + [g_u(u, v)]^2 + [g_v(u, v)]^2}\, du\, dv$$

que es (2) de la sección 14.6 con u y v desempeñando la parte de x y y.

EJEMPLO 7 Área de una superficie paramétrica

Aquí los símbolos u y v desempeñan la parte de r y θ en el inciso *b*) del ejemplo 2.

Encuentre el área del cono $\mathbf{r} = (u \cos v)\mathbf{i} + (u \operatorname{sen} v)\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$.

Solución La superficie es una porción superior del cono que se muestra en la figura 15.5.3*c*). Primero calculamos

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -u \operatorname{sen} v\mathbf{i} + u \cos v\mathbf{j}$$

y después formamos el producto cruz

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 1 \\ -u \operatorname{sen} v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = -u \cos v\mathbf{i} - u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}. \qquad (12)$$

La magnitud del vector en (12) es

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{u^2 \cos^2 v + u^2 \operatorname{sen}^2 v + u^2} = \sqrt{2}u.$$

De tal modo, de (11) el área es

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_R \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dA = \iint_R \sqrt{2}u\, du\, dv \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 u\, du\, dv \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}u^2 \Big]_0^1 dv \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \int_0^{2\pi} dv \\ &= \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

■

$\iint_R$ NOTAS DESDE EL AULA

Es conveniente una observación acerca de la definición 15.5.1. En el ejemplo 7 aplicamos (11) para determinar el área de la superficie del cono definido por la función vectorial $\mathbf{r} = (u \cos v)\mathbf{i} + (u \text{ sen } v)\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, aun cuando esta superficie S *no* es suave sobre la región R en el plano uv definida por $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$. El hecho de que S no es suave debe tener sentido puesto que uno no esperaría que exista un plano tangente en el punto afilado en $\mathbf{r}(0, 0)$ o $(0, 0, 0)$. También podemos ver esto de (12), ya que $u = 0, v = 0, \partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v = \mathbf{0}$, y por ello, por definición, la superficie no es suave en $\mathbf{r}(0, 0)$. El punto es el siguiente: podemos usar (11) a pesar de que la superficie S no es suave en un número finito de puntos localizados en la frontera de la región R.

Ejercicios 15.5 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-47.

Fundamentos

En los problemas 1-4, encuentre ecuaciones paramétricas para la superficie dada.

1. El plano $4x + 3y - z = 2$
2. El plano $2x + y = 1$
3. El hiperboloide $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$ para $y \leq -1$
4. El paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$

En los problemas 5 y 6, encuentre una función de valores vectoriales $\mathbf{r}(u, v)$ para la superficie dada.

5. El cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ para $-2 \leq x \leq 2$, $-8 \leq z \leq 1$
6. El cilindro elíptico $x^2/4 + y^2/9 = 1$

En los problemas 7-10, identifique la superficie dada eliminando los parámetros.

7. $x = \cos u, y = \text{sen } u, z = v$
8. $x = u, y = v, z = u^2 + v^2$
9. $\mathbf{r}(u, v) = \text{sen } u\mathbf{i} + \text{sen } u \cos v\mathbf{j} + \text{sen } u \text{ sen } v\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(\phi, \theta) = 2 \text{ sen } \phi \cos \theta\mathbf{i} + 3 \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta\mathbf{j} + 4 \cos \phi\mathbf{k}$

En los problemas 11-14, use la gráfica para obtener el dominio del parámetro R correspondiente a la porción de la superficie dada. Para los problemas 11 y 12 vea el ejemplo 13; para los problemas 13 y 14 vea el ejemplo 5.

11.

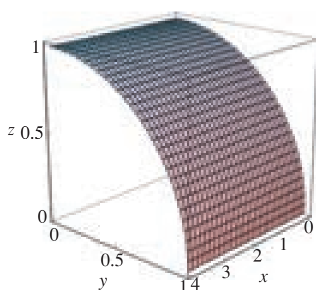


FIGURA 15.5.10 Gráfica del problema 11

12.

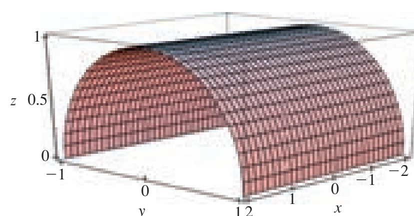


FIGURA 15.5.11 Gráfica del problema 12

13.

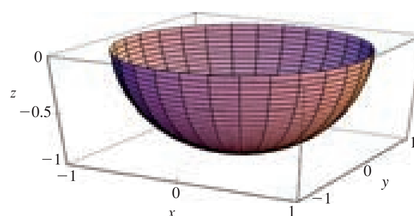


FIGURA 15.5.12 Gráfica del problema 13

14.

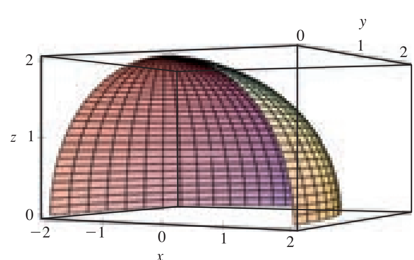


FIGURA 15.5.13 Gráfica del problema 14

En los problemas 15-22, encuentre una ecuación del plano tangente en el punto sobre la superficie que corresponde a los valores del parámetro dado.

15. $x = 10 \text{ sen } u, y = 10 \cos u, z = v$; $u = \pi/6, v = 2$
16. $x = u \cos v, y = u \text{ sen } v, z = u^2 + v^2$; $u = 1, v = 0$
17. $\mathbf{r}(u, v) = (u^2 + v)\mathbf{i} + (u + v)\mathbf{j} + (u^2 - v^2)\mathbf{k}$; $u = 1, v = 2$
18. $\mathbf{r}(u, v) = 4u\mathbf{i} + 3u^2 \cos v\mathbf{j} + 3u^2 \text{ sen } v\mathbf{k}$; $u = -1, v = \pi/3$
19. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$; $u = 3, v = 3$
20. $\mathbf{r}(u, v) = u \text{ sen } v\mathbf{i} + u \cos v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$; $u = 1, v = \pi/4$

21. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (v - u)\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$; $u = -2, v = 1$

22. $\mathbf{r}(u, v) = uv\mathbf{i} + (v + e^u)\mathbf{j} + (u + e^v)\mathbf{k}$; $u = 0, v = \ln 3$

En los problemas 23 y 24, encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto dado.

23. $x = u - v, y = 2u + 3v, z = u^2 + v^2$; $(1, 7, 5)$

24. $\mathbf{r}(u, v) = v^2\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$; $(1, 3, 16)$

En los problemas 25-30, encuentre el área de la superficie dada. Si le resulta instructivo, emplee un SAC para graficar la superficie.

25. La porción del plano $\mathbf{r} = (2u - v)\mathbf{i} + (u + v + 1)\mathbf{j} + u\mathbf{k}$ para $0 \le u \le 2, -1 \le v \le 1$

26. La porción del plano $x + y + z = 1$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

27. La porción de $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$ para $0 \le z \le 4$

28. La porción de $\mathbf{r}(r, \theta) = r\cos\theta\mathbf{i} + r\,\text{sen}\,\theta\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ para $0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi$

29. La superficie $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = \theta$, $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$

30. La esfera $x = a\,\text{sen}\,\phi\cos\theta$, $y = a\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta$, $z = a\cos\phi$ para $0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$

En los problemas 31-34, emplee el problema 30 como una ayuda en la determinación de las ecuaciones paramétricas para la porción indicada de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. En cada caso encuentre el área de esa porción de la esfera.

31. La porción de la esfera debajo del plano $z = 1$

32. La porción de la esfera debajo del plano $z = 1$ pero sobre el plano $z = 0$

33. La porción de la esfera sobre el plano $z = \sqrt{2}$

34. La porción de la esfera fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 2$

35. Considere el cono dado en (3) del ejemplo 2, para $0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$.

a) Dibuje o grafique, utilizando un SAC, los bastidores de superficie correspondientes a $r = \frac{1}{2}$ y $r = 1$. Dibuje las curvas en rojo.

b) Dibuje o grafique, empleando un SAC, los bastidores de superficie correspondientes a $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$. Dibuje las curvas en color azul.

c) Superponga los cuatro bastidores de superficie de los incisos *a*) y *b*) sobre el mismo eje de coordenadas.

36. Considere la esfera dada en (4) del ejemplo 5, para $a = 2, 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$.

a) Dibuje o grafique, utilizando un SAC, los bastidores de superficie correspondientes a $\phi = \pi/3$ y $\phi = 2\pi/3$. Dibuje las curvas en rojo.

b) Dibuje o grafique, utilizando un SAC, los bastidores de superficie correspondientes a $\theta = \pi/4$ y $\theta = 5\pi/4$. Dibuje las curvas en azul.

c) Superponga los cuatro bastidores de superficie en los incisos *a*) y *b*) sobre los mismos ejes de coordenadas.

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 37-42, asocie la superficie dada en la figura con la gráfica de una función de valores vectoriales $\mathbf{r}(u, v)$ en *a*)-*f*). Emplee un SAC y experimente con diferentes dominios del parámetro y perspectivas.

a) $\mathbf{r}(u, v) = \text{sen}\,u\mathbf{i} + \text{sen}\,v\mathbf{j} + \text{sen}(u + v)\mathbf{k}$

b) $\mathbf{r}(u, v) = \text{sen}^3 u\cos^3 v\mathbf{i} + \text{sen}^3 u\,\text{sen}^3 v\mathbf{j} + \cos^3 u\mathbf{k}$

c) $\mathbf{r}(u, v) = (u + 2\cos v)\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$

d) $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u^2v^4\mathbf{k}$

e) $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + u^2\cos v\mathbf{j} + u^2\,\text{sen}\,v\mathbf{k}$

f) $\mathbf{r}(u, v) = e^u\cos v\mathbf{i} + e^u\,\text{sen}\,v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$

37.

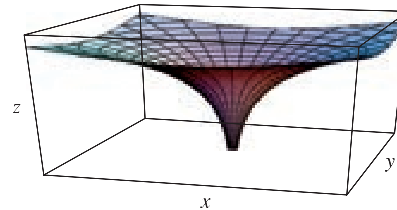


FIGURA 15.5.14 Gráfica del problema 37

38.

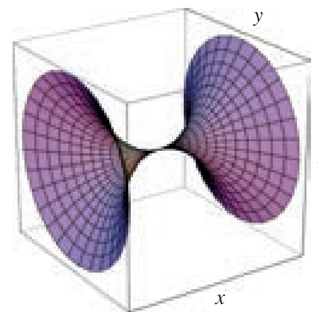


FIGURA 15.5.15 Gráfica del problema 38

39

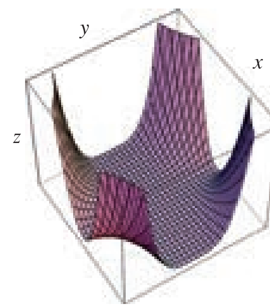


FIGURA 15.5.16 Gráfica del problema 39

40.

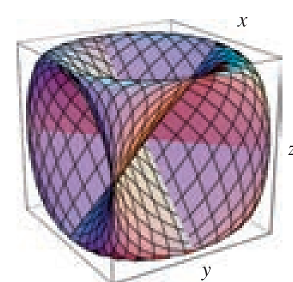


FIGURA 15.5.17 Gráfica del problema 40

41.

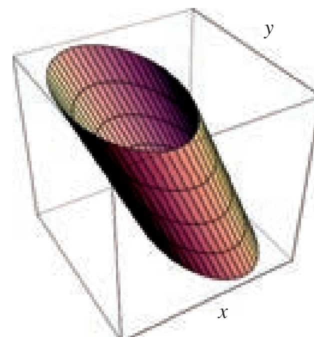


FIGURA 15.5.18 Gráfica del problema 41

42.

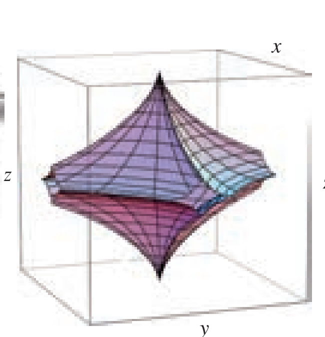


FIGURA 15.5.19 Gráfica del problema 42

43. Emplee un SAC para graficar el **toro** dado por

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (R - \text{sen}\,\phi)\cos\theta\mathbf{i} + (R - \text{sen}\,\phi)\text{sen}\,\theta\mathbf{j} + \cos\phi\mathbf{k}$$

para $R = 5$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Experimente con diferentes orientaciones y perspectivas.

44. Demuestre que para una constante $R > 1$ el área de la superficie del toro del problema 43 correspondiente al dominio del parámetro dado es $A(S) = 4\pi^2 R$.

≡ Piense en ello

45. Encuentre una parametrización diferente del plano del problema 1 de la que se da en la sección de respuestas.

46. Determine el área del problema 11 sin integración.

47. Si una curva definida por $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, se gira en torno al eje x, entonces las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución S son

$$x = u,\ y = f(u)\cos v,\ z = f(u)\,\text{sen}\,v,\ a \leq u \leq b,\ 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Si f' es continua y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo $[a, b]$, entonces emplee (11) para demostrar que el área de S es

$$A(S) = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Vea (3) de la sección 6.6.

48. ***a)*** Emplee el problema 47 para encontrar ecuaciones paramétricas de la superficie generada al rotar la gráfica de $f(x) = \text{sen}\,x$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, alrededor del eje x.

b) Emplee un SAC para dibujar la gráfica de la superficie paramétrica del inciso *a*).

c) Emplee un SAC y la fórmula del problema 47 para encontrar el área de la superficie de revolución del inciso *a*) determinando primero el área de la superficie correspondiente al dominio del parámetro $0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi$.

49. Suponga que $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ es el vector de posición del punto (x_0, y_0, z_0) y que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores constantes pero no paralelos. Discuta: ¿cuál es la superficie con ecuación vectorial $\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$, donde s y t son parámetros?

50. Vuelva a leer el ejemplo 5 de esta sección. Encuentre después ecuaciones paramétricas de una esfera de radio 5 con centro (2, 3, 4).

15.6 Integrales de superficie

Introducción El último tipo de integral que consideraremos en este libro se denomina **integral de superficie** e implica una función f de tres variables definida sobre una superficie S.

Integrales de superficie Los pasos preliminares para la definición de esta integral son similares a combinaciones de los pasos que llevaron a la integral de línea, con respecto a la longitud de arco, y los pasos que condujeron a la integral doble. Sea $w = f(x, y, z)$ una función definida en una región del espacio tridimensional que contiene una superficie S, la cual es la gráfica de una función $z = g(x, y)$. Sea R la proyección de la superficie sobre el plano xy una región ya sea de tipo I o de tipo II.

- Divida la superficie S en n parches S_k con áreas ΔS_k que corresponda a una partición P de R en n rectángulos R_k con áreas ΔA_k.
- Sea $\|P\|$ la norma de la partición o la longitud de la diagonal más larga de R_k.
- Elija un punto muestra (x_k^*, y_k^*, z_k^*) sobre cada parche S_k como se ilustra en la FIGURA 15.6.1.
- Forme la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta S_k.$$

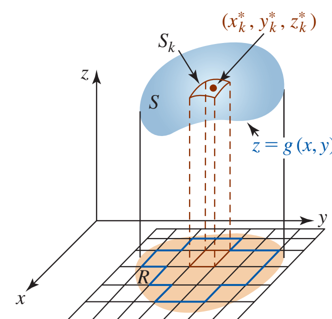


FIGURA 15.6.1 Punto muestra sobre el elemento k-ésimo S_k de superficie

Definición 15.6.1 Integral de superficie

Sea f una función de tres variables x, y y z definida en una región del espacio que contiene a una superficie S. Entonces la **integral de superficie** de f sobre S es

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta S_k. \qquad (1)$$

Método de evaluación Recuerde de (3) de la sección 14.6 que si $z = g(x, y)$ es la ecuación de una superficie S, entonces la diferencial del área de superficie es

$$dS = \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\, dA.$$

De tal modo, si f, g, g_x y g_y son continuas en una región del espacio tridimensional que contiene a S, podemos evaluar (1) por medio de una integral doble:

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_R f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\, dA. \tag{2}$$

Advierta que cuando $f(x, y, z) = 1$, (1) se reduce a la fórmula para el área de la superficie (2) de la sección 14.6:

$$\iint_S dS = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = A(S).$$

Proyección de *S* en otros planos Si $y = g(x, z)$ es la ecuación de una superficie S que se proyecta sobre la región R del plano xz, entonces la integral de superficie de f sobre S está dada por

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_R f(x, g(x, z), z)\sqrt{1 + [g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2}\, dA. \tag{3}$$

De manera similar, si $x = g(y, z)$ es la ecuación de una superficie S que se proyecta sobre el plano yz, entonces el análogo de (3) es

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_R f(g(y, z), y, z)\sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2}\, dA. \tag{4}$$

Masa de una superficie Suponga que $\rho(x, y, z)$ representa la densidad de una superficie S en el punto (x, y, z), o la masa por unidad de área de superficie. Entonces la **masa** m de la superficie es

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS. \tag{5}$$

EJEMPLO 1 Masa de una superficie

Determine la masa de la superficie del paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$ en el primer octante para $1 \le z \le 5$ si la densidad en el punto P sobre la superficie es directamente proporcional a la distancia desde el plano xy.

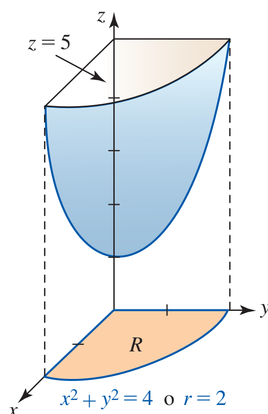


FIGURA 15.6.2 Superficie del ejemplo 1

Solución La superficie en cuestión y su proyección sobre el plano xy se muestran en la FIGURA 15.6.2. Ahora bien, puesto que $\rho(x, y, z) = kz$, $g(x, y) = 1 + x^2 + y^2$, $g_x = 2x$, $g_y = 2y$, las fórmulas (5) y (2) producen

$$m = \iint_S kz\, dS = k\iint_R (1 + x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA.$$

Cambiando a coordenadas polares, obtenemos

$$\begin{aligned} m &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (1 + r^2)\sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta \\ &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^2 [r(1 + 4r^2)^{1/2} + r^3(1 + 4r^2)^{1/2}]\, dr\, d\theta \quad \leftarrow \text{integración por partes} \\ &= k\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2} + \frac{1}{12}r^2(1 + 4r^2)^{3/2} - \frac{1}{120}(1 + 4r^2)^{5/2}\right]_0^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2}k\pi\left[\frac{5}{12}(17)^{3/2} - \frac{1}{120}(17)^{5/2} - \frac{3}{40}\right] \approx 30.16k. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Región R en el plano xz

Evalúe $\iint_S xz^2 dS$, donde S es la porción del cilindro $y = 2x^2 + 1$ en el primer octante acotado por $x = 0$, $x = 2$, $z = 4$ y $z = 8$.

Solución Usaremos (3) con $g(x, z) = 2x^2 + 1$ y R es la región rectangular en el plano xz que se muestra en la FIGURA 15.6.3. Puesto que $g_x(x, z) = 4x$ y $g_z(x, z) = 0$, se deduce que

$$\iint_S xz^2\, dS = \int_0^2 \int_4^8 xz^2\sqrt{1 + 16x^2}\, dz\, dx$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^2 z^3x\sqrt{1 + 16x^2}\Big]_4^8 dx$$
$$= \frac{448}{3}\int_0^2 x(1 + 16x^2)^{1/2}\, dx = \frac{28}{9}(1 + 16x^2)^{3/2}\Big]_0^2$$
$$= \frac{28}{9}[65^{3/2} - 1] \approx 1\,627.3.$$

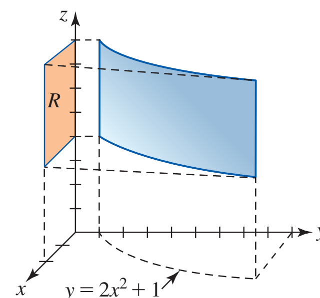


FIGURA 15.6.3 Superficie del ejemplo 2

Superficies paramétricas Si S se define paramétricamente mediante la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

donde (u, v) es el dominio D del parámetro del plano uv y $f(x, y, z)$ es continua sobre S, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 15.6.1 Integral de superficie

Sea S una superficie paramétrica suave definida por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

donde (u, v) varía sobre la región R del parámetro en el plano uv, y sea $f(x, y, z)$ continua sobre S. Entonces

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dA. \qquad (6)$$

La fórmula (6) puede considerarse como una integral de superficie análoga a la integral de línea $\int_a^b f(x(t), y(t), z(t))|\mathbf{r}'(t)|\, dt$, (14) de la sección 15.1.

EJEMPLO 3 Superficie paramétrica

Evalúe la integral de superficie $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dS$, donde S es la superficie definida por la función vectorial $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 4\pi$.

Solución La gráfica de $\mathbf{r}(u, v)$ que se muestra en la FIGURA 15.6.4 recibe el nombre de *helicoide circular*. La frontera de un helicoide circular es una hélice circular. Vea las *Notas desde el aula* en la sección 10.2.

Al sustituir $x = u \cos v$ y $y = u \operatorname{sen} v$ en el integrando y simplificando, obtenemos:

$$\sqrt{1 + x^2 + y^2} = \sqrt{1 + u^2\cos^2 v + u^2 \operatorname{sen}^2 v} = \sqrt{1 + u^2}.$$

Luego,
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 0 \\ -u \operatorname{sen} v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen} v\mathbf{i} - \cos v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{1 + u^2}.$$

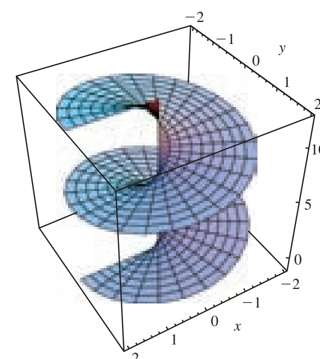
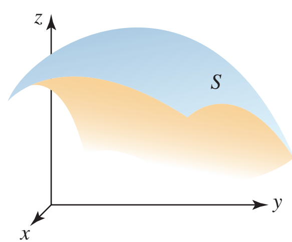


FIGURA 15.6.4 Helicoide del ejemplo 3



a) Superficie de dos lados


b) Superficie de un lado

FIGURA 15.6.5 Superficie orientada *a*); superficie no orientada *b*)

La integral dada se convierte en

$$\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dS = \iint_R (\sqrt{1 + u^2})^2\, dA$$
$$= \int_0^{4\pi} \int_0^2 (1 + u^2)\, du\, dv$$
$$= \frac{14}{3} \int_0^{4\pi} dv$$
$$= \frac{56}{3}\pi. \qquad \blacksquare$$

Superficies orientadas En el ejemplo 4 evaluaremos una integral de superficie de un campo vectorial. Para hacerlo necesitamos examinar el concepto de una **superficie orientada**. En términos generales, una superficie orientada S, tal como se ilustra en la FIGURA 15.6.5*a*), tiene dos lados que pueden pintarse con colores diferentes. La cinta de Möbius, que recibe ese nombre en honor al matemático alemán **August Möbius** (1790-1868) y que se muestra en la figura 15.6.5*b*), no es una superficie orientada y tiene un solo lado. Para construir una cinta de Möbius corte una larga tira de papel, dé medio giro a un extremo y luego una ambos extremos con cinta. Una persona que empieza a dibujar la superficie de una cinta de Möbius en un punto pintará la superficie completa y regresará al punto de partida.

Específicamente, afirmamos que una superficie suave S es una superficie orientada si existe una función normal unitaria continua **n** definida en cada punto (x, y, z) sobre la superficie. El campo vectorial $\mathbf{n}(x, y, z)$ recibe el nombre de **orientación** de S. Sin embargo, puesto que una normal unitaria a la superficie S en (x, y, z) puede ser ya sea $\mathbf{n}(x, y, z)$ o $-\mathbf{n}(x, y, z)$, una superficie orientada tiene dos orientaciones. Vea la FIGURA 15.6.6*a*), *b*) y *c*). La cinta de Möbius que se muestra de nuevo en la figura 15.6.6*d*) no es una superficie orientada porque si una normal unitaria **n** empieza en P sobre la superficie y se mueve *una vez* alrededor de la cinta sobre la curva C, termina en el lado opuesto de la cinta en P y por ello apunta en la dirección opuesta. Una superficie S definida por $z = g(x, y)$ tiene una **orientación hacia arriba** (figura 15.6.6*b*) cuando las normales unitarias están dirigidas hacia arriba, esto es, tiene componentes **k** positivas, y tiene una **orientación hacia abajo** (figura 15.6.6*c*) cuando las normales unitarias están dirigidas hacia abajo, esto es, tienen componentes **k** negativas.

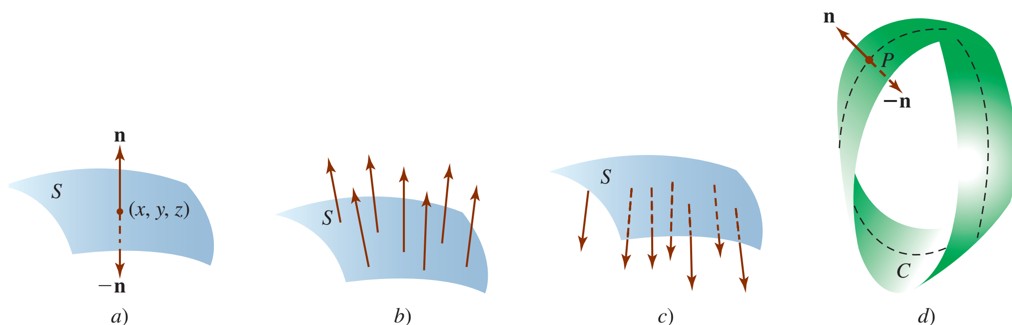


FIGURA 15.6.6 Orientación hacia arriba en *b*); orientación hacia abajo en *c*); ninguna orientación en *d*)

Si una superficie suave S está definida implícitamente por $h(x, y, z) = 0$, entonces recuerde que la normal unitaria a la superficie es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|},$$

donde $\nabla h = (\partial h/\partial x)\mathbf{i} + (\partial h/\partial y)\mathbf{j} + (\partial h/\partial z)\mathbf{k}$ es el gradiente de h. Si S está definida por una función explícita $z = g(x, y)$, entonces podemos usar $h(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$ o $h(x, y, z) = g(x, y) - z = 0$ dependiendo de la orientación de S.

Como veremos en el siguiente ejemplo, las dos orientaciones de una superficie *cerrada* orientada son **hacia fuera** y **hacia dentro**. Una **superficie cerrada** se define como la frontera de un sólido finito tal como la superficie de una esfera.

EJEMPLO 4 Región R en el plano xz

Considere la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ de radio $a > 0$. Si definimos $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, entonces

$$\nabla h = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \quad \text{y} \quad |\nabla h| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2a.$$

Así, las dos orientaciones de las superficies son

$$\mathbf{n} = \frac{x}{a}\mathbf{i} + \frac{y}{a}\mathbf{j} + \frac{z}{a}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n} = -\frac{x}{a}\mathbf{i} - \frac{y}{a}\mathbf{j} - \frac{z}{a}\mathbf{k}.$$

El campo vectorial **n** define una orientación hacia fuera, en tanto que $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$ define una orientación hacia dentro. Vea la FIGURA 15.6.7. ■

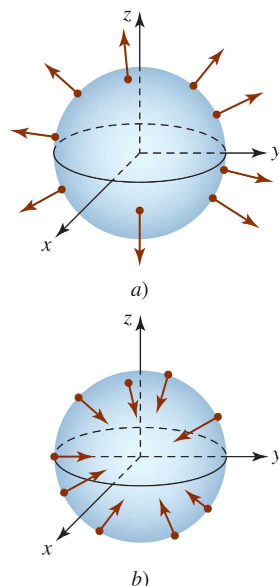


FIGURA 15.6.7 Orientación hacia fuera en *a*); orientación hacia dentro en *b*) en el ejemplo 4

Integrales de campos vectoriales

Si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

es el campo de velocidades de un fluido, entonces, como se indica en la FIGURA 15.6.8*b*), el volumen del fluido que fluye a través de un elemento de área superficial ΔS por unidad de tiempo se aproxima por medio de

$$(\text{altura}) - (\text{área de la base}) = (\text{comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{F})\Delta S = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\Delta S,$$

donde **n** es una normal unitaria a la superficie. El volumen total del fluido que pasa a través de S por unidad de tiempo de recibe el nombre de **flujo de F a través de *S*** y está dado por

$$\text{flujo} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS. \tag{7}$$

En el caso de una superficie cerrada S, si **n** es la normal exterior (interior), entonces (7) produce el volumen del fluido que fluye hacia fuera (hacia dentro) a través de S por unidad de tiempo.

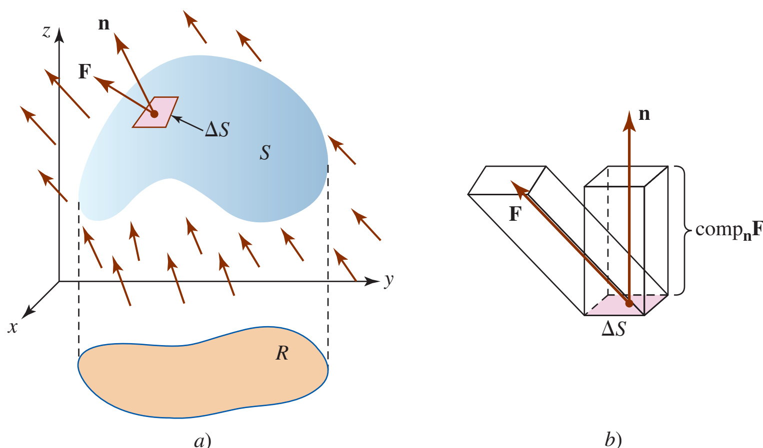


FIGURA 15.6.8 Fluido que fluye a través de una superficie

EJEMPLO 5 Flujo

Considere que $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ representa el flujo de un líquido. Determine el flujo de **F** a través de la superficie S dada por la parte del plano $z = 6 - 3x - 2y$ en el primer octante orientado hacia arriba.

Solución El campo vectorial y la superficie se ilustran en la FIGURA 15.6.9. Definiendo el plano por $h(x, y, z) = 3x + 2y + z - 6 = 0$, vemos que la normal unitaria con componente **k** positiva es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|} = \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}.$$

Como $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 3z/\sqrt{14}$, tenemos

$$\text{flujo} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \frac{1}{\sqrt{14}}\iint_S 3z\, dS.$$

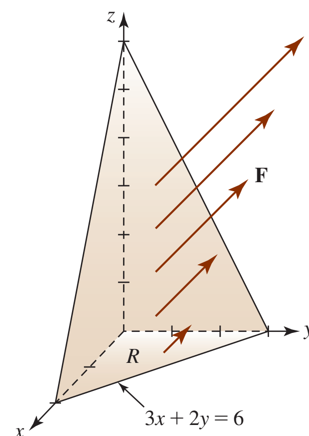


FIGURA 15.6.9 Superficie del ejemplo 5

Al emplear la proyección R de la superficie sobre el plano xy que se muestra en la figura, la última integral puede escribirse

$$\text{flujo} = \frac{1}{\sqrt{14}}\iint_R 3(6 - 3x - 2y)(\sqrt{14}\,dA)$$
$$= 3\int_0^2\int_0^{3-3x/2}(6 - 3x - 2y)\,dy\,dx = 18. \qquad ■$$

Dependiendo de la naturaleza del campo vectorial, la integral en (7) puede representar otros tipos de flujo. Por ejemplo, (7) también podría proporcionar el flujo eléctrico, flujo magnético, flujo de calor, etcétera.

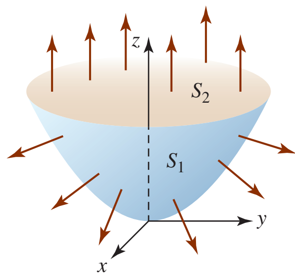


FIGURA 15.6.10 Superficie S definida por partes

$\iint_S$ NOTAS DESDE EL AULA

Si la superficie S es suave por partes, expresamos una integral de superficie sobre S como la suma de las integrales de superficie sobre las diversas secciones de la superficie. Si S está dada por $S = S_1 \cup \cdots \cup S_n$, donde las superficies se intersecan sólo en sus fronteras, entonces

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_{S_1} f(x, y, z)\,dS + \cdots + \iint_{S_n} f(x, y, z)\,dS.$$

Por ejemplo, suponga que S es la superficie cerrada suave por partes y orientada que está acotada por el paraboloide $z = x^2 + y^2\,(S_1)$ y el plano $z = 1\,(S_2)$. Entonces, el flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}$ hacia fuera de la superficie S es

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

donde consideramos S_1 orientada hacia abajo y S_2 orientada hacia arriba. Vea la FIGURA 15.6.10 y el problema 21 en los ejercicios 15.6.

Ejercicios 15.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-47.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-10, evalúe $\iint_S f(x, y, z)\,dS$.

1. $f(x, y, z) = x$; S es la porción del cilindro $z = 2 - x^2$ en el primer octante acotado por $x = 0$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$
2. $f(x, y, z) = xy(9 - 4z)$; la misma superficie S que en el problema 1
3. $f(x, y, z) = xz^3$; S es el cono de un solo manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$
4. $f(x, y, z) = x + y + z$; S es el cono de un solo manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre $z = 1$ y $z = 4$
5. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ en el primer octante
6. $f(x, y, z) = z^2$; S es la porción del plano $z = x + 1$ dentro del cilindro $y = 1 - x^2$, $0 \le y \le 1$
7. $f(x, y, z) = xy$; S es la porción del paraboloide $2z = 4 - x^2 - y^2$ dentro de $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$
8. $f(x, y, z) = 2z$; S es la porción del paraboloide $2z = 1 + x^2 + y^2$ en el primer octante acotado por $x = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $z = 1$
9. $f(x, y, z) = 24\sqrt{y}\,z$; S es la porción del cilindro $y = x^2$ en el primer octante acotado por $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 3$
10. $f(x, y, z) = (1 + 4y^2 + 4z^2)^{1/2}$; S es la porción del paraboloide de $x = 4 - y^2 - z^2$ en el primer octante fuera del cilindro $y^2 + z^2 = 1$

En los problemas 11 y 12, evalúe $\iint_S (3z^2 + 4yz)\,dS$, donde S es la porción del plano $x + 2y + 3z = 6$ en el primer octante. Use la proyección de S sobre el plano de coordenadas indicado en la figura dada.

11.

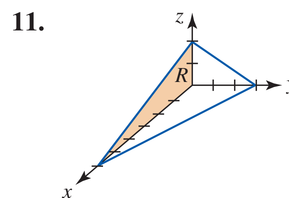


FIGURA 15.6.11 Superficie del problema 11

12.

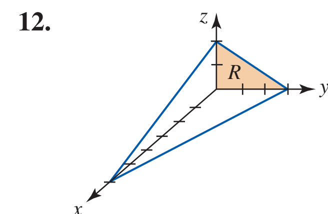


FIGURA 15.6.12 Superficie del problema 12

En los problemas 13 y 14, encuentre la masa de la superficie dada con la función de densidad que se indica.

13. S es la porción del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante; la densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el plano yz.
14. S es el hemisferio $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; $\rho(x, y, z) = |xy|$

En los problemas 15-20, sea **F** un campo vectorial. Encuentre el flujo de **F** a través de la superficie dada. Suponga que la superficie S se orienta hacia arriba.

15. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; S la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante acotado por $x = 0, x = 3, y = 0, z = 0$

16. $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$; S es la parte del paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

17. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; la misma superficie S que en el problema 16

18. $\mathbf{F} = -x^3y\mathbf{i} + yz^3\mathbf{j} + xy^3\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = x + 3$ en el primer octante dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$

19. $\mathbf{F} = \frac{1}{2}x^2\mathbf{i} + \frac{1}{2}y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ para $0 \leq z \leq 4$

20. $\mathbf{F} = e^y\mathbf{i} + e^x\mathbf{j} + 18y\mathbf{k}$; S es la porción del plano $x + y + z = 6$ en el primer octante

21. Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$ fuera de la superficie cerrada S dada en la figura 15.6.10.

22. Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 6z^2\mathbf{k}$ fuera de la superficie cerrada S acotada por los paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

≡ Aplicaciones

23. Considere que $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ representa la temperatura y deje que el flujo de calor esté dado por el campo vectorial $\mathbf{F} = -\nabla T$. Determine el flujo de calor fuera de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. [*Sugerencia*: El área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$.]

24. Determine el flujo $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ fuera del cubo unitario definido por $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$. Vea la FIGURA 15.6.13. Recurra al hecho de que el flujo fuera del cubo es la suma de los flujos fuera de los lados.

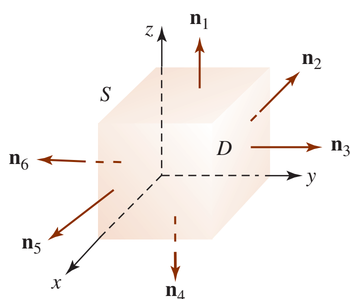


FIGURA 15.6.13 Cubo del problema 24

25. La ley de Coulomb establece que el campo eléctrico **E** debido a una carga puntual q en el origen está dado por $\mathbf{E} = kq\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, donde k es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Determine el flujo fuera de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

26. Si $\sigma(x, y, z)$ es la densidad de carga en un campo electrostático, entonces la carga total sobre la superficie S es $Q = \iint_S \sigma(x, y, z)\, dS$. Encuentre la carga total sobre esa parte del hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ si la densidad de carga en un punto P sobre la superficie es directamente proporcional a la distancia desde el plano xy.

27. Las coordenadas del **centroide** de una superficie se definen por medio de

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x\, dS}{A(S)}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_S y\, dS}{A(S)}, \quad \bar{z} = \frac{\iint_S z\, dS}{A(S)},$$

donde $A(S)$ es el área de la superficie. Encuentre el centroide de esa porción del plano $2x + 3y + z = 6$ en el primer octante.

28. Emplee la información del problema 27 para determinar el centroide del hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

29. El **momento de inercia** de una superficie S con densidad $\rho(x, y, z)$ en un punto (x, y, z) alrededor del eje z está dado por

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\, \rho(x, y, z)\, dS.$$

Considere la superficie cónica $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 4$, con densidad constante k.

a) Emplee el problema 27 para determinar el centroide de la superficie.

b) Encuentre el momento de inercia de la superficie alrededor del eje z.

≡ Piense en ello

30. Sea $z = f(x, y)$ la ecuación de una superficie S y **F** el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$. Demuestre que

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_R \left[-P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} - Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} + R(x, y, z) \right] dA.$$

15.7 Rotacional y divergencia

▮ Introducción Hemos visto que si un campo vectorial de fuerza **F** es conservativo, entonces puede escribirse como el gradiente de una función potencial ϕ:

$$\mathbf{F} = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

El operador diferencial vectorial, u operador nabla,

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (1)$$

que se usa en el gradiente también puede combinarse con un campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \tag{2}$$

de dos modos diferentes: en un caso produciendo otro campo vectorial y en el otro dando lugar a una función escalar.

Nota: Supondremos en la siguiente discusión que P, Q y R tienen derivadas parciales continuas por toda una región apropiada del espacio tridimensional.

Rotacional Empezamos combinando el operador diferencial (1) con el campo vectorial (2) para producir otro campo vectorial llamado el **rotacional** de **F**.

Definición 15.7.1 Rotacional de un campo vectorial

El **rotacional** de un campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es el campo vectorial

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{3}$$

No es necesario memorizar los complicados componentes en el campo vectorial de (3). Como un procedimiento práctico, (3) puede interpretarse como un producto cruz. Interpretamos (1) como un vector con componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$, y entonces el rotacional **F** puede escribirse como el producto cruz de ∇ y el vector **F**:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{4}$$

EJEMPLO 1 Rotacional de un campo vectorial

Si $\mathbf{F} = (x^2y^3 - z^4)\mathbf{i} + 4x^5y^2z\mathbf{j} - y^4z^6\mathbf{k}$, encuentre el rotacional **F**.

Solución De (4),

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 - z^4 & 4x^5y^2z & -y^4z^6 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^4z^6) - \frac{\partial}{\partial z}(4x^5y^2z)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^4z^6) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^3 - z^4)\right]\mathbf{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(4x^5y^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3 - z^4)\right]\mathbf{k} \\ &= (-4y^3z^6 - 4x^5y^2)\mathbf{i} - 4z^3\mathbf{j} + (20x^4y^2z - 3x^2y^2)\mathbf{k}. \end{aligned}$$ ■

Si f es una función escalar con segundas derivadas parciales continuas, entonces es fácil demostrar que

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Vea el problema 23 de los ejercicios 15.7. Puesto que un campo vectorial conservativo **F** es un campo gradiente, esto es, existe una función potencial ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$, se deduce de (5) que *si* **F** *es conservativo, entonces* rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

EJEMPLO 2 Un campo vectorial no conservativo

Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. De (4),

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Debido a que rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ podemos concluir que **F** es no conservativo. ■

Bajo la suposición de que las funciones componentes P, Q y R de un campo vectorial $\mathbf{F}$ son continuas y tienen derivadas parciales continuas por toda una región abierta D del espacio tridimensional, también podemos concluir que *si* rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, *entonces* $\mathbf{F}$ *es conservativo.* Resumimos estas observaciones en el siguiente teorema.

Teorema 15.7.1 Conceptos equivalentes

Suponga que $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es un campo vectorial donde P, Q y R son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en alguna región abierta del espacio tridimensional. El campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo si y sólo si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Advierta que cuando rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces las tres componentes del vector deben ser 0. De (3) vemos que esto quiere decir que

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Ahora repase (12) de la sección 15.3.

Divergencia Hay otra combinación de derivadas parciales de las funciones componentes de un campo vectorial que ocurren con frecuencia en ciencia e ingeniería. Antes de enunciar la siguiente definición, considere lo siguiente.

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ representa el campo de velocidades de un fluido, entonces como vimos en la figura 15.6.8*b*) el volumen del fluido que fluye a través de un elemento de área superficial ΔS por unidad de tiempo, esto es, el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}$ a través del área ΔS, es aproximadamente

$$(\text{altura}) \cdot (\text{área de la base}) = (\text{comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{F})\Delta S = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\Delta S, \tag{6}$$

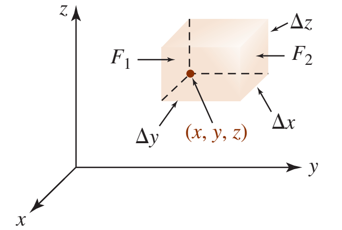


FIGURA 15.7.1 Flujo que pasa a través de un paralelepípedo rectangular

donde $\mathbf{n}$ es un vector normal unitario a la superficie. Considere ahora el paralelepípedo rectangular que se ilustra en la FIGURA 15.7.1. Para calcular el flujo total de $\mathbf{F}$ a través de sus seis lados en la dirección hacia fuera, calculamos primero el flujo total hacia el exterior de dos caras paralelas. El área de la cara F_1 es $\Delta x \Delta z$, y la normal unitaria hacia fuera es $-\mathbf{j}$, y por ello por (6) el flujo de $\mathbf{F}$ a través de F_1 es

$$\mathbf{F} \cdot (-\mathbf{j})\Delta x \Delta z = -Q(x, y, z)\Delta x \Delta z.$$

El flujo hacia fuera de la cara F_2, cuya normal hacia fuera es $\mathbf{j}$, está dado por

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{j})\Delta x \Delta z = Q(x, y + \Delta y, z)\Delta x \Delta z.$$

En consecuencia, el flujo total hacia fuera de estas caras paralelas es

$$Q(x, y + \Delta y, z)\Delta x \Delta z + (-Q(x, y, z)\Delta x \Delta z) = [Q(x, y + \Delta y, z) - Q(x, y, z)]\Delta x \Delta z. \tag{7}$$

Multiplicando (7) por $\Delta y/\Delta y$ y utilizando la definición de una derivada parcial, entonces para Δy cercana a 0,

$$\frac{[Q(x, y + \Delta y, z) - Q(x, y, z)]}{\Delta y}\Delta x \Delta y \Delta z \approx \frac{\partial Q}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z.$$

Argumentando exactamente de la misma manera, vemos que las contribuciones al flujo total hacia fuera del paralelepípedo desde las dos caras paralelas al plano yz, y desde las dos caras paralelas al plano xy, originan

$$\frac{\partial P}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial R}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z.$$

Al sumar estos resultados, vemos que el flujo total de $\mathbf{F}$ hacia fuera del paralelepípedo es aproximadamente

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z.$$

Dividiendo la última expresión entre $\Delta x \Delta y \Delta z$, obtenemos el flujo hacia fuera de $\mathbf{F}$ por unidad de volumen:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Esta combinación de derivadas parciales es una función escalar y recibe el nombre especial de **divergencia** de **F**.

Definición 15.7.2 Divergencia

La **divergencia** de un campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es la función escalar

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{8}$$

La función escalar div **F** dada en (8) también puede escribirse en términos del operador delta (1) como un producto punto:

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}P(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z}R(x, y, z). \tag{9}$$

EJEMPLO 3 Divergencia de un campo vectorial

Si $\mathbf{F} = xz^2\mathbf{i} + 2xy^2z\mathbf{j} - 5yz\mathbf{k}$, encuentre div **F**.

Solución De (9),

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(xz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(-5yz) \\ &= z^2 + 4xyz - 5y. \end{aligned}$$ ■

La siguiente identidad relaciona las nociones de divergencia y rotacional. Si **F** es un campo vectorial que tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0. \tag{10}$$

Vea el problema 24 de los ejercicios 15.7.

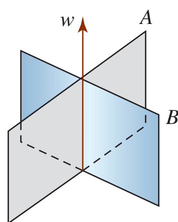
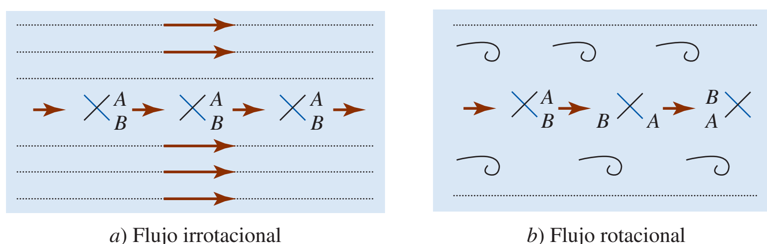


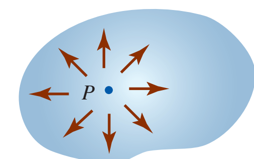
FIGURA 15.7.2 Dispositivo de paleta para detectar la rotación de un fluido

Interpretaciones físicas La palabra *rotacional* fue introducida por el matemático y físico escocés **James Clerk Maxwell** (1831-1879) en sus estudios de campos electromagnéticos. Sin embargo, el rotacional se entiende con facilidad en conexión con el flujo de fluidos. Si un dispositivo de palas, como el que se muestra en la FIGURA 15.7.2, se inserta en un fluido que fluye, entonces el rotacional del campo de velocidades **F** es una medida de la tendencia del fluido a girar el dispositivo en torno a su eje vertical w. Si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces el flujo del fluido se dice que será **irrotacional**, lo cual significa que no tiene vórtices o remolinos que podrían causar el giro de la pala. En la FIGURA 15.7.3 el eje w de la pala apunta directamente hacia fuera de la página.

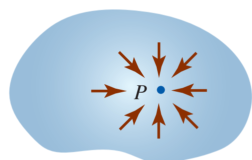


a) Flujo irrotacional *b*) Flujo rotacional

FIGURA 15.7.3 Flujo de fluido irrotacional y rotacional



a) Div $\mathbf{F}(P) > 0$; P una fuente



b) Div $\mathbf{F}(P) < 0$; P un sumidero

FIGURA 15.7.4 El punto P es una fuente en *a*); un sumidero en *b*)

En la discusión que condujo a la definición 15.7.2, vimos que la divergencia de un campo de velocidades **F** cerca de un punto $P(x, y, z)$ es el flujo por unidad de volumen. Si div $\mathbf{F}(P) > 0$, se dice que P es una **fuente** para **F**, ya que hay un flujo neto hacia fuera del fluido cerca de P, si div $\mathbf{F}(P) < 0$, se afirma entonces que P es un **sumidero** para **F**, puesto que hay un flujo neto hacia dentro del fluido cerca de P; si div $\mathbf{F}(P) = 0$, no hay fuentes o sumideros cerca de P. Vea la FIGURA 15.7.4.

La divergencia de un campo vectorial tiene otra interpretación en el concepto del flujo de fluidos. Una medida de la tasa de cambio de la densidad del fluido en un punto es simplemente div **F**. En otras palabras, div **F** es una medida de la compresibilidad del fluido. Si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, se

dice que el fluido es **incompresible**. En la teoría electromagnética, si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, se afirma que el campo vectorial **F** es **solenoidal**.

Tomando el producto punto de ∇ consigo mismo obtenemos un importante operador diferencial escalar de segundo orden:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{11}$$

Cuando (11) se aplica a una función escalar $f(x, y, z)$ el resultado se denomina **laplaciano** tridimensional,

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{12}$$

y aparece en matemáticas aplicadas en muchas ecuaciones diferenciales parciales. Una de las ecuaciones diferenciales parciales más famosas,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \tag{13}$$

recibe el nombre de **ecuación de Laplace** en tres dimensiones. La ecuación de Laplace a menudo se abrevia como $\nabla^2 f = 0$. Vea los problemas 49-54 de los ejercicios 13.3.

Posdata: Un poco de historia **Pierre-Simon Marquis de Laplace** (1749-1827) fue un notable matemático, físico y astrónomo francés. Su trabajo más famoso, la *Mécanique Céleste* (*Mecánica celestial*), de cinco volúmenes, resume y extiende el trabajo de algunos de sus famosos predecesores, tal como Isaac Newton. En realidad, algunos de sus entusiastas contemporáneos llamaron a Laplace el "Newton de Francia". Nacido en una pobre familia granjera, Laplace adulto tuvo éxito en combinar la ciencia y las matemáticas con la política. Napoleón lo nombró ministro del interior, aunque después lo destituyó debido a que él "buscaba los detalles en todo y llevó a la administración el espíritu de lo infinitamente pequeño", es decir, el cálculo infinitesimal. Incluso Napoleón lo nombró posteriormente senador. Después de la abdicación de Napoleón y de la restauración de la monarquía borbona en 1814, Luis XVIII otorgó a Laplace el título nobiliario de marqués en 1817.


Laplace

Ejercicios 15.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-47.

Fundamentos

En los problemas 1-10, determine el rotacional y la divergencia del campo vectorial dado.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = 10yz\mathbf{i} + 2x^2z\mathbf{j} + 6x^3\mathbf{k}$
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy\mathbf{i} + (2x^2 + 2yz)\mathbf{j} + (3z^2 + y^2)\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)^3\mathbf{i} + e^{-yz}\mathbf{j} + xye^{2y}\mathbf{k}$
5. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + 2xz^3\mathbf{j} + y^4\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F}(x, y, z) = 5y^3\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}x^3y^2 - xy\right)\mathbf{j} - (x^3yz - xz)\mathbf{k}$
7. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^{-z}\mathbf{i} + 4yz^2\mathbf{j} + 3ye^{-z}\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \ln x\mathbf{i} + (2x - 3yz)\mathbf{j} + xy^2z^3\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^x\mathbf{i} - x^3yze^z\mathbf{j} + xy^2e^y\mathbf{k}$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} yz\mathbf{i} + z \cos xz^3\mathbf{j} + ye^{5xy}\mathbf{k}$

En los problemas 11-18, considere que **a** es un vector constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Verifique la identidad dada.

11. $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$
12. $\operatorname{rot} \mathbf{r} = \mathbf{0}$
13. $(\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{r} = -2\mathbf{a}$
14. $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$
15. $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$
16. $\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$
17. $\nabla \times [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}] = 2(\mathbf{r} \times \mathbf{a})$
18. $\nabla \cdot [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}] = 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})$

En los problemas 19-26, verifique la identidad dada. Suponga continuidad de todas las derivadas parciales.

19. $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$
20. $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$
21. $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla f$
22. $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$

23. $\text{rot}(\text{grad } f) = \mathbf{0}$

24. $\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0$

25. $\text{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \text{rot } \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{G}$

26. $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{F} + \text{grad } f) = \text{rot}(\text{rot } \mathbf{F})$

27. Determine rot(rot **F**) para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + 4yz^2\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$.

28. Suponga que ∇^2 es el operador diferencial definido en (11). Suponiendo continuidad de todas las derivadas parciales, demuestre que

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{F}) = -\nabla^2\mathbf{F} + \text{grad}(\text{div } \mathbf{F}),$$

donde $\nabla^2\mathbf{F} = \nabla^2(P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = \nabla^2 P\mathbf{i} + \nabla^2 Q\mathbf{j} + \nabla^2 R\mathbf{k}$.

29. Emplee la identidad en el problema 28 para obtener el resultado del problema 27.

30. Demuestre que $\nabla \cdot (f\nabla f) = f\nabla^2 f + |\nabla f|^2$, donde $\nabla^2 f$ es el laplaciano definido en (12). [*Sugerencia*: Vea el problema 21.]

Cualquier función f con segundas derivadas parciales continuas que satisface la ecuación de Laplace se dice que es una **función armónica**. En los problemas 31 y 32, muestre que una función f dada es armónica comprobando que f satisface (13).

31. $f(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 + 4xy - 9xz - 8z^2$

32. $f(x, y, z) = \dfrac{A}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$, A, a, b y c constantes

La ecuación de Laplace en dos dimensiones es

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{14}$$

En los problemas 33 y 34, demuestre que la función f dada es armónica comprobando que f satisface (14).

33. $f(x, y) = \arctan\left(\dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 1}\right)$

34. $f(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

En los problemas 35 y 36, suponga que f y g tienen segundas derivadas parciales continuas. Demuestre que el campo vectorial dado es solenoidal. [*Sugerencia*: Vea el problema 25.]

35. $\mathbf{F} = \nabla f \times \nabla g$

36. $\mathbf{F} = \nabla f \times (f\nabla g)$

37. Si $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, encuentre el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de la porción del elipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ en el primer octante que está acotado por $y = 0$, $y = x$, $z = 0$. Suponga que la superficie se orienta hacia arriba.

≡ Aplicaciones

38. Suponga que un cuerpo gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de un eje. Si **r** es el vector de posición de un punto P sobre el cuerpo medido desde el origen, entonces el vector de velocidad lineal **v** de rotación es $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Vea la FIGURA 15.7.5. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$, demuestre que $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\text{ rot } \mathbf{v}$.

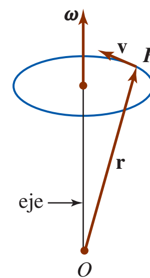


FIGURA 15.7.5 Cuerpo rotante del problema 38

39. Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector de posición de masa m_1 y deje que la masa m_2 esté ubicada en el origen. Si la fuerza de atracción gravitacional es

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r},$$

verifique que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y div $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.

40. El campo vectorial de velocidades para el flujo bidimensional de un fluido ideal alrededor de un cilindro está dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = A\left[\left(1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)\mathbf{i} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\mathbf{j}\right],$$

para alguna constante A positiva. Vea la FIGURA 15.7.6.

a) Demuestre que cuando el punto (x, y) está alejado del origen, $\mathbf{F}(x, y) \approx A\mathbf{i}$.

b) Demuestre que **F** es irrotacional.

c) Demuestre que **F** es incompresible.

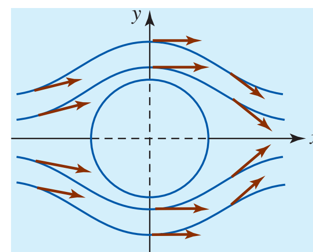


FIGURA 15.7.6 Campo de velocidades del problema 40

41. Si $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z, t)$ representan los campos eléctrico y magnético en el espacio vacío, entonces las ecuaciones de Maxwell son

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

donde c es la velocidad de la luz. Utilice la identidad en el problema 28 para demostrar que **E** y **H** satisfacen

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \nabla^2\mathbf{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

≡ Piense en ello

42. Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = x^2yz\mathbf{i} - xy^2z\mathbf{j} + (z + 5x)\mathbf{k}$. Explique por qué **F** no es el rotacional de otro campo vectorial **G**.

15.8 Teorema de Stokes

Introducción Es posible escribir el teorema de Green de la sección 15.4 en dos formas vectoriales diferentes. En ésta y en la siguiente sección generalizaremos estas formas a tres dimensiones.

Forma vectorial del teorema de Green Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial bidimensional, entonces

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

De (6) y (7) de la sección 15.2, el teorema de Green

$$\oint_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

se escribe en notación vectorial como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, ds = \iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA. \qquad (1)$$

Esto es, la integral de línea de la componente tangencial de **F** es la integral doble de la componente normal del rot **F**.

Teorema de Green en el espacio tridimensional La forma vectorial del teorema de Green dada en (1) relaciona una integral de línea alrededor de una curva C cerrada simple suave por partes que forma la frontera de una región del plano R con una integral doble sobre R. El teorema de Green en espacio tridimensional relaciona una integral de línea alrededor de una curva C en el espacio tridimensional cerrada simple suave por partes que forma la frontera de una superficie S con una integral de superficie sobre S. Suponga que $z = f(x, y)$ es una función continua cuya gráfica es una superficie orientada suave por partes sobre una región R en el plano xy. Considere que C forma la frontera de S y que la proyección de C sobre el plano xy forma la frontera de R. La dirección positiva de C se induce mediante la orientación de la superficie S; la dirección positiva de C corresponde a la dirección que una persona tendría que caminar sobre C para tener su cabeza apuntando en la dirección de la orientación de la superficie mientras mantiene la superficie a la izquierda. Vea la FIGURA 15.8.1. Más precisamente, la orientación positiva de C concuerda con la regla de la mano derecha: si el pulgar de la mano derecha apunta en la dirección de la orientación de la superficie, entonces de manera aproximada los dedos de la mano derecha se enrollan alrededor de la superficie en la dirección positiva. Por último, sea **T** un vector tangente unitario a C que apunta en la dirección positiva. La forma tridimensional del teorema de Green, la cual se presenta a continuación, recibe el nombre de **teorema de Stokes**.

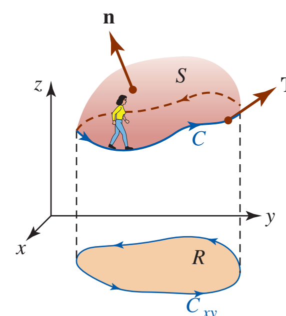


FIGURA 15.8.1. Dirección positiva de C

Teorema 15.8.1 Teorema de Stokes

Sea S una superficie orientada suave por partes acotada por una curva C cerrada simple suave por partes. Sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

un campo vectorial para el cual P, Q, y R son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta del espacio tridimensional que contiene a S. Si C se recorre en la dirección positiva, entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, ds = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS, \qquad (2)$$

donde **n** es una normal unitaria a S en la dirección de la orientación de S.

DEMOSTRACIÓN PARCIAL Suponga que la superficie S se orienta hacia arriba y está definida por una función $z = g(x, y)$ que tiene segundas derivadas parciales continuas. De la definición 15.7.1 tenemos

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Además, si escribimos $h(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$, entonces

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}.$$

Por consiguiente,

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial g}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dA. \tag{3}$$

Nuestro objetivo ahora es demostrar que la integral de línea $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ se reduce a (3).

Si C_{xy} es la proyección de C sobre el plano xy y tiene las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, entonces ecuaciones paramétricas para C son $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = g(x(t), y(t))$, $a \le t \le b$. De tal manera,

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \left[P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}\right] dt \\
&= \int_a^b \left[P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\right] dt \quad \leftarrow \text{regla de la cadena} \\
&= \oint_{C_{xy}} \left(P + R\frac{\partial g}{\partial x}\right) dx + \left(Q + R\frac{\partial g}{\partial y}\right) dy \\
&= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial g}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right] dA. \quad \leftarrow \text{teorema de Green}
\end{aligned} \tag{4}$$

Ahora, por las reglas de la cadena y del producto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial g}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x, y, g(x, y)) + R(x, y, g(x, y))\frac{\partial g}{\partial y}\right] \\
&= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} + R\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Similarmente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} + R\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}. \tag{6}$$

Restando (6) de (5) y utilizando el hecho de que $\partial^2 g/\partial x \partial y = \partial^2 g/\partial y \partial x$, vemos que, después de rearreglar, (4) se convierte en

$$\iint_R \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial g}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dA.$$

La última expresión es la misma que el lado derecho de (3), que era lo que se quería demostrar. ■

EJEMPLO 1 Verificación del teorema de Stokes

Sea S la parte del cilindro $z = 1 - x^2$ para $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$. Verifique el teorema de Stokes para el campo vectorial $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. Suponga que S se orienta hacia arriba.

Solución La superficie S, la curva C (la cual está compuesta por la unión de C_1, C_2, C_3 y C_4), y la región R se ilustran en la FIGURA 15.8.2 en la página 853.

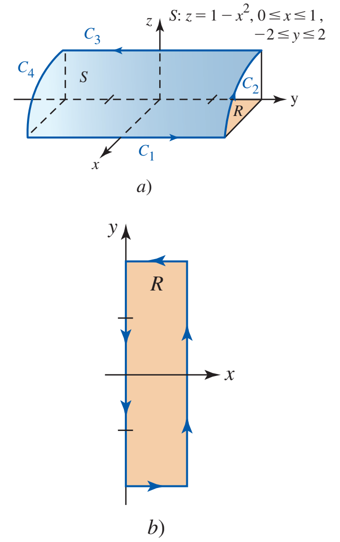


FIGURA 15.8.2 Superficie del ejemplo 1

La integral de superficie: Para $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ encontramos

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = -y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - x\mathbf{k}.$$

En este caso, si $h(x, y, z) = z + x^2 - 1 = 0$ define el cilindro, la normal es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|} = \frac{2x\mathbf{i} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 1}}.$$

Por tanto,

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_S \frac{-2xy - x}{\sqrt{4x^2 + 1}}\, dS.$$

Para evaluar la última integral de superficie usamos (2) de la sección 15.6:

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{-2xy - x}{\sqrt{4x^2 + 1}}\, dS &= \iint_R (-2xy - x)\, dA \\ &= \int_0^1 \int_{-2}^2 (-2xy - x)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \Big[-xy^2 - xy\Big]_{-2}^2 dx \\ &= \int_0^1 (-4x)\, dx = -2. \end{aligned} \tag{7}$$

La integral de línea: La integral de línea es

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C xy\, dx + yz\, dy + xz\, dz.$$

Como C es suave por partes, escribimos $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$.

Sobre C_1: $x = 1$, $z = 0$, $dx = 0$, $dz = 0$, y por ello

$$\int_{C_1} y(0) + y(0)\, dy + 0 = 0.$$

Sobre C_2: $y = 2$, $z = 1 - x^2$, $dy = 0$, $dz = -2x\, dx$, por lo que

$$\int_{C_2} 2x\, dx + 2(1 - x^2)0 + x(1 - x^2)(-2x\, dx) = \int_1^0 (2x - 2x^2 + 2x^4)\, dx = -\frac{11}{15}.$$

Sobre C_3: $x = 0$, $z = 1$, $dx = 0$, $dz = 0$, de modo que

$$\int_{C_3} 0 + y\, dy + 0 = \int_{-2}^2 y\, dy = 0.$$

Sobre C_4: $y = -2$, $z = 1 - x^2$, $dy = 0$, $dz = -2x\, dx$, por lo que

$$\int_{C_4} -2x\, dx - 2(1 - x^2)0 + x(1 - x^2)(-2x\, dx) = \int_0^1 (-2x - 2x^2 + 2x^4)\, dx = -\frac{19}{15}.$$

En consecuencia,

$$\oint_C xy\, dx + yz\, dy + xz\, dz = 0 - \frac{11}{15} + 0 - \frac{19}{15} = -2$$

lo cual concuerda con (7). ■

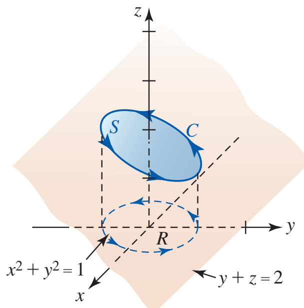


FIGURA 15.8.3 Curva C del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Empleo del teorema de Stokes

Evalúe $\oint_C z\,dx + x\,dy + y\,dz$, donde C es la traza del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el plano $y + z = 2$. Oriente C en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observe desde arriba. Vea la FIGURA 15.8.3.

Solución Si $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, entonces

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

La orientación dada de C corresponde a una orientación hacia arriba de la superficie S. De tal manera, si $h(x, y, z) = y + z - 2 = 0$ define el plano, entonces la normal es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$

En consecuencia, de (2),

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \left[(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}\right)\right] dS$$

$$= \sqrt{2}\iint_S dS = \sqrt{2}\iint_R \sqrt{2}\,dA = 2\pi.$$ ■

Advierta que si $\mathbf{F}$ es el gradiente de una función escalar, entonces, en vista de (5) de la sección 15.7, (2) implica que la circulación $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es cero. Inversamente, es posible demostrar que si la circulación es cero para toda curva cerrada simple, entonces $\mathbf{F}$ es el gradiente de una función escalar. En otras palabras, $\mathbf{F}$ es irrotacional si y sólo si $\mathbf{F} = \nabla\phi$, donde ϕ es el potencial para $\mathbf{F}$. Equivalentemente, esto produce la prueba para un campo vectorial conservativo dado en el teorema 15.7.1, es decir, $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo si y sólo si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Interpretación física del rotacional En la sección 15.2 vimos que si $\mathbf{F}$ es un campo de velocidades de un fluido, entonces la circulación $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ de $\mathbf{F}$ alrededor de C es una medida de la cantidad por medio de la cual el fluido tiende a girar la curva C circulando alrededor de ella. La circulación de $\mathbf{F}$ se relaciona estrechamente a rot $\mathbf{F}$. Para ver esto, suponga que $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es cualquier punto en el fluido y C_r es un pequeño círculo de radio r centrado en P_0. Vea la FIGURA 15.8.4. Entonces por el teorema de Stokes,

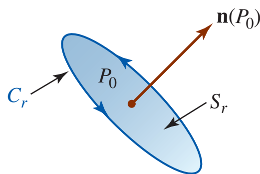


FIGURA 15.8.4 Círculo de radio r

$$\oint_{C_r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_r} (\text{rot } \mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS. \tag{8}$$

Ahora, en todos los puntos $P(x, y, z)$ dentro del círculo pequeño C_r, si tomamos rot $\mathbf{F}(P) \approx$ rot $\mathbf{F}(P_0)$, entonces (8) produce la aproximación

$$\oint_{C_r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \approx \iint_{S_r} (\text{rot } \mathbf{F}(P_0))\cdot\mathbf{n}(P_0)\,dS$$

$$= (\text{rot } \mathbf{F}(P_0))\cdot\mathbf{n}(P_0)\iint_{S_r} dS$$

$$= (\text{rot } \mathbf{F}(P_0))\cdot\mathbf{n}(P_0)\,A_r, \tag{9}$$

donde A_r es el área πr^2 de la superficie circular S_r. Cuando dejamos $r \to 0$, la aproximación rot $\mathbf{F}(P) \approx$ rot $\mathbf{F}(P_0)$ se vuelve mejor y por ello (9) produce

$$(\text{rot } \mathbf{F}(P_0))\cdot\mathbf{n}(P_0) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{A_r}\oint_{C_r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{10}$$

De tal modo, vemos que la componente normal de rot $\mathbf{F}$ es el valor límite del cociente entre la circulación de $\mathbf{F}$ y el área de la superficie circular. Para un valor pequeño pero fijo de r, tenemos

$$(\text{rot } \mathbf{F}(P_0))\cdot\mathbf{n}(P_0) \approx \frac{1}{A_r}\oint_{C_r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{11}$$

Entonces, en términos generales, rot **F** es la circulación de **F** por unidad de área. Si rot $\mathbf{F}(P_0) \neq \mathbf{0}$, entonces el lado izquierdo de (11) es un máximo cuando el círculo C_r se sitúa de manera que $\mathbf{n}(P_0)$ apunte en la misma dirección que rot $\mathbf{F}(P_0)$. En este caso, la circulación en el lado derecho de (11) también es un máximo. De tal modo, una rueda de paletas insertada en el fluido en P_0 rotará más rápido cuando su eje apunte en la dirección de rot $\mathbf{F}(P_0)$. Vea la FIGURA 15.8.5. Advierta, también, que la paleta no rotará si su eje es perpendicular a rot $\mathbf{F}(P_0)$.

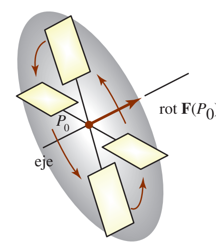


FIGURA 15.8.5 Rueda de paletas giratorias en un fluido



Stokes

Posdata: Un poco de historia **George G. Stokes** (1819-1903) fue un físico matemático irlandés. Al igual que George Green, Stokes fue catedrático en la Universidad de Cambridge. En 1854, Stokes planteó su teorema como un problema en el examen de un concurso para estudiantes de Cambridge. No se sabe si alguien resolvió el problema.

$\oint_C$ NOTAS DESDE EL AULA

El valor de la integral de superficie (2) está determinado exclusivamente por la integral alrededor de su frontera C. Esto básicamente significa que la forma de la superficie S es irrelevante. Suponiendo que las hipótesis del teorema 15.8.1 se satisfacen, entonces para dos superficies diferentes S_1 y S_2 con la misma orientación y con la misma frontera C, tenemos

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_1} (\text{rot } \mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_2} (\text{rot } \mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Vea la FIGURA 15.8.6 y los problemas 17 y 18 de los ejercicios 15.8.

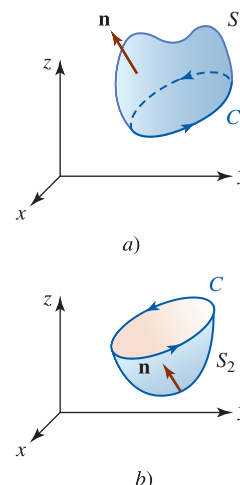


FIGURA 15.8.6 Dos superficies con la misma frontera C

Ejercicios 15.8

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-47.

Fundamentos

En los problemas 1-4, verifique el teorema de Stokes para el campo vectorial dado. Suponga que la superficie S se orienta hacia arriba.

1. $\mathbf{F} = 5y\mathbf{i} - 5x\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = 1$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$
2. $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + 4y\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$
3. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; S es la porción del plano $2x + y + 2z = 6$ en el primer octante.
4. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ para $z \geq 0$

En los problemas 5-12, emplee el teorema de Stokes para evaluar $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. Suponga que C está orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba.

5. $\mathbf{F} = (2z + x)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$; C es el triángulo con vértices (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)
6. $\mathbf{F} = z^2 y \cos xy\mathbf{i} + z^2 x(1 + \cos xy)\mathbf{j} + 2z \operatorname{sen} xy\mathbf{k}$; C es la frontera del plano $z = 1 - y$ que se ilustra en la FIGURA 15.8.7.

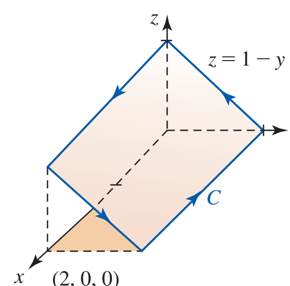


FIGURA 15.8.7 Curva del problema 6

7. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; C es la frontera dada en el problema 6.
8. $\mathbf{F} = (x + 2z)\mathbf{i} + (3x + y)\mathbf{j} + (2y - z)\mathbf{k}$; C es la curva de intersección del plano $x + 2y + z = 4$ con los planos de coordenadas.
9. $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} - x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; C es la traza del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el plano $x + y + z = 1$ [*Sugerencia*: Emplee coordenadas polares.]
10. $\mathbf{F} = x^2 y\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j} + xy^2 z\mathbf{k}$; C es la frontera de la superficie que se muestra en la FIGURA 15.8.8

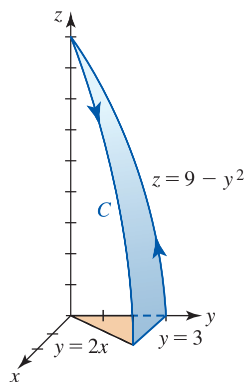


FIGURA 15.8.8 Curva del problema 10

11. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x^3y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C es la frontera del semielipsoide $z = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$ en el plano $z = 0$

12. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; C es la curva de intersección del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se muestran en la FIGURA 15.8.9

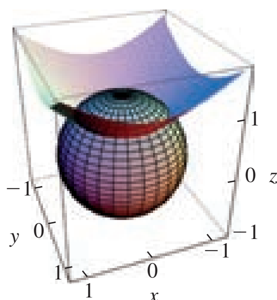


FIGURA 15.8.9 Curva del problema 12

En los problemas 13-16, emplee el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$. Suponga que la superficie S está orientada hacia arriba.

13. $\mathbf{F} = 6yz\mathbf{i} + 5x\mathbf{j} + yze^{x^2}\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = \frac{1}{4}x^2 + y^2$ para $0 \le z \le 4$

14. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25$ para $z \ge 0$

15. $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + 8x^3y\mathbf{j} + 3x^2y\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = x$ que yace dentro del cilindro rectangular definido por los planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 2$

16. $\mathbf{F} = 2xy^2z\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} + (x^2y^2 - 6x)\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = y$ que yace dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

17. Emplee el teorema de Stokes para evaluar

$$\oint_C z^2 e^{x^2}\, dx + xy^2\, dy + \tan^{-1} y\, dz,$$

donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 9$ encontrando una superficie S con C como su frontera y tal que la orientación de C sea en dirección contraria al de las manecillas del reloj cuando se observe desde arriba.

18. Considere la integral de superficie $\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde $\mathbf{F} = xyz\mathbf{k}$ y S es la porción del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ para $z \ge 0$ orientado hacia arriba.

a) Evalúe la integral de superficie mediante el método de la sección 15.6; esto es, no emplee el teorema de Stokes.

b) Evalúe la integral de superficie encontrando una superficie más simple que esté orientada hacia arriba y que tenga la misma frontera que el paraboloide.

c) Utilice el teorema de Stokes para verificar sus resultados del inciso *b*).

15.9 Teorema de la divergencia

Introducción Como se mencionó en la introducción de la sección 15.8, en esta sección vamos a examinar otra generalización del teorema de Green. Podría valer la pena repasar la primera forma vectorial del problema de Green en (1) de la sección 15.8. Esta generalización tridimensional se basa en una segunda interpretación vectorial del teorema que se presenta a continuación.

Forma vectorial del problema de Green Sea $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ un campo vectorial bidimensional y considere a $\mathbf{T} = (dx/ds)\mathbf{i} + (dy/ds)\mathbf{j}$ como una *tangente unitaria* a una curva plana cerrada simple C. En (1) de la sección 15.8 vimos que $\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, ds$ puede evaluarse mediante una integral doble que implique a rot $\mathbf{F}$.

Similarmente, si $\mathbf{n} = (dy/ds)\mathbf{i} - (dx/ds)\mathbf{j}$ es una *normal unitaria* a C (verifique $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$), entonces $\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds$ puede expresarse en términos de una integral doble que implique a div $\mathbf{F}$. Del teorema de Green,

$$\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds = \oint_C P\, dy - Q\, dx = \iint_R \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \left(-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] dA = \iint_R \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right] dA.$$

Esto es,

$$\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds = \iint_R \text{div}\, \mathbf{F}\, dA. \tag{1}$$

Teorema de Green en espacio tridimensional El resultado en (1) es un caso especial del **teorema de la divergencia** o de **Gauss**. El siguiente teorema generaliza (1) en espacio tridimensional.

Teorema 15.9.1 Teorema de la divergencia

Suponga que D es una región acotada en el espacio tridimensional con una frontera suave por partes S que está orientada hacia arriba. Sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

un campo vectorial para el cual P, Q y R son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región tridimensional que contiene a D. Entonces

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D (\text{div}\, \mathbf{F})\, dV, \qquad (2)$$

donde $\mathbf{n}$ es una normal unitaria hacia fuera para S.

DEMOSTRACIÓN PARCIAL Probaremos (2) para la región especial D que se ilustra en la FIGURA 15.9.1 cuya superficie S consiste en tres partes

$$\begin{aligned} &(\text{fondo})\ S_1: \quad z = g_1(x, y), \quad (x, y) \text{ en } R \\ &(\text{parte superior})\ S_2: \quad z = g_2(x, y), \quad (x, y) \text{ en } R \\ &(\text{lado})\ S_3: \quad g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y), \quad (x, y) \text{ sobre } C, \end{aligned}$$

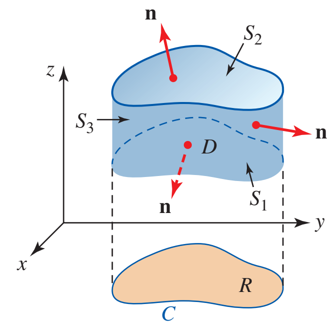


FIGURA 15.9.1 Superficie utilizada en la prueba del teorema 15.9.1

donde R es la proyección de D sobre el plano xy y C es la frontera de R. Puesto que

$$\text{div}\, \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{y} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = P(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}) + Q(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) + R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})$$

es posible escribir

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_S P(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})\, dS + \iint_S Q(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})\, dS + \iint_S R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS$$

y

$$\iiint_D \text{div}\, \mathbf{F}\, dV = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV + \iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dV.$$

Para probar (2) sólo necesitamos establecer que

$$\iint_S R(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial x}\, dV, \qquad (3)$$

$$\iint_S Q(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV, \qquad (4)$$

y

$$\iint_S R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dV. \qquad (5)$$

En realidad, sólo probamos (5) debido a que las demostraciones de (3) y (4) se deducen de una manera similar. Ahora,

$$\iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right] dA = \iint_R [R(x, y, g_2(x, y)) - R(x, y, g_1(x, y))]\, dA. \qquad (6)$$

A continuación escribimos

$$\iint_S R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_{S_1} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS + \iint_{S_2} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS + \iint_{S_3} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS.$$

Sobre S_1: Puesto que la normal hacia fuera apunta hacia abajo, describimos la superficie como $h(x, y, z) = g_1(x, y) - z = 0$. De tal modo,

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|} = \frac{\dfrac{\partial g_1}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial g_1}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial y}\right)^2}} \quad \text{por lo que} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial y}\right)^2}}.$$

De la definición de dS tenemos entonces

$$\iint_{S_1} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\,dS = -\iint_R R(x, y, g_1(x, y))\,dA. \tag{7}$$

Sobre S_2: La normal hacia fuera apunta hacia arriba de modo que describimos la superficie esta vez como $h(x, y, z) = z - g_2(x, y) = 0$. Por tanto,

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|} = \frac{-\dfrac{\partial g_2}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial g_2}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial y}\right)^2}} \quad \text{por lo que} \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial y}\right)^2}}.$$

Del último resultado encontramos

$$\iint_{S_2} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iint_R R(x, y, g_2(x, y))\,dA. \tag{8}$$

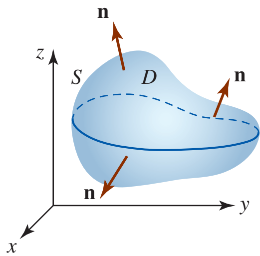


FIGURA 15.9.2 Región sin lado vertical

Sobre S_3: Como este lado es vertical, $\mathbf{k}$ es perpendicular a $\mathbf{n}$. Consecuentemente, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = 0$ y

$$\iint_{S_3} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\,dS = 0. \tag{9}$$

Finalmente, sumando (7), (8) y (9) obtenemos

$$\iint_R [R(x, y, g_2(x, y)) - R(x, y, g_1(x, y))]\,dA,$$

que es lo mismo que (6). ■

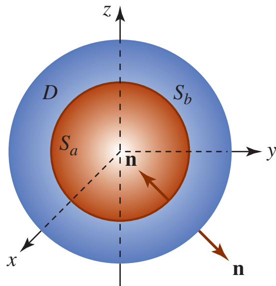


FIGURA 15.9.3 Esferas concéntricas

Aunque demostramos (2) para una región especial D que tiene un lado vertical, notamos que este tipo de región no se requiere en el teorema 15.9.1. Una región D sin lado vertical se ilustra en la FIGURA 15.9.2; una región acotada por una esfera o un elipsoide no tiene tampoco un lado vertical. El teorema de la divergencia también se cumple para una región D acotada entre dos superficies cerradas tal como las esferas concéntricas S_a y S_b que se muestran en la FIGURA 15.9.3; la superficie frontera S de D es la unión de S_a y S_b. En este caso, $\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$ se convierte en

$$\iint_{S_b} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS + \iint_{S_a} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV,$$

donde $\mathbf{n}$ apunta hacia fuera de D. En otras palabras, $\mathbf{n}$ apunta alejándose del origen sobre S_b, pero $\mathbf{n}$ apunta hacia el origen sobre S_a.

EJEMPLO 1 Verificación del teorema de la divergencia

Sea D una región cerrada acotada por el hemisferio $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$, $1 \le z \le 4$, y el plano $z = 1$. Verifique el teorema de la divergencia para el campo vectorial $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k}$.

Solución La región cerrada se muestra en la FIGURA 15.9.4.

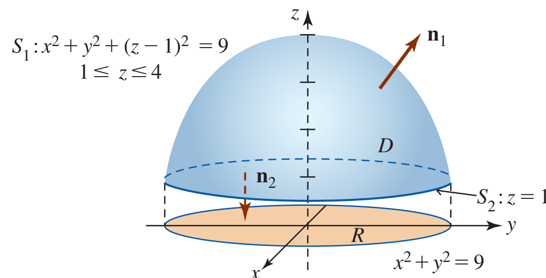


FIGURA 15.9.4 Superficie del ejemplo 1

La integral triple: Puesto que $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k}$, vemos que div $\mathbf{F} = 3$. En consecuencia,

$$\iiint_D \text{div}\, \mathbf{F}\, dV = \iiint_D 3\, dV = 3\iiint_D dV = 3\left[\frac{2}{3}\pi 3^3\right] = 54\pi. \qquad (10)$$

En el último cálculo, aprovechamos el hecho de que $\iiint_D dV$ produce el volumen del hemisferio.

La integral de superficie: Escribimos $\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$, donde S_1 es el hemisferio y S_2 es el plano $z = 1$. Si S_1 es una superficie de nivel de $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$, entonces una normal unitaria que apunta hacia arriba es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 1)^2}} = \frac{x}{3}\mathbf{i} + \frac{y}{3}\mathbf{j} + \frac{z - 1}{3}\mathbf{k}.$$

Ahora,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{(z - 1)^2}{3} = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + (z - 1)^2) = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3,$$

y por ello con la ayuda de coordenadas polares obtenemos

$$\iint_{S_1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_R 3\left(\frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\, dA\right)$$

$$= 9\int_0^{2\pi}\int_0^3 (9 - r^2)^{-1/2} r\, dr\, d\theta = 54\pi.$$

Sobre S_2, tomamos $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ de modo que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -z + 1$. Pero, como $z = 1$, $\iint_{S_2} (-z + 1)\, dS = 0$. Por consiguiente, vemos que

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = 54\pi + 0 = 54\pi$$

concuerda con (10). ■

EJEMPLO 2 Empleo del teorema de la divergencia

Evalúe $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$, donde S es el cubo unitario definido por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ y $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$.

Solución Vea la figura 15.6.13 y el problema 24 de los ejercicios 15.6. En lugar de evaluar seis integrales de superficie, aplicamos el teorema de la divergencia. Puesto que div $\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = y + 2yz + 3z^2$, tenemos de (2),

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D (y + 2yz + 3z^2)\, dV$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (y + 2yz + 3z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (y + 2yz + 3z^2)\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 + y^2z + 3yz^2\right)\Big]_0^1 dz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z + 3z^2\right) dz = \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 + z^3\right)\Big]_0^1 = 2. \quad ■$$

Interpretación física de la divergencia En la sección 15.7 vimos que podríamos expresar la componente normal del rotacional de un campo vectorial **F** en un punto como un límite que incluyera la circulación de **F**. En vista de (2) es posible interpretar la divergencia de **F** en un punto como un límite que incluye el flujo de **F**. Recuerde de (7) de la sección 15.6 que el flujo de un campo de

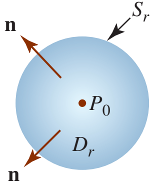


FIGURA 15.9.5 Pequeña esfera centrada en P_0

velocidades **F** de un fluido es la razón de cambio del flujo de fluido, esto es, el volumen de fluido que fluye a través de una superficie por unidad de tiempo. En la sección 15.7 vimos que la divergencia de **F** es el flujo por unidad de volumen. Para reforzar esta última idea, vamos a suponer que $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es cualquier punto en el fluido y S_r es una pequeña esfera de radio r centrada en P_0. Vea la FIGURA 15.9.5. Si D_r es la esfera S_r y su interior, entonces el teorema de la divergencia produce

$$\iint_{S_r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_{D_r} \text{div}\, \mathbf{F}\, dV. \tag{11}$$

Si tomamos la aproximación div $\mathbf{F}(P) \approx$ div $\mathbf{F}(P_0)$ en cualquier punto $P(x, y, z)$ dentro de la pequeña esfera, entonces (11) produce

$$\begin{aligned} \iint_{S_r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS &\approx \iiint_{D_r} \text{div}\, \mathbf{F}(P_0)\, dV \\ &= \text{div}\, \mathbf{F}(P_0) \iiint_{D_r} dV \\ &= \text{div}\, \mathbf{F}(P_0)\, V_r, \end{aligned} \tag{12}$$

donde V_r es el volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$ de la región esférica D_r. Dejando que $r \to 0$, vemos de (12) que la divergencia de **F** es el valor límite del cociente del flujo de **F** y el volumen de la región esférica:

$$\text{div}\, \mathbf{F}(P_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{V_r} \iint_{S_r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS. \tag{13}$$

En consecuencia, la divergencia de **F** es el flujo por unidad de volumen.

El teorema de la divergencia es extremadamente útil en la derivación de algunas de las famosas ecuaciones en electricidad y magnetismo, así como en hidrodinámica. En la discusión que sigue consideraremos un ejemplo del estudio de fluidos.

Ecuación de continuidad Al final de la sección 15.7 mencionamos que una interpretación de div **F** es una medida de la razón de cambio de la densidad de un fluido en un punto. Para ver por qué esto es así, supondremos que **F** es un campo de velocidades de un fluido y que $\rho(x, y, z, t)$ es la densidad de un fluido en el punto $P(x, y, z)$ en el tiempo t. Sea D la región cerrada consistente en una esfera S y su interior. Sabemos de la sección 14.7 que la masa total m de un fluido en D está dada por

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z, t)\, dV.$$

La razón a la cual la masa aumenta en D está dada por

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_D \rho(x, y, z, t)\, dV = \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV. \tag{14}$$

Ahora de la figura 15.6.8*b*) vemos que el volumen del fluido que fluye a través de un elemento de área de superficie ΔS por unidad de tiempo se aproxima mediante

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, \Delta S.$$

La masa del fluido que fluye a través de un elemento de área de superficie ΔS por unidad de tiempo es entonces

$$(\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, \Delta S.$$

Si suponemos que el cambio en la masa en D se debe sólo al flujo que entra y sale de D, entonces el *volumen del fluido* que fluye hacia fuera de D por unidad de tiempo está dado por (7) de la sección 15.6, $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$, en tanto que la *masa del fluido* que fluye hacia fuera de D por unidad es $\iint_S (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$. En consecuencia, una expresión alterna para la razón a la cual la masa aumenta en D es

$$-\iint_S (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS. \tag{15}$$

Por el teorema de la divergencia, (15) es lo mismo que

$$-\iiint_D \text{div}\,(\rho\mathbf{F})\,dV. \tag{16}$$

Igualando (14) y (16) se produce

$$\iiint_D \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV = -\iiint_D \text{div}(\rho\mathbf{F})\,dV \qquad \text{o} \qquad \iiint_D \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{F})\right)dV = 0.$$

Puesto que este último resultado se cumple para toda esfera, obtenemos la **ecuación de continuidad** para el fluido que fluye:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{F}) = 0. \tag{17}$$

En la página 849 establecimos que si div $\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = 0$, entonces un fluido es incompresible. Este hecho se sigue de inmediato de (17). Si un fluido es incompresible (como el agua), entonces ρ es constante, por lo que, en consecuencia, $\nabla\cdot(\rho\mathbf{F}) = \rho(\nabla\cdot\mathbf{F})$. Pero además, $\partial\rho/\partial t = 0$, y por ello (17) implica $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$.

Posdata: Un poco de historia **Johann Karl Friedrich Gauss** (1777-1855) fue el primero de una nueva variedad de matemáticos precisos y exigentes (los "rigurosos"). Hemos visto en bosquejos biográficos anteriores que Augustin Louis Cauchy y Karl Wilhelm Weierstrass fueron dos matemáticos que siguieron sus pasos. Karl Friedrich Gauss, el único hijo de un pobre jardinero, fue un niño prodigio en matemáticas. Aún no contaba con tres años cuando corrigió el cálculo de la nómina de su padre. Siendo adulto, Gauss a menudo remarcó que él podría calcular o "contar" antes de hablar. Como estudiante universitario Gauss se atormentaba entre dos amores: la filología y las matemáticas. Aunque dominaba con facilidad otras lenguas, fue inspirado por algunos logros matemáticos originales como adolescente y estimulado por el matemático Wolfgang Bolyai, por lo que la elección entre las lenguas y las matemáticas no fue tan difícil. A la edad de 20 años, Gauss se consolidó en una carrera de matemáticas. A la edad de 22, había completado un libro sobre teoría de números, *Disquisitiones Arithmeticae.* Publicado en 1801, este texto se reconoció como una pieza maestra e incluso en la actualidad sigue siendo un clásico en este campo. La disertación doctoral de Gauss de 1799 también es un documento memorable. Empleando la teoría de funciones de una variable compleja, fue el primero en demostrar el llamado teorema fundamental del álgebra: toda ecuación polinomial tiene al menos una raíz.



Gauss

Si bien Gauss fue en verdad reconocido y respetado como un matemático sobresaliente durante su vida, el gran alcance de su genio no se reconoció hasta la publicación de su diario científico en 1898, 44 años después de su muerte. A pesar del disgusto de muchos matemáticos del siglo XIX, el diario reveló que Gauss había previsto, a veces por décadas, muchos de sus descubrimientos o, quizá más precisamente, redescubrimientos. Fue del todo ajeno a la fama; sus investigaciones matemáticas muchas veces las llevó a cabo, como un niño que juega en la playa, simplemente por el placer y la autosatisfacción y no por la instrucción que podrían haber obtenido otros mediante la publicación.

De cualquier lista de "los más grandes matemáticos que han vivido", sin duda Karl Friedrich Gauss debe estar cerca de la cima. Por su profundo impacto en muchas ramas de las matemáticas, a Gauss se le refiere a menudo como "el príncipe de las matemáticas".

$\iint_S$ NOTAS DESDE EL AULA

¿Por qué algunos objetos flotan en el agua y otros se hunden? La respuesta proviene del **principio de Arquímedes**, el cual señala: cuando un objeto se sumerge en un fluido, el fluido ejerce una fuerza hacia arriba sobre él, llamada **fuerza de flotación**, con una magnitud que es igual al peso del fluido desplazado. De tal manera, un corcho tiene una flotación o flotamiento positivo puesto que el peso del corcho es menor que la magnitud de la fuerza de flotación. Un submarino alcanzará flotación negativa y se sumergirá llenando sus tanques de lastre con agua, haciendo que de esa manera su peso sea mayor que la magnitud de la fuerza de flotación ejercida sobre él. Vea la FIGURA 15.9.6. Se le pide que demuestre ese famoso teorema utilizando el teorema de la divergencia en el problema 22 de los ejercicios 15.9.

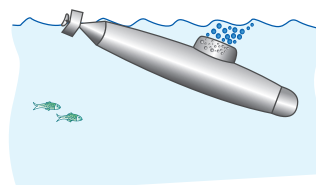


FIGURA 15.9.6 Un submarino se sumerge cuando la magnitud de la fuerza de flotación es menor que la magnitud de su peso

Ejercicios 15.9 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-47.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, verifique el teorema de la divergencia para el campo vectorial dado.

1. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; D la región acotada por el cubo unitario definido por $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$
2. $\mathbf{F} = 6xy\mathbf{i} + 4yz\mathbf{j} + xe^{-y}\mathbf{k}$; D la región acotada por los tres planos de coordenadas y el plano $x + y + z = 1$

En los problemas 3-14, emplee el teorema de la divergencia para determinar el flujo hacia fuera $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$ del campo vectorial dado $\mathbf{F}$.

3. $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; D la región acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
4. $\mathbf{F} = 4x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$; D la región acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
5. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + xz^3\mathbf{j} + (z - 1)^2\mathbf{k}$; D la región acotada por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y los planos $z = 1, z = 5$
6. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 4z^3\mathbf{k}$; D la región acotada por el paralelepípedo definido por $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3$
7. $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; D la región acotada en el interior por $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 = 3, z = 0$
8. $\mathbf{F} = (x^2 + \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + xy^3\mathbf{k}$; D la región acotada por $y = x^2, z = 9 - y, z = 0$
9. $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)$; D la región acotada por las esferas concéntricas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2, b > a$
10. $\mathbf{F} = 2yz\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$; D la región acotada por el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$
11. $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + 5y^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$; D la región acotada por $z = y$, $z = 4 - y, z = 2 - \frac{1}{2}x^2, x = 0, z = 0$. Vea la FIGURA 15.9.7.

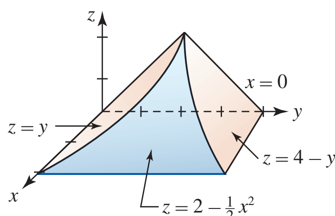


FIGURA 15.9.7 Región D del problema 11

12. $\mathbf{F} = 15x^2y\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + y^4\mathbf{k}$; D la región acotada por $x + y = 2, z = x + y, z = 3, x = 0, y = 0$
13. $\mathbf{F} = 3x^2y^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 6xy^2z\mathbf{k}$; D la región acotada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2y$
14. $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + 6(\operatorname{sen} x)\mathbf{k}$; D la región acotada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los planos $z = 2, z = 4$

En los problemas 15 y 16, suponga que S forma la frontera de una región cerrada y acotada D.

15. Si $\mathbf{a}$ es un vector constante, demuestre que $\iint_S (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\, dS = 0$.
16. Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ y P, Q y R tiene segundas derivadas parciales continuas, demuestre que $\iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = 0$.

Aplicaciones

17. El campo eléctrico en un punto $P(x, y, z)$ debido a una carga puntual q localizada en el origen está dado por el campo inverso al cuadrado $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
   a) Suponga que S es una superficie cerrada, S_a es una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que yace por completo dentro de S, y D es la región acotada entre S y S_a. Vea la FIGURA 15.9.8. Demuestre que el flujo hacia fuera de $\mathbf{E}$ para la región D es cero.
   b) Utilice el resultado del inciso *a*) para probar la **ley de Gauss**:
   $$\iint_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\, dS = 4\pi q.$$
   Esto es, el flujo hacia fuera del campo eléctrico $\mathbf{E}$ a través de *cualquier* superficie cerrada (para el cual se aplica el teorema de la divergencia) que contiene al origen es $4\pi q$.

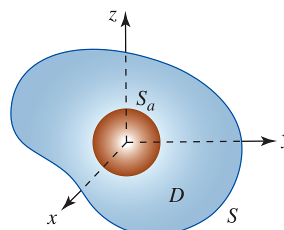


FIGURA 15.9.8 Superficies del problema 17

18. Suponga que hay una distribución continua de carga a través de una región cerrada y acotada D encerrada por una superficie S. Entonces, la extensión natural de la ley de Gauss está dada por
   $$\iint_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D 4\pi\rho\, dV,$$
   donde $\rho(x, y, z)$ es la densidad de carga o carga por unidad de volumen.
   a) Proceda como en la derivación de la ecuación de continuidad (17) para demostrar que $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi q$.
   b) Dado que $\mathbf{E}$ es un campo vectorial irrotacional, demuestre que la función potencial ϕ para $\mathbf{E}$ satisface la ecuación de Poissons $\nabla^2\phi = 4\pi\rho$, donde $\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi$.

Piense en ello

En los problemas 19 y 20, suponga que f y g son funciones escalares con segundas derivadas parciales continuas. Emplee el teorema de la divergencia para establecer las **identidades de Green**. Suponga que S forma la frontera de una región cerrada y acotada D.

19. $$\iint_S (f\nabla g) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_D (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV$$
20. $$\iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV$$

21. Si f es una función escalar con primeras derivadas parciales continuas y S forma la frontera de una región cerrada y acotada D, entonces demuestre que

$$\iint_S f\,\mathbf{n}\,dS = \iiint_D \nabla f\,dV.$$

[*Sugerencia*: Emplee (2) sobre $f\mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es un vector constante, y el problema 21 de los ejercicios 15.7.]

22. La fuerza de flotación sobre un objeto flotante es $\mathbf{B} = -\iint_S p\,\mathbf{n}\,dS$, donde p es la presión de fluido. La presión p se relaciona con la densidad del fluido $\rho(x, y, z)$ mediante la ley de la hidrostática: $\nabla p = \rho(x, y, z)\mathbf{g}$, donde $\mathbf{g}$ es la aceleración constante debida a la gravedad. Si el peso del objeto es $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$, utilice el resultado del problema 21 para probar el principio de Arquímedes, $\mathbf{B} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Vea la FIGURA 15.9.9.

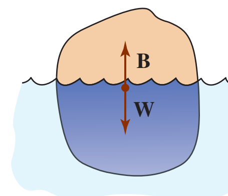


FIGURA 15.9.9 Objeto flotante del problema 22

Revisión del capítulo 15

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-47.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-12, conteste verdadero (V) o falso (F). Donde sea apropiado, suponga la continuidad de P, Q y de sus primeras derivadas parciales.

1. La integral $\int_C (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$, donde C está dada por $y = x^3$ de (0, 0) a (1, 1) tiene el mismo valor sobre la curva $y = x^6$ de (0, 0) a (1, 1). _____

2. El valor de la integral $\int_C 2xy\,dx - x^2\,dy$ entre dos puntos A y B depende de la trayectoria C. _____

3. Si C_1 y C_2 son dos curvas suaves tales que $\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$, entonces $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria. _____

4. Si el trabajo $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ depende de la curva C entonces $\mathbf{F}$ es no conservativo. _____

5. Suponiendo continuidad de todas las derivadas parciales y $\partial P/\partial x = \partial Q/\partial y$, entonces $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria. _____

6. En un campo de fuerza conservativo $\mathbf{F}$, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ alrededor de una curva cerrada simple es cero. _____

7. Suponiendo continuidad de todas las derivadas parciales, $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$. _____

8. La integral de superficie de la componente normal del rotacional de un campo vectorial conservativo $\mathbf{F}$ sobre una superficie $\mathbf{S}$ es igual a cero. _____

9. El trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva C se debe por completo a la componente tangencial de $\mathbf{F}$. _____

10. Para un campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}$ en el plano $z = 0$, el teorema de Stokes es lo mismo que el teorema de Green. _____

11. Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza conservativo, entonces la suma de las energías potencial y cinética de un objeto es constante. _____

12. Si $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C en una región apropiada R, entonces $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ es el gradiente de alguna función ϕ. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-10, llene los espacios en blanco.

1. Si $\phi = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ es una función potencial para un campo de fuerza conservativo $\mathbf{F}$, entonces $\mathbf{F} =$ _______.

2. Si $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k}$, entonces rot $\mathbf{F} =$ _______.

En los problemas 3-6, $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$.

3. $\nabla \cdot \mathbf{F} =$ _______

4. $\nabla \times \mathbf{F} =$ _______

5. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) =$ _______

6. $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) =$ _______

7. Si C es la elipse $2(x-10)^2+9(y+13)^2=3$, entonces $\oint_C (y-7e^{x^3})\,dx+(x+\ln\sqrt{y})\,dy$ = ________.

8. Si $\mathbf{F}$ es el campo de velocidades de un fluido para el cual rot $\mathbf{F}=\mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F}$ se dice que es ________.

9. Una ecuación de un plano tangente a la superficie $\mathbf{r}(u,v)=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+2\sqrt{uv}\,\mathbf{k}$ en $u=1$, $v=4$ es ________.

10. Un bastidor sobre la superficie $\mathbf{r}(u,v)=(4u+v)\mathbf{i}+(u+2v)\mathbf{j}+(u+v)\mathbf{k}$ correspondiente a $u=2$ tiene las ecuaciones paramétricas ________.

C. Ejercicios

1. Evalúe $\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\,ds$, donde C está dada por $x=\cos 2t$, $y=\text{sen}\,2t$, $z=2t$, $\pi\le t\le 2\pi$.

2. Evalúe $\int_C (xy+4x)\,ds$, donde C está dada por $2x+y=2$ de $(1,0)$ a $(0,2)$.

3. Evalúe $\int_C 3x^2y^2\,dx+(2x^3y-3y^2)\,dy$, donde C está dada por $y=5x^4+7x^2-14x$ de $(0,0)$ a $(1,-2)$.

4. Evalúe $\oint_C (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$, donde C es el círculo $x^2+y^2=9$.

5. Evalúe $\int_C y\,\text{sen}\,\pi z\,dx+x^2e^y\,dy+3xyz\,dz$, donde C está dada por $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ de $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$.

6. Si $\mathbf{F}=4y\mathbf{i}+6x\mathbf{j}$ y C está dada por $x^2+y^2=1$, evalúe $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ de dos maneras diferentes.

7. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}=x\,\text{sen}\,y\mathbf{i}+y\,\text{sen}\,x\mathbf{j}$ actuando a lo largo de los segmentos de recta de $(0,0)$ a $(\pi/2,0)$ y de $(\pi/2,0)$ a $(\pi/2,\pi)$.

8. Encuentre el trabajo realizado por $\mathbf{F}=\frac{2}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{1}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ de $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ a $\left(1,\sqrt{3}\right)$ actuando sobre la trayectoria que se muestra en la FIGURA 15.R.1.

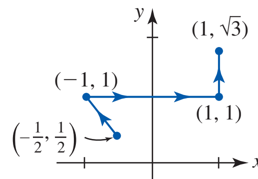


FIGURA 15.R.1 Curva C del problema 8

En los problemas 9 y 10, demuestre que la integral dada es independiente de la trayectoria. Evalúe.

9. $$\int_{(1,1,0)}^{(1,1,\pi)} 2xy\,dx+(x^2+2yz)\,dy+(y^2+4)\,dz$$

10. $$\int_{(0,0,1)}^{(3,2,0)} (2x+2ze^{2x})\,dx+(2y-1)\,dy+e^{2x}\,dz$$

11. Evalúe $\oint_C -4y\,dx+8x\,dy$, donde $C=C_1\cup C_2$ es la frontera de la región R que se muestra en la FIGURA 15.R.2.

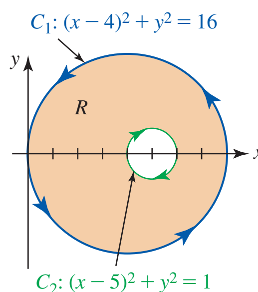


FIGURA 15.R.2 Curva C del problema 11

12. Sea C una curva cerrada simple suave por partes. Demuestre que

$$\oint_C \frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}\,dx + \frac{1-x}{(x-1)^2+(y-1)^2}\,dy = \begin{cases} -2\pi, & \text{si } (1, 1) \text{ está dentro de } C \\ 0, & \text{si } (1, 1) \text{ está fuera de } C. \end{cases}$$

13. Evalúe $\iint_S (z/xy)\,dS$, donde S es la porción del cilindro $z = x^2$ en el primer octante que está acotada por $y = 1$, $y = 3$, $z = 1$, $z = 4$.

14. Si $\mathbf{F} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, determine el flujo de $\mathbf{F}$ a través del cuadrado definido por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $z = 2$.

15. Sea la superficie S la porción del cilindro $y = 2 - e^{-x}$ cuya proyección sobre el plano xz es una región rectangular R definida por $0 \le x \le 3$, $0 \le z \le 2$. Vea la FIGURA 15.R.3*a*). Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + (2 - y)\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ a través de la superficie si S está orientada alejándose del plano xz.

16. Vuelva a trabajar el problema 15 utilizando la región R en el plano yz que corresponde a $0 \le x \le 3$, $0 \le z \le 2$. Vea la figura 15.R.3*b*).

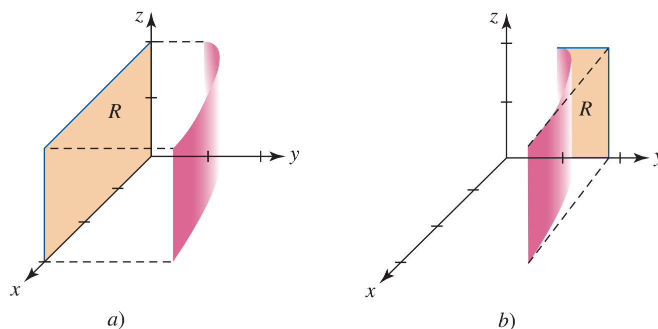


FIGURA 15.R.3 Superficies de los problemas 15 y 16

17. Si $\mathbf{F} = c\nabla(1/r)$, donde c es constante y $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, encuentre el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

18. Explique por qué el teorema de la divergencia no es aplicable en el problema 17.

19. Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = c\nabla(1/r)$, donde c es constante y $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a través de cualquier superficie S que forma la frontera de una región acotada cerrada del espacio que no contiene al origen.

20. Si $\mathbf{F} = 6x\mathbf{i} + 7z\mathbf{j} + 8y\mathbf{k}$, use el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,dS$, donde S es la porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

21. Emplee el teorema de Stokes para evaluar $\oint_C -2y\,dx + 3x\,dy + 10z\,dz$, donde C es el círculo $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$, $z = 3$.

22. Determine el trabajo $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ realizado por la fuerza $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ alrededor de la curva C que es formada por la intersección del plano $z = 2 - y$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

23. Si $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, use el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,dS$, donde S es la superficie de la región acotada por $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

24. Repita el problema 23 para $\mathbf{F} = \frac{1}{3}x^3\mathbf{i} + \frac{1}{3}y^3\mathbf{j} + \frac{1}{3}z^3\mathbf{k}$.

25. Si $\mathbf{F} = (x^2 - e^y \tan^{-1} z)\mathbf{i} + (x + y)^2\mathbf{j} - (2yz + x^{10})\mathbf{k}$, use el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,dS$, donde S es la superficie de la región en el primer octante acotado por $z = 1 - x^2$, $z = 0$, $z = 2 - y$, $y = 0$.

26. Suponga que $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z^2 + 1)\mathbf{k}$ y S es la superficie de la región acotada por $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = c$. Evalúe $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,dS$ sin la ayuda del teorema de la divergencia. [*Sugerencia*: El área de la superficie lateral del cilindro es $2\pi ac$.]

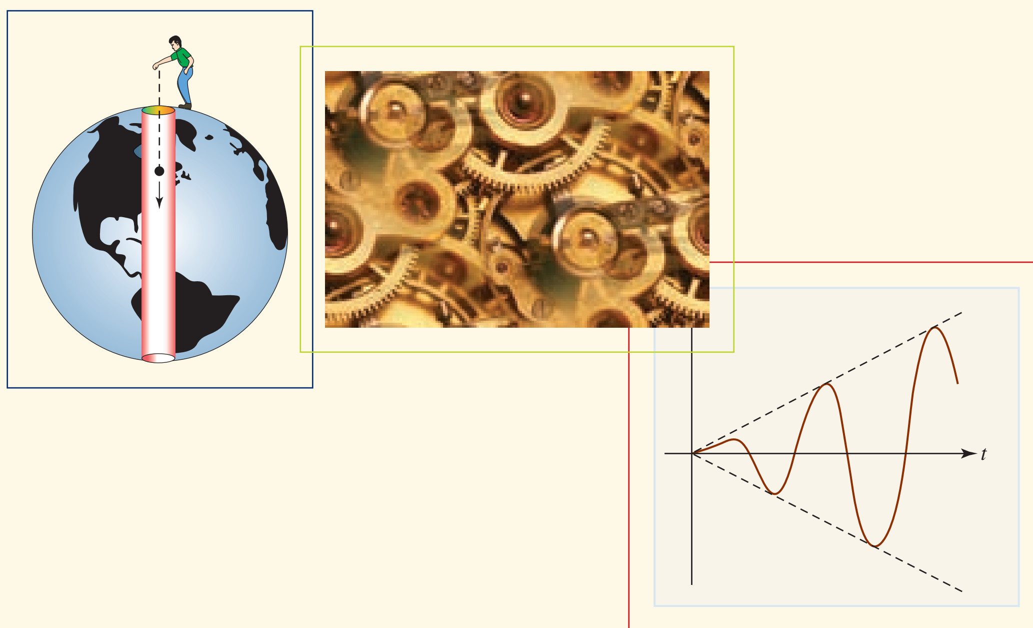
En los problemas 27-30, elimine los parámetros en el conjunto de ecuaciones paramétricas y obtenga una ecuación en x, y, y z. Identifique la superficie.

27. $x = u \cosh v$, $y = u \operatorname{senh} v$, $z = u^2$ **28.** $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u^2$

29. $\mathbf{r}(u, v) = \cos u\mathbf{i} + \cos^2 u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$. **30.** $\mathbf{r}(u, v) = \cos u \cosh v\mathbf{i} + \operatorname{sen} u \cosh v\mathbf{j} + \operatorname{senh} v\mathbf{k}$

Capítulo 16

Ecuaciones diferenciales de orden superior



En este capítulo En el capítulo 8 presentamos dos tipos importantes de ecuaciones diferenciales de primer orden: separables y lineales. También analizamos cómo las ecuaciones diferenciales de primer orden podrían servir de modelos matemáticos para diversos fenómenos físicos como el crecimiento poblacional, el decaimiento radiactivo y el enfriamiento de un cuerpo. Ahora, al retomar la discusión, aunque breve, enfocaremos nuestra atención en una importante clase de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Veremos que un modelo matemático para los desplazamientos de una masa en una cuerda vibratoria es, salvo por la terminología, lo mismo que un modelo para la corriente en un circuito en serie que contiene un inductor, un resistor y un capacitor.

16.1 Ecuaciones exactas de primer orden

Introducción La noción de una ecuación diferencial de primer orden la introdujimos en el capítulo 8. Uno de los problemas básicos en el estudio de ecuaciones diferenciales es: ¿cómo resolverlas? En las secciones 8.1 y 8.2 resolvimos ecuaciones diferenciales separables y lineales de primer orden. Luego de un breve repaso de estos dos tipos de ecuaciones, examinamos otra ecuación diferencial de primer orden llamada **ecuación exacta**. Puesto que el método de solución para una ecuación diferencial exacta utiliza la diferencial de una función de dos variables, se recomienda un repaso de la sección 13.4.

Ecuaciones diferenciales separables Recuerde que la ecuación diferencial de primer orden $y' = F(x, y)$ es **separable** si la función $F(x, y)$ tiene la forma $F(x, y) = g(x)f(y)$. De tal modo, $y' = xy/(x^2 + 1)$ es separable, porque podemos escribir

$$F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + 1} = \frac{x}{x^2 + 1} \cdot y.$$

De igual manera, $y' = xye^{x^2+y^2}$ es separable porque es posible escribirla como $y' = xe^{x^2} \cdot ye^{y^2}$. Para resolver una ecuación diferencial separable, reescribimos la ecuación $dy/dx = g(x)f(y)$ en forma diferencial

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)\,dx,$$

y luego integramos ambos lados de la ecuación.

Ecuaciones diferenciales lineales Una ecuación diferencial de primer orden **lineal** es aquella que puede ponerse en la forma estándar $y' + P(x)y = f(x)$. Para resolver esta ecuación multiplicamos ambos lados por el **factor integrante** $e^{\int P(x)\,dx}$. Esto produce

$$e^{\int P(x)\,dx}\,y' + e^{\int P(x)\,dx}\,P(x)y = e^{\int P(x)\,dx}\,f(x)$$

o

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}\,y\right] = e^{\int P(x)\,dx}\,f(x). \tag{1}$$

Al integrar ambos lados, tenemos

$$e^{\int P(x)\,dx}\,y = \int e^{\int P(x)\,dx} f(x)\,dx \qquad \text{así que} \qquad y = e^{-\int P(x)\,dx}\int e^{\int P(x)\,dx} f(x)\,dx.$$

Éste es uno de los casos raros en que hay una fórmula para la solución de miembros de una gran clase de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, *usted no debe memorizar esta fórmula.* Más bien, debe encontrar el factor integrante y después utilizar la ecuación en (1) para resolver la ecuación diferencial.

Una definición Dirigimos ahora nuestra atención a una clase de ecuaciones diferenciales de primer orden que se llaman **exactas**. Si bien la discusión siguiente es suficiente, las principales técnicas para reconocer y resolver una ecuación exacta ya se han cubierto en la sección 15.3.

Además de 13.4, se le sugiere repasar las secciones 14.2, 15.2 y 15.3.

La **diferencial** (también llamada **diferencial total**) de una función $f(x, y)$ es

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{2}$$

Considere ahora la ecuación diferencial simple

$$y\,dx + x\,dy = 0. \tag{3}$$

Esta ecuación es tanto separable como lineal, pero puede resolverse de una manera alterna al darse cuenta de que el lado izquierdo es la diferencial de $f(x, y) = xy$; esto es, $y\,dx + x\,dy = d(xy)$. La ecuación diferencial en (3) se convierte entonces en $d(xy) = 0$, e integrando ambos lados de inmediato se produce la solución $xy = C$. En general, queremos ser capaces de reconocer cuándo una forma diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ es la diferencial total de una función $f(x, y)$.

Definición 16.1.1 Ecuación diferencial exacta

La ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es **exacta** en una región rectangular R del plano xy si existe una función $f(x, y)$ tal que

$$df = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy.$$

De (2) vemos que una ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es exacta si es la misma que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0$$

para alguna función f; esto es, si $M(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $N(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ para alguna función f.

EJEMPLO 1 Diferencial exacta

La ecuación diferencial $x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy = 0$ es exacta porque, cuando $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3y^3$, tenemos $df = x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy$. ■

En el ejemplo 1, note que $M = x^2y^3$, $N = x^3y^2$, por lo que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

El siguiente teorema muestra que esto no es una coincidencia.

Teorema 16.1.1 Criterio para una ecuación diferencial exacta

Considere que $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuas y que tienen derivadas parciales continuas en una región rectangular R del plano xy. Entonces una condición necesaria y suficiente para que

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{4}$$

sea una ecuación diferencial exacta es

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5}$$

Demostración de necesidad Necesitamos mostrar que si (4) es exacta, entonces $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$. Por la definición de una ecuación diferencial exacta, existe una función f tal que

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Por tanto, ya que las primeras parciales de M y N son continuas,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$ ■

La parte de suficiencia del teorema 16.1.1 consiste en mostrar que existe una función f para la cual $\partial f/\partial x = M(x, y)$ y $\partial f/\partial y = N(x, y)$ siempre que se cumpla (5). La construcción de f en realidad refleja el procedimiento básico para resolver ecuaciones diferenciales exactas.

◀ Advierta la similitud entre las nociones de ecuaciones diferenciales exactas y campos vectoriales conservativos, discutidos en la sección 15.3.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación diferencial exacta

Resuelva $2xy\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0$.

Solución Primero mostramos que la ecuación es exacta. Identificando $M(x, y) = 2xy$ y $N(x, y) = x^2 - 1$, tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x},$$

lo que verifica que la ecuación diferencial es exacta. En consecuencia, existe una función $f(x, y)$ tal que

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

El procedimiento utilizado aquí para determinar la función f es el mismo que se usó en la determinación de la función potencial ϕ de un campo vectorial conservativo. Vea el ejemplo 6 en la sección 15.3.

Empezando con la suposición de que $\partial f/\partial x = M(x, y)$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \text{así que} \qquad f(x, y) = \int 2xy\, dx.$$

Empleando integración parcial, como se discutió en la sección 14.2, obtenemos $f(x, y) = x^2y + g(y)$. Al usar esta forma para f, se encuentra que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = N(x, y) = x^2 - 1,$$

por lo que $$g'(y) = -1 \qquad \text{y} \qquad g(y) = -y.$$

En consecuencia, $f(x, y) = x^2y - y$, y una familia de soluciones es $f(x, y) = C$ o

$$x^2y - y = C. \qquad ■$$

EJEMPLO 3 Un problema de valor inicial

Resuelva $y(1 - x^2)y' = xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 2$.

Solución Al escribir la ecuación diferencial en la forma

$$(\cos x \operatorname{sen} x - xy^2)\, dx + y(1 - x^2)\, dy = 0,$$

identificamos $M = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2$ y $N = y(1 - x^2)$. La ecuación es exacta porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Ahora, empezando con $\partial f/\partial y = N(x, y)$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y(1 - x^2) \qquad \leftarrow \text{aquí use integración parcial}$$

$$f(x, y) = \tfrac{1}{2}y^2(1 - x^2) + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -xy^2 + h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2.$$

La última ecuación indica que $h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x$, por lo que integramos para encontrar

$$h(x) = \int \cos x \operatorname{sen} x\, dx = -\int (\cos x)(-\operatorname{sen} x\, dx) = -\frac{1}{2}\cos^2 x.$$

De tal modo, la solución de la ecuación diferencial es

$$\tfrac{1}{2}y^2(1 - x^2) - \tfrac{1}{2}\cos^2 x = C_1 \qquad \text{o} \qquad y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = C,$$

donde hemos sustituido $2C_1$ con C. La condición inicial $y = 2$ cuando $x = 0$ exige que $4(1) - \cos^2(0) = C$ y $C = 3$. Una solución del problema es entonces

$$y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = 3. \qquad ■$$

Desde luego, no toda ecuación diferencial de primer orden en la forma $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ es una ecuación exacta. Por ejemplo,

$$xy\, dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)\, dy = 0$$

no es exacta. Con las identificaciones $M = xy$ y $N = 2x^2 + 3y^2 - 20$ vemos que $\partial M/\partial y = x$ y $\partial N/\partial x = 4x$. Se sigue del teorema 16.1.1 que la ecuación diferencial no es exacta debido a que $\partial M/\partial y \neq \partial N/\partial x$. Vea el problema 29 de los ejercicios 16.1.

$\frac{dy}{dx}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

En el ejemplo 2 encontramos la función $f(x, y)$ integrando primero $M(x, y)$ con respecto a x. En el ejemplo 3 empezamos integrando $N(x, y)$ con respecto a y. Cuando encuentre una solución de una ecuación diferencial exacta, tiene la libertad de empezar de cualquier manera; al final habrá poca diferencia. Por ejemplo, en el ejemplo 3, usted quizá pudo pensar que al empezar con $N = y(1 - x^2)$ evitaría la necesidad de integrar cos x sen x. Sin embargo, resulta que esta función se vuelve parte de $h'(x)$, y al final es necesario integrarla.

Ejercicios 16.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-48.

Fundamentos

En los problemas 1-20, determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si lo es, resuélvala.

1. $(2x + 4)\,dx + (3y - 1)\,dy = 0$

2. $(2x + y)\,dx - (x + 6y)\,dy = 0$

3. $(5x + 4y)\,dx + (4x - 8y^3)\,dy = 0$

4. $(\text{sen}\, y - y\, \text{sen}\, x)\,dx + (\cos x + x \cos y - y)\,dy = 0$

5. $(2xy^2 - 3)\,dx + (2x^2y + 4)\,dy = 0$

6. $\left(2y - \dfrac{1}{x} + \cos 3x\right)\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y\, \text{sen}\, 3x = 0$

7. $(x^2 - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy = 0$

8. $\left(1 + \ln x + \dfrac{y}{x}\right)dx = (1 - \ln x)\,dy$

9. $(x - y^3 + y^2 \text{sen}\, x)\,dx = (3xy^2 + 2y \cos x)\,dy$

10. $(x^3 + y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$

11. $(y \ln y - e^{-xy})\,dx + \left(\dfrac{1}{y} + x \ln y\right)dy = 0$

12. $(3x^2y + e^y)\,dx + (x^3 + xe^y - 2y)\,dy = 0$

13. $x\dfrac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$

14. $\left(1 - \dfrac{3}{y} + x\right)\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{3}{x} - 1$

15. $\left(x^2y^3 - \dfrac{1}{1 + 9x^2}\right)\dfrac{dx}{dy} + x^3y^2 = 0$

16. $(5y - 2x)y' - 2y = 0$

17. $(\tan x - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y)\,dx + \cos x \cos y\,dy = 0$

18. $(2y\, \text{sen}\, x \cos x - y + 2y^2e^{xy^2})\,dx = (x - \text{sen}^2 x - 4xye^{xy^2})\,dy$

19. $(4t^3y - 15t^2 - y)\,dt + (t^4 + 3y^2 - t)\,dy = 0$

20. $\left(\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{y}{t^2 + y^2}\right)dt + \left(ye^y + \dfrac{1}{t^2 + y^2}\right)dy = 0$

En los problemas 21-24, resuelva el problema de valores iniciales dado.

21. $(x + y)^2\,dx + (2xy + x^2 - 1)\,dy = 0, \quad y(1) = 1$

22. $(e^x + y)\,dx + (2 + x + ye^y)\,dy = 0, \quad y(0) = 1$

23. $(4y + 2t - 5)\,dt + (6y + 4t - 1)\,dy = 0, \quad y(-1) = 2$

24. $(y^2 \cos x - 3x^2y - 2x)\,dx + (2y\, \text{sen}\, x - x^3 + \ln y)\,dy = 0, \quad y(0) = e$

En los problemas 25 y 26, encuentre el valor de la constante k de manera que la ecuación diferencial dada sea exacta.

25. $(y^3 + kxy^4 - 2x)\,dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)\,dy = 0$

26. $(6xy^3 + \cos y)\,dx + (2kx^2y^2 - x\, \text{sen}\, y)\,dy = 0$

Piense en ello

En los problemas 27 y 28, analice cómo las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ pueden encontrarse de manera que cada ecuación diferencial sea exacta. Ponga en práctica sus ideas.

27. $M(x, y)\,dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$

28. $\left(x^{-1/2}y^{1/2} + \dfrac{x}{x^2 + y}\right)dx + N(x, y)\,dy = 0$

29. Si la ecuación $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ no es exacta, en ocasiones es posible encontrar una función $\mu(x, y)$ de manera que $\mu(x, y)M(x, y)\,dx + \mu(x, y)N(x, y)\,dy = 0$ sea exacta. La función $\mu(x, y)$ recibe el nombre de **factor integrante**. Encuentre un factor integrante para

$$xy\,dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)\,dy = 0$$

y luego resuelva la ecuación diferencial.

30. Verdadero o falso: Toda ecuación diferencial separable de primer orden $dy/dx = g(x)h(y)$ es exacta. Explique su respuesta.

16.2 Ecuaciones lineales homogéneas

Introducción Una ecuación diferencial lineal de orden n-ésimo

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

se dice que es **no homogénea** si $g(x) \neq 0$ para alguna x. Si $g(x) = 0$ para toda x, entonces se dice que la ecuación diferencial es **homogénea**. En ésta y en la siguiente sección estaremos interesados únicamente en determinar las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de *segundo orden* con coeficientes constantes reales:

$$ay'' + by' + cy = g(x).$$

Empezamos considerando la ecuación homogénea

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{1}$$

Teorema 16.2.1 Principio de superposición

Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden (1). Entonces la combinación lineal

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, también es una solución de la ecuación.

DEMOSTRACIÓN Sustituimos la combinación lineal

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

en la ecuación diferencial (1), sustituimos los términos y usamos el hecho de que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial. Esto produce

$$\begin{aligned} &a(C_1 y_1'' + C_2 y_2'') + b(C_1 y_1' + C_2 y_2') + c(C_1 y_1 + C_2 y_2) \\ &= C_1(\underbrace{ay_1'' + by_1' + cy_1}_{\text{cero}}) + C_2(\underbrace{ay_2'' + by_2' + cy_2}_{\text{cero}}) \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$ ■

Los resultados siguientes son consecuencias inmediatas del principio de superposición.

- Un múltiplo constante $y = C_1 y_1(x)$ de una solución $y_1(x)$ de una ecuación diferencial lineal homogénea es también una solución.
- Una ecuación diferencial lineal homogénea siempre posee la solución trivial $y = 0$.

Funciones linealmente independientes Análogo al hecho de que cualquier vector en el espacio bidimensional puede expresarse como una combinación lineal única de los vectores *linealmente independientes* **i** y **j**, cualquier solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden puede expresarse como una combinación lineal única de dos soluciones **linealmente independientes** de la ecuación diferencial.

Definición 16.2.1 Independencia lineal de funciones

Dos funciones, $y_1(x)$ y $y_2(x)$, son linealmente independientes si ninguna es un múltiplo constante de la otra.

Solución general Las soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial, y_1 y y_2, son los bloques constitutivos de todas las soluciones de la ecuación. Llamamos a la familia de soluciones de dos parámetros $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ la **solución general** de la ecuación diferencial.

Teorema 16.2.2 Solución general

Sean y_1 y y_2 soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden (1). Entonces toda solución de (1) puede obtenerse de la solución general

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x). \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Funciones linealmente independientes

Aunque $y_1 = 0$ y $y_2 = e^{2x}$ son ambas soluciones de la ecuación diferencial $y'' + 2y' - 8y = 0$, y y_2 no es un múltiplo constante de y_1, y_1 y y_2 *no* son linealmente independientes pues y_1 es un múltiplo constante de y_2; a saber, $y_1 = 0 \cdot y_2$. ■

Ecuación auxiliar El hecho sorprendente acerca de la ecuación diferencial en (1) es que *todas* las soluciones son funciones exponenciales o se construyen a partir de funciones exponenciales. Si intentamos una solución de la forma $y = e^{mx}$, entonces $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2e^{mx}$, por lo que (1) se convierte en

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \qquad \text{o} \qquad e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Como $e^{mx} \neq 0$ para toda x, es claro que la única manera de que esta función exponencial pueda satisfacer la ecuación diferencial consiste en elegir m de manera que sea una raíz de la ecuación cuadrática

$$am^2 + bm + c = 0.$$

Esta última ecuación recibe el nombre de **ecuación auxiliar** o **ecuación característica** de la ecuación diferencial (1). Consideraremos tres casos: las soluciones correspondientes a raíces reales distintas, raíces reales iguales y raíces complejas conjugadas.

CASO I: Raíces reales distintas

En la suposición de que la ecuación auxiliar de (1) tiene dos raíces reales diferentes m_1 y m_2, encontramos dos soluciones

$$y_1 = e^{m_1x} \qquad \text{y} \qquad y_2 = e^{m_2x}.$$

Puesto que ni y_1 ni y_2 es un múltiplo constante de la otra, las dos soluciones son linealmente independientes. Se sigue que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}. \tag{3}$$

EJEMPLO 2 Raíces reales distintas de la ecuación auxiliar

Resuelva $2y'' - 5y' - 3y = 0$.

Solución Al resolver la ecuación auxiliar

$$2m^2 - 5m - 3 = 0 \qquad \text{o} \qquad (2m + 1)(m - 3) = 0,$$

obtenemos $m_1 = -\frac{1}{2}$ y $m_2 = 3$. Por consiguiente, por (3) la solución general es

$$y = C_1e^{-x/2} + C_2e^{3x}.$$ ■

CASO II: Raíces reales iguales

Cuando $m_1 = m_2$, obtenemos necesariamente sólo una solución exponencial $y_1 = e^{m_1x}$. Sin embargo, basta con una sustitución directa en (1) para mostrar que $y = u(x)e^{m_1x}$ es también una solución siempre que $u(x) = x$. Vea el problema 37 en los ejercicios 16.2. Entonces $y_1 = e^{m_1x}$ y $y_2 = xe^{m_1x}$ son soluciones linealmente independientes, y la solución general es

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_1x}. \tag{4}$$

EJEMPLO 3 Raíces reales iguales de la ecuación auxiliar

Resuelva $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Solución De la ecuación auxiliar $m^2 - 10m + 25 = (m - 5)^2 = 0$, vemos que $m_1 = m_2 = 5$. De tal modo, por (4) la solución general es

$$y = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x}.$$

■

Números complejos El último caso tiene que ver con números complejos. Recuerde del álgebra que un número de la forma $z = \alpha + i\beta$, donde α y β son números reales e $i^2 = -1$ (alguna vez escrito $i = \sqrt{-1}$), se denomina **número complejo**. El número complejo $\bar{z} = \alpha - i\beta$ recibe el nombre de **conjugado** de z. Ahora, de la fórmula cuadrática, las raíces de $am^2 + bm + c = 0$ pueden escribirse

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cuando $b^2 - 4ac < 0$, las raíces m_1 y m_2 son complejos conjugados.

CASO III: Raíces complejas conjugadas

Si m_1 y m_2 son complejos, entonces es posible escribir

$$m_1 = \alpha + i\beta \qquad \text{y} \qquad m_2 = \alpha - i\beta,$$

donde α y $\beta > 0$ son números reales e $i^2 = -1$. Formalmente no hay diferencia entre este caso y el caso I, y en consecuencia la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2e^{(\alpha - i\beta)x}. \tag{5}$$

Sin embargo, en la práctica preferiríamos trabajar con funciones reales en vez de funciones que impliquen al número complejo i. Para hacer esto podemos reescribir (5) en una forma más práctica utilizando la **fórmula de Euler**,

Puede obtenerse una derivación formal de la fórmula de Euler de la serie de Maclaurin $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ al sustituir $x = i\theta$, utilizando $i^2 = -1, i^3 = -i, \ldots$, y separando después la serie en las partes real e imaginaria. Con la recomendación así establecida, podemos adoptar $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ como la *definición de* $e^{i\theta}$.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

donde θ es cualquier número real. De este resultado podemos escribir

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x \qquad \text{y} \qquad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x,$$

donde hemos usado $\cos(-\beta x) = \cos\beta x$ y $\operatorname{sen}(-\beta x) = -\operatorname{sen}\beta x$. De tal modo, (5) se convierte en

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x}(c_1e^{i\beta x} + c_2e^{-i\beta x}) \\ &= e^{\alpha x}[c_1(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x) + c_2(\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x)] \\ &= e^{\alpha x}[(c_1 + c_2)\cos\beta x + (c_1i - c_2i)\operatorname{sen}\beta x]. \end{aligned}$$

Puesto que se muestra fácilmente que $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial dada, simplemente renombramos $c_1 + c_2$ como C_1 y $c_1i - c_2i$ como C_2. Entonces usamos el principio de superposición para escribir la solución general:

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \\ &= e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\operatorname{sen}\beta x). \end{aligned} \tag{6}$$

Cuando $\alpha < 0$, llamamos a $e^{\alpha x}$ **factor de amortiguación** debido a que las gráficas de las curvas de solución $\to 0$ cuando $x \to \infty$.

EJEMPLO 4 Raíces complejas de la ecuación auxiliar

Resuelva $y'' + y' + y = 0$.

Solución De la fórmula cuadrática encontramos que la ecuación auxiliar $m^2 + m + 1 = 0$ tiene las raíces complejas

$$m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{y} \qquad m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Al identificar $\alpha = -\frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, vemos de (6) que la solución general de la ecuación es

$$y = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$ ■

EJEMPLO 5 Una ecuación diferencial especial

La ecuación diferencial

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

se encuentra con frecuencia en matemáticas aplicadas. Vea la sección 16.4. La ecuación auxiliar es $m^2 + \omega^2 = 0$, con raíces $m_1 = \omega i$ y $m_2 = -\omega i$. Se sigue de (6) con $\alpha = 0$ que la solución general es

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \operatorname{sen} \omega x.$$

La FIGURA 16.2.1 muestra la gráfica de la solución cuando $C_1 = -2$, $C_2 = 3$ y $\omega = 1$. Si usted experimenta con valores diferentes de C_1, C_2 y ω, verá que siempre y cuando C_1 y C_2 no sean ambas 0, la solución es oscilante con una amplitud y frecuencia bien definidas. Puede mostrarse que esto es cierto para cualquier elección de C_1 y C_2 (excepto $C_1 = C_2 = 0$) empleando trigonometría. ■

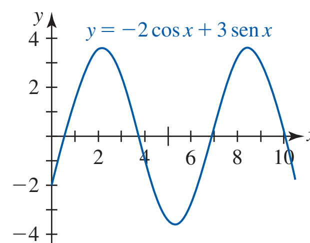


FIGURA 16.2.1 Gráfica de una solución en el ejemplo 5

Problema de valores iniciales El problema

$$\textit{Resuelva:}\quad ay'' + by' + cy = g(x)$$
$$\textit{Sujeto a:}\quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

donde y_0 y y_1 son constantes arbitrarias, recibe el nombre de **problema de valores iniciales** (**PVI**). Los valores y_0 y y_1 se denominan **condiciones iniciales**. Una solución del problema es una función cuya gráfica pasa por (x_0, y_0) tal que la pendiente de la tangente a la curva en ese punto es y_1. El siguiente ejemplo ilustra un problema de valores iniciales para una ecuación homogénea.

EJEMPLO 6 Un problema de valores iniciales

Resuelva $y'' - 4y' + 13y = 0$ sujeta a $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.

Solución Las raíces de la ecuación auxiliar

$$m^2 - 4m + 13 = 0$$

son $m_1 = 2 + 3i$ y $m_2 = 2 - 3i$, por lo que la solución general es

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x).$$

La condición $y(0) = -1$ implica que

$$-1 = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \operatorname{sen} 0) = C_1,$$

de la cual podemos escribir

$$y = e^{2x}(-\cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x).$$

Diferenciando esta última expresión y utilizando la segunda condición inicial se obtiene

$$y' = e^{2x}(3 \operatorname{sen} 3x + 3C_2 \cos 3x) + 2e^{2x}(-\cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x)$$
$$2 = 3C_2 - 2,$$

por lo que $C_2 = \frac{4}{3}$. En consecuencia,

$$y = e^{2x}\left(-\cos 3x + \tfrac{4}{3} \operatorname{sen} 3x\right).$$ ■

Problema de valores en la frontera Las condiciones iniciales para una ecuación diferencial de segundo orden se caracterizan por el hecho de que especifican valores de la función solución y de su primera derivada en un *solo punto*. En contraste, en un **problema de valores en la frontera**

(PVF) hay dos condiciones, denominadas **condiciones en la frontera**, que especifican los valores de una solución o de su primera derivada *en los puntos extremos de un intervalo* $[a, b]$. Por ejemplo,

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 = g(x), \quad y(a) = y_0, \quad y'(b) = y_1$$

es un problema de valores en la frontera. Una solución de este problema es una función, definida sobre $[a, b]$, cuya gráfica pasa por el punto (a, y_0) y tiene pendiente y_1 cuando $x = b$.

El siguiente ejemplo muestra que un problema de valores en la frontera, a diferencia de un problema de valores iniciales, puede tener varias soluciones, una solución única o ninguna solución.

EJEMPLO 7 Un problema de valores en la frontera puede tener muchas, una o ninguna solución

Del ejemplo 5 sabemos que la solución general de la ecuación diferencial $y'' + 16y = 0$ es

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x. \tag{7}$$

a) Suponga que ahora deseamos determinar una solución de la ecuación que además satisface las condiciones a la frontera $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$. Observe que la primera condición $0 = C_1 \cos 0 + C_2 \operatorname{sen} 0$ implica $C_1 = 0$, por lo que $y = C_2 \operatorname{sen} 4x$. Pero cuando $x = \pi/2$, $0 = C_2 \operatorname{sen} 2\pi$ se satisface para cualquier elección de C_2 puesto que $\operatorname{sen} 2\pi = 0$. En consecuencia, el problema de valores en la frontera

$$y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0 \tag{8}$$

tiene una infinidad de soluciones. La FIGURA 16.2.2 muestra cinco diferentes miembros de la familia de un parámetro $y = C_2 \operatorname{sen} 4x$ que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(\pi/2, 0)$.

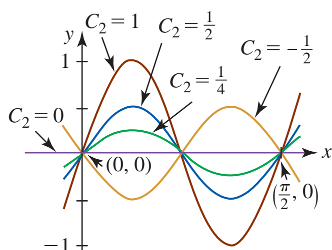


FIGURA 16.2.2 Cinco soluciones del problema de valores en la frontera del inciso *a*) del ejemplo 7

b) Si el problema de valores en la frontera en (8) se cambia por

$$y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/8) = 0, \tag{9}$$

entonces $y(0) = 0$ aún requiere que $C_1 = 0$ en la solución (7). Pero al aplicar $y(\pi/8) = 0$ a $y = C_2 \operatorname{sen} 4x$ se exige que $0 = C_2 \operatorname{sen}(\pi/2) = C_2 \cdot 1$. Por consiguiente, $y = 0$ es una solución de este nuevo problema de valores en la frontera. De hecho, puede demostrarse que $y = 0$ es la *única* solución de (9).

c) Por último, si cambiamos el problema a

$$y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1, \tag{10}$$

encontramos de nuevo que $C_1 = 0$ de $y(0) = 0$, pero que la aplicación de $y(\pi/2) = 1$ a $y = C_2 \operatorname{sen} 4x$ conduce a la contradicción $1 = C_2 \operatorname{sen} 2\pi = C_2 \cdot 0 = 0$. Por consiguiente, el problema de valores en la frontera (10) no tiene solución. ■

$\frac{d^2y}{dx^2}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

i) Muchos de los conceptos de esta sección pueden extenderse a ecuaciones diferenciales lineales de tercer o mayor orden con coeficientes constantes. Por ejemplo, la ecuación auxiliar de

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$$

es $m^3 - 4m^2 + 5m - 2 = (m-1)^2(m-2) = 0$ y $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = e^{2x}$ son soluciones de la ecuación diferencial. La noción de independencia lineal requiere una definición más complicada que la que utilizamos para dos funciones. Vea un texto sobre ecuaciones diferenciales.

ii) Las funciones hiperbólicas desempeñan un papel importante en el estudio de ecuaciones diferenciales. Recuerde que estas funciones se presentaron en la sección 3.10 y que tienen propiedades que son similares a las de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, las segundas derivadas del seno hiperbólico y del coseno hiperbólico son

$$\frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{senh} x) = \operatorname{senh} x \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2}{dx^2}(\cosh x) = \cosh x.$$

Se deduce entonces que $y_1 = \cosh x$ y $y_2 = \operatorname{senh} x$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$. Puesto que estas funciones son linealmente independientes, la solución general de la ecuación diferencial es $y = C_1 \cosh x + C_2 \operatorname{senh} x$. Se advierte fácilmente que otra forma de la solución general es $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. Estas dos en apariencia muy diferentes soluciones se relacionan por medio de las definiciones de las dos funciones hiperbólicas:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Ambas formas de la solución general de $y'' - y = 0$ se usan eventualmente en el análisis de las *ecuaciones diferenciales parciales*.

Como el nombre lo sugiere, una ecuación diferencial parcial implica derivadas parciales de una función desconocida de varias variables.

Ejercicios 16.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-48.

Fundamentos

En los problemas 1-20, determine la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $3y'' - y' = 0$
2. $2y'' + 5y' = 0$
3. $y'' - 16y = 0$
4. $y'' - 8y = 0$
5. $y'' + 9y = 0$
6. $4y'' + y = 0$
7. $y'' - 3y' + 2y = 0$
8. $y'' - y' - 6y = 0$
9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8\dfrac{dy}{dx} + 16y = 0$
10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 10\dfrac{dy}{dx} + 25y = 0$
11. $y'' + 3y' - 5y = 0$
12. $y'' + 4y' - y = 0$
13. $12y'' - 5y' - 2y = 0$
14. $8y'' + 2y' - y = 0$
15. $y'' - 4y' + 5y = 0$
16. $2y'' - 3y' + 4y = 0$
17. $3y'' + 2y' + y = 0$
18. $2y'' + 2y' + y = 0$
19. $9y'' + 6y' + y = 0$
20. $15y'' - 16y' - 7y = 0$

En los problemas 21-30, resuelva el problema de valores iniciales dado.

21. $y'' + 16y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2$
22. $y'' - y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$
23. $y'' + 6y' + 5y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
24. $y'' - 8y' + 17y = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -1$
25. $2y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$
26. $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 10$
27. $y'' + y' + 2y = 0,\ y(0) = y'(0) = 0$
28. $4y'' - 4y' - 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 5$
29. $y'' - 3y' + 2y = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1$
30. $y'' + y = 0,\ y(\pi/3) = 0,\ y'(\pi/3) = 2$
31. Las raíces de una ecuación auxiliar son $m_1 = 4$ y $m_2 = -5$. ¿Cuál es la ecuación diferencial correspondiente?
32. Las raíces de una ecuación auxiliar son $m_1 = 3 + i$ y $m_2 = 3 - i$. ¿Cuál es la ecuación diferencial correspondiente?

En los problemas 33-40, resuelva el problema de valores en la frontera dado o demuestre que no existe solución.

33. $y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$
34. $y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 1$
35. $y'' + y = 0,\ y'(0) = 0,\ y'(\pi/2) = 2$
36. $y'' - y = 0,\ y(0) = 1,\ y(1) = -1$
37. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y(\pi) = -1$
38. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y(\pi/2) = 1$
39. $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1$
40. $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y'(0) = 1,\ y(1) = 2$

Piense en ello

En los problemas 41 y 42, encuentre la solución general de la ecuación diferencial de tercer orden dada si se sabe que y_1 es una solución.

41. $y''' - 9y'' + 25y' - 17y = 0;\quad y_1 = e^x$
42. $y''' + 6y'' + y' - 34y = 0;\quad y_1 = e^{-4x}\cos x$

En los problemas 43 y 44, emplee la solución supuesta $y = e^{mx}$ para encontrar la ecuación auxiliar, raíces y solución general de la ecuación diferencial de tercer orden indicada.

43. $y''' - 4y'' - 5y' = 0$
44. $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$
45. Considere el problema de valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y(1) = 0.$$

Considerando los tres casos $\lambda = -\alpha^2 < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$, encuentre todos los valores reales de λ para los cuales el problema posee soluciones distintas de cero.

Proyectos

46. Pozo a través de la Tierra Suponga que se perfora un pozo a través de la Tierra de manera que éste pasa por el centro de la misma. Se deja caer un cuerpo con masa m dentro del pozo. Considere que la distancia desde el centro de la Tierra a la masa en el tiempo t se denota por medio de r. Vea la FIGURA 16.2.3.

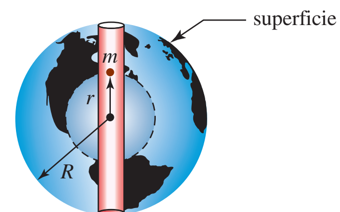


FIGURA 16.2.3 Pozo a través de la Tierra del problema 46

a) Deje que M denote la masa de la Tierra y M_r la masa de la porción de la Tierra dentro de una esfera de radio r. La fuerza gravitacional sobre m es $F = -kM_r m/r^2$, donde el signo menos indica que la fuerza es de atracción. Use este hecho para mostrar que

$$F = -k\frac{mM}{R^3}r.$$

[*Sugerencia*: Suponga que la Tierra es homogénea, esto es, que tiene una densidad constante ρ. Emplee masa = densidad × volumen.]

b) Utilice la segunda ley de Newton $F = ma$ y el resultado del inciso *a*) para deducir la ecuación diferencial

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \omega^2 r = 0,$$

donde $\omega^2 = kM/R^3 = g/R$.

c) Resuelva la ecuación diferencial del inciso *b*) si la masa m se suelta desde el reposo en la superficie de la Tierra. Interprete su respuesta utilizando R = 3 960 mi.

16.3 Ecuaciones lineales no homogéneas

Introducción Para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$ay'' + by' + cy = g(x), \tag{1}$$

debemos ser capaces de hacer dos cosas:

i) encontrar la solución general $y_c(x)$ de la ecuación diferencial **homogénea asociada**

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

ii) encontrar *cualquier* solución particular y_p de la ecuación no homogénea (1).

Como veremos, la solución general de (1) es entonces $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$. En la sección anterior analizamos cómo encontrar $y_c(x)$; en esta sección examinaremos dos métodos para determinar $y_p(x)$.

Soluciones particulares Cualquier función y_p sin parámetros arbitrarios que satisfagan (1) se dice que es una **solución particular** de la ecuación.

EJEMPLO 1 Una solución particular

Vemos que $y_p = x^3 - x$ es una solución particular de

$$y'' - y' + 6y = 6x^3 - 3x^2 + 1$$

calculando primero $y_p' = 3x^2 - 1$ y $y_p'' = 6x$. Después, al sustituir la ecuación diferencial, tenemos para todos los números reales x

$$\begin{aligned} y_p'' - y_p' + 6y_p &= 6x - (3x^2 - 1) + 6(x^3 - x) \\ &= 6x^3 - 3x^2 + 1. \end{aligned}$$

■

La solución general El teorema siguiente nos dice cómo construir la **solución general** de (1).

Teorema 16.3.1 Solución general

Sea y_p una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea (1) y

$$y_c(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

la solución general de la ecuación homogénea asociada.

Entonces la **solución general** de la ecuación no homogénea es

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x). \tag{2}$$

La demostración de que (2) es una solución de (1) se deja como ejercicio. Vea el problema 38 en los ejercicios 16.3.

Función complementaria En el teorema 16.3.1 la solución de una ecuación diferencial homogénea asociada, $y_c(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, se denomina **función complementaria** de la

ecuación (1). En otras palabras, la solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea es

$$y = \text{función complementaria} + \text{cualquier solución particular}.$$

Coeficientes indeterminados Cuando $g(x)$ consiste en

i) una constante k,
ii) un polinomio en x,
iii) una función exponencial $e^{\alpha x}$,
iv) sen βx, cos βx,

o sumas y productos finitos de estas funciones, es posible encontrar una solución particular de (1) mediante el **método de coeficientes indeterminados**. La idea que subyace en este método es una conjetura, en realidad una adivinanza informada, acerca de la forma de y_p motivada por los distintos tipos de funciones que forman $g(x)$ y sus derivadas $g'(x), g''(x), \ldots, g^{(m)}(x)$.

Vea un texto de ecuaciones diferenciales para una discusión más completa del método de coeficientes indeterminados.

En esta sección consideramos el caso especial en el que n funciones distintas $f_n(x)$ que aparecen en $g(x)$, y sus derivadas, *no* se presentan; esto es, no se duplican, en la función complementaria y_c. Bajo estas circunstancias, puede encontrarse una solución particular y_p que tenga la forma

$$y = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \cdots + A_n f_n(x). \tag{3}$$

Para determinar los coeficientes específicos A_k, donde $k = 1, \ldots, n$, sustituimos la expresión en (3) en la ecuación diferencial no homogénea (1). Esto producirá n ecuaciones algebraicas lineales en n incógnitas $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Los siguientes dos ejemplos ilustran el método básico.

EJEMPLO 2 Solución general utilizando coeficientes indeterminados

Resuelva $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4x^2.$ (4)

Solución La función complementaria es

$$y_c = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Ahora, ya que

$$\underset{\substack{\uparrow \\ f_1(x)}}{g(x) = 4x^2}, \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ f_2(x)}}{g'(x) = 8x} \qquad \text{y} \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ f_3(x)}}{g''(x) = 8 \cdot 1},$$

buscamos una solución particular que tenga la forma básica

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \cdot 1. \tag{5}$$

Diferenciando (5) y al sustituir en la ecuación diferencial original (4), obtenemos

$$\begin{aligned} y_p'' + 3y_p' + 2y_p &= 2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) \\ &= 2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) \\ &= 4x^2 + 0x + 0. \end{aligned}$$

Puesto que la última igualdad se supone que es una identidad, los coeficientes de potencias similares de x deben ser iguales:

$$\begin{aligned} 2A \qquad\qquad &= 4 \\ 6A + 2B \qquad &= 0 \\ 2A + 3B + 2C &= 0. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se encuentra que $A = 2$, $B = -6$ y $C = 7$. De tal modo, $y_p = 2x^2 - 6x + 7$ y por (2) la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 2x^2 - 6x + 7.$$ ■

EJEMPLO 3 Solución general utilizando coeficientes indeterminados

Resuelva $y'' + 2y' + 2y = -10xe^x + 5 \text{ sen } x$.

Solución Las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + 2m + 2 = 0$ son $m_1 = -1 + i$ y $m_2 = -1 - i$, por lo que

$$y_c = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \text{ sen } x).$$

En este caso,

$$g(x) = -10\underset{\substack{\uparrow\\ f_1(x)}}{xe^x} + 5 \underset{\substack{\uparrow\\ f_2(x)}}{\text{sen } x} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = -10xe^x - 10\underset{\substack{\uparrow\\ f_3(x)}}{e^x} + 5 \underset{\substack{\uparrow\\ f_4(x)}}{\cos x}.$$

Las derivadas de orden superior no generan ninguna nueva función y esto sugiere que es posible encontrar una solución de la forma

$$y_p = Axe^x + Be^x + C \text{ sen } x + D \cos x.$$

Al sustituir y_p en la ecuación diferencial y simplificando, tenemos

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' + 2y_p &= 5Axe^x + (4A + 5B)e^x + (C - 2D) \text{ sen } x + (2C + D) \cos x \\ &= -10xe^x + 5 \text{ sen } x. \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones correspondientes es

$$\begin{aligned} 5A \qquad &= -10 \\ 4A + 5B &= 0 \\ C - 2D &= 5 \\ 2C + \ \ D &= 0, \end{aligned}$$

por lo que $A = -2$, $B = \frac{8}{5}$, $C = 1$ y $D = -2$. De tal modo, una solución particular es

$$y_p = -2xe^x + \tfrac{8}{5}e^x + \text{sen } x - 2 \cos x,$$

y la solución general resulta

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \text{ sen } x) - 2xe^x + \tfrac{8}{5}e^x + \text{sen } x - 2 \cos x.$$ ■

Variación de parámetros Como se mencionó en el inicio de esta discusión, el método de coeficientes indeterminados se limita al caso en el que $g(x)$ es una suma o producto finito de constantes, polinomios, exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos. En general, el método de coeficientes indeterminados no producirá una solución particular de (1) para funciones tales como

$$g(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \ln x, \qquad g(x) = \tan x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \text{sen}^{-1} x.$$

El método que consideraremos a continuación, denominado **variación de parámetros**, producirá una solución particular y_p *siempre* que pueda resolverse la ecuación homogénea asociada.

Empezamos nuestra discusión de este método poniendo la ecuación diferencial no homogénea en (1) en la **forma estándar**

$$y'' + Py' + Qy = f(x)$$

dividiendo ambos lados de la ecuación por el primer coeficiente a. Después, dejamos que y_1 y y_2 sean soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea asociada (2); así que

$$y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0.$$

Después de esto preguntamos: ¿es posible encontrar dos funciones u_1 y u_2 de manera que

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{6}$$

sea una solución particular de (1)? Advierta que nuestra suposición para y_p tiene la misma forma que $y_c = C_1y_1 + C_2y_2$, aunque hemos sustituido C_1 y C_2 por los "parámetros de la variable" u_1 y u_2. Debido a que estamos buscando dos funciones desconocidas u_1 y u_2, la razón nos indica que necesitamos dos ecuaciones.

Al emplear la regla del producto para diferenciar (6) dos veces, obtenemos

$$y_p' = u_1y_1' + y_1u_1' + u_2y_2' + y_2u_2'$$
$$y_p'' = u_1y_1'' + y_1'u_1' + y_1u_1'' + u_1'y_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2' + y_2u_2'' + u_2'y_2'.$$

Al sustituir (6) y las derivadas anteriores en la forma estándar de la ecuación diferencial y agrupar términos, se obtiene

$$y_p'' + Py_p' + Qy_p = u_1[\underbrace{y_1'' + Py_1' + Qy_1}_{\text{cero}}] + u_2[\underbrace{y_2'' + Py_2' + Qy_2}_{\text{cero}}]$$
$$+y_1u_1'' + u_1'y_1' + y_2u_2'' + u_2'y_2' + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2'$$
$$= \frac{d}{dx}[y_1u_1'] + \frac{d}{dx}[y_2u_2'] + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2'$$
$$= \frac{d}{dx}[y_1u_1' + y_2u_2'] + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x). \tag{7}$$

En este punto hacemos la suposición de que u_1 y u_2 son funciones para las cuales $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$. Esta suposición no sale de la nada sino de los primeros dos términos en (7), puesto que $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$, entonces (7) se reduce a $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$. Ahora tenemos nuestras dos ecuaciones deseadas, aunque dos ecuaciones para determinar las derivadas u_1' y u_2'. Por la regla de Cramer, la solución del sistema

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0$$
$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$$

puede expresarse en términos de determinantes de 2×2:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}. \tag{8}$$

El determinante $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ recibe el nombre de **wronkskiano** y suele denotarse mediante W.

EJEMPLO 4 Solución general utilizando variación de parámetros

Resuelva $4y'' + 36y = \csc 3x$.

Solución Para usar (6) y (8) es necesario escribir primero la ecuación diferencial en forma estándar. Para ese fin empezamos dividiendo la ecuación dada por el coeficiente de y'':

$$y'' + 9y = \tfrac{1}{4}\csc 3x.$$

Puesto que las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + 9 = 0$ son $m_1 = 3i$ y $m_2 = -3i$, la función complementaria es

$$y_c = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x.$$

Identificando $y_1 = \cos 3x$ y $y_2 = \operatorname{sen} 3x$, vemos que el wronkskiano es

$$W = \begin{vmatrix} \cos 3x & \operatorname{sen} 3x \\ -3 \operatorname{sen} 3x & 3 \cos 3x \end{vmatrix} = 3.$$

De (8) encontramos

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 3x \\ \frac{1}{4}\csc 3x & 3 \cos 3x \end{vmatrix}}{W} = \frac{(\operatorname{sen} 3x)\left(\frac{1}{4}\csc 3x\right)}{3} = -\frac{1}{12}$$

y

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3 \operatorname{sen} 3x & \frac{1}{4}\csc 3x \end{vmatrix}}{W} = \frac{(\cos 3x)\left(\frac{1}{4}\csc 3x\right)}{3} = \frac{1}{12}\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}.$$

Integrando u_1' y u_2' se produce

$$u_1 = -\tfrac{1}{12}x \qquad \text{y} \qquad u_2 = \tfrac{1}{36}\ln|\operatorname{sen} 3x|.$$

Por tanto,

$$y_p = -\tfrac{1}{12}x\cos 3x + \tfrac{1}{36}(\operatorname{sen} 3x)\ln|\operatorname{sen} 3x|,$$

y la solución general es

$$y = y_c + y_p = C_1\cos 3x + C_2\operatorname{sen} 3x - \tfrac{1}{12}x\cos 3x + \tfrac{1}{36}(\operatorname{sen} 3x)\ln|\operatorname{sen} 3x|. \quad ■$$

Constantes de integración Al calcular las integrales indefinidas de u_1' y u_2', no es necesario introducir ninguna constante. Para ver lo anterior, suponga que a_1 y a_2 son constantes introducidas en la integración de u_1' y u_2'. Entonces la solución general $y = y_c + y_p$ se convierte en

$$\begin{aligned} y &= \overbrace{C_1y_1 + C_2y_2}^{y_c} + \overbrace{(u_1 + a_1)y_1 + (u_2 + a_2)y_2}^{y_p} \\ &= (C_1 + a_1)y_1 + (C_2 + a_2)y_2 + u_1y_1 + u_2y_2 \\ &= c_1y_1 + c_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2, \end{aligned}$$

donde $c_1 = C_1 + a_1$ y $c_2 = C_2 + a_2$ son constantes.

Ejercicios 16.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-48.

Fundamentos

En los problemas 1-10, resuelva la ecuación diferencial dada por coeficientes indeterminados.

1. $y'' - 9y = 54$

2. $2y'' - 7y' + 5y = -29$

3. $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$

4. $y'' - 2y' + y = x^3 + 4x$

5. $y'' + 25y = 6\operatorname{sen} x$

6. $y'' - 4y = 7e^{4x}$

7. $y'' - 2y' - 3y = 4e^{2x} + 2x^3$

8. $y'' + y' + y = x^2e^x + 3$

9. $y'' - 8y' + 25y = e^{3x} - 6\cos 2x$

10. $y'' - 5y' + 4y = 2\operatorname{senh} 3x$

En los problemas 11 y 12, resuelva la ecuación diferencial dada por coeficientes indeterminados sujetos a las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

11. $y'' - 64y = 16$

12. $y'' + 5y' - 6y = 10e^{2x}$

En los problemas 13-32, resuelva la ecuación diferencial dada por variación de parámetros.

13. $y'' + y = \sec x$

14. $y'' + y = \tan x$

15. $y'' + y = \operatorname{sen} x$

16. $y'' + y = \sec x\tan x$

17. $y'' + y = \cos^2 x$

18. $y'' + y = \sec^2 x$

19. $y'' - y = \cosh x$

20. $y'' - y = \operatorname{senh} 2x$

21. $y'' - 4y = e^{2x}/x$

22. $y'' - 9y = 9xe^{-3x}$

23. $y'' + 3y' + 2y = 1/(1 + e^x)$

24. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}/(1 + e^x)$

25. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen} e^x$

26. $y'' - 2y' + y = e^x\arctan x$

27. $y'' - 2y' + y = e^x/(1 + x^2)$

28. $y'' - 2y' + 2y = e^x\sec x$

29. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$

30. $y'' + 10y' + 25y = e^{-10x}/x^2$

31. $4y'' - 4y' + y = 8e^{-x} + x$

32. $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1 - x^2}$

En los problemas 33 y 34, resuelva la ecuación diferencial dada por variación de parámetros sujetos a las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

33. $y'' - y = xe^x$

34. $2y'' + y' - y = x + 1$

35. Dado que $y_1 = x$ y $y_2 = x\ln x$ son soluciones linealmente independientes de $x^2y'' - xy' + y = 0$, emplee variación de parámetros para resolver $x^2y'' - xy' + y = 4x\ln x$ para $x > 0$.

36. Dado que $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^3$ son soluciones linealmente independientes de $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, use variación de parámetros para resolver $x^2y'' - 4xy' + 6y = 1/x$ para $x > 0$.

Aplicaciones

37. Puesto que el fosfato es a menudo un nutriente limitante para el crecimiento de algas en lagos, en el manejo de la calidad del agua es importante ser capaces de predecir la entrada de fosfato en lagos. Una fuente es el sedimento en el lecho del lago. Un modelo matemático que describe la concentración del fosfato en el sedimento del lecho de un lago es la ecuación diferencial

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{C(x) - C(\infty)}{\lambda^2},$$

donde $C(x)$ es la concentración de fosfato a una profundidad x desde la superficie del sedimento, $C(\infty)$ es la concentración de equilibrio a profundidad "infinita", esto es, $C(\infty) = \text{lím}_{x\to\infty} C(x)$, y $\lambda > 0$ es un parámetro de "norma de espesor" de la porosidad del sedimento, el coeficiente de difusión del ion fosfato y una tasa de absorción constante. Resuelva esta ecuación diferencial sujeta a la condición inicial $C(0) = 0$.

≡ Piense en ello

38. Si y_c y y_p son la función complementaria y la solución particular, respectivamente, de la ecuación diferencial no homogénea (1), demuestre que $y = y_c + y_p$ es una solución de (1).

39. ***a***) Demuestre que la solución particular de la forma $y_p = Ae^x$ no puede encontrarse para la ecuación diferencial $y'' + 2y' - 3y = 10e^x$.

b) Encuentre una solución particular de la ecuación diferencial en el inciso *a*) de la forma $y_p = Axe^x$.

c) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial del inciso *a*).

40. Utilice coeficientes indeterminados y las ideas del problema 39 para encontrar la solución general de $y'' - y = e^{-x} - e^x$.

16.4 Modelos matemáticos

Introducción Una importante rama de las matemáticas implica el estudio de *sistemas dinámicos*, sistemas en general que cambian o evolucionan con el tiempo. Más precisamente, un sistema dinámico consiste en un conjunto de variables dependientes del tiempo, denominadas *variables de estado*, junto con una regla que nos permite determinar el estado del sistema (que puede ser un estado pasado, presente o futuro) en términos de un estado prescrito en algún tiempo t_0.

En esta sección nos concentramos primero en un modelo matemático de uno de tales sistemas dinámicos —un sistema de masa/resorte— cuyo estado (posición x y velocidad dx/dt de la masa) en cualquier tiempo futuro $t > 0$ depende de las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = x_1$. Las condiciones iniciales representan el estado de la masa en el tiempo $t = 0$. Introducimos después un sistema análogo que puede usarse para modelar circuitos eléctricos.

Ley de Hooke Suponga, como en la FIGURA 16.4.1*b*), una masa m_1 unida a un resorte flexible suspendido de un soporte rígido. Cuando m_1 se sustituye por una masa diferente m_2, la cantidad de alargamiento o elongación del resorte será desde luego diferente.

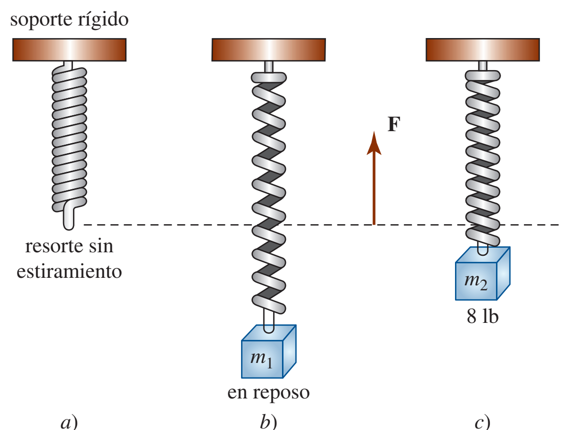


FIGURA 16.4.1 Un sistema masa-resorte

Por la ley de Hooke, el resorte mismo ejerce una fuerza restauradora F opuesta a la dirección de elongación y proporcional a la cantidad de elongación s. Enunciado de manera simple, $F = ks$, donde k es una constante de proporcionalidad. Aunque masas con diferentes pesos alargarán un resorte en diferentes cantidades, el resorte se caracteriza esencialmente por medio del número k. Por ejemplo, si una masa que pesa 10 lb alarga un resorte $\frac{1}{2}$ pie, entonces

$$10 = k \cdot \tfrac{1}{2} \qquad \text{implica} \qquad k = 20 \text{ lb/pie}.$$

Consecuentemente, una masa que pese 8 lb alarga al mismo resorte $s = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ pie.

Segunda ley de Newton Luego de que una masa m se una a un resorte, alargará el resorte en una cantidad s y alcanzará una **posición de equilibrio** en la cual su peso W está equilibrado por la fuerza restauradora ks. Recuerde que el peso está definido por $W = mg$, donde la masa m se mide en slugs, kilogramos o gramos, y $g = 32$ pies/s^2, 9.8 m/s^2, o 980 cm/s^2, respectivamente. Como se indica en la FIGURA 16.4.2*b*), la condición de equilibrio es $mg = ks$ o $mg - ks = 0$.

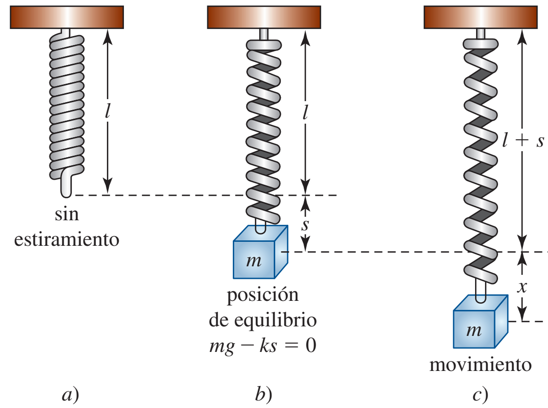


FIGURA 16.4.2 Un sistema masa-resorte en equilibrio y en movimiento

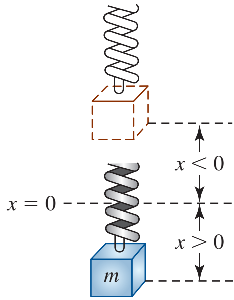


FIGURA 16.4.3 Desplazamientos negativo y positivo

Si la masa se desplaza después en una cantidad x desde su posición de equilibrio y se suelta, la fuerza neta F en este caso dinámico está dada por la **segunda ley de movimiento de Newton**, $F = ma$, donde a es la aceleración d^2x/dt^2. Suponiendo que no hay fuerzas retardadoras que actúan sobre el sistema y que la masa vibra sin influencia de otras fuerzas externas —**movimiento libre**—, podemos igualar F con la fuerza resultante del peso y la fuerza restauradora:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s + x) + mg = -kx + \underbrace{mg - ks}_{\text{cero}} = -kx. \tag{1}$$

El signo negativo en (1) indica que la fuerza restauradora del resorte actúa opuesta a la dirección de movimiento. Además, debemos adoptar la convención de que los desplazamientos medidos *debajo* de la posición de equilibrio son positivos. Vea la FIGURA 16.4.3.

Movimiento subamortiguado libre Al dividir (1) entre la masa m obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{2}$$

donde $\omega^2 = k/m$. Se afirma que la ecuación (2) describe el **movimiento armónico simple**, o **movimiento subamortiguado libre**. Hay dos condiciones iniciales evidentes asociadas con esta ecuación diferencial:

$$x(0) = s_0, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \upsilon_0, \tag{3}$$

que representan la cantidad de desplazamiento inicial y de velocidad inicial, respectivamente. Por ejemplo, si $s_0 > 0$, $\upsilon_0 < 0$, la masa empezaría desde un punto *debajo* de la posición de equilibrio con una velocidad impartida *hacia arriba*. Si $s_0 < 0$, $\upsilon_0 = 0$, la masa se liberaría desde el reposo a partir de un punto $|s_0|$ unidades *arriba* de la posición de equilibrio, etcétera.

La solución y la ecuación de movimiento Para resolver (2) notamos que las soluciones de la ecuación auxiliar $m^2 + \omega^2 = 0$ son los números complejos

$$m_1 = \omega i, \qquad m_2 = -\omega i.$$

De tal modo, de (6) de la sección 16.2 encontramos que la solución general de la ecuación es

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t. \tag{4}$$

El **periodo** de vibraciones libres descritas por (4) es $T = 2\pi/\omega$ y la **frecuencia** es $f = 1/T = \omega/2\pi$. Por último, cuando se usan las condiciones iniciales (3) para determinar las

constantes C_1 y C_2 en (4), afirmamos que la solución particular resultante es la **ecuación de movimiento** de la masa.

EJEMPLO 1 Un sistema que describe el movimiento armónico simple

Resuelva e interprete el problema de valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0, \qquad x(0) = 10, x'(0) = 0.$$

Solución El problema es equivalente a jalar una masa en un resorte 10 unidades hacia abajo de la posición equilibrio, sosteniéndola hasta $t = 0$, y después soltándola desde el reposo. La aplicación de las condiciones iniciales a la solución

$$x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \operatorname{sen} 4t$$

da

$$x(0) = 10 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0,$$

de manera que $C_1 = 10$, y consecuentemente,

$$x(t) = 10 \cos 4t + C_2 \operatorname{sen} 4t$$
$$x'(t) = -40 \operatorname{sen} 4t + 4C_2 \cos 4t$$
$$x'(0) = 0 = 4C_2 \cdot 1.$$

La última ecuación implica que $C_2 = 0$, por lo que la ecuación de movimiento es $x(t) = 10 \cos 4t$.

La solución muestra claramente que una vez que el sistema se pone en movimiento, se mantiene en movimiento con la masa rebotando arriba y abajo 10 unidades con respecto a la posición de equilibrio $x = 0$. Como se ilustra en la FIGURA 16.4.4*b*), el periodo de oscilación es $2\pi/4 = \pi/2$ s. ■

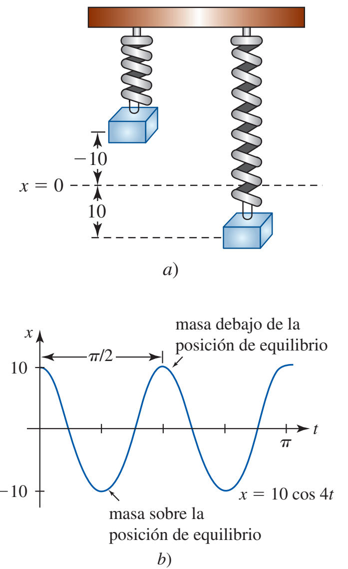


FIGURA 16.4.4 Movimiento armónico simple del sistema masa-resorte del ejemplo 1

Movimiento amortiguado libre

La discusión del movimiento armónico simple del ejemplo 1 es un poco irreal. A menos que la masa esté suspendida en un vacío perfecto, habrá una fuerza de resistencia debida al medio circundante. Por ejemplo, como muestra la FIGURA 16.4.5, la masa m podría estar suspendida en un medio viscoso o conectada a un dispositivo de amortiguamiento hidráulico. En el estudio de la mecánica, las fuerzas de amortiguamiento que actúan sobre un cuerpo se consideran proporcionales a la potencial de la velocidad instantánea. En particular, supondremos que esta fuerza está dada por un múltiplo constante de dx/dt. De tal modo, si no se aplican otras fuerzas externas sobre el sistema, se deduce de la segunda ley de Newton que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}, \tag{5}$$

donde β es una *constante de amortiguamiento* positiva y el signo negativo es una consecuencia del hecho de que la fuerza de amortiguamiento actúa en una dirección opuesta al movimiento. Cuando dividimos (5) por la masa m, la ecuación diferencial del **movimiento amortiguado libre** es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \tag{6}$$

donde $2\lambda = \beta/m$ y $\omega^2 = k/m$. El símbolo 2λ se usa sólo por conveniencia algebraica, puesto que la ecuación auxiliar es $m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$ y las raíces correspondientes son entonces

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Cuando $\lambda^2 - \omega^2 \neq 0$ la solución de la ecuación diferencial tiene la forma

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t}\right), \tag{7}$$

y vemos que cada solución contendrá el **factor de amortiguación** $e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$. (Como se muestra abajo, éste también es el caso cuando $\lambda^2 - \omega^2 = 0$.) Así, los desplazamientos de la masa llegarán a ser despreciables conforme aumente el tiempo. A continuación se consideran los tres casos posibles determinados por el signo algebraico de $\lambda^2 - \omega^2$.

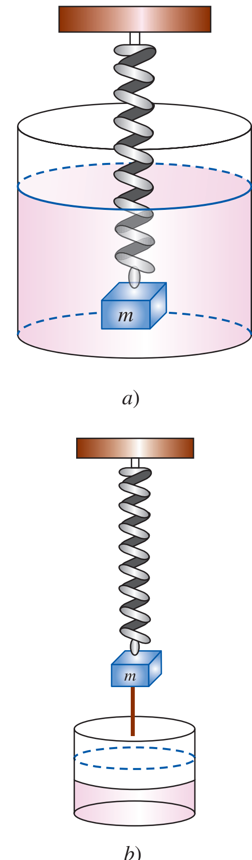


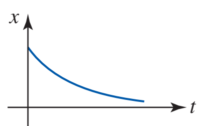
FIGURA 16.4.5 Un sistema masa-resorte con movimiento armónico amortiguado

CASO I: $\lambda^2 - \omega^2 > 0$ Aquí las raíces de la ecuación auxiliar son reales y distintas y el sistema se dice que está **sobreamortiguado**. Se demuestra fácilmente que cuando $\lambda^2 - \omega^2 > 0$, $\beta^2 > 4km$,

por lo que la constante de amortiguamiento β es grande cuando se compara con la constante k del resorte. La correspondiente ecuación de movimiento está dada por (7):

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t}\right).$$

Dos posibles gráficas de $x(t)$ se muestran en la FIGURA 16.4.6, ilustrando el hecho de que el movimiento de la masa es no oscilatorio y rápidamente se mueve hacia la posición de equilibrio.



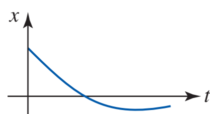


FIGURA 16.4.6 Movimiento sobreamortiguado de un sistema masa-resorte

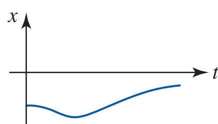
CASO II: $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ Aquí $m_1 = m_2 = -\lambda$ y se dice que el sistema está **críticamente amortiguado**, puesto que cualquier reducción ligera en la fuerza de amortiguamiento resultaría en un movimiento oscilatorio. La solución general de (6) es

$$x(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 t e^{m_1 t}$$

o

$$x(t) = e^{-\lambda t}(C_1 + C_2 t). \tag{8}$$

Algunas gráficas del movimiento típico se presentan en la FIGURA 16.4.7. Advierta que el movimiento es bastante similar al de un sistema sobreamortiguado. También es claro de (8) que la masa puede pasar por la posición de equilibrio al menos una vez.



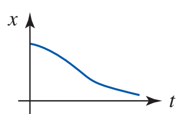


FIGURA 16.4.7 Movimiento críticamente amortiguado de un sistema masa-resorte

CASO III: $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ En este caso tenemos $\beta^2 < 4km$, por lo que la constante de amortiguamiento es pequeña comparada con la constante k del resorte, y se dice que el sistema está **subamortiguado**. Las raíces m_1 y m_2 son en este caso números complejos:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,i, \qquad m_2 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,i,$$

por lo que la ecuación de movimiento dada en (7) puede escribirse como

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t\right). \tag{9}$$

Como se indica en la FIGURA 16.4.8, el movimiento descrito por (9) es oscilatorio, aunque debido al coeficiente $e^{-\lambda t}$ vemos que las amplitudes de vibración $\to 0$ cuando $t \to \infty$.

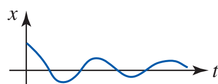


FIGURA 16.4.8 Movimiento subamortiguado de una masa-resorte

EJEMPLO 2 Un sistema con movimiento críticamente amortiguado

Una masa que pesa 8 libras estira un resorte 2 pies. Suponiendo que sobre el sistema actúa una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a dos veces la velocidad instantánea, determine la ecuación de movimiento si la masa se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 3 pies/s. Determine el tipo de amortiguamiento exhibido por el sistema y grafique la ecuación de movimiento.

Solución De la ley de Hooke tenemos

$$8 = k \cdot 2 \qquad \text{así que} \qquad k = 4 \text{ lb/pie},$$

y de $m = W/g$,

$$m = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}\,\text{slug}.$$

Puesto que la constante de amortiguamiento es $\beta = 2$, la ecuación diferencial de movimiento es

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 2\frac{dx}{dt} \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0.$$

En vista de que la masa se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 3 pies/s, las condiciones iniciales son

$$x(0) = 0, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -3.$$

Como la ecuación auxiliar de la ecuación diferencial es

$$m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2 = 0,$$

tenemos $m_1 = m_2 = -4$, y el sistema está críticamente amortiguado. La solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 t e^{-4t}.$$

La condición inicial $x(0) = 0$ implica de inmediato que $C_1 = 0$, en tanto que al usar $x'(0) = -3$ se obtiene $C_2 = -3$. De tal modo, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = -3te^{-4t}.$$

Para graficar $x(t)$ encontramos el tiempo en el cual $x'(t) = 0$:

$$x'(t) = -3(-4te^{-4t} + e^{-4t}) = -3e^{-4t}(1 - 4t).$$

Claramente, $x'(t) = 0$ cuando $t = \frac{1}{4}$, y el desplazamiento correspondiente es

$$x\left(\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{3}{4}e^{-1} = -0.276 \text{ pie}.$$

Como se ilustra en la FIGURA 16.4.9, interpretamos que este valor significa que el peso alcanza una altura máxima de 0.276 pie sobre la posición de equilibrio. ■

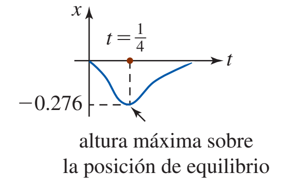


FIGURA 16.4.9 Gráfica de la ecuación de movimiento del ejemplo 2

EJEMPLO 3 Un sistema con movimiento subamortiguado

Una masa que pesa 16 lb se une a un resorte de 5 pies de largo. En equilibrio el resorte mide 8.2 pies. Si la masa se empuja hacia arriba y se suelta desde el reposo en un punto a 2 pies por arriba de la posición de equilibrio, encuentre los desplazamientos $x(t)$ si se sabe además que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea. Determine el tipo de amortiguamiento exhibido por el sistema.

Solución La elongación del resorte después de que se une el peso es $8.2 - 5 = 3.2$ pies, por lo que se sigue de la ley de Hooke que

$$16 = k \cdot (3.2) \qquad \text{y} \qquad k = 5 \text{ lb/pie}.$$

Además,

$$m = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \text{ slug} \qquad \text{y} \qquad \beta = 1,$$

por lo que la ecuación diferencial está dada por

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = -5x - \frac{dx}{dt} \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0.$$

Esta última ecuación se resuelve sujeta a las condiciones iniciales

$$x(0) = -2, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Prosiguiendo, encontramos que las raíces de $m^2 + 2m + 10 = 0$ son $m_1 = -1 + 3i$ y $m_2 = -1 - 3i$, lo cual implica entonces que el sistema está subamortiguado y

$$x(t) = e^{-t}(C_1 \cos 3t + C_2 \operatorname{sen} 3t).$$

Ahora

$$\begin{aligned} x(0) &= -2 = C_1 \\ x(t) &= e^{-t}(-2\cos 3t + C_2 \operatorname{sen} 3t) \\ x'(t) &= e^{-t}(6 \operatorname{sen} 3t + 3C_2 \cos 3t) - e^{-t}(-2\cos 3t + C_2 \operatorname{sen} 3t) \\ x'(0) &= 0 = 3C_2 + 2, \end{aligned}$$

lo cual produce $C_2 = -\frac{2}{3}$. De tal modo, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = e^{-t}\left(-2\cos 3t - \tfrac{2}{3}\operatorname{sen} 3t\right).$$ ■

Movimiento forzado Suponga que ahora tomamos en consideración una fuerza externa $f(t)$ que actúa sobre una masa vibrante en un resorte. Por ejemplo, $f(t)$ podría representar una fuerza accionadora que produjera un movimiento vertical oscilatorio del soporte del resorte. Vea la FIGURA 16.4.10. La inclusión de $f(t)$ en la formulación de la segunda ley de Newton produce

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + f(t),$$

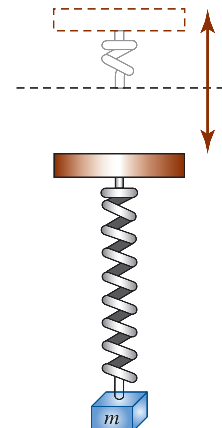


FIGURA 16.4.10 Un sistema masa-resorte forzado

por lo que

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{f(t)}{m} \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t), \tag{10}$$

donde $F(t) = f(t)/m$ y, como antes, $2\lambda = \beta/m$ y $\omega^2 = k/m$. Para resolver la última ecuación no homogénea, podemos emplear el método de coeficientes indeterminados o el de variación de parámetros.

El siguiente ejemplo ilustra el movimiento forzado sin amortiguamiento.

EJEMPLO 4 Un sistema con movimiento forzado

Resuelva el problema de valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \gamma t, \qquad F_0 = \text{constante},$$

$$x(0) = 0, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Solución La función complementaria es $x_c(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t$. Para obtener una solución particular requerimos que $\gamma \neq \omega$ y usamos el método de coeficientes indeterminados. Entonces, suponiendo $x_p = A \cos \gamma t + B \operatorname{sen} \gamma t$, tenemos

$$\begin{aligned} x_p' &= -A\gamma \operatorname{sen} \gamma t + B\gamma \cos \gamma t \\ x_p'' &= -A\gamma^2 \cos \gamma t - B\gamma^2 \operatorname{sen} \gamma t \\ x_p'' + \omega^2 x_p &= A(\omega^2 - \gamma^2) \cos \gamma t + B(\omega^2 - \gamma^2) \operatorname{sen} \gamma t \\ &= F_0 \operatorname{sen} \gamma t. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$A = 0 \quad \text{y} \quad B = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}.$$

Por tanto,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \gamma t.$$

Aplicando las condiciones iniciales dadas a la solución general

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \gamma t$$

se obtiene $C_1 = 0$ y $C_2 = -\gamma F_0/\omega(\omega^2 - \gamma^2)$. De esta manera, la ecuación de movimiento del sistema forzado es

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}(-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t), \quad \gamma \neq \omega. \tag{11}$$ ■

Resonancia pura Aunque (11) no está definida para $\gamma = \omega$, es interesante observar que su valor límite cuando $\gamma \to \omega$ puede obtenerse aplicando la regla de L'Hôpital. Este proceso de límite es análogo a "sintonizar" la frecuencia de la fuerza accionadora $\gamma/2\pi$ a la frecuencia de las vibraciones libres $\omega/2\pi$. Por intuición esperamos que, sobre una longitud de tiempo, seamos capaces de aumentar de manera sustancial las amplitudes de vibración. Para $\gamma = \omega$, definimos la solución como

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\gamma \to \omega} F_0 \frac{-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} \\ &= F_0 \lim_{\gamma \to \omega} \frac{\frac{d}{d\gamma}[-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t]}{\frac{d}{d\gamma}[\omega^3 - \omega\gamma^2]} \qquad \leftarrow \text{por la regla de L'Hôpital} \\ &= F_0 \lim_{\gamma \to \omega} \frac{-\operatorname{sen} \omega t + \omega t \cos \gamma t}{-2\omega\gamma} \end{aligned}$$

$$= \frac{F_0}{2\omega^2}(\text{sen } \omega t - \omega t \cos \omega t)$$

$$= \frac{F_0}{2\omega^2} \text{sen } \omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t. \tag{12}$$

Como se sospecha, cuando $t \to \infty$ estos desplazamientos se vuelven grandes; de hecho, $|x(t)| \to \infty$. El fenómeno que acabamos de describir se conoce como **resonancia pura**. La gráfica en la FIGURA 16.4.11 presenta el movimiento característico en este caso.

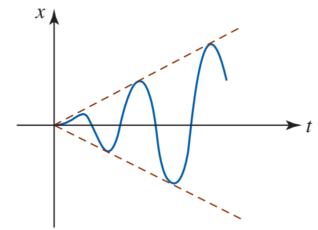


FIGURA 16.4.11 Resonancia pura

Debe notarse que no hay necesidad real de usar un proceso de límite en (11) para obtener la solución de $\gamma = \omega$. De modo alterno, (12) se deduce al resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \text{ sen } \omega t, \quad x(0) = 0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

directamente por métodos convencionales.

Análogo de circuito en serie En conclusión, examinamos otro sistema físico que puede modelarse mediante una ecuación diferencial lineal de segundo orden similar a la ecuación diferencial de un sistema masa-resorte forzado con amortiguamiento:

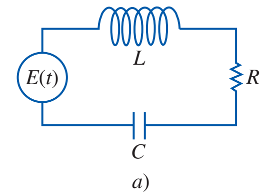
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t).$$

Si $i(t)$ denota la corriente en el **circuito eléctrico en serie *LRC*** que se muestra en la FIGURA 16.4.12*a*), entonces las caídas de voltaje en el inductor, resistor y capacitor son como se muestran en la figura 16.4.12*b*). Por la segunda ley de Kirchhoff, la suma de estos voltajes es igual al voltaje $E(t)$ ejercido sobre el circuito; esto es,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{13}$$

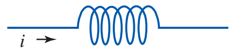
Puesto que la carga $q(t)$ sobre el capacitor se relaciona con la corriente $i(t)$ por $i = dq/dt$, (13) se convierte en la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{14}$$



a)

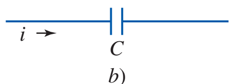
Inductor
Inductancia L: henrys (h)
caída de voltaje: $L\frac{di}{dt}$



Resistor
Resistencia R: ohms (Ω)
caída de voltaje: iR



Capacitor
Capacitancia C: farads (f)
caída de voltaje: $\frac{1}{C}q$



b)

FIGURA 16.4.12 Un circuito eléctrico en serie *LRC* con caídas de voltaje

Excepto por la interpretación de los símbolos utilizados en (10) y (14), no hay diferencia entre las matemáticas de los resortes vibrantes y los circuitos en serie simples. Incluso gran parte de la terminología es la misma. Si $E(t) = 0$, se dice que las vibraciones eléctricas del circuito son **libres**. Puesto que la ecuación auxiliar para (14) es $Lm^2 + Rm + 1/C = 0$, habrá tres formas de solución cuando $R \neq 0$, dependiendo del valor del discriminante $R^2 - 4L/C$. Afirmamos que el circuito es

	sobreamortiguado si	$R^2 - 4L/C > 0$,
	críticamente amortiguado si	$R^2 - 4L/C = 0$,
y	**sin amortiguamiento** si	$R^2 - 4L/C < 0$.

En cada uno de estos tres casos, la solución general de (14) contiene el factor $e^{-Rt/2L}$ y por ello la carga $q(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. En el caso sin amortiguamiento, cuando al menos la carga inicial o la corriente inicial no son cero, la carga en el capacitor oscila conforme decae. Esto es, el capacitor se carga y descarga cuando $t \to \infty$.

Recuerde que la corriente i es la derivada de la carga q, por lo que es lo mismo decir que una de las condiciones iniciales no es cero.

EJEMPLO 5 Un circuito en serie

Determine la carga $q(t)$ en el capacitor en un circuito en serie *LRC* cuando $L = 0.25$ henry (h), $R = 10$ ohms (Ω), $C = 0.001$ farad (f), $E(t) = 200 \text{ sen } 40t$ volts (V), $q(0) = 3$ coulombs (C) e $i(0) = 0$ amperes (A).

Solución Puesto que $1/C = 1\,000$, la ecuación (14) se vuelve

$$\tfrac{1}{4}q'' + 10q' + 1\,000q = 200 \text{ sen } 40t$$

o

$$q'' + 40q' + 4\,000q = 800 \text{ sen } 40t.$$

El circuito no tiene amortiguamiento debido a que las raíces de la ecuación auxiliar son números complejos $m_1 = -20 + 60i$ y $m_2 = -20 - 60i$. De tal modo, la función complementaria de la ecuación diferencial es $q_c(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 60t + c_2 \operatorname{sen} 60t)$. Para determinar una solución particular q_p empleamos coeficientes indeterminados y asumimos una solución de la forma $q_p = A \operatorname{sen} 40t + B \cos 40t$. Al sustituir esta expresión en la ecuación diferencial encontramos $A = \frac{3}{13}$ y $B = -\frac{2}{13}$. Así, la carga en el capacitor es

$$q(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 60t + c_2 \operatorname{sen} 60t) + \tfrac{3}{13} \operatorname{sen} 40t - \tfrac{2}{13} \cos 40t.$$

Aplicando las condiciones iniciales $q(0) = 3$ e $i(0) = q'(0) = 0$, obtenemos $c_1 = \frac{41}{13}$ y $c_2 = \frac{35}{39}$, de modo que

$$q(t) = e^{-20t}\left(\tfrac{41}{13} \cos 60t + \tfrac{35}{36} \operatorname{sen} 60t\right) + \tfrac{3}{13} \operatorname{sen} 40t - \tfrac{2}{13} \cos 40t.$$ ■

$\dfrac{d^2x}{dt^2}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

i) Las vibraciones acústicas pueden ser tan destructivas como las grandes vibraciones mecánicas. En comerciales de televisión, cantantes de jazz han causado la destrucción de una pequeña copa de vino. Los sonidos de los órganos y los flautines se sabe que agrietan vidrios de ventanas.

Entonces el pueblo gritó y los sacerdotes tocaron las trompetas; y sucedió que cuando el pueblo oyó el sonido de la trompeta el pueblo gritó a gran voz y la muralla se vino abajo… (*Josué* 6:20)

¿La potencia de la resonancia acústica provocó el derrumbe de la muralla de Jericó? Es la conjetura de algunos eruditos contemporáneos.

ii) El fenómeno de la resonancia no siempre es destructivo. Por ejemplo, es la resonancia de un circuito eléctrico lo que permite que un radio se sintonice en una estación específica.



Efecto de rompimiento por resonancia acústica

Ejercicios 16.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-48.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, enuncie en palabras una interpretación física del problema de valores iniciales indicado.

1. $\frac{4}{32}x'' + 3x = 0; \quad x(0) = -3, x'(0) = -2$
2. $\frac{1}{16}x'' + 4x = 0; \quad x(0) = 0.7, x'(0) = 0$
3. Una masa que pesa 8 lb unida a un resorte presenta movimiento armónico simple. Determine la ecuación de movimiento si la constante de resorte es 1 lb/pie y si la masa se suelta 6 pulg debajo de la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de $\frac{3}{2}$ pies/s.
4. Una masa que pesa 24 lb unida a un resorte presenta movimiento armónico simple. Cuando se pone en el resorte, la masa lo alarga 4 pulg. Determine la ecuación de movimiento si la masa se suelta desde el reposo en un punto a 3 pulg encima de la posición de equilibrio.
5. Una fuerza de 400 N alarga 2 m un resorte. Una masa de 50 kg unida al resorte presenta movimiento armónico simple. Determine la ecuación de movimiento si la masa se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 10 m/s.
6. Una masa que pesa 2 lb unida a un resorte exhibe movimiento armónico simple. En $t = 0$ la masa se suelta desde un punto a 8 pulg debajo de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de $\frac{4}{3}$ pies/s. Si la constante del resorte es $k = 4$ lb/pie, encuentre la ecuación de movimiento.

En los problemas 7 y 8, enuncie en palabras una interpretación física del problema de valores iniciales indicado.

7. $\frac{1}{16}x'' + 2x' + x = 0; \quad x(0) = 0, \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -1.5$
8. $\frac{16}{32}x'' + x' + 2x = 0; \quad x(0) = -2, x'(0) = 1$
9. Una masa que pesa 4 libras unida a un resorte exhibe movimiento amortiguado libre. La constante de resorte es 2 lb/pie y el medio ofrece una resistencia al movimiento de la masa numéricamente igual a la velocidad instantánea. Si la masa se suelta desde 1 pie arriba de la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 8 pies/s, determine el tiempo en que la masa pasa por la posición de equilibrio. Encuentre el tiempo en el cual la masa alcanza su desplazamiento máximo desde la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición de la masa en ese instante?
10. Una masa de 40 g alarga 10 cm un resorte. Un dispositivo de amortiguamiento imparte una resistencia al movimiento numéricamente igual a 560 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento libre si la masa se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 2 cm/s.

11. Después de que una masa con 10 lb de peso se une a un resorte de 5 pies, el resorte mide 7 pies. La masa se quita y se sustituye por otra masa que pesa 8 lb y después el sistema completo se pone en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea. Determine la ecuación de movimiento si la masa se suelta $\frac{1}{2}$ pie debajo de la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 1 pie/s.

12. Una masa que pesa 24 lb alarga un resorte 4 pies. El movimiento subsecuente ocurre en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a β ($\beta > 0$) veces la velocidad instantánea. Si la masa parte desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 2 pies/s, demuestre que si $\beta > 3\sqrt{2}$, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = \frac{-3}{\sqrt{\beta^2 - 18}} e^{-2\beta t/3} \operatorname{senh} \frac{2}{3}\sqrt{\beta^2 - 18}\, t.$$

13. Una masa que pesa 10 lb está unida a un resorte que lo alarga 2 pies. El sistema se pone después en movimiento en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a β ($\beta > 0$) veces la velocidad instantánea. Determine los valores de β de manera que el movimiento sea

***a*)** sobreamortiguado,
***b*)** críticamente amortiguado y
***c*)** sin amortiguamiento

14. Cuando una masa de 1 slug se une a un resorte lo alarga 2 pies y después queda en reposo en la posición de equilibrio. Empezando en $t = 0$, una fuerza externa igual a $f(t) = 8 \operatorname{sen} 4t$ se aplica al sistema. Encuentre la ecuación de movimiento si el medio circundante presenta una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a ocho veces la velocidad instantánea.

15. Resuelva el problema 14 cuando $f(t) = e^{-t} \operatorname{sen} 4t$. Analice los desplazamientos para $t \to \infty$.

16. Resuelva e interprete el problema de valores iniciales:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 5 \operatorname{sen} 3t, \quad x(0) = 2, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

17. Determine la carga en el capacitor de un circuito en serie *LRC* en $t = 0.01$ s cuando $L = 0.05$ h, $R = 2\Omega$, $C = 0.01$ f, $E(t) = 0$ V, $q(0) = 5$ C e $i(0) = 0$ A. Determine la primera vez en la cual la carga en el capacitor es igual a 0.

18. Encuentre la carga en el capacitor de un circuito en serie *LRC* cuando $L = \frac{1}{4}$ h, $R = 20\Omega$, $C = \frac{1}{300}$ f, $E(t) = 0$ V, $q(0) = 4$ C e $i(0) = 0$ A. ¿La carga en el capacitor alguna vez es igual a cero?

En los problemas 19 y 20, encuentre la carga en el capacitor y la corriente del circuito en serie *LRC* dado. Determine la carga máxima en el capacitor.

19. $L = \frac{5}{3}$ h, $R = 10\ \Omega$, $C = \frac{1}{30}$ f, $E(t) = 300$ V, $q(0) = 0$ C, $i(0) = 0$ A

20. $L = 1$ h, $R = 100\Omega$, $C = 0.0004$ f, $E(t) = 30$ V, $q(0) = 0$ C, $i(0) = 2$ A

Proyectos

21. Pulsos Cuando la frecuencia de una fuerza periódica impartida es exactamente la misma que la frecuencia de una vibración sin amortiguamiento libre, entonces un sistema de masa-resorte se encuentra en el estado de resonancia pura. En este estado, los desplazamientos de la masa crecen sin límite cuando $t \to \infty$. Pero cuando la frecuencia $\gamma/2\pi$ de una función impulsora periódica es cercana a la frecuencia $\omega/2\pi$ de vibraciones libres, la masa experimenta oscilaciones complicadas pero no acotadas que se conocen como **pulsos**.

***a*)** Para examinar este fenómeno, emplee coeficientes indeterminados para demostrar que la solución del problema de valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

es $$x(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}(\cos \gamma t - \cos \omega t), \quad \gamma \neq \omega.$$

***b*)** Suponga que $\omega = 2$ y $F_0 = \frac{1}{2}$. Utilice un medio de graficación para, en ejes de coordenadas independientes, graficar curvas de solución que correspondan a $\gamma = 1$, $\gamma = 1.5$, $\gamma = 1.75$ y $\gamma = 1.9$. Emplee $0 \le t \le 60$ y $-3 \le x \le 3$.

***c*)** Utilice una identidad trigonométrica para demostrar que la solución en el inciso *a*) puede escribirse como el producto

$$x(t) = \frac{2F_0}{\gamma^2 - \omega^2} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\gamma - \omega)t \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\gamma + \omega)t, \quad \gamma \neq \omega.$$

***d*)** Si $\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma - \omega)$, demuestre que cuando ε es pequeña, la solución en el inciso *c*) es aproximadamente

$$x(t) = \frac{F_0}{2\varepsilon\gamma} \operatorname{sen} \varepsilon t \operatorname{sen} \gamma t.$$

***e*)** Utilice una herramienta de graficación para representar la función en el inciso *d*) con $\omega = 2$, $F_0 = \frac{1}{2}$, y $\gamma = 1.75$. Grafique después $\pm(F_0/2\varepsilon\gamma) \operatorname{sen} \varepsilon t$ en el mismo conjunto de ejes de coordenadas. Las gráficas de $\pm(F_0/2\varepsilon\gamma) \operatorname{sen} \varepsilon t$ reciben el nombre de *envolvente* de la gráfica de $x(t)$. Compare la gráfica de $x(t)$ que se obtuvo de esa manera con la tercera gráfica del inciso *b*).

16.5 Soluciones en series de potencias

Introducción Algunas ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con *coeficientes variables* pueden resolverse utilizando series de potencias. El procedimiento consiste en suponer una solución de la forma

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

diferenciando

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1}, \tag{1}$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3x + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2}, \tag{2}$$

y sustituyendo los resultados en la ecuación diferencial con la expectativa de determinar una relación de recurrencia que producirá los coeficientes c_n. Para hacer lo anterior es importante que usted se vuelva experto en la simplificación de la suma de dos o más series de potencias, cada serie expresada en notación sigma, a una expresión con una sola Σ. Como ilustra el siguiente ejemplo, la combinación de dos o más sumatorias como una sola sumatoria a menudo requiere una reindización, esto es, un corrimiento en el índice de la sumatoria. Para sumar dos series escritas en notación sigma es necesario que

- ambos índices de la sumatoria inicien con el mismo número y
- las potencias de x en cada serie estén en "fase", esto es, si una serie empieza con, digamos, x como la primera potencia, entonces deseamos que la otra serie empiece con la misma potencia.

EJEMPLO 1 Solución en series de potencia de una ecuación diferencial

Encuentre una solución en serie de potencias de $y'' - 2xy = 0$.

Solución Al sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ en la ecuación diferencial y utilizar (2) tenemos

$$\begin{aligned} y'' - 2xy &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_nx^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

En cada serie sustituimos ahora k por el exponente en x. En la primera serie usamos $k = n - 2$, y en la segunda serie, $k = n + 1$. De tal modo,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n\overset{\substack{k = n-2\\ \downarrow}}{x^{n-2}} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n\overset{\substack{k = n+1\\ \downarrow}}{x^{n+1}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}}_{\substack{\uparrow\\ \text{cuando } n=2,\ k=0}} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}}_{\substack{\uparrow\\ \text{cuando } n=0,\ k=1}} 2c_{k-1}x^k.$$

Puesto que ambas series empiezan con $k = 1$, escribimos el primer término de la primera serie fuera de la notación de sigma y después combinamos las dos series:

$$\begin{aligned} y'' - 2xy &= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}x^k \\ &= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2c_{k-1}]x^k = 0. \end{aligned}$$

Los coeficientes correspondientes de series de potencias iguales son ellos mismos iguales.

Puesto que la última igualdad es una identidad, el coeficiente de cada potencia de x debe ser cero. Esto es,

$$2c_2 = 0 \quad \text{y} \quad (k+2)(k+1)c_{k+2} - 2c_{k-1} = 0. \tag{3}$$

Como $(k+1)(k+2) \neq 0$ para todos los valores de k, podemos resolver (3) para c_{k+2} en términos de c_{k-1}:

$$c_{k+2} = \frac{2c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4}$$

Ahora $2c_2 = 0$ indica evidentemente que $c_2 = 0$. Pero la expresión en (4), denominada **relación de recurrencia**, determina las restantes c_k de manera tal que podemos elegir cierto subconjunto

de estos coeficientes que sean *distintos de cero*. Dejando que k tome los enteros sucesivos indicados, (4) genera coeficientes consecutivos de la solución supuesta uno a la vez:

$$c_3 = \frac{2c_0}{3 \cdot 2}$$

$$c_4 = \frac{2c_1}{4 \cdot 3}$$

$$c_5 = \frac{2c_2}{5 \cdot 4} = 0 \qquad \leftarrow c_2 = 0$$

$$c_6 = \frac{2c_3}{6 \cdot 5} = \frac{2^2}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} c_0$$

$$c_7 = \frac{2c_4}{7 \cdot 6} = \frac{2^2}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} c_1$$

$$c_8 = \frac{2c_5}{8 \cdot 7} = 0 \qquad \leftarrow c_5 = 0$$

$$c_9 = \frac{2c_6}{9 \cdot 8} = \frac{2^3}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} c_0$$

$$c_{10} = \frac{2c_7}{10 \cdot 9} = \frac{2^3}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} c_1$$

$$c_{11} = \frac{2c_8}{11 \cdot 10} = 0, \qquad \leftarrow c_8 = 0$$

y así sucesivamente. Debe ser claro que tanto c_0 como c_1 son arbitrarios. En este caso,

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + c_8x^8 \\ &\quad + c_9x^9 + c_{10}x^{10} + c_{11}x^{11} + \cdots \\ &= c_0 + c_1x + 0 + \frac{2}{3 \cdot 2}c_0x^3 + \frac{2}{4 \cdot 3}c_1x^4 + 0 + \frac{2^2}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}c_0x^6 \\ &\quad + \frac{2^2}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}c_1x^7 + 0 + \frac{2^3}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}c_0x^9 \\ &\quad + \frac{2^3}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}c_1x^{10} + 0 + \cdots \\ &= c_0\left[1 + \frac{2}{3 \cdot 2}x^3 + \frac{2^2}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}x^6 + \frac{2^3}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}x^9 + \cdots\right] \\ &\quad + c_1\left[x + \frac{2}{4 \cdot 3}x^4 + \frac{2^2}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}x^7 + \frac{2^3}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}x^{10} + \cdots\right] \\ &= c_0y_1(x) + c_1y_2(x). \end{aligned}$$

■

Una serie de potencias representará una solución de la ecuación diferencial en algún intervalo de convergencia. Puesto que el patrón de coeficientes en el ejemplo 1 es claro, podemos escribir la solución en términos de notación de sumatoria. Utilizando las propiedades del factorial tenemos

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k[1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)]}{(3k)!}x^{3k} \tag{5}$$

y

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k[2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)]}{(3k+1)!}x^{3k+1}. \tag{6}$$

La prueba del cociente puede utilizarse en las formas (5) y (6) para demostrar que cada serie converge sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 2 Solución en series de potencias de una ecuación diferencial

Encuentre la solución en serie de potencias de $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$.

Solución La suposición $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ conduce a

$$(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n}_{k=n} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}}_{k=n-2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n}_{k=n} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{k=n}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$= 2\cdot 1c_2 + 3\cdot 2c_3 x + c_1 x - c_0 - c_1 x$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} + kc_k - c_k]x^k$$

$$= 2c_2 - c_0 + 6c_3 x$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty}[(k+1)(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2}]x^k = 0.$$

Por tanto, debemos tener

$$2c_2 - c_0 = 0$$

$$c_3 = 0$$

$$(k+1)(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} = 0.$$

Las ecuaciones anteriores producen $c_2 = \frac{1}{2}c_0$, $c_3 = 0$, así como la relación de recurrencia

$$c_{k+2} = -\frac{k-1}{k+2}c_k, \quad k = 2, 3, 4, \ \ldots.$$

Dejando que k tome los valores 2, 3, 4, . . . la última fórmula produce

$$c_4 = -\frac{1}{4}c_2 = -\frac{1}{2\cdot 4}c_0 = -\frac{1}{2^2 2!}c_0 \qquad \leftarrow c_2 = \frac{1}{2}c_0$$

$$c_5 = -\frac{2}{5}c_3 = 0 \qquad \leftarrow c_3 = 0$$

$$c_6 = -\frac{3}{6}c_4 = \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}c_0 = \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}c_0$$

$$c_7 = -\frac{4}{7}c_5 = 0 \qquad \leftarrow c_5 = 0$$

$$c_8 = -\frac{5}{8}c_6 = -\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}c_0 = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}c_0$$

$$c_9 = -\frac{6}{9}c_7 = 0 \qquad \leftarrow c_7 = 0$$

$$c_{10} = -\frac{7}{10}c_8 = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}c_0 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5 5!}c_0,$$

y así sucesivamente. De tal modo,

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + c_8 x^8 + \cdots$$

$$= c_1 x + c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2^2 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}x^6 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}x^8 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5 5!}x^{10} + \cdots\right]$$

$$= c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x).$$

Dos soluciones de la ecuación diferencial son

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^{2n}$$

y $$y_2(x) = x.$$ 

Ejercicios 16.5 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-48.

Fundamentos

En los problemas 1-18, encuentre soluciones en series de potencias de la ecuación diferencial dada.

1. $y'' + y = 0$
2. $y'' - y = 0$
3. $y'' = y'$
4. $2y'' + y' = 0$
5. $y'' = xy$
6. $y'' + x^2y = 0$
7. $y'' - 2xy' + y = 0$
8. $y'' - xy' + 2y = 0$
9. $y'' + x^2y' + xy = 0$
10. $y'' + 2xy' + 2y = 0$
11. $(x - 1)y'' + y' = 0$
12. $(x + 2)y'' + xy' - y = 0$
13. $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$
14. $(x^2 + 1)y'' - 6y = 0$
15. $(x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$
16. $(x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$
17. $y'' - (x + 1)y' - y = 0$
18. $y'' - xy' - (x + 2)y = 0$

En los problemas 19 y 20, utilice el método de series de potencias para resolver la ecuación diferencial dada sujeta a las condiciones iniciales que se indican.

19. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0; \quad y(0) = -2, y'(0) = 6$
20. $y'' - 2xy' + 8y = 0; \quad y(0) = 3, y'(0) = 0$

Revisión del capítulo 16

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-49.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-8, indique si el enunciado dado es verdadero (V) o falso (F).

1. Si y_1 es una solución de $ay'' + by' + cy = 0$, a, b, c constantes, entonces C_1y_1 también es una solución para todo número real C_1. _____

2. Una solución general de $y'' - y = 0$ es $y = C_1 \cosh x + C_1 \operatorname{senh} x$. _____

3. $y_1 = e^x$ y $y_2 = 0$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $y'' - y' = 0$. _____

4. La ecuación diferencial $y'' - y' = 10$ posee una solución particular constante $y_p = A$. _____

5. La ecuación diferencial $y'' - y' = 0$ posee un número infinito de soluciones constantes. _____

6. La ecuación diferencial de primer orden $2xy\,dx = (x^2 - e^{-y})\,dy$ es exacta. _____

7. El movimiento sin amortiguamiento y no forzado de una masa en un resorte recibe el nombre de movimiento armónico simple. _____

8. La resonancia pura no puede ocurrir cuando hay amortiguamiento. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-5, llene los espacios en blanco.

1. Una solución del problema de valores iniciales $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ es __________.

2. Una solución del problema de valores en la frontera $y'' - y' = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$ es __________.

3. Si una masa que pesa 10 lb alarga 2.5 pies un resorte, entonces una masa que pese 32 lb alargará el mismo resorte __________ pies.

4. Si la ecuación auxiliar $am^2 + bm + c = 0$ para una ecuación diferencial homogénea de segundo orden posee las soluciones $m_1 = m_2 = -7$, entonces la solución general de la ecuación diferencial es __________.

5. Sin resolver, la forma de una solución particular de $y'' + 6y' + 9y = 5x^2 - 3xe^{2x}$ es $y_p =$ __________.

C. Ejercicios

En los problemas 1 y 2, determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si lo es, resuélvala.

1. $2x \cos y^3\,dx = (1 + 3x^2y^2 \operatorname{sen} y^3)\,dy$
2. $(3x^2 + 2y^3)\,dx + y^2(6x + 1)\,dy = 0$

En los problemas 3 y 4, resuelva el problema de valores iniciales dado.

3. $\frac{1}{2}xy^{-4}\,dx + (3y^{-3} - x^2y^{-5})\,dy = 0,\ y(1) = 1$

4. $(y^2 + y \operatorname{sen} x)\,dx + \left(2xy - \cos x - \dfrac{1}{1 + y^2}\right)dy = 0,\ y(0) = 1$

En los problemas 5-10, encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada.

5. $y'' - 2y' - 2y = 0$ **6.** $y'' - 8y = 0$ **7.** $y'' - 3y' - 10y = 0$

8. $4y'' + 20y' + 25y = 0$ **9.** $9y'' + y = 0$ **10.** $2y'' - 5y' = 0$

En los problemas 11 y 12, resuelva el problema de valores iniciales.

11. $y'' + 36y = 0,\ y(\pi/2) = 24,\ y'(\pi/2) = -18$

12. $y'' + 4y' + 4y = 0,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0$

En los problemas 13 y 14, resuelva cada ecuación diferencial por el método de coeficientes indeterminados.

13. $y'' - y' - 12y = (x + 1)e^{2x}$ **14.** $y'' + 4y = 16x^2$

En los problemas 15 y 16, resuelva cada ecuación diferencial por el método de variación de parámetros.

15. $y'' - 2y' + 2y = e^x \tan x$ **16.** $y'' - y = 2e^x/(e^x + e^{-x})$

En los problemas 17 y 18, resuelva el problema de valores iniciales dado.

17. $y'' + y = \sec^3 x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = \frac{1}{2}$ **18.** $y'' + 2y' + 2y = 1,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

En los problemas 19 y 20, encuentre soluciones en series de potencias de la ecuación diferencial dada.

19. $y'' + xy = 0$ **20.** $(x - 1)y'' + 3y = 0$

21. Un resorte con constante $k = 2$ está suspendido en un líquido que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a cuatro veces la velocidad instantánea. Si una masa m se suspende del resorte, determine el valor de m para el cual el movimiento libre subsecuente sea no oscilatorio.

22. Determine una solución particular para $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dx}{dt} + \omega^2 x = A$, donde A es una fuerza constante.

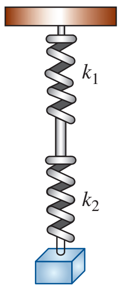


FIGURA 16.R.1 Resortes unidos del problema 24

23. Una masa que pesa 4 lb se suspende de un resorte cuya constante es 3 lb/pie. El sistema completo se sumerge en un fluido que presenta una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a la velocidad instantánea. Empezando en $t = 0$, una fuerza externa igual a $f(t) = e^{-t}$ se ejerce sobre el sistema. Determine la ecuación de movimiento si la masa se suelta desde el reposo en un punto 2 pies por debajo de la posición de equilibrio.

24. Una masa que pesa W lb estira $\frac{1}{2}$ pie un resorte y estira $\frac{1}{4}$ pie un resorte diferente. Si los dos resortes se unen en serie, la constante de resorte efectiva k del sistema está dada por $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$. Después la masa se une al doble resorte, como se muestra en la FIGURA 16.R.1. Suponga que el movimiento es libre y que no está presente una fuerza de amortiguamiento.

a) Determine la ecuación de movimiento si la masa se suelta en un punto a 1 pie debajo de la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de $\frac{2}{3}$ pie/s.

b) Demuestre que la velocidad máxima de la masa es $\frac{2}{3}\sqrt{3g + 1}$.

25. El movimiento vertical de una masa unida a un resorte se describe mediante el problema de valores iniciales

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad x(0) = 4,\ x'(0) = 2.$$

Determine el máximo desplazamiento vertical.

Apéndice

Demostraciones de teoremas seleccionados

Sección 2.2

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.1*i*): Sea $\varepsilon > 0$ dada. Para demostrar *i*) debemos encontrar $\delta > 0$ de modo que

$$|c - c| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta.$$

Puesto que $|c - c| = 0$, lo anterior equivale a

$$\varepsilon > 0 \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta.$$

La última afirmación siempre es verdadera para cualquier elección de $\delta > 0$. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.3*i*): Sea $\varepsilon > 0$ dada. Para demostrar *i*) debemos encontrar $\delta > 0$ para que

$$|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta.$$

Puesto que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, sabemos que existen los números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ para los cuales

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1, \tag{1}$$

y

$$|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2. \tag{2}$$

Ahora, si se elige δ como el número más pequeño en el conjunto de los números positivos $\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces *tanto* (1) *como* (2) se mantienen, por lo que

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - L_1 - L_2| &= |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \\ &\le |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

cuando $0 < |x - a| < \delta$. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.3*ii*): Por medio de la desigualdad del triángulo.

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - L_1L_2| &= |f(x)g(x) - f(x)L_2 + f(x)L_2 - L_1L_2| \\ &\le |f(x)g(x) - f(x)L_2| + |f(x)L_2 - L_1L_2| \\ &= |f(x)||g(x) - L_2| + |L_2||f(x) - L_1| \\ &\le |f(x)||g(x) - L_2| + (1 + |L_2|)|f(x) - L_1|. \end{aligned} \tag{3}$$

Puesto que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, se sabe que existen números $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ tales que $|f(x) - L_1| < 1$ o

$$|f(x)| < 1 + |L_1| \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1, \tag{4}$$

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon/2}{1 + |L_2|} \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2, \tag{5}$$

y

$$|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon/2}{1 + |L_1|} \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta_3. \tag{6}$$

En consecuencia, si se selecciona δ como el número más pequeño en el conjunto de números positivos $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, entonces de (3), (4), (5) y (6) se tiene,

$$|f(x)g(x) - L_1L_2| < (1 + |L_1|) \cdot \frac{\varepsilon/2}{1 + |L_1|} + (1 + |L_2|) \cdot \frac{\varepsilon/2}{1 + |L_2|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad ■$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.3*iii*): Primero demostraremos que

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$$

Considere

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| = \frac{|g(x) - L_2|}{|L_2||g(x)|}. \tag{7}$$

Puesto que $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, entonces existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{2} \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Para estos valores de x, la desigualdad

$$|L_2| = |g(x) - (g(x) - L_2)| \leq |g(x)| + |g(x) - L_2| < |g(x)| + \frac{|L_2|}{2}$$

resulta en

$$|g(x)| > \frac{|L_2|}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|L_2|}.$$

Por tanto, de (7),

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| < \frac{2}{|L_2|^2}|g(x) - L_2|. \tag{8}$$

Ahora para $\varepsilon > 0$ existe una $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|^2}{2}\varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Al elegir δ como el número más pequeño en el conjunto de los números positivos $\{\delta_1, \delta_2\}$, se sigue de (8) que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta.$$

Se concluye la demostración aplicando el teorema 2.2.3*ii*):

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} \cdot f(x) = \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{x \to a} f(x) = \frac{L_1}{L_2}. \quad ■$$

Sección 2.3

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.3.3: Para demostrar el teorema primero tiene que encontrarse una $\delta > 0$ tal que

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta.$$

Para tal propósito, primero consideramos que f es continua en L, en otras palabras, $\lim_{u \to L} f(u) = f(L)$. Lo anterior significa que para una $\varepsilon > 0$ dada, existen una $\delta_1 > 0$ de tal modo que

$$|f(u) - f(L)| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad |u - L| < \delta_1.$$

Ahora si $u = g(x)$, entonces lo anterior es

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad |g(x) - L| < \delta_1.$$

También de la suposición de que $\lim_{x \to a} g(x) = L$, sabemos que existe una $\delta > 0$ de manera que

$$|g(x) - L| < \delta_1 \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta.$$

Ahora combinamos los últimos dos resultados. Esto es, siempre que $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - L| < \delta_1$; pero cuando $|g(x) - L| < \delta_1$, entonces necesariamente $|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$. ■

Sección 2.4

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.4.1: Se asume que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene al número a (con la posible excepción de a mismo) y donde $\lim_{x \to a} g(x) = L$ y $\lim_{x \to a} h(x) = L$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen los números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$ y $|h(x) - L| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - a| < \delta_2$. Esto es,

$$\begin{aligned} L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \qquad &\text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1 \\ L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \qquad &\text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2. \end{aligned}$$

También es necesario que exista $\delta_3 > 0$ tal que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta_3.$$

Si se considera δ el número más pequeño en el conjunto de los números positivos $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, entonces para $0 < |x - a| < \delta$ se tiene

$$L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

o de manera equivalente $|f(x) - L| < \varepsilon$. Lo cual significa que $\lim_{x \to a} f(x) = L$. ■

Sección 9.10

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 9.10.2 Sea x un número fijo en el intervalo $(a - r, a + r)$ y considere que la diferencia entre $f(x)$ y el grado n-ésimo del polinomio de Taylor de f en a se denota por medio de

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Para cualquier t en el intervalo $[a, x]$ definimos

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n - \frac{R_n(x)}{(x - a)^{n+1}}(x - t)^{n+1}. \qquad (9)$$

Manteniendo x constante se diferencia F con respecto a t utilizando las reglas de producto y potencia:

$$\begin{aligned} F'(t) = -f'(t) &+ \left[f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x - t)\right] + \left[\frac{f''(t)}{1!}(x - t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2\right] + \cdots \\ &+ \left[\frac{f^{(n)}(t)}{(n - 1)!}(x - t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n\right] + \frac{R_n(x)(n + 1)}{(x - a)^{n+1}}(x - t)^n, \end{aligned}$$

para toda t en el intervalo abierto (a, x). Puesto que la última suma es telescópica, obtenemos

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + \frac{R_n(x)(n + 1)}{(x - a)^{n+1}}(x - t)^n. \qquad (10)$$

Ahora es evidente de (9) que F es continua en $[a, x]$ y que

$$F(x) = f(x) - f(x) - 0 - \cdots - 0 = 0.$$

Adicionalmente, $$F(a) = f(x) - P_n(x) - R_n(x) = 0.$$

Por tanto, $F(t)$ satisface la hipótesis del teorema de Rolle (teorema 4.4.1) en $[a, x]$ y por ello existe un número c entre a y x para el cual $F'(c) = 0$. De (10) se obtiene

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}.$$ ■

Repaso de álgebra

Enteros

$\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Enteros positivos (números naturales)

$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Enteros no negativos (números enteros)

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Números racionales

Un número racional es un número en la forma p/q, donde p y $q \neq 0$ son enteros.

Números irracionales

Un número irracional es un número que no puede escribirse en la forma p/q, donde p y $q \neq 0$ son enteros.

Números reales

El conjunto R de números reales es la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales.

Leyes de exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad a^0 = 1, a \neq 0$$

Exponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \ n > 0$$

Radical

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \ n > 0$ un entero

Exponentes racionales y radicales

$$a^{m/n} = \left(a^m\right)^{1/n} = \left(a^{1/n}\right)^m$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Fórmula cuadrática

Las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Expansiones binomiales

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Triángulo de Pascal

Los coeficientes en la expansión de $(a + b)^n$ siguen el patrón:

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
        ⋮
```

Cada número en el interior de este arreglo es la suma de los dos números directamente arriba del mismo:

```
   1    4    6    4    1
    ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙
1    5   10   10    5    1
```

El último renglón son los coeficientes en la expansión de $(a + b)^5$.

Fórmulas de factorización

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

Definición del valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ es no negativo } (a \geq 0) \\ -a & \text{si } a \text{ es negativo } (a < 0) \end{cases}$$

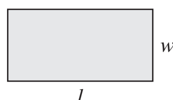
Propiedades de desigualdades

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
Si $a < b$, entonces $ac < bc$ para $c > 0$.
Si $a < b$, entonces $ac > bc$ para $c < 0$.

Fórmulas de geometría

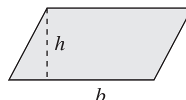
Área A, circunferencia C, volumen V, área superficial S

RECTÁNGULO



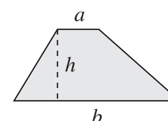
$A = lw, \quad C = 2l + 2w$

PARALELOGRAMO



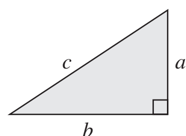
$A = bh$

TRAPEZOIDE



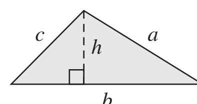
$A = \frac{1}{2}(a + b)h$

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



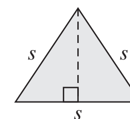
Teorema de Pitágoras:
$c^2 = a^2 + b^2$

TRIÁNGULO



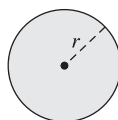
$A = \frac{1}{2}bh, \quad C = a + b + c$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO



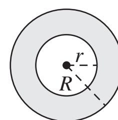
$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s, \quad A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$

CÍRCULO



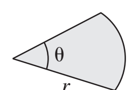
$A = \pi r^2, \quad C = 2\pi r$

ANILLO CIRCULAR



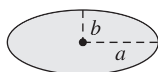
$A = \pi(R^2 - r^2)$

SECTOR CIRCULAR



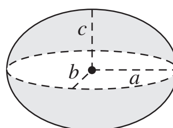
$A = \frac{1}{2}r^2\theta, \quad s = r\theta$

ELIPSE



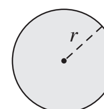
$A = \pi ab$

ELIPSOIDE

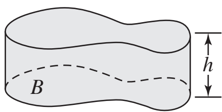
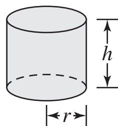
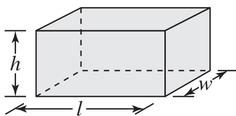


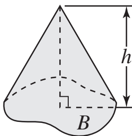
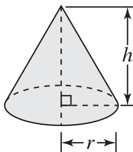
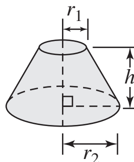
$V = \frac{4}{3}\pi abc$

ESFERA



$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad S = 4\pi r^2$

CILINDRO RECTO	CILINDRO CIRCULAR RECTO	PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR
		
$V = Bh$, B, área de la base	$V = \pi r^2 h$, $S = 2\pi r h$ (lado lateral)	$V = lwh$, $S = 2(hl + lw + hw)$

CONO	CONO CIRCULAR RECTO	FRUSTO DE UN CONO
		
$V = \frac{1}{3}Bh$, B, área de la base	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$	$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

Gráficas y funciones

Para encontrar intersecciones

intersecciones y: Sea $x = 0$ en la ecuación y resolvemos para y

intersecciones x: Sea $y = 0$ en la ecuación y resolvemos para x

Funciones de polinomios

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo.

Función lineal

$$f(x) = ax + b, a \neq 0$$

La gráfica de una función lineal es una recta.

Formas de ecuaciones de rectas:

Punto pendiente: $y - x_0 = m(x - x_0)$,
Pendiente ordenada al origen: $y = mx + b$,

donde m es la pendiente.

Función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

La gráfica de una función cuadrática es una parábola.

Vértice (h, k) de una parábola

Complete el cuadrado en x para $f(x) = ax^2 + bx + c$ para obtener $f(x) = a(x - h)^2 + k$. De manera alterna, calcule las coordenadas

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

Funciones par e impar

Par: $f(-x) = f(x)$; simetría de la gráfica: el eje y
Impar: $f(-x) = -f(x)$; simetría de la gráfica: el origen

Transformaciones rígidas

La gráfica de $y = f(x)$ para $c > 0$:

$y = f(x) + c$, desplazada hacia arriba c unidades
$y = f(x) - c$, desplazada hacia abajo c unidades
$y = f(x + c)$, desplazada hacia la izquierda c unidades
$y = f(x - c)$, desplazada hacia la derecha c unidades
$y = f(-x)$, reflexión sobre el eje y
$y = -f(x)$, reflexión sobre el eje x

Función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales.

Asíntotas

Si las funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ no tienen ningún factor en común, entonces la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

tiene una

Asíntota vertical:

$x = a$ cuando $q(a) = 0$,

Asíntota horizontal:

$y = a_n/b_m$ cuando $n = m$ y $y = 0$ cuando $n < m$,

Asíntota oblicua:

$y = ax + b$ cuando $n = m + 1$.

La gráfica no tiene una asíntota horizontal cuando $n > m$. Una asíntota oblicua se encuentra mediante una división.

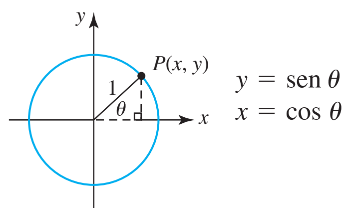
Función potencia

$$f(x) = x^n,$$

donde n es cualquier número real.

Revisión de trigonometría

Definición de seno y coseno de acuerdo con el círculo unitario



$y = \operatorname{sen}\theta$

$x = \cos\theta$

Otras funciones trigonométricas

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

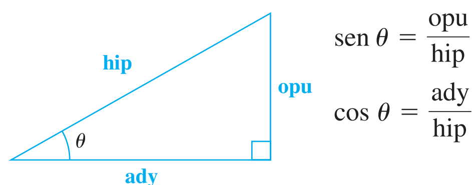
$$\sec\theta = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

Fórmulas de conversión

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180}\text{ radianes}$$

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi}\text{ grados}$$

Definición de seno y coseno de acuerdo con el triángulo recto



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opu}}{\text{hip}}$$

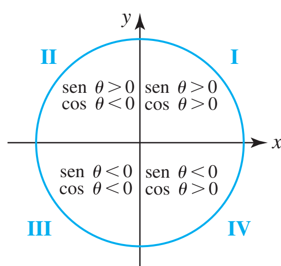
$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$$

Otras funciones trigonométricas

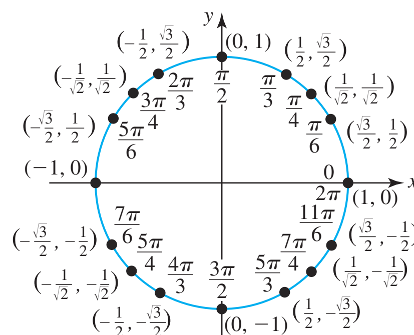
$$\tan\theta = \frac{\text{opu}}{\text{ady}}, \quad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{opu}}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}, \quad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{opu}}$$

Signos de seno y coseno



Valores de seno y coseno para ángulos especiales



Límites para las funciones seno y coseno

$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1 \quad \text{y} \quad -1 \le \cos x \le 1$

Periodicidad de las funciones trigonométricas

$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$

$\sec(x + 2\pi) = \sec x, \quad \csc(x + 2\pi) = \csc x$

$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad \cot(x + \pi) = \cot x$

Identidades de cofunción

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

Identidades pitagóricas

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Identidades par/impar

Par	Impar
$\cos(-x) = \cos x$	$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\csc(-x) = -\csc x$
	$\tan(-x) = -\tan x$
	$\cot(-x) = -\cot x$

Fórmulas de suma

$$\operatorname{sen}(x_1 + x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$$

Fórmulas de diferencia

$$\operatorname{sen}(x_1 - x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\tan(x_1 - x_2) = \frac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \tan x_2}$$

Fórmulas del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Fórmulas alternas del ángulo doble para coseno

$$\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

Fórmulas del medio ángulo como se usa en cálculo

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Leyes de los senos

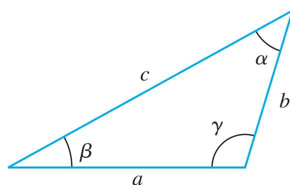
$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

Leyes de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



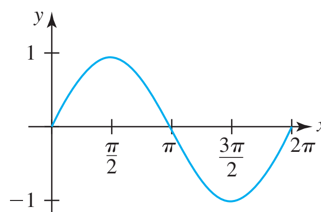
Funciones trigonométricas inversas

$y = \operatorname{sen}^{-1} x$ si y sólo si $x = \operatorname{sen} y$, $\quad -\pi/2 \le y \le \pi/2$

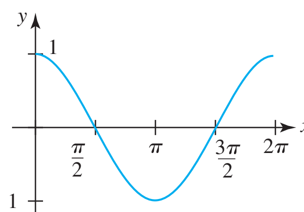
$y = \cos^{-1} x$ si y sólo si $x = \cos y$, $\quad 0 \le y \le \pi$

$y = \tan^{-1} x$ si y sólo si $x = \tan y$, $\quad -\pi/2 < y < \pi/2$

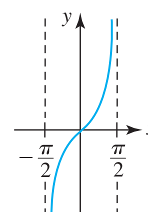
Ciclos para seno, coseno y tangente



seno



coseno



tangente

Funciones exponencial y logarítmica

El número *e*

$e = 2.718281828459...$

Definiciones del número *e*

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$e = \lim_{h\to 0}(1 + h)^{1/h}$$

Función exponencial

$f(x) = b^x,\ b > 0, b \neq 1$

Función exponencial natural

$f(x) = e^x$

Función logarítmica

$f(x) = \log_b x, \quad x > 0$

donde $y = \log_b x$ es equivalente a $x = b^y$

Función logarítmica natural

$f(x) = \log_e x = \ln x, \quad x > 0$

donde $y = \ln x$ es equivalente a $x = e^y$

Leyes de logaritmos

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

$$\log_b M^c = c\log_b M$$

Propiedades de logaritmos

$\log_b b = 1, \qquad \log_b 1 = 0$

$\log_b b^x = x, \qquad b^{\log_b x} = x$

Cambio de la base *b* a la base *e*

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

Funciones hiperbólicas inversas como logaritmos

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \ x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \ |x| < 1$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right), \ |x| > 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \ 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), \ x \neq 0$$

Identidades par/impar

Par	**Impar**
$\cosh(-x) = \cosh x$	$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$

Identidades adicionales

$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

$\operatorname{senh}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{senh} x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \operatorname{senh} x_2$

$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \operatorname{senh} x_1 \operatorname{senh} x_2$

$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

$\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}(-1 + \cosh 2x)$

$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$

Diferenciación

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Reglas

1. Constante: $\frac{d}{dx}c = 0$

2. Múltiplo constante: $\frac{d}{dx}cf(x) = cf'(x)$

3. Suma: $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$

4. Producto: $\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

5. Cociente: $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

6. Cadena: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

7. Potencia: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

8. Potencia: $\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$

Funciones

Trigonométricas:

9. $\frac{d}{dx}\text{sen } x = \cos x$

10. $\frac{d}{dx}\cos x = -\text{sen } x$

11. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

12. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

13. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

14. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

Trigonométricas inversas:

15. $\frac{d}{dx}\text{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

16. $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

17. $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}$

18. $\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\frac{1}{1 + x^2}$

19. $\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

20. $\frac{d}{dx}\csc^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

Hiperbólicas:

21. $\frac{d}{dx}\text{senh } x = \cosh x$

22. $\frac{d}{dx}\cosh x = \text{senh } x$

23. $\frac{d}{dx}\tanh x = \text{sech}^2 x$

24. $\frac{d}{dx}\coth x = -\text{csch}^2 x$

25. $\frac{d}{dx}\text{sech } x = -\text{sech } x \tanh x$

26. $\frac{d}{dx}\text{csch } x = -\text{csch } x \coth x$

Hiperbólicas inversas:

27. $\frac{d}{dx}\text{senh}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

28. $\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

29. $\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}$

30. $\frac{d}{dx}\coth^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}$

31. $\frac{d}{dx}\text{sech}^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

32. $\frac{d}{dx}\text{csch}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$

Exponenciales:

33. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

34. $\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$

Logarítmicas:

35. $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$

36. $\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{x(\ln b)}$

Fórmulas de integración

Formas básicas

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C,\ n \neq -1$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int e^u\,du = e^u + C$

5. $\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$

6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

13. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

17. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

18. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

19. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

Formas que implican $\sqrt{a^2 + u^2}$

21. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

22. $\int u^2\sqrt{a^2 + u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2 + 2u^2)\sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$

23. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

24. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

25. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$

26. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

27. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u}\right| + C$

28. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2u} + C$

29. $\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 + u^2}} + C$

Formas que implican $\sqrt{a^2 - u^2}$

30. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

31. $\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

32. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

33. $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

34. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

35. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

36. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2u}\sqrt{a^2 - u^2} + C$

37. $\displaystyle\int (a^2 - u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

38. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

Formas que implican $\sqrt{u^2 - a^2}$

39. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 - a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

40. $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

41. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 - a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{u} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

44. $\displaystyle\int \frac{u^2du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

45. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2u} + C$

46. $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2 - a^2}} + C$

Formas que implican $a + bu$

47. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a + bu} = \frac{1}{b^2}(a + bu - a\ln|a + bu|) + C$

48. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a + bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a + bu)^2 - 4a(a + bu) + 2a^2\ln|a + bu|\right] + C$

49. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a + bu}\right| + C$

50. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a + bu}{u}\right| + C$

51. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a + bu)^2} = \frac{a}{b^2(a + bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a + bu| + C$

52. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a + bu)^2} = \frac{1}{a(a + bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a + bu}{u}\right| + C$

53. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a + bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a\ln|a + bu|\right) + C$

54. $\displaystyle\int u\sqrt{a + bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu - 2a)(a + bu)^{3/2} + C$

55. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a + bu} + C$

56. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2 + 3b^2u^2 - 4abu)\sqrt{a + bu} + C$

57. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}}\right| + C,\ \text{si } a > 0$

$\displaystyle\qquad = \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a + bu}{-a}} + C,\ \text{si } a < 0$

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a + bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}}$

59. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a + bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}}$

60. $\displaystyle\int u^n\sqrt{a + bu}\,du = \frac{2u^n(a + bu)^{3/2}}{b(2n + 3)} - \frac{2na}{b(2n + 3)}\int u^{n-1}\sqrt{a + bu}\,du$

61. $\displaystyle\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a + bu}}{b(2n + 1)} - \frac{2na}{b(2n + 1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a + bu}}$

62. $\displaystyle\int \frac{du}{u^n\sqrt{a + bu}} = -\frac{\sqrt{a + bu}}{a(n - 1)u^{n-1}} - \frac{b(2n - 3)}{2a(n - 1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a + bu}}$

Formas trigonométricas

63. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

64. $\displaystyle\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

65. $\displaystyle\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

66. $\displaystyle\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

67. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

68. $\displaystyle\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

69. $\displaystyle\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

70. $\displaystyle\int \cot^2 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

71. $\displaystyle\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u\tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

72. $\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

73. $\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$

74. $\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

75. $\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du$

76. $\int \cot^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du$

77. $\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$

78. $\int \csc^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du$

79. $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

80. $\int \cos au \cos bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

81. $\int \operatorname{sen} au \cos bu\,du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

82. $\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

83. $\int u \cos u\,du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

84. $\int u^n \operatorname{sen} u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$

85. $\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du$

86. $\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-1} u \cos^m u\,du$
$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u\,du$

87. $\int \frac{du}{1-\operatorname{sen} au} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + C$

88. $\int \frac{du}{1+\operatorname{sen} au} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right) + C$

89. $\int \frac{u\,du}{1-\operatorname{sen} au} = \frac{u}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right)\right| + C$

Formas trigonométricas inversas

90. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\,du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

91. $\int \cos^{-1} u\,du = u\cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

92. $\int \tan^{-1} u\,du = u\tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

93. $\int u \operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

94. $\int u \cos^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

95. $\int u \tan^{-1} u\,du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

96. $\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

97. $\int u^n \cos^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

98. $\int u^n \tan^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{1+u^2}\right], \quad n \neq -1$

Formas exponenciales y logarítmicas

99. $\int ue^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

100. $\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$

101. $\int e^{au}\operatorname{sen} bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

102. $\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\operatorname{sen} bu) + C$

103. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

104. $\int \frac{1}{u\ln u}\,du = \ln|\ln u| + C$

105. $\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

106. $\int u^m \ln^n u\,du = \frac{u^{m+1}\ln^n u}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int u^m \ln^{n-1} u\,du, \quad m \neq -1$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

107. $\int \ln(u^2 + a^2)\, du = u \ln(u^2 + a^2) - 2u + 2a \tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

108. $\int \ln|u^2 - a^2|\, du = u \ln|u^2 - a^2| - 2u + a \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

109. $\int \frac{du}{a + be^u} = \frac{u}{a} - \frac{1}{a}\ln|a + be^u| + C$

Formas hiperbólicas

110. $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

111. $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

112. $\int \tanh u\, du = \ln(\cosh u) + C$

113. $\int \coth u\, du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

114. $\int \operatorname{sech} u\, du = \tan^{-1}(\operatorname{senh} u) + C$

115. $\int \operatorname{csch} u\, du = \ln|\tanh \tfrac{1}{2} u| + C$

116. $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

117. $\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

118. $\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

119. $\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

Formas que implican $\sqrt{2au - u^2}$

120. $\int \sqrt{2au - u^2}\, du = \frac{u - a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

121. $\int u\sqrt{2au - u^2}\, du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

122. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u}\, du = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

123. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2}\, du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

124. $\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

125. $\int \frac{u\, du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

126. $\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u + 3a)}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

127. $\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$

Algunas integrales definidas

128. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\, dx = \frac{\pi}{2}\, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

129. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n + 1)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Respuestas de la autoevaluación

Autoevaluación, página xvii

1. falso

2. verdadero

3. falso

4. verdadero

5. 12

6. -243

7. $\dfrac{3x^3+8x}{\sqrt{x^2+4}}$

8. $2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

9. ***a***) 0, 7 ***b***) $-1+\sqrt{6}, -1-\sqrt{6}$ ***c***) 1 ***d***) 1

10. ***a***) $(5x+1)(2x-3)$ ***b***) $x^2(x+3)(x-5)$ ***c***) $(x-3)(x^2+3x+9)$ ***d***) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$

11. falso

12. falso

13. verdadero

14. 6; -6

15. $-a+5$

16. ***a***), ***b***), ***d***), ***e***), ***g***), ***h***), ***i***), ***l***)

17. *i*) ***d***); *ii*) ***c***), *iii*) ***a***); *iv*) ***b***)

18. ***a***) $-2<x<2$; ***b***) $|x|<2$

19. $(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$ en la recta numérica: −1 3

20. $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{8}{3},\infty\right)$

21. $(-\infty,-5]\cup[3,\infty)$

22. $(-\infty,-2)\cup[0,1]$

23. cuarto

24. $(5,-7)$

25. -12; 9

26. ***a***) $(1,-5)$ ***b***) $(-1,5)$ ***c***) $(-1,-5)$

27. $(-2,0)$, $(0,-4)$, $(0,4)$

28. segundo y cuarto

29. $x=6$ o $x=-4$

30. $x^2+y^2=25$

31. $d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3)=d(P_1,P_3)$

32. ***c***)

33. falso

34. -27

35. 8

36. $\frac{2}{3}$; $(-9,0)$; $(0,6)$

37. $y=-5x+3$

38. $y=2x-14$

39. $y=-\frac{1}{3}x+3$

40. $y=-\frac{5}{8}x$

41. $x-\sqrt{3}y+4\sqrt{3}-7=0$

42. *i*) ***g***); *ii*) ***e***); *iii*) ***h***); *iv*) ***a***); *v*) ***b***); *vi*) ***f***); *vii*) ***d***); *viii*) ***c***)

43. falso

44. falso

45. $4\pi/3$

46. 15

47. 0.23

48. $\cos t=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

49. $\operatorname{sen}\theta=\frac{3}{5}$; $\cos\theta=\frac{4}{5}$; $\tan\theta=\frac{3}{4}$; $\cot\theta=\frac{4}{3}$; $\sec\theta=\frac{5}{4}$; $\csc\theta=\frac{5}{3}$

50. $b=10\tan\theta$, $c=10\sec\theta$

51. $k=10\ln 5$

52. $4=64^{1/3}$

53. $\log_b 125$

54. aproximadamente 2.3347

55. 1 000

56. verdadero

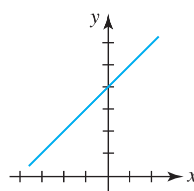
Respuestas de los problemas impares seleccionados

Ejercicios 1.1, página 8

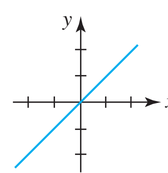
1. 24; 2; 8; 35,
3. 0; 1; 2; $\sqrt{6}$
5. $-\frac{3}{2}$; 0; $\frac{3}{2}$; $\sqrt{2}$
7. $-2x^2 + 3x$; $-8a^2 + 6a$; $-2a^4 + 3a^2$; $-50x^2 - 15x$; $-8a^2 - 2a + 1$; $-2x^2 - 4xh - 2h^2 + 3x + 3h$
9. $-2, 2$
11. $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$
13. $(-\infty, 1)$
15. $\{x|x \neq 0, x \neq 3\}$
17. $\{x|x \neq 5\}$
19. $(-\infty, \infty)$
21. $[-5, 5]$
23. $(-\infty, 0] \cup [5, \infty)$
25. $(-2, 3]$
27. no una función
29. función
31. dominio: $[-4, 4]$; rango: $[0, 5]$
33. dominio: $[1, 9]$; rango: $[1, 6]$
35. $(8, 0), (0, -4)$
37. $\left(\frac{3}{2}, 0\right), \left(\frac{5}{2}, 0\right), (0, 15)$
39. $(-1, 0), (2, 0), (0, 0)$
41. $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$
43. $(-2, 0), (2, 0), (0, 3)$
45. 0; -3.4; 0.3; 2; 3.8; 2.9; $(0, 2)$
47. 3.6; 2; 3.3; 4.1; 2; -4.1; $(-3.2, 0), (2.3, 0), (3.8, 0)$
49. $f_1(x) = \sqrt{x + 5}, f_2(x) = -\sqrt{x + 5}$; $[-5, \infty)$
51. ***a)*** 2; 6; 120; 5 040 ***c)*** 5; 42
d) $(n + 1)(n + 2)(n + 3)$

Ejercicios 1.2, página 18

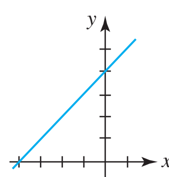
1. $-2x + 13$; $6x - 3$; $-8x^2 - 4x + 40$; $\dfrac{2x + 5}{-4x + 8}, x \neq 2$
3. $\dfrac{x^2 + x + 1}{x(x + 1)}$; $\dfrac{x^2 - x - 1}{x(x + 1)}$; $\dfrac{1}{x + 1}$; $\dfrac{x^2}{x + 1}, x \neq 0, x \neq -1$
5. $2x^2 + 5x - 7$; $-x + 1$; $x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + 12$; $\dfrac{x + 3}{x + 4}, x \neq 1, x \neq -4$
7. el intervalo $[1, 2]$
9. el intervalo $[1, 2)$
11. $3x + 16$; $3x + 4$
13. $x^6 + 2x^5 + x^4$; $x^6 + x^4$
15. $\dfrac{3x + 3}{x}$; $\dfrac{3}{3 + x}$
17. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
19. $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$
21. $128x^9$; $\dfrac{1}{4x^9}$
23. $36x^2 - 36x + 15$
25. $-2x + 9$
27. $f(x) = 2x^2 - x, g(x) = x^2$
29. $(-2, 3), (3, -2)$
31. $(-8, 1), (-3, -4)$
33. $(-6, 2), (-1, -3)$
35. $(2, 1), (-3, -4)$
37. ***a)***



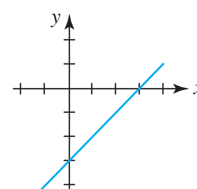
b)



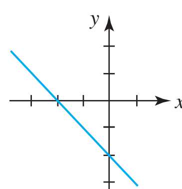
c)



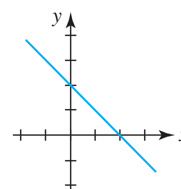
d)



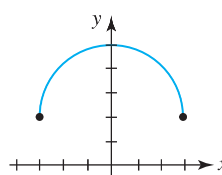
e)



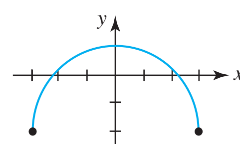
f)



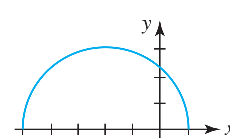
39. ***a)***



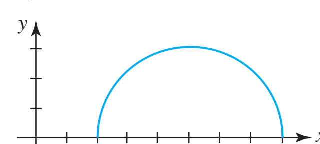
b)



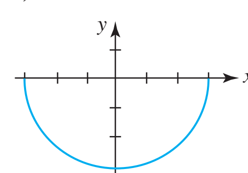
c)



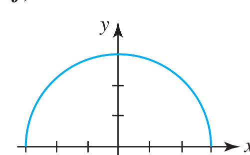
d)



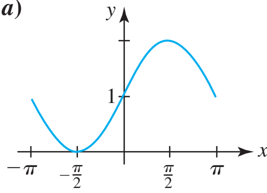
e)



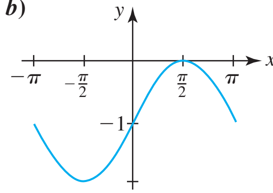
f)



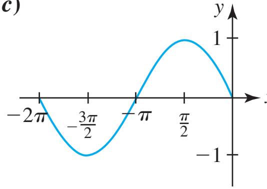
41. *a*)



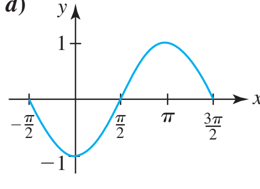
b)



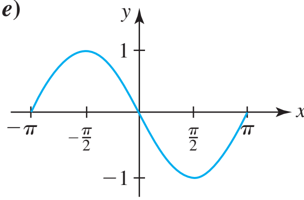
c)



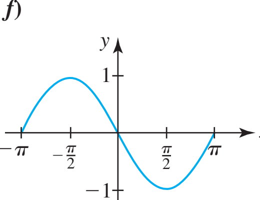
d)



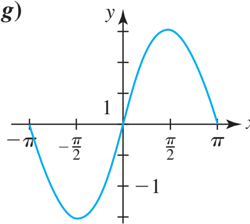
e)



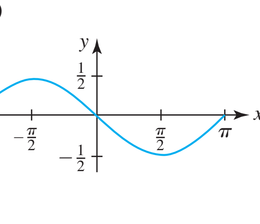
f)



g)



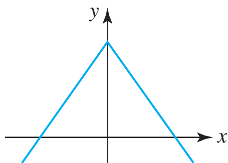
h)



43. $y = (x - 1)^3 + 5$

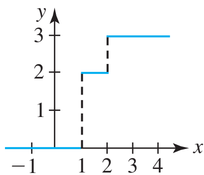
45. $y = -(x + 7)^4$

47.



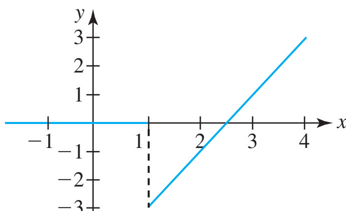
49. 10, 8, −1, 2, 0

51.



53. $y = 2 - 3U(x - 2) + U(x - 3)$

55.



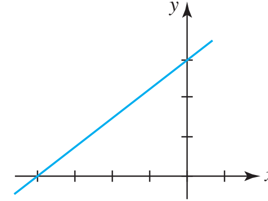
Ejercicios 1.3, página 28

1. $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

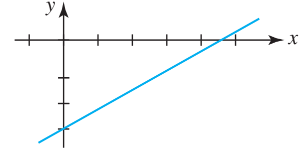
3. $y = 2$

5. $y = -x + 3$

7. $\frac{3}{4}$; $(-4, 0), (0, 3)$;



9. $\frac{2}{3}$; $(\frac{9}{2}, 0), (0, -3)$;



11. $y = -2x + 7$

13. $y = -3x - 2$

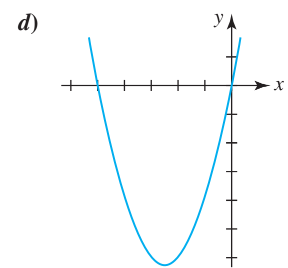
15. $y = -4x + 11$

17. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

19. $y = x + 3$

21. *a*) $(0, 0), (-5, 0)$ *b*) $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

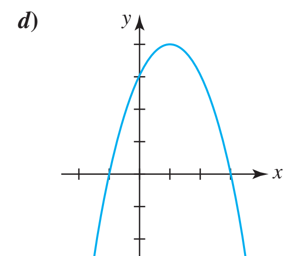
c) $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}\right)$; $x = -\frac{5}{2}$ *d*)



e) $\left[-\frac{25}{4}, \infty\right)$ *f*) $\left[-\frac{5}{2}, \infty\right)$; $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$

23. *a*) $(-1, 0), (3, 0), (0, 3)$ *b*) $y = -(x - 1)^2 + 4$

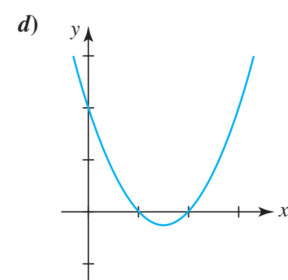
c) $(1, 4)$; $x = 1$ *d*)



e) $(-\infty, 4]$ *f*) $(-\infty, 1]$; $[1, \infty)$

25. *a*) $(1, 0), (2, 0), (0, 2)$ *b*) $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

c) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$; $x = \frac{3}{2}$ *d*)



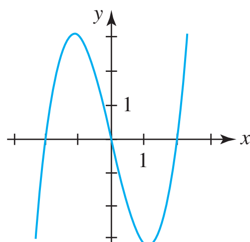
e) $\left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$ *f*) $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$; $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

27. la gráfica se desplazó de manera horizontal 10 unidades a la derecha

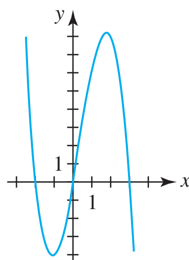
29. la gráfica se comprime de manera vertical, luego hay una reflexión sobre el eje x, después un desplazamiento horizontal de 4 unidades hacia la izquierda y finalmente un desplazamiento vertical de 9 unidades hacia arriba

31. la gráfica se desplazó de manera horizontal 6 unidades a la izquierda, después hay un desplazamiento vertical de 4 unidades hacia abajo

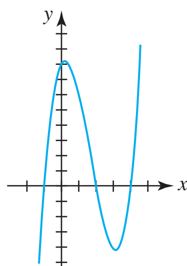
33.



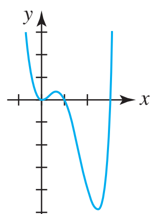
35.



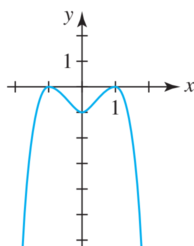
37.



39.



41.

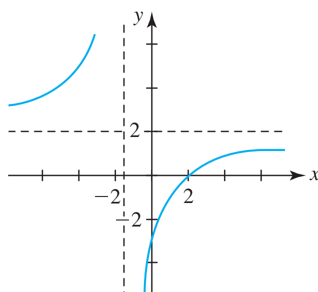


43. ***f*)**

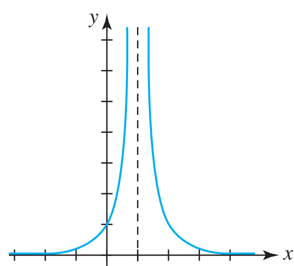
45. ***e*)**

47. ***b*)**

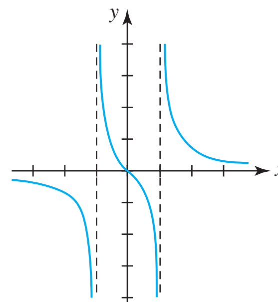
49. asíntotas: $x = -\frac{3}{2}$, $y = 2$; intersecciones: $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$, $(0, -3)$;



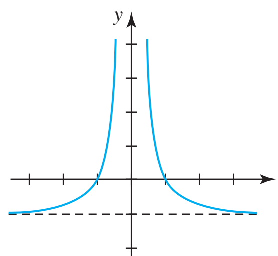
51. asíntotas: $x = 1$, $y = 0$; intersecciones: $(0, 1)$;



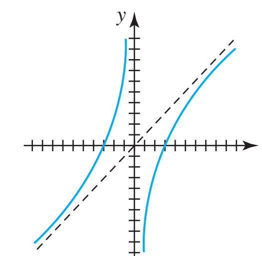
53. asíntotas: $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$; intersecciones: $(0, 0)$;



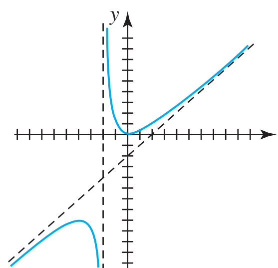
55. asíntotas: $x = 0$, $y = -1$; intersecciones: $(-1, 0)$, $(1, 0)$;



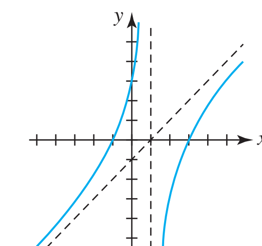
57. asíntotas: $x = 0$, $y = x$; intersecciones: $(-3, 0)$, $(3, 0)$;



59. asíntotas: $x = -2$, $y = x - 2$; intersecciones: $(0, 0)$;



61. asíntotas: $x = 1$, $y = x - 1$;
intersecciones: $(-1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$;

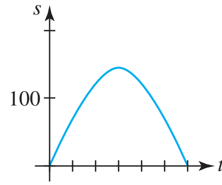


63. -1 está dentro del rango de f, pero 2 no está en el rango de f

65. $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$

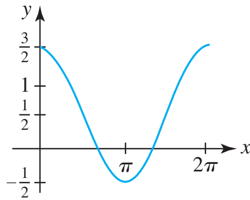
67. 1 680; 35.3 años aproximadamente

69. $t = 0$ y $t = 6$;

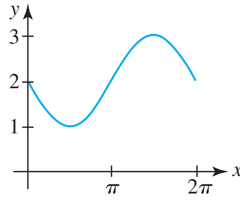


Ejercicios 1.4, página 35

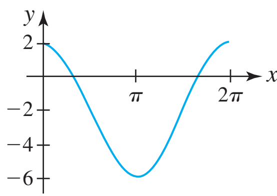
1.



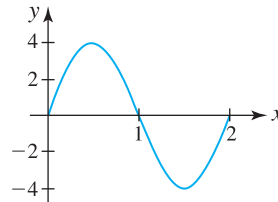
3.



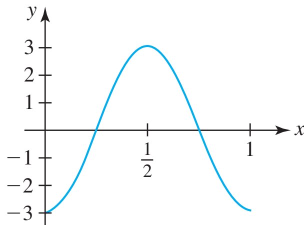
5.



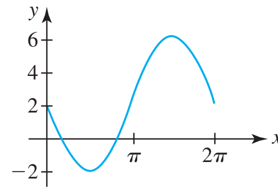
7. amplitud: 4; periodo: 2;



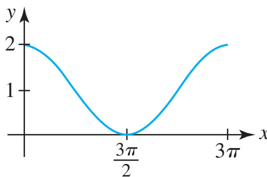
9. amplitud: 3; periodo: 1;



11. amplitud: 4; periodo: 2π;



13. amplitud: 1; periodo: 3π;



15. $y = -3 \text{ sen } x$

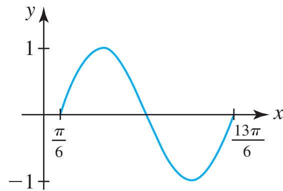
17. $y = 1 - 3 \cos x$

19. $y = 3 \text{ sen } 2x$

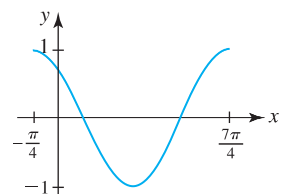
21. $y = \frac{1}{2}\cos \pi x$

23. $y = -\text{sen } \pi x$

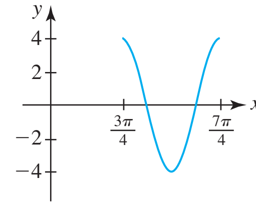
25. amplitud: 1; periodo: 2π; corrimiento de fase: $\pi/6$;



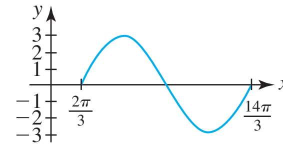
27. amplitud: 1; periodo: 2π; corrimiento de fase: $\pi/4$;



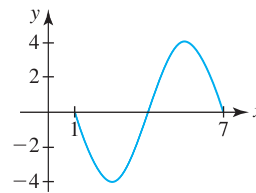
29. amplitud: 4; periodo: π; corrimiento de fase: $3\pi/4$;



31. amplitud: 3; periodo: 4π; corrimiento de fase: $2\pi/3$;



33. amplitud: 4; periodo: 6; corrimiento de fase: 1;



35. $y = 5\,\text{sen}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$

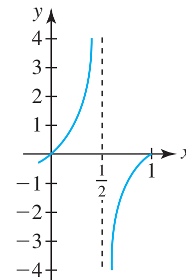
37. $(\pi/2, 0)$; $(\pi/2 + 2n\pi, 0)$, donde n es un entero

39. $(n, 0)$, donde n es un entero

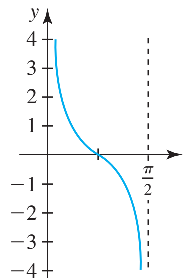
41. $((2n + 1)\pi, 0)$, donde n es un entero

43. $(\pi/4 + n\pi, 0)$, donde n es un entero

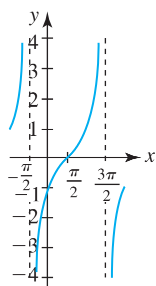
45. periodo: 1; intersecciones x: $(n, 0)$, donde n es un entero; asíntotas: $x = \frac{1}{2}(2n + 1)$, donde n es un entero;



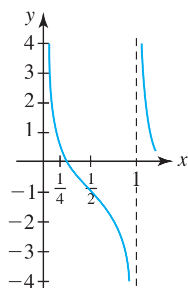
47. periodo: $\frac{\pi}{2}$; intersecciones x: $\left(\frac{1}{4}(2n + 1)\pi, 0\right)$, donde n es un entero; asíntotas: $x = n\pi/2$, donde n es un entero;



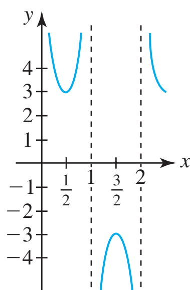
49. periodo: 2π; intersecciones x: $(\pi/2 + 2n\pi, 0)$, donde n es un entero; asíntotas: $x = 3\pi/2 + 2n\pi$, donde n es un entero;



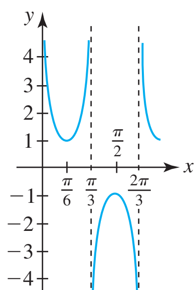
51. periodo: 1; intersecciones x: $\left(\frac{1}{4} + n, 0\right)$, donde n es un entero; asíntotas: $x = n$, donde n es un entero;



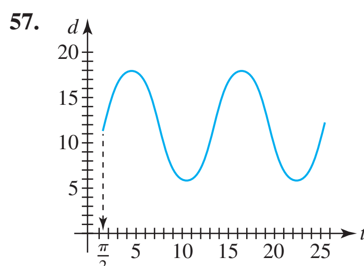
53. periodo: 2; asíntotas: $x = n$, donde n es un entero;



55. periodo: $2\pi/3$; asíntotas: $x = n\pi/3$, donde n es un entero;



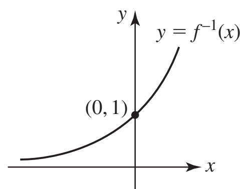
57.



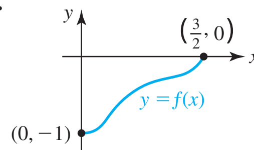
59. ***a)*** 978.0309 cm/s^2 ***b)*** 983.21642 cm/s^2
c) 980.61796 cm/s^2

Ejercicios 1.5, página 46

1. porque $f(0) = 1$ y $f(5) = 1$
3. no es uno a uno
5. uno a uno
7. uno a uno
9. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-7}{3}}$
11. $f^{-1}(x) = \dfrac{2-x}{1-x}$
15. dominio: $[0, \infty)$; rango: $[-2, \infty)$
17. dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; rango: $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$
19. $(20, 2)$
21. $x = 12$
23.



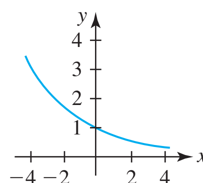
25.



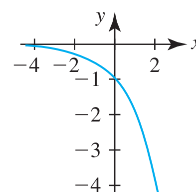
27. $f(x) = (5 - 2x)^2, x \geq \frac{5}{2}$; $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{x})$
29. $f(x) = x^2 + 2x + 4, x \geq -1$; $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-3}$
33. $3\pi/4$
35. $\pi/4$
37. $3\pi/4$
39. $-\pi/3$
41. $\dfrac{4}{5}$
43. 2
45. $4\sqrt{2}/9$
47. $\sqrt{3}(2 + \sqrt{10})/9$
49. $\sqrt{1 - x^2}$
51. $\sqrt{1 + x^2}$
57. $\cos t = \sqrt{5}/5$, $\tan t = -2$, $\cot t = -\dfrac{1}{2}$, $\sec t = \sqrt{5}$, $\csc t = -\sqrt{5}/2$
63. ***a)*** $\pi/4$ ***b)*** 0.942 radián $\approx 53.97°$

Ejercicios 1.6, página 53

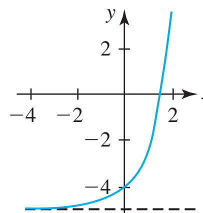
1. $(0, 1)$; $y = 0$;



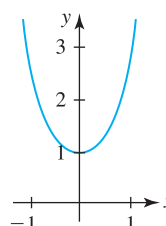
3. $(0, -1)$; $y = 0$;



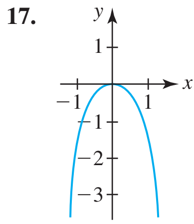
5. $(0, -4)$; $y = -5$;



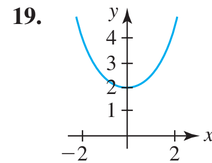
7. $f(x) = 6^x$
9. $f(x) = e^{-2x}$
11. $x > 4$
13. $x < 2$
15.



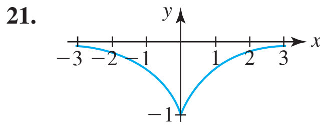
17.



19.



21.



23. $-\frac{1}{2} = \log_4 \frac{1}{2}$

25. $4 = \log_{10} 10\,000$

27. $2^7 = 128$

29. $(\sqrt{3})^8 = 81$

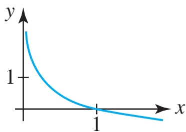
31. $f(x) = \log_7 x$

33. e

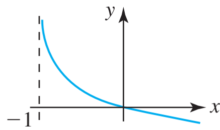
35. 36

37. $\frac{1}{7}$

39. $(0, \infty)$; $(1, 0)$; $x = 0$;

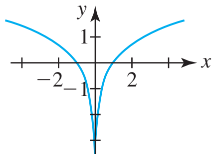


41. $(-1, \infty)$; $(0, 0)$; $x = -1$;



43. el intervalo $(-3, 3)$

45. $(-1, 0), (1, 0)$; $x = 0$;



47. $\ln(x^2 - 2)$

49. 0

51. $10 \ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 5) - \frac{1}{3}\ln(8x^3 + 2)$

53. $5 \ln(x^3 - 3) + 8 \ln(x^4 + 3x^2 + 1) - \frac{1}{2}\ln x - 9 \ln(7x + 5)$

55. $\log_6 51 = \dfrac{\ln 51}{\ln 6} \approx 2.1944$

57. $-5 + \dfrac{\ln 9}{\ln 2} \approx 1.8301$

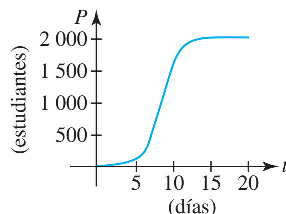
59. $\dfrac{1 + \ln 2}{-1 + \ln 5} \approx 2.7782$

61. 3

63. ***a)*** $P(t) = P_0 e^{0.3466t}$ ***b)*** $5.66P_0$ ***c)*** 8.64 h

65. ***a)*** 82 ***b)*** 8.53 días

c) 2 000 ***d)***



Ejercicios 1.7, página 59

1. $S(x) = x + \dfrac{50}{x}$; $(0, \infty)$

3. $S(x) = 3x^2 - 4x + 2$; $[0, 1]$

5. $A(x) = 100x - x^2$; $[0, 100]$

7. $A(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$; $[0, 4]$

9. $d(x) = \sqrt{2x^2 + 8}$; $(-\infty, \infty)$

11. $P(A) = 4\sqrt{A}$; $(0, \infty)$

13. $d(C) = C/\pi$; $(0, \infty)$

15. $A(h) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}h^2$; $(0, \infty)$

17. $A(x) = \dfrac{1}{4\pi}x^2$; $(0, \infty)$

19. $C(x) = 8x + \dfrac{3\,200}{x}$; $(0, \infty)$

21. $S(w) = 3w^2 + \dfrac{1\,200}{w}$; $(0, \infty)$

23. $d(t) = 20\sqrt{13t^2 + 8t + 4}$; $(0, \infty)$

25. $V(h) = \begin{cases} 120h^2, & 0 \le h < 5 \\ 1\,200h - 3\,000, & 5 \le h \le 8 \end{cases}$; $[0, 8]$

27. $h(\theta) = 300 \tan\theta$; $(0, \pi/2)$

29. $L(\theta) = 3 \csc\theta + 4 \sec\theta$; $(0, \pi/2)$

31. $\theta(x) = \tan^{-1}(1/x) - \tan^{-1}(1/2x)$; $(0, \infty)$

Revisión del capítulo 1, página 61

A. **1.** falso **3.** verdadero

5. falso **7.** verdadero

9. falso **11.** verdadero

13. verdadero **15.** verdadero

17. verdadero **19.** verdadero

B. **1.** $[-2, 0) \cup (0, \infty)$ **3.** $(-8, 6)$

5. $(1, 0)$; $(0, 0), (5, 0)$ **7.** $\left(0, -\frac{4}{5}\right)$

9. 6 **11.** 0

13. $(3, 5)$ **15.** $\log_3 5 = \dfrac{\ln 5}{\ln 3}$

17. $\frac{1}{9}$ **19.** $y = \ln x$

C. **1.** ***a)*** 3 ***b)*** 0 ***c)*** −2 ***d)*** 0 ***e)*** 2.5
f) 2 ***g)*** 1 ***h)*** 0 ***i)*** 3 ***j)*** 4

3. 1 y 8 están en el mismo rango; 5 no está en el rango

5. $-3x^2 + 4x - 3xh - h^2 + 2h - 1$

7. ***f)*** **9.** ***d)***

11. ***h)*** **13.** ***c)***

15. ***b)*** **17.** $\dfrac{3^{1-h} - 3}{h}$

19. ***a)*** ab ***b)*** b/a ***c)*** $1/b$

21. $f(x) = 5e^{(-\frac{1}{6}\ln 5)x} = 5e^{-0.2682x}$ **23.** $f(x) = 5 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

25. ***b)*** **27.** ***d)***

29. *c*)

31. *a*) $V = 6l^3$ *b*) $V = \frac{2}{9}w^3$ *c*) $V = \frac{3}{4}h^3$

33. $V(\theta) = 360 + 75\cot\theta$

35. $A(\phi) = 100\cos\phi + 50\,\text{sen}\,2\phi$ **37.** $V(x) = 2\sqrt{3}(1 - x^2)$

Ejercicios 2.1, página 72

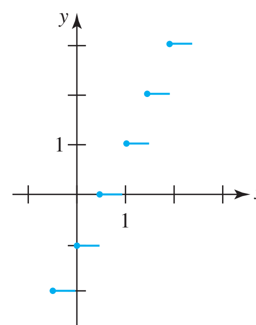
1. 8 **3.** no existe
5. 2 **7.** no existe
9. 0 **11.** 3
13. 0
15. *a*) 1 *b*) -1 *c*) 2 *d*) no existe
17. *a*) 2 *b*) -1 *c*) -1 *d*) -1
19. correcto **21.** $\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1 - x} = 0$
23. $\lim_{x\to 0^+}\lfloor x\rfloor = 0$ **25.** correcto
27. $\lim_{x\to 3^-}\sqrt{9 - x^2} = 0$
29. *a*) -1 *b*) 0 *c*) -3 *d*) -2 *e*) 0 *f*) 1
35. no existe **37.** $-\frac{1}{4}$
39. -2 **41.** -3
43. 0 **45.** $\frac{1}{3}$
47. $\frac{1}{4}$ **49.** 5

Ejercicios 2.2, página 80

1. 15 **3.** -12
5. 4 **7.** 4
9. $-\frac{8}{5}$ **11.** 14
13. $\frac{28}{9}$ **15.** -1
17. $\sqrt{7}$ **19.** no existe
21. -10 **23.** 3
25. 60 **27.** 14
29. $\frac{1}{5}$ **31.** $-\frac{1}{8}$
33. 3 **35.** no existe
37. 2 **39.** $\frac{128}{3}$
41. -2 **43.** $a^2 - 2ab + b^2$
45. 16 **47.** $-1/x^2$
49. $\frac{1}{2}$ **51.** $\frac{1}{5}$
53. 32 **55.** $\frac{1}{2}$
57. no existe **59.** $8a$

Ejercicios 2.3, página 86

1. ninguno **3.** 3 y 6
5. $n\pi/2,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **7.** 2
9. ninguno **11.** e^{-2}
13. *a*) continua *b*) continua
15. *a*) continua *b*) continua
17. *a*) no continua *b*) no continua
19. *a*) continua *b*) no continua
21. *a*) no continua *b*) no continua
23. *a*) no continua *b*) continua
25. $m = 4$ **27.** $m = 1;\ n = 3$
29. discontinua en $n/2$, donde n es un entero;



31. defina $f(9) = 6$ **33.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$
35. 0 **37.** 1
39. 1 **41.** $-\pi/6$
43. $(-3, \infty)$ **45.** $c = 4$
47. $c = 0,\ c = \pm\sqrt{2}$ **55.** $-1.22, -0.64, 1.34$
57. 2.21 **59.** 0.78

Ejercicios 2.4, página 93

1. $\frac{3}{2}$ **3.** 0
5. 1 **7.** 4
9. 0 **11.** 36
13. $\frac{1}{2}$ **15.** no existe
17. 3 **19.** $\frac{3}{7}$
21. 0 **23.** -4
25. 4 **27.** $\frac{1}{2}$
29. 5 **31.** $\frac{1}{6}$
33. 8 **35.** $\sqrt{2}$
37. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **43.** 3

Ejercicios 2.5, página 102

1. $-\infty$ **3.** ∞
5. ∞ **7.** ∞
9. $\frac{1}{4}$ **11.** 5
13. $-\frac{1}{4}$ **15.** $\frac{5}{2}$

17. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

19. 0

21. 1

23. $-\pi/6$

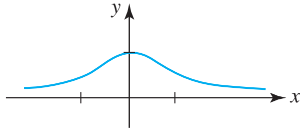
25. $-4; 4$

27. $-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}$

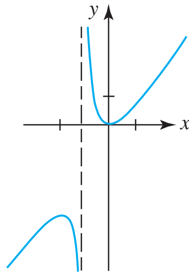
29. $-1; 1$

31. $-1; 1$

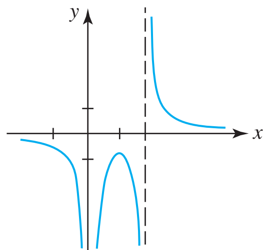
33. AV: ninguna; AH: $y = 0$;



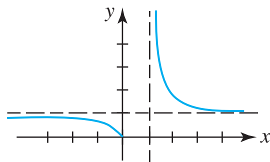
35. AV: $x = -1$; AH: ninguna;



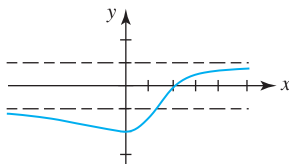
37. AV: $x = 0, x = 2$; AH: $y = 0$;



39. AV: $x = 1$; AH: $y = 1$;



41. AV: ninguna; AH: $y = -1, y = 1$;



43. ***a***) 2 ***b***) $-\infty$ ***c***) 0 ***d***) 2

45. ***a***) $-\infty$ ***b***) -1 ***c***) ∞ ***d***) 0

51. 3

Ejercicios 2.6, página 110

1. elija $\delta = \varepsilon$

3. elija $\delta = \varepsilon$

5. elija $\delta = \varepsilon$

7. elija $\delta = \varepsilon/3$

9. elija $\delta = 2\varepsilon$

11. elija $\delta = \varepsilon$

13. elija $\delta = \varepsilon/8$

15. elija $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

17. elija $\delta = \varepsilon^2/5$

19. elija $\delta = \varepsilon/2$

21. elija $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$

23. elija $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

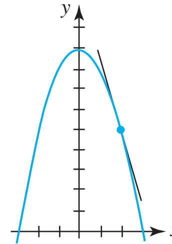
25. elija $\delta = \sqrt{a\varepsilon}$

31. elija $N = 7/(4\varepsilon)$

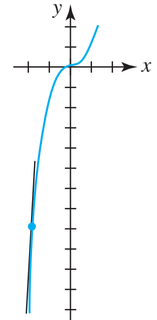
33. elija $N = -30/\varepsilon$

Ejercicios 2.7, página 116

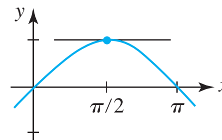
1. -4.5;



3. 7;



5. $\frac{3\sqrt{3} - 6}{\pi}$;



7. $m_{tan} = 6$; $y = 6x - 15$

9. $m_{tan} = -1$; $y = -x - 1$

11. $m_{tan} = -23$; $y = -23x + 32$

13. $m_{tan} = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}x - 1$

15. $m_{tan} = 2$; $y = 2x + 1$

17. $m_{tan} = \frac{1}{4}$; $y = \frac{1}{4}x + 1$

19. $m_{tan} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{12} + \frac{1}{2}$

21. no una recta tangente

23. $y = x - 2$; $(0, -2)$

25. $m_{tan} = -2x + 6$; $(3, 10)$

27. $m_{tan} = 3x^2 - 3$; $(-1, 2), (1, -2)$

29. 58 mi/h

31. 3.8 h

33. -14

35. ***a***) -4.9 m/s ***b***) 5 s ***c***) -49 m/s

37. ***a***) 448 pies; 960 pies; 1 008 pies; 960 pies
b) 144 pies/s ***d***) 16 s ***e***) $-32t + 256$
f) -256 pies/s ***g***) 1 024 pies

Revisión del capítulo 2, página 118

A. 1. verdadero

3. falso

5. falso

7. verdadero

9. falso

11. falso

13. verdadero

15. verdadero

17. falso

19. verdadero

21. falso

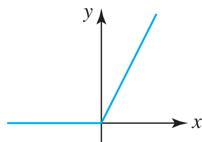
B. 1. 4

3. $-\frac{1}{5}$

5. 0

7. ∞

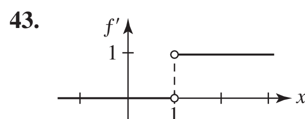
9. 1
11. 3^-
13. $-\infty$
15. -2
17. 10
19. continua
21. 9

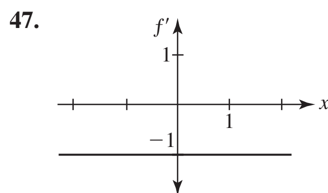
C. 5. ***a*), *e*), *f*), *h*)**
7. ***c*), *h*)**
9. ***b*), *c*), *d*), *e*), *f*)**
11. 

; continua en todas partes

13. $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, \infty)$
15. $(-\infty, -\sqrt{5}), (\sqrt{5}, \infty)$
17. $\frac{1}{6}$
19. $y = 4x + 24$
21. $y = 8x - 6$
23. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Ejercicios 3.1, página 128

1. 0
3. -3
5. $6x$
7. $-2x + 4$
9. $2x + 2$
11. $3x^2 + 1$
13. $-3x^2 + 30x - 1$
15. $-2/(x + 1)^2$
17. $5/(x + 4)^2$
19. $-1/(2x^{3/2})$
21. $y = -x - 4$
23. $y = 2x - 2$
25. $(-4, -6)$
27. $(1, -2), (-1, 2)$
29. $x; \left(3, \frac{7}{2}\right)$
31. $-3x^2$; $(2, -4), (-2, 12)$
33. $f'_+(2) = 2$ pero $f'_-(2) = -1$
35. $20a$
37. $3a^2 - 8a$
39. $4/(3 - a)^2$
41. $y = \frac{1}{2}x + 3$; $f(-3) = \frac{3}{2}$; $f'(-3) = \frac{1}{2}$
43. 

45.
47. 

49. ***e*)**
51. ***b*)**
53. ***a*)**

Ejercicios 3.2, página 136

1. 0
3. $9x^8$
5. $14x - 4$
7. $2x^{-1/2} + 4x^{-5/3}$
9. $x^4 - 12x^3 + 18x$
11. $20x^4 - 20x^3 - 18x^2$
13. $6x^5 + 40x^3 + 50x$
15. $16 + 4/\sqrt{x}$
17. $192u^2$
19. $-1/r^2 - 2/r^3 - 3/r^4 - 4/r^5$
21. $y = 6x + 3$
23. $y = \frac{1}{4}x + 5$
25. $(4, -11)$
27. $(3, -25), (-1, 7)$
29. $y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$
31. $x = 4$
33. -2
35. 32
37. $60/x^4$
39. $1\,440x^2 + 120x$
41. $(-4, \infty), (-\infty, -4)$
43. $(-4, 48)$
45. $(1, \infty), (-\infty, 1)$
49. $(2, 8)$
51. $\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{16}\right)$
53. $y = -7x$
55. $S = 4\pi r^2$
57. -15 N

Ejercicios 3.3, página 142

1. $5x^4 - 9x^2 + 4x - 28$
3. $8x^{-7/3} - 4x^{-5/6} + 12^{1/2}$
5. $-20x/(x^2 + 1)^2$
7. $-17/(5 - 2x)^2$
9. $72x - 12$
11. $(2x^5 + x^2 - 40x - 12)/x^4$
13. $(x^2 + 2x)/(2x^2 + x + 1)^2$
15. $18x^2 + 22x + 6$
17. $(6x^2 + 8x - 3)/(3x + 2)^2$
19. $(2x^3 + 8x^2 - 6x - 8)/(x + 3)^2$
21. $y = -4x + 1$
23. $y = 7x - 1$
25. $(0, 24), (\sqrt{5}, -1), (-\sqrt{5}, -1)$
27. $(0, 0), \left(-1, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right)$
29. $\left(3, \frac{3}{2}\right), \left(-5, \frac{1}{2}\right)$
31. $(-4, 0), (-6, 2)$
33. $k = -21$
35. -28
37. $\frac{11}{3}$
39. -30
41. $\frac{13}{2}$
43. $(x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x))/x^3$
45. $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$; $f'(x) < 0$ en $(1, 2) \cup (2, \infty)$
47. $f'(x) > 0$ en $\left(-\infty, \frac{5}{8}\right)$; $f'(x) < 0$ en $\left(\frac{5}{8}, \infty\right)$
49. $-16\,km_1m_2$
51. $-\dfrac{RT}{(V - b)^2} + \dfrac{2a}{V^3}$

Ejercicios 3.4, página 147

1. $2x + \operatorname{sen} x$
3. $7\cos x - \sec^2 x$
5. $x\cos x + \operatorname{sen} x$
7. $(x^3 - 2)\sec^2 x + 3x^2 \tan x$
9. $x^2 \sec x \tan x + 2x \sec x + \sec^2 x$
11. 0
13. $\cos x$
15. $\dfrac{-x\csc^2 x - \csc^2 x - \cot x}{(x + 1)^2}$
17. $\dfrac{-2x^2\sec^2 x + 4x\tan x + 2x}{(1 + 2\tan x)^2}$
19. $\dfrac{1}{1 + \cos x}$
21. $x^4 \operatorname{sen} x \sec^2 x + x^4 \operatorname{sen} x + 4x^3 \operatorname{sen} x \tan x$
23. $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$
25. $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{9}$
27. $\pi/6, 5\pi/6$
29. $\pi/2$
31. $y = 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{8\pi}{3}$
33. $y = x - 2\pi$
35. $2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 2\cos 2x$
37. $2\cos x - x\operatorname{sen} x$
39. $\dfrac{-x^2 \operatorname{sen} x - 2x\cos x + 2\operatorname{sen} x}{x^3}$
41. $\csc x \cot^2 x + \csc^3 x$
45. $-\frac{160}{3}$; cuando el ángulo de elevación aumenta, la longitud s de la sombra decrece

53. no diferenciable en 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi, \ldots$

55. ***b)*** $-\dfrac{14(0.2\cos\theta - \text{sen}\,\theta)}{(0.2\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2}$ ***c)*** 0.1974 radián

d) 13.7281 aproximadamente

e) el esfuerzo mínimo requerido para jalar el trineo es alrededor de 13.73 lb cuando θ es aproximadamente 0.1974 radián u 11.31°.

Ejercicios 3.5, página 155

1. $-150(-3x)^{29}$ **3.** $200(2x^2 + x)^{199}(4x + 1)$

5. $-4(x^3 - 2x^2 + 7)^{-5}(3x^2 - 2x)$

7. $-2(3x - 1)^3(-2x + 9)^4(27x - 59)$

9. $\dfrac{\cos\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$ **11.** $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}(x^2 + 1)^{3/2}}$

13. $10(1 + 6x(x^2 - 4)^2)(x + (x^2 - 4)^3)^9$

15. $\dfrac{5x^{14} + 9x^{13} + 13x^{12}}{(x^2 + x + 1)^5}$ **17.** $\pi\cos(\pi x + 1)$

19. $15\,\text{sen}^2 5x\cos 5x$ **21.** $-3x^5\,\text{sen}\,x^3 + 3x^2\cos x^3$

23. $10(2 + x\,\text{sen}\,3x)^9(3x\cos 3x + \text{sen}\,3x)$

25. $-x^{-2}\sec^2(1/x)$

27. $-3\,\text{sen}\,2x\,\text{sen}\,3x + 2\cos 2x\cos 3x$

29. $5(\sec 4x + \tan 2x)^4(4\sec 4x\tan 4x + 2\sec^2 2x)$

31. $2\cos 2x\cos(\text{sen}\,2x)$

33. $-(2x + 5)^{-1/2}\cos\sqrt{2x + 5}\,\text{sen}(\text{sen}\sqrt{2x + 5})$

35. $24x\,\text{sen}^2(4x^2 - 1)\cos(4x^2 - 1)$

37. $360x^2(1 + x^3)^3(1 + (1 + x^3)^4)^4(1 + (1 + (1 + x^3)^4)^5)^5$

39. -54 **41.** -7

43. $y = -8x - 3$ **45.** $y = 6x - 1 - \dfrac{3\pi}{2}$

47. $y = \dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{12}{\pi(2\sqrt{2} + 3\sqrt{6})}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

49. $-\pi^3\cos\pi x$ **51.** $-125x\cos 5x - 75\,\text{sen}\,5x$

53. $(\sqrt{3}/3, 3\sqrt{3}/16)$, $(-\sqrt{3}/3, -3\sqrt{3}/16)$; no

55. $\dfrac{1}{18}$

57. Si $0 \le \theta \le \pi$, entonces $\theta = \pi/4$ o $\theta = 3\pi/4$.

59. $dr/dt = 5/(8\pi)$ pulg/min

Ejercicios 3.6, página 160

1. $4x^2y^3\dfrac{dy}{dx} + 2xy^4$ **3.** $-2y\,\text{sen}\,y^2\dfrac{dy}{dx}$

5. $\dfrac{1}{2y - 2}$ **7.** $\dfrac{2x - y^2}{2xy}$

9. $\dfrac{2x}{3 - \text{sen}\,y}$ **11.** $\dfrac{4x - 3x^2y^2}{2x^3y - 2y}$

13. $\dfrac{x^2 - 4x(x^2 + y^2)^5}{y^2 + 4y(x^2 + y^2)^5}$ **15.** $\dfrac{2x^4y^4 + 3y^{10} - 6x^9y}{6xy^9 - 3x^{10}}$

17. $\dfrac{1 - x}{y + 4}$ **19.** $\dfrac{3}{2y(x + 2)^2}$

21. $\dfrac{\cos(x + y) - y}{x - \cos(x + y)}$ **23.** $\cos y\cot y$

25. $\dfrac{\cos 2\theta}{r}$ **27.** $-\dfrac{2}{5}$

29. $-\dfrac{1}{3}$ y $-\dfrac{2}{3}$ **31.** $y = \dfrac{8}{3}x + \dfrac{22}{3}$

33. $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}$ **35.** $(1, 2), (-1, -2)$

37. $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}), (\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$

39. $(8, 4)$ **41.** $\dfrac{y^3 - 2x^2}{y^5}$

43. $\dfrac{-25}{y^3}$ **45.** $\dfrac{-\text{sen}\,y}{(1 - \cos y)^3}$

47. $\dfrac{-2}{(y - x)^3}$ **49.** $\dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}, -\dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$

51. $\dfrac{-2x - 3}{x^4}$ **53.** $y = 1 - \sqrt{x - 2}$

55. $y = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}, & -2 \le x < 0 \\ -\sqrt{4 - x^2}, & 0 \le x < 2 \end{cases}$

57. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{y}\dfrac{dx}{dt}$

59. ***a)*** $y = -x + 3$ ***b)*** $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$

65. ***b)*** $\dfrac{4(252 - x^2)}{(x^2 + 252)^2 + 16x^2}$ ***c)*** $x = 6\sqrt{7} \approx 15.87$ pies

Ejercicios 3.7, página 167

1. $f'(x) > 0$ para toda x muestra que f es creciente en $(-\infty, \infty)$. Se sigue del teorema 3.7.3 que f es uno a uno

3. $f(0) = 0, f(1) = 0$ implica que f no es uno a uno

5. $\dfrac{2}{3}$ **7.** $(f^{-1})'(x) = -1/(x - 2)^2$

9. $(5, 3)$; $y = \dfrac{1}{10}x + \dfrac{5}{2}$ **11.** $(8, 1)$; $y = \dfrac{1}{60}x + \dfrac{13}{15}$

13. $\dfrac{5}{\sqrt{1 - (5x - 1)^2}}$ **15.** $\dfrac{-8}{4 + x^2}$

17. $\dfrac{1}{1 + x} + \dfrac{\tan^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ **19.** $\dfrac{2(\cos^{-1}2x + \text{sen}^{-1}2x)}{\sqrt{1 - 4x^2}(\cos^{-1}2x)^2}$

21. $\dfrac{-2x}{(1 + x^4)(\tan^{-1}x^2)^2}$ **23.** $\dfrac{2 - x}{\sqrt{1 - x^2}} + \cos^{-1}x$

25. $3\left(x^2 - 9\tan^{-1}\dfrac{x}{3}\right)^2\left(2x - \dfrac{27}{9 + x^2}\right)$

27. $\dfrac{1}{t^2 + 1}$ **29.** $\dfrac{-4\,\text{sen}\,4x}{|\text{sen}\,4x|}$

31. $\dfrac{2x\sec^2(\text{sen}^{-1}x^2)}{\sqrt{1 - x^4}}$ **33.** $\dfrac{2x(1 + y^2)}{1 - 2y - 2y^3}$

35. $\text{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x = \text{constante}$ **37.** $\sqrt{3}/3$

39. $y = \dfrac{2 + \pi}{4}x - \dfrac{1}{2}$ **41.** $(5\pi/6, 4), (7\pi/6, 6)$

Ejercicios 3.8, página 171

1. $-e^{-x}$ **3.** $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

5. $5^{2x}(2\ln 5)$ **7.** $x^2e^{4x}(3 + 4x)$

9. $\dfrac{-e^{-2x}(2x + 1)}{x^2}$ **11.** $-\dfrac{5}{2}(1 + e^{-5x})^{-1/2}e^{-5x}$

13. $-\dfrac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{(e^{x/2} + e^{-x/2})^2}$ **15.** $8e^{8x}$

17. $3e^{3x-3}$ **19.** $\dfrac{1}{3}x^{-2/3}e^{x^{1/3}} + \dfrac{1}{3}e^{x/3}$

21. $\sec^2 e^x - e^{-x}\tan e^x$

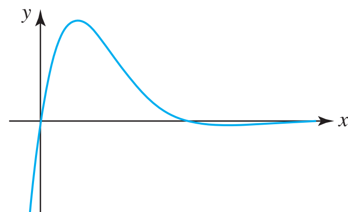
23. $\dfrac{e^{x\sqrt{x^2+1}}(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$

25. $2xe^{x^2}e^{e^{x^2}}$

27. $y = 4x + 4$

29. $(\ln 3, 3)$

31. $x = \pi/4 + n\pi,\ n = 0, \pm 1, 2, \ldots$



33. $4e^{x^2}(2x^3 + 3x)$

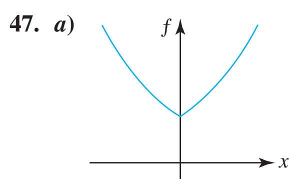
35. $4e^{2x}\cos e^{2x} - 4e^{4x}\operatorname{sen} e^{2x}$

41. $\dfrac{e^{x+y}}{1 - e^{x+y}}$

43. $\dfrac{-ye^{xy}\operatorname{sen} e^{xy}}{1 + xe^{xy}\operatorname{sen} e^{xy}}$

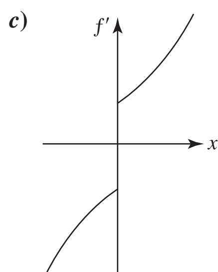
45. $\dfrac{-y^2 + ye^{x/y}}{2y^3 + xe^{x/y}}$

47. ***a)***



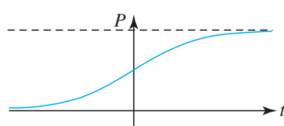
b) $f'(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ -e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$

c)



d) no

49. ***b)*** $P = 0, P = 2$ ***c)***



d) $t = 0$

61. $f'(0) = 0$

Ejercicios 3.9, página 177

1. $\dfrac{10}{x}$

3. $\dfrac{1}{2x}$

5. $\dfrac{4x^3 + 6x}{x^4 + 3x^2 + 1}$

7. $3x + 6x\ln x$

9. $\dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

11. $\dfrac{1}{x(x+1)}$

13. $\tan x$

15. $\dfrac{-1}{x(\ln x)^2}$

17. $\dfrac{1 + \ln x}{x\ln x}$

19. $\dfrac{1}{4x\sqrt{\ln\sqrt{x}}}$

21. $\dfrac{2}{t} + \dfrac{2t}{t^2 + 2}$

23. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3}$

25. $y = x - 1$

27. 4

29. -8

31. (e, e^{-1})

33. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

35. $\sec x$

37. $\dfrac{2}{x^3}$

39. $\dfrac{2 - 2\ln|x|}{x^2}$

43. $\dfrac{y}{2xy^2 - x}$

45. $\dfrac{y - xy}{2xy^2 + x}$

47. $\dfrac{2x - x^2y - y^3}{x^3 + xy^2 - 2y}$

49. $x^{\operatorname{sen} x}\left[\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + (\cos x)\ln x\right]$

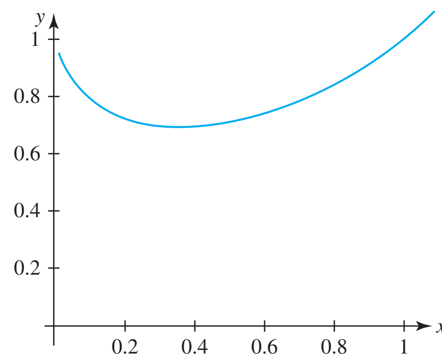
51. $x(x-1)^x\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x-1} + \ln(x-1)\right]$

53. $\dfrac{\sqrt{(2x+1)(3x+2)}}{4x+3}\left[\dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{3/2}{3x+2} - \dfrac{4}{4x+3}\right]$

55. $\dfrac{(x^3-1)^5(x^4+3x^3)^4}{(7x+5)^9}\left[\dfrac{15x^2}{x^3-1} + \dfrac{16x^3+36x^2}{x^4+3x^3} - \dfrac{63}{7x+5}\right]$

57. $y = 3x - 2$

59. $(e^{-1}, e^{-e^{-1}})$;



65. ***b)*** un intervalo es $(\pi, 2\pi)$

67. $4 - 4\ln 4 \approx -1.55$

Ejercicios 3.10, página 185

1. $\cosh x = \sqrt{5}/2$, $\tanh x = -\sqrt{5}/5$, $\coth x = -\sqrt{5}$, $\operatorname{sech} x = 2\sqrt{5}/5$, $\operatorname{csch} x = -2$

3. $10\operatorname{senh} 10x$

5. $\frac{1}{2}x^{-1/2}\operatorname{sech}^2\sqrt{x}$

7. $-6(3x-1)\operatorname{sech}(3x-1)^2\tanh(3x-1)^2$

9. $-3\operatorname{senh} 3x\operatorname{csch}^2(\cosh 3x)$

11. $3\operatorname{senh} 2x\operatorname{senh} 3x + 2\cosh 2x\cosh 3x$

13. $2x^2\operatorname{senh} x^2 + \cosh x^2$

15. $3\operatorname{senh}^2 x\cosh x$

17. $\frac{2}{3}(x - \cosh x)^{-1/3}(1 - \operatorname{senh} x)$

19. $4\tanh 4x$

21. $\dfrac{e^x + 1}{(1 + \cosh x)^2}$

23. $e^{\operatorname{senh} t}\cosh t$

25. $\dfrac{\cos t + \cos t\operatorname{senh} 2t - 2\operatorname{sen} t\cosh 2t}{(1 + \operatorname{senh} 2t)^2}$

27. $y = 3x$

29. $(0, -2), (-2, 2\cosh 2 - 4\operatorname{senh} 2), (2, 2\cosh 2 - 4\operatorname{senh} 2)$

31. $-2\operatorname{sech}^2 x\tanh x$

35. $\dfrac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}}$

37. $\dfrac{-2x}{1 - (1 - x^2)^2}$

39. $\sec x$

41. $\dfrac{3x^3}{\sqrt{x^6 + 1}} + \operatorname{senh}^{-1} x^3$

43. $-\dfrac{1}{x^2\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{\operatorname{sech}^{-1} x}{x^2}$

45. $\dfrac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}\operatorname{sech}^{-1} x}$

47. $\dfrac{3}{\sqrt{\cosh^{-1} 6x}\sqrt{36x^2 - 1}}$

49. **(b)** $v_{\text{ter}} = \sqrt{mg/k}$ ***c)*** 56 m/s

Revisión del capítulo 3, página 186

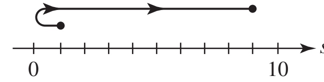
A. 1. falso
3. falso
5. verdadero
7. verdadero
9. verdadero
11. verdadero
13. falso
15. verdadero
17. falso
19. verdadero

B. 1. 0
3. $-\frac{1}{4}$
5. $y = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{2}$
7. -3
9. 23
11. $-16F'(\text{sen } 4x)\text{sen } 4x + 16F''(\text{sen } 4x)\cos^2 x$
13. $a = 6$; $b = -9$
15. $(1, 5)$
17. $\dfrac{1}{x(\ln 10)}$
19. catenaria

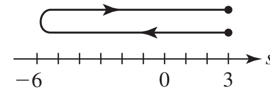
C. 1. $0.08x^{-0.9}$
3. $10(t + \sqrt{t^2 + 1})^9(1 + t(t^2 + 1)^{-1/2})$
5. $x^2(x^4 + 16)^{1/4}(x^3 + 8)^{-2/3} + x^3(x^4 + 16)^{-3/4}(x^3 + 8)^{1/3}$
7. $-\dfrac{16x \text{ sen } 4x + 4 \text{ sen } 4x + 4 \cos 4x}{(4x + 1)^2}$
9. $10x^3 \text{ sen } 5x \cos 5x + 3x^2 \text{ sen}^2\, 5x$
11. $\dfrac{-3}{|x|\sqrt{x^2 - 9}}$
13. $\dfrac{1}{(\cot^{-1} x)^2(1 + x^2)}$
15. $\dfrac{-4x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$
17. $-xe^{-x}$
19. $7x^6 + 7^x(\ln 7) + 7e^{7x}$
21. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{4x - 1}$
23. $\dfrac{1}{\sqrt{(\text{sen}^{-1} x)^2 + 1}\sqrt{1 - x^2}}$
25. $e^{x \cosh^{-1} x}\left[\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} + x \cosh^{-1} x + 1\right]$
27. $3x^2e^{x^3} \cosh e^{x^3}$
29. $\dfrac{405}{8\sqrt{1 + 3x}}$
31. $\dfrac{120}{t^6}$
33. $4e^{\text{sen } 2x}(\cos^2 2x - \text{sen } 2x)$
35. $\dfrac{4}{x + 5} - \dfrac{3}{2 - x} - \dfrac{10}{x + 8} - \dfrac{2}{6x + 4}$
37. $\dfrac{1}{4}$
39. $\dfrac{e^x - y^2}{2xy + e^y}$
41. $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{27}, y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{27}$
43. $y = 6x - 9, y = -6x - 9$
45. $(4, 2)$
47. $0, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 2\pi$
53. ***a)*** $(2, 0), (2, -1), (2, 1)$ ***b)*** $4, -2, -2$
55. $y = \sqrt{3}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}, y = -\sqrt{3}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ejercicios 4.1, página 195

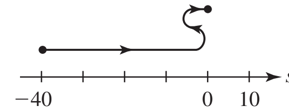
1. $-1, 19$; $-2, 18$; $2, 18$; $8, 8$
3. $18, 6$; $-23, 1$; $23, 1$; $18, -6$
5. $-\frac{15}{4}, 0$; $17, 2$; $17, 2$; $-128, -2$
7. $1, \frac{1}{2}$; $1 - \pi, 1$; $\pi - 1, 1$; $0, \pi^2$
9. ***a)*** $-6, 6$ ***b)*** $-8, 8$
11. ***a)*** $-6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}$ ***b)*** 15 ***c)*** $-4, 8$
13. reducción de velocidad en los intervalos de tiempo $(-\infty, -3)$, $(0, 3)$; aumento de velocidad en los intervalos de tiempo $(-3, 0)$, $(3, \infty)$
15. $v(t) = 2t$, $a(t) = 2$; reducción de velocidad en el intervalo de tiempo $(-1, 0)$; aumento de velocidad en el intervalo de tiempo $(0, 3)$;



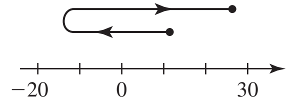
17. $v(t) = 2t - 4$, $a(t) = 2$; reducción de velocidad en el intervalo de tiempo $(-1, 2)$; aumento de velocidad en el intervalo de tiempo $(2, 5)$;



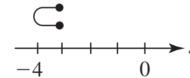
19. $v(t) = 6t^2 - 12t$, $a(t) = 12t - 12$; reducción de velocidad en los intervalos de tiempo $(-2, 0)$, $(1, 2)$; aumento de velocidad en los intervalos de tiempo $(0, 1)$, $(2, 3)$;



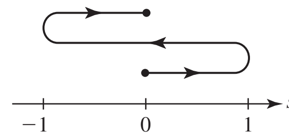
21. $v(t) = 12t^3 - 24t^2$, $a(t) = 36t^2 - 48t$;



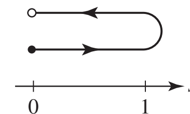
23. $v(t) = 1 - 2t^{-1/2}$, $a(t) = t^{-3/2}$;



25. $v(t) = \dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}t$, $a(t) = -\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 \text{sen } \dfrac{\pi}{2}t$;



27. $v(t) = e^{-t}(-t^3 + 3t^2)$, $a(t) = e^{-t}(t^3 - 6t^2 + 6t)$;



29.

positiva	negativa
cero	cero
positiva	positiva
positiva	negativa
negativa	negativa
negativa	positiva

frenándose en los intervalos de tiempo (a, b), (d, e), (f, g); aumentando la velocidad en los intervalos de tiempo (c, d), (e, f)

31. ***a)*** $v > 0$ en $\left[0, \frac{3}{2}\right)$, $v < 0$ en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}(6 + \sqrt{42})\right]$
b) 42 pies
33. $64\sqrt{2}$ pies/s; 16 pies/s^2
35. $-8\sqrt{\pi}$ pies/s; la coordenada y es decreciente

Ejercicios 4.2, página 200

1. $\dfrac{dV}{dt} = 3x^2 \dfrac{dx}{dt}$ **3.** $8\sqrt{3}$ cm^2/h

5. $\dfrac{4}{3}$ pulg/h **7.** $\dfrac{dx}{dt} = s \cos\theta \dfrac{d\theta}{dt} + \text{sen}\,\theta \dfrac{ds}{dt}$

9. -6 o 6 **11.** $\dfrac{4}{9}$ cm^2/h

13. ***a***) 1 pie/s ***b***) 4 pies/s

15. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ pies/min **19.** 17 nudos

21. $-\dfrac{5}{4}$ pies/s **23.** 15 rad/h

25. -360 mi/h **27.** $\dfrac{8\pi}{9}$ km/min

29. ***a***) $500\sqrt{3}$ mi/h ***b***) 500 mi/h

31. $\dfrac{5}{32\pi}$ m/min

33. ***a***) $-\dfrac{1}{4\pi}$ pie/min ***b***) $-\dfrac{1}{12\pi}$ pie/min
c) aproximadamente -0.0124 pie/min

35. ***a***) $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$ pie/min ***c***) $\dfrac{165\sqrt{3}}{4} \approx 71.45$ min; 0.035 pie/min

39. $-\dfrac{1}{3}$ pulg^2/min **41.** 668.7 pies/min

43. $\dfrac{dR}{dt} = \dfrac{R^2}{R_1^2}\dfrac{dR_1}{dt} + \dfrac{R^2}{R_2^2}\dfrac{dR_2}{dt}$

45. ***a***) aumenta ***b***) aproximadamente 2.8% por día

47. ***a***) 24 000 kg km/h^2 ***b***) 2 023 100 kg km/h^2

Ejercicios 4.3, página 209

1. ***a***) máx. abs. $f(2) = -2$, mín. abs. $f(-1) = -5$
b) máx. abs. $f(7) = 3$, mín. abs. $f(3) = -1$
c) no extrema
d) máx. abs. $f(4) = 0$, mín. abs. $f(1) = -3$

3. ***a***) máx. abs. $f(4) = 0$, mín. abs. $f(2) = -4$
b) máx. abs. $f(1) = f(3) = -3$, mín. abs. $f(2) = -4$
c) mín. abs. $f(2) = -4$
d) máx. abs. $f(5) = 5$

5. ***a***) no extrema
b) máx. abs. $f(\pi/4) = 1$, mín. abs. $f(-\pi/4) = -1$
c) máx. abs. $f(\pi/3) = \sqrt{3}$, mín. abs. $f(0) = 0$
d) no extrema

7. $\dfrac{3}{2}$ **9.** $-1, 6$

11. $\dfrac{4}{3}, 2$ **13.** 1

15. $\dfrac{3}{4}$ **17.** $-2, -\dfrac{11}{7}, 1$

19. $2n\pi$, n un entero **21.** 2

23. máx. abs. $f(3) = 9$, mín. abs. $f(1) = 5$

25. máx. abs. $f(8) = 4$, mín. abs. $f(0) = 0$

27. máx. abs. $f(0) = 2$, mín. abs. $f(-3) = -79$

29. máx. abs. $f(3) = 8$, mín. abs. $f(-4) = -125$

31. máx. abs. $f(2) = 16$, mín. abs. $f(0) = f(1) = 0$

33. máx. abs. $f(\pi/6) = f(5\pi/6) = f(7\pi/6) = f(11\pi/6) = \frac{3}{2}$,
mín. abs. $f(\pi/2) = f(3\pi/2) = -3$

35. máx. abs. $f(\pi/8) = f(3\pi/8) = f(5\pi/8) = f(7\pi/8) = 5$,
mín. abs. $f(0) = f(\pi/4) = f(\pi/2) = f(3\pi/4) = f(\pi) = 3$

37. punto extremo máx. abs. $f(3) = 3$, máx. rel. $f(0) = 0$,
mín. abs. $f(-1) = f(1) = -1$

39. ***a***) c_1, c_3, c_4, c_{10}
b) $c_2, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9$
c) mín. abs. $f(c_7)$, punto extremo máx. abs. $f(b)$
d) máx. rel. $f(c_3), f(c_5), f(c_9)$, mín. rel. $f(c_2), f(c_4), f(c_7), f(c_{10})$

41. ***a***) $s(t) \geq 0$ sólo para $0 \leq t \leq 20$ ***b***) $s(10) = 1\,600$

53. ***b***) $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi$
c) máx. abs. $f(\pi) = 3$, mín. abs. $f(\pi/3) = f(5\pi/3) = -\frac{3}{2}$

Ejercicios 4.4, página 215

1. $c = 0$ **3.** $f(-3) = 0$ pero $f(-2) \neq f(-3)$

5. $c = -\dfrac{2}{3}$ **7.** $c = -\pi/2, \pi/2$, o $3\pi/2$

9. f no es diferenciable sobre el intervalo

11. $f(a) \neq 0$ y $f(b) = 0$, así, $f(a) \neq f(b)$

13. $c = 3$ **15.** $c = \sqrt{13}$

17. f no es continua sobre el intervalo

19. $c = \dfrac{9}{4}$ **21.** $c = 1 - \sqrt{6}$

23. f no es continua sobre $[a, b]$

25. f creciente en $[0, \infty)$; f decreciente en $(-\infty, 0]$

27. f creciente en $[-3, \infty)$; f decreciente en $(-\infty, -3]$

29. f creciente en $(-\infty, 0]$ y $[2, \infty)$; f decreciente en $[0, 2]$

31. f creciente en $[3, \infty)$; f decreciente en $(-\infty, 0]$ y $[0, 3]$

33. f decreciente en $(-\infty, 0]$ y $[0, \infty)$

35. f creciente en $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$; f decreciente en $[-1, 0]$ y $[0, 1]$

37. f creciente en $[-2, 2]$; f decreciente en $[-2\sqrt{2}, -2]$ y $[2, 2\sqrt{2}]$

39. f creciente en $(-\infty, 0]$; f decreciente en $[0, \infty)$

41. f creciente en $(-\infty, 1]$ y $[3, \infty)$; f decreciente en $[1, 3]$

43. f creciente en $[-\pi/2 + 2n\pi, \pi/2 + 2n\pi]$; f decreciente en $[\pi/2 + 2n\pi, 3\pi/2 + 2n\pi]$, donde n es un entero

45. f creciente en $[0, \infty)$; f decreciente en $(-\infty, 0]$

47. f es creciente en $(-\infty, \infty)$

49. si el motociclista viaja a la velocidad límite, no habrá recorrido más de 65 mi

61. $c \approx 0.3451$ radián

Ejercicios 4.5, página 222

1. 0 **3.** 2

5. $\dfrac{2}{3}$ **7.** 10

9. -6 **11.** $\dfrac{1}{2}$

13. $\dfrac{7}{5}$ **15.** $\dfrac{1}{6}$

17. no existe **19.** $\dfrac{1}{2}$

21. $2e^4$

23. 0

25. $\frac{1}{3}$

27. ∞

29. -2

31. $-\frac{1}{8}$

33. -1

35. no existe

37. $\frac{1}{9}$

39. 3

41. $\infty - \infty$; $-\frac{1}{2}$

43. $0 \cdot \infty$; 1

45. 0^0; 1

47. $\infty - \infty$; 0

49. $\infty - \infty$; $\frac{1}{24}$

51. $0 \cdot \infty$; $\frac{1}{4}$

53. ∞^0; 1

55. 1^∞; e^3

57. 0^0; 1

59. El denominador es $0 \cdot \infty$; $\frac{1}{4}$

61. $\infty - \infty$; $\frac{1}{5}$

63. $0 \cdot \infty$; 0

65. $0 \cdot \infty$; 1

67. $0 \cdot \infty$; 5

69. $\infty - \infty$; no existe

71. 1^∞; $e^{-1/3}$

73. 0^0; 1

75. $\frac{1}{2}$

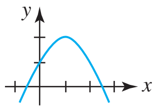
79. 0

81. ***a)*** $A(\theta) = 25\dfrac{\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta}{\theta^2}$ ***b)*** 0 ***c)*** $\frac{50}{3}$

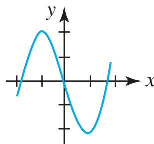
83. ***b)*** $p_1 v_1 \ln(v_2/v_1)$

Ejercicios 4.6, página 228

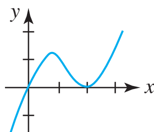
1. máx. rel. $f(1) = 2$;



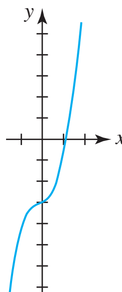
3. máx. rel. $f(-1) = 2$, mín. rel. $f(1) = -2$;



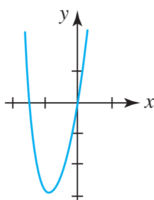
5. máx. rel. $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}$, mín. rel. $f(2) = 0$;



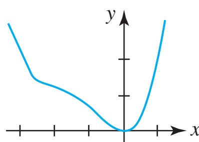
7. no extrema;



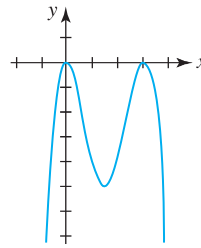
9. mín. rel. $f(-1) = -3$;



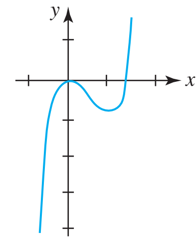
11. mín. rel. $f(0) = 0$;



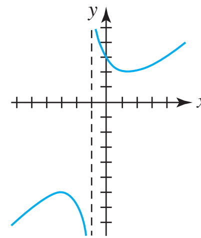
13. máx. rel. $f(0) = f(3) = 0$, mín. rel. $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{81}{16}$;



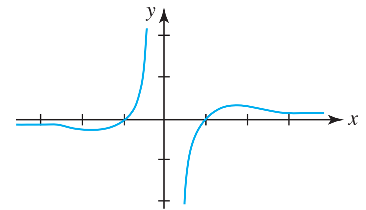
15. máx. rel. $f(0) = 0$, mín. rel. $f(1) = -1$;



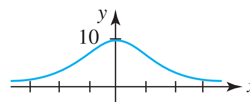
17. máx. rel. $f(-3) = -6$, mín. rel. $f(1) = 2$;



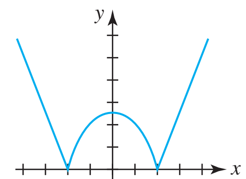
19. máx. rel. $f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, mín. rel. $f(-\sqrt{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$;



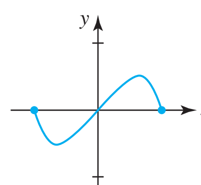
21. máx. rel. $f(0) = 10$;



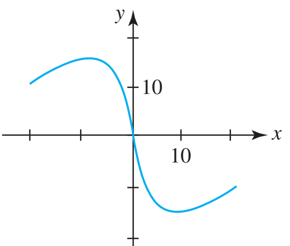
23. máx. rel. $f(0) = \sqrt[3]{16}$, mín. rel. $f(-2) = f(2) = 0$;



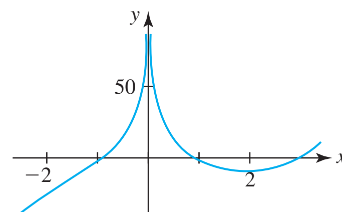
25. máx. rel. $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$, mín. rel. $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$;



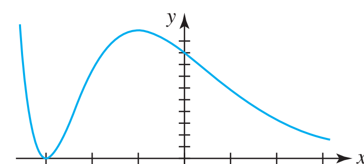
27. máx. rel. $f(-8) = 16$, mín. rel. $f(8) = -16$;



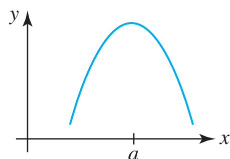
29. mín. rel. $f(2) \approx -8.64$;



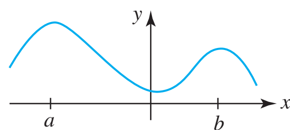
31. mín. rel. $f(-3) = 0$, máx. rel. $f(-1) = 4e$;



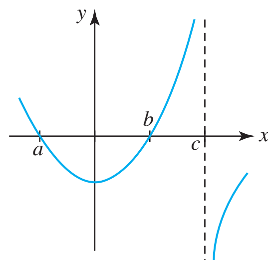
33.



35.

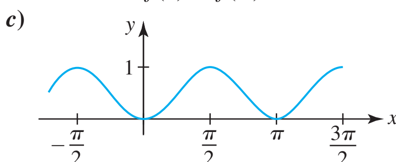


37.



43. mín. rel. $f'(-2) = -13$

45. ***a***) $(n\pi, \pi/2 + n\pi)$, $(\pi/2 + n\pi, \pi + n\pi)$, n un entero
b) $n\pi/2$, n un entero; máx. rel. es $f(-\pi/2) = f(\pi/2) = \cdots 1$, mín. rel. es $f(0) = f(\pi) = \cdots 0$
c)



Ejercicios 4.7, página 233

1. cóncava hacia abajo $(-\infty, \infty)$

3 cóncava hacia arriba $(-\infty, 2)$; cóncava hacia abajo $(2, \infty)$

5. cóncava hacia arriba $(-\infty, 2)$ y $(4, \infty)$; cóncava hacia abajo $(2, 4)$

7. cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$; cóncava hacia abajo $(0, \infty)$

9. cóncava hacia arriba $(0, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$

11. cóncava hacia arriba $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-1, 1)$

13. respuestas aproximadas: f' creciente en $(-2, 2)$; f' decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$

15. respuestas aproximadas: f' creciente en $(-\infty, -1)$ y $(3, \infty)$; f' decreciente en $(-1, 3)$

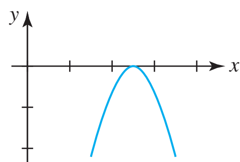
19. $(-\sqrt{2}, -21 - \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -21 + \sqrt{2})$

21. $(n\pi, 0)$, n un entero

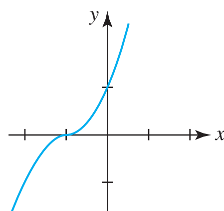
23. $(n\pi, n\pi)$, n un entero

25. $(2, 2 + 2e^{-2})$

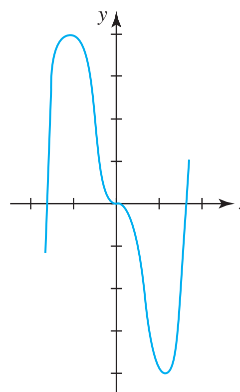
27. máx. rel. $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$;



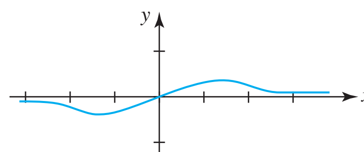
29. punto de inflexión: $(-1, 0)$;



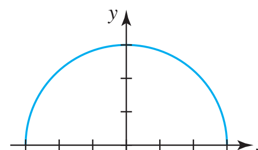
31. máx. rel. $f(-1) = 4$, mín. rel. $f(1) = -4$; puntos de inflexión: $(0, 0)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)$;



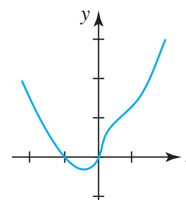
33. máx. rel. $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, mín. rel. $f(-\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$;
puntos de inflexión: $(0, 0)$, $\left(-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{8}\right)$, $\left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{8}\right)$;



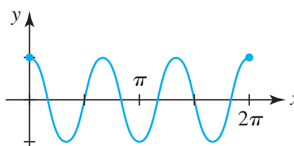
35. máx. rel. $f(0) = 3$;



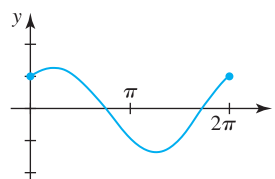
37. mín. rel. $f\left(-\frac{1}{4}\right) = -3/4^{4/3}$;
puntos de inflexión: $(0, 0)$, $(1/2, 3/2^{4/3})$;



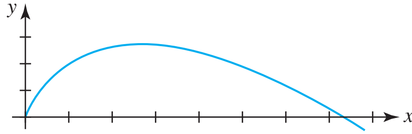
39. máx. rel. $f(2\pi/3) = f(4\pi/3) = 1$,
mín. rel. $f(\pi/3) = f(\pi) = f(5\pi/3) = -1$;
puntos de inflexión: $(\pi/6, 0)$, $(\pi/2, 0)$, $(5\pi/6, 0)$, $(7\pi/6, 0)$, $(9\pi/6, 0)$, $(11\pi/6, 0)$;



41. máx. rel. $f(\pi/4) = \sqrt{2}$, máx. rel. $f(5\pi/4) = -\sqrt{2}$;
puntos de inflexión: $(3\pi/4, 0)$, $(7\pi/4, 0)$;



43. máx. rel. $f(e) = e$;



45. máx. rel. $f(\pi/4) = \frac{1}{2}$

47. mín. rel. $f(\pi) = 0$

Ejercicios 4.8, página 240

1. 30 y 30

3. $\dfrac{1}{2}$

5. $\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{2}{3}$

7. $(2, 2\sqrt{3}), (2, -2\sqrt{3})$; $(0, 0)$

9. $\left(\frac{4}{3}, -\frac{128}{27}\right)$

11. base $\frac{3}{2}$, altura 1

13. (4, 0) y (0, 8)

15. 750 pies por 750 pies

17. 2 000 m por 1 000 m

19. el jardín debe ser rectangular con 40 pies de largo y 20 pies de ancho

21. base 40 cm por 40 cm, altura 20 cm

23. base $\frac{80}{3}$ cm por $\frac{80}{3}$ cm, altura $\frac{20}{3}$ cm; máx. vol. $\frac{128\,000}{27}$ cm^3

25. altura $\frac{15}{2}$ cm, ancho 15 cm

27. 10 pies del poste de la bandera al lado derecho en la figura 4.8.19

29. radio de la porción circular $10/(4 + \pi)$ m, ancho $20/(4 + \pi)$ m, altura de la porción rectangular $10/(4 + \pi)$ m

31. $L \approx 20.81$ pies

33. radios 16/3, altura 4

35. radios $\sqrt[3]{16/\pi}$, altura $2\sqrt[3]{16/\pi}$

37. volar al punto 17.75 km desde el nido

39. costo mínimo cuando $x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

41. $r = \sqrt[3]{9}$, $h = 2\sqrt[3]{9}$

43. longitud mínima cuando $x = 6.375$ pulg

45. cuadrado con longitud de lado $(a + b)/\sqrt{2}$

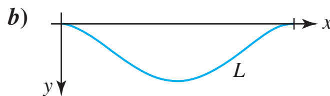
47. longitud de la sección transversal $\sqrt{3}d/3$, ancho de la sección transversal $\sqrt{6}d/3$

49. $\frac{50}{11}$ m del foco con iluminancia I_1

53. $-\dfrac{1}{8}$

55. ***a)*** $w_0L^4/384EI$

b)



65. Debe nadar del punto *A* al punto *B* alrededor de 3.18 millas desde el punto en la playa más cercano a *A*, y después seguir directamente a *C*.

67. ***a)*** $L = x + 2\sqrt{4 + (4 - x)^2}$

c) $x = 4 - \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

d) $L = x + \sqrt{1 + (4 - x)^2} + \sqrt{4 + (4 - x)^2}$

f) $x \approx 3.1955$

Ejercicios 4.9, página 252

1. $L(x) = 3 + \dfrac{1}{6}(x - 9)$

3. $L(x) = 1 + 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

5. $L(x) = x - 1$

7. $L(x) = 2 + \dfrac{1}{4}(x - 3)$

17. 0.98

19. 11.6

21. 0.7

23. 0.96

25. 16

27. 0.325

29. 0.4

31. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{120} \approx 0.5453$

33. $L(x) = 4 + 2(x - 1)$; 4.08

35. $\Delta y = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$; $dy = 2x\,dx$

37. $\Delta y = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$; $dy = 2(x + 1)\,dx$

39. $\Delta y = -\dfrac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$; $dy = -\dfrac{1}{x^2}\,dx$

41. $\Delta y = \cos x \operatorname{sen} \Delta x + \operatorname{sen} x(\cos \Delta x - 1)$; $dy = \cos x\,dx$

43.

x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
2	1	25	20	5
2	0.5	11.25	10	1.25
2	0.1	2.05	2	0.05
2	0.01	0.2005	0.2	0.0005

45. ***a)*** 1.11 ***b)*** -2.9

47. ***a)*** 9π cm^2 ***b)*** 8π cm^2

49. el volumen exacto es $\Delta V = \frac{4}{3}\pi(3r^2t + 3rt^2 + t^3)$; el volumen aproximado es $dV = 4\pi r^2 t$, donde $t = \Delta r$; $(0.1024)\pi$ pulg^3

51. ± 6 cm^2; ± 0.06; $\pm 6\%$

55. 2 048 pies; 160 pies

57. ***a)*** mínimo en el ecuador ($\theta = 0°$); máximo en el polo norte ($\theta = 90°$ N)

b) 981.9169 cm/s^2 ***c)*** 0.07856 cm/s^2

59. 0.0102 s

Ejercicios 4.10, página 257

1. una raíz real

3. ninguna raíz real

5. una raíz real

7. 3.1623

9. 1.5874

11. 0.6823

13. ± 1.1414

15. 0, 0.8767

17. 2.4981

19. 1.6560 pies

21. 0.7297

23. ***b)*** 0.0915 pies

25. ***b)*** 0.33711, 44.494 ***c)*** 44.497

27. 1.8955 radianes

29. 1.0000, -1.2494, -2.6638

31. ***d)*** 1.4645

Revisión del capítulo 4, página 260

A. 1. falso

3. falso

5. verdadero

7. falso

9. verdadero

11. verdadero

13. verdadero

15. falso

17. verdadero

19. falso

B. 1. la función velocidad

3. $y = \tan^{-1} x$

5. 0

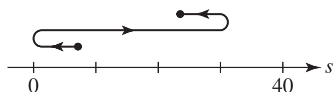
7. 2

9. $2x\Delta x - \Delta x + (\Delta x)^2$

C. 1. máx. abs. $f(-3) = 348$, mín. abs. $f(4) = -86$

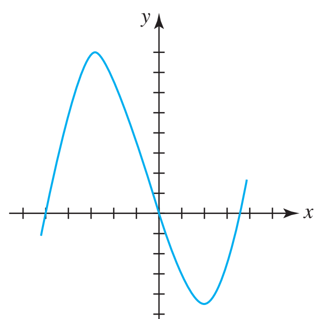
3. máx. abs. $f(3) = \frac{9}{7}$, mín. abs. $f(0) = 0$

7. vel. máx. $v(2) = 12$, rapidez máx. $|v(-1)| = |v(5)| = 15$;

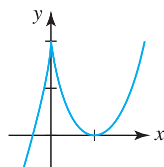


9. ***b)*** $a, b, (a+b)/2$

11. máx. rel. $f(-3) = 81$, mín. rel. $f(2) = -44$;



13. máx. rel. $f(0) = 2$, mín. rel. $f(1) = 0$;



15. mín. rel. $f(0) = 0$, puntos de inflexión: $(-3, 27)$, $(-1, 11)$

17. punto de inflexión: $(3, 10)$

19. ***c), d)***

21. ***c), d), e)***

23. ***c)***

25. $(a+b+c)/3$

27. 32 pulg^2/min

31. $y = \frac{1}{2}h$; la distancia máxima es h

33. $x = 195$ pies, $y = 390$ pies; 57 037.5 pies^2

39. $8\sqrt{3}\pi/9$

41. -2

43. 1

45. e^{-1}

47. $-\infty$

49. 1.6751

Ejercicios 5.1, página 274

1. $3x + C$

3. $\frac{1}{6}x^6 + C$

5. $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$

7. $t - \frac{25}{12}t^{0.48} + C$

9. $x^3 + x^2 - x + C$

11. $\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + C$

13. $\frac{16}{3}x^3 + 4x^2 + x + C$

15. $16w^4 - 16w^3 + 6w^2 - w + C$

17. $\ln|r| + 10r^{-1} - 2r^{-2} + C$

19. $-\frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{4}x^{-4} + C$

21. $-4\cos x - x - 2x^{-4} + C$

23. $-\cot x + \csc x + C$

25. $-2\cot x + 3x + C$

27. $4x^2 + x - 9e^x + C$

29. $x^2 - x + 5\tan^{-1}x + C$

31. $\tan x - x + C$

41. $x^2 - 4x + 5$

43. $2x^3 + 9x + C$

45. $-x^{-1} + C$

47. $x - x^2 - \cos x + C$

49. $y = x^2 - x + 1$

51. $f'(x) = x^2 + C_1$; $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$

53. $f(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2$

55. G

57. $y = \dfrac{\omega^2}{2g}x^2$

Ejercicios 5.2, página 285

1. $-\frac{1}{6}(1-4x)^{3/2} + C$

3. $-\frac{1}{10}(5x+1)^{-2} + C$

5. $\frac{1}{3}(x^2+4)^{3/2} + C$

7. $\frac{1}{18}\operatorname{sen}^6 3x + C$

9. $\frac{1}{6}\tan^3 2x + C$

11. $-\frac{1}{4}\cos 4x + C$

13. $\frac{1}{3}(2t)^{3/2} - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 6t + C$

15. $-\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

17. $\frac{1}{3}\tan x^3 + C$

19. $-2\csc\sqrt{x} + C$

21. $\frac{1}{7}\ln|7x+3| + C$

23. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

25. $x - \ln|x+1| + C$

27. $\ln|\ln x| + C$

29. $-\cos(\ln x) + C$

31. $\frac{1}{10}e^{10x} + C$

33. $-\frac{1}{6}e^{-2x^3} + C$

35. $-2e^{-\sqrt{x}} + C$

37. $\ln(e^x + e^{-x}) + C$

39. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$

41. $\frac{1}{5}\tan^{-1}5x + C$

43. $\tan^{-1}e^x + C$

45. $-2\sqrt{1-x^2} - 3\operatorname{sen}^{-1}x + C$

47. $\frac{1}{2}(\tan^{-1}x)^2 + C$

49. $-\frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + C$

51. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$

53. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 8x + C$

55. $11x + 12\cos x - \operatorname{sen} 2x + C$

57. $-\frac{3}{4}(1-x)^{4/3} + C$

59. $y = x + 2\cos 3x + 1 - \pi$

63. ***b)*** $\frac{1}{2}\pi\sqrt{L/g}$ ***c)*** $2\pi\sqrt{L/g}$

Ejercicios 5.3, página 293

1. $3 + 6 + 9 + 12 + 15$

3. $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4}$

5. $-\frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25}$

7. $(2^2 - 4) + (3^2 - 6) + (4^2 - 8) + (5^2 - 10)$

9. $-1 + 1 - 1 + 1 - 1$

11. $\sum_{k=1}^{7}(2k+1)$

13. $\sum_{k=0}^{12}(3k+1)$

15. $\sum_{k=1}^{5}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$

17. $\sum_{k=1}^{8}6$

19. $\sum_{k=1}^{4}\dfrac{(-1)k^{k+1}}{k^2}\cos\dfrac{k\pi}{p}x$

21. 420

23. 65

25. 109

27. 3 069

29. 18

31. 28

33. $\frac{8}{3}$

35. $\frac{4}{3}$

37. $\frac{16}{3}$

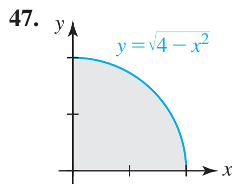
39. $\frac{1}{4}$

41. $\frac{25}{2}$

43. $\frac{77}{60}; \frac{25}{12}$

45. 9

47.



Ejercicios 5.4, página 303

1. $\frac{33}{2}$; 1

3. $\frac{189}{256}$; $\frac{3}{4}$

5. $\frac{1}{4}(3 - \sqrt{2})\pi$; π

7. 5

9. $\int_{-2}^{4} \sqrt{9 + x^2}\, dx$

11. $\int_{0}^{2} (1 + x)\, dx$

13. -4

15. $\frac{5}{6}$

17. $-\frac{3}{4}$

21. 4

23. 12

25. -3

27. 40

29. $-\frac{28}{3}$

31. -32

33. $\frac{28}{3}$

35. 36

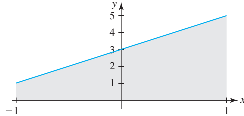
37. 0

39. 2.5

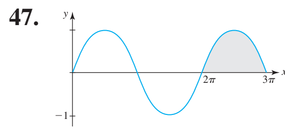
41. 11

43. ***a***) -2.5 ***b***) 3.9 ***c***) -1.2 ***d***) 1.4 ***e***) 2.7 ***f***) 0.2

45.



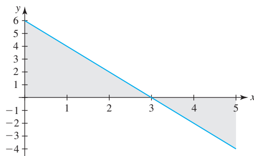
47.



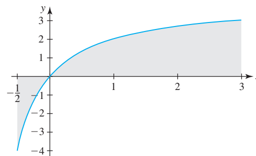
49. 18

51. $\frac{9}{4}\pi$

53.



55.



57. 15

59. $-\frac{\pi}{2}$

61. -2

63. $\frac{5}{2}$

69. $\geq$

Ejercicios 5.5, página 313

1. 4

3. 12

5. 46

7. 1

9. $-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$

11. $\frac{2}{3}$

13. $e - e^{-1}$

15. $-\frac{2}{3}$

17. $-\frac{28}{3}$

19. $\frac{8}{3}$

21. $\frac{\pi}{12}$

23. $\frac{128}{3}$

25. 1

27. $\frac{65}{4}$

29. $\sqrt{6} - \sqrt{3}$

31. $\frac{1}{2}$

33. 1

35. $\frac{2}{3}$

37. $\frac{4\pi + 6}{(\pi + 2)(\pi + 3)}$

39. $\frac{3}{8} + \frac{1}{4\pi}$

41. $\frac{1}{2}\ln\frac{11}{3}$

43. xe^x

45. $(3t^2 - 2t)^6$

47. $6\sqrt{24x + 5}$

49. $\frac{2x}{x^6 + 1} - \frac{3}{27x^3 + 1}$

53. ***a***) 0 ***b***) $\ln 3$ ***c***) $\frac{2}{3}$ ***d***) $-\frac{4}{9}$

55. $\frac{19}{6}$

57. 9

59. $\frac{38}{3}$

61. 5

63. 22

65. 4

67. $\frac{1}{6}(1 + \ln 2)^6$

69. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2}}\right)$

Revisión del capítulo 5, página 316

A. 1. falso

3. verdadero

5. verdadero

7. verdadero

9. falso

11. verdadero

13. falso

15. verdadero

B. 1. $f(x)$

3. $\frac{\ln x}{x}$

5. $-f(g(x))g'(x)$

7. $\sum_{k=1}^{5} \frac{k}{2k + 1}$

9. $\int_{5}^{17}$

11. $\frac{5}{2}$

13. $\int_{0}^{4} \sqrt{x}\, dx$; $\frac{16}{3}$

15. $2 + e^{-1} - e$; $e - e^{-1}$

C. 1. -6

3. $\frac{1}{505}(5t + 1)^{101} + C$

5. $\frac{1}{2}$

7. 0

9. $-\frac{1}{56}\cot^7 8x + C$

11. $\frac{1}{40}(4x^2 - 16x + 7)^5 + C$

13. $\frac{1}{2}(x^3 + 3x - 16)^{2/3} + C$

15. $\frac{1}{2}\ln 2$

17. $\frac{\pi}{6}$

19. $-\frac{1}{10}\ln|\cos 10x| + C$

21. 5

23. $\frac{11}{2}$

25. 0

27. $\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$

29. $\frac{1}{2}$

31. 156 lb; aproximadamente 20 min

33. $\frac{51}{4}$

Ejercicios 6.1, página 323

1. $s(t) = 6t - 7$

3. $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 15$

5. $s(t) = -\frac{5}{2}\operatorname{sen}(4t + \pi/6) + \frac{5}{2}$

7. $v(t) = -5t + 9;\quad s(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 9t - \frac{9}{2}$

9. $v(t) = t^3 - 2t^2 + 5t - 3;\ s(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 3t + 10$

11. $v(t) = \frac{21}{4}t^{4/3} - t - 26;\quad s(t) = \frac{9}{4}t^{7/3} - \frac{1}{2}t^2 - 26t - 48$

13. 17 cm
15. 34 cm
17. 24 cm
19. $\frac{1}{30}$ mi $= 176$ pies
21. 256 pies
23. 30.625 m
25. 400 pies; 6 s
27. -80 pies/s

Ejercicios 6.2, página 331

1. $\frac{4}{3}$
3. $\frac{81}{4}$
5. $\frac{9}{2}$
7. $\frac{11}{2}$
9. $\frac{11}{4}$
11. $\frac{11}{6}$
13. 2
15. $\frac{3}{4}(2^{4/3} + 3^{4/3})$
17. 4
19. 2π
21. $\frac{7}{3}$
23. $\frac{27}{2}$
25. $\frac{32}{3}$
27. $\frac{81}{4}$
29. 4
31. $\frac{10}{3}$
33. $\frac{64}{3}$
35. $\frac{128}{5}$
37. $\frac{118}{3}$
39. 22
41. $\frac{9}{2}$
43. $\frac{8}{3}$
45. 8
47. $2\sqrt{2} - 2$
49. $4\sqrt{3} - 4\pi/3$
53. $7 + 3\ln\frac{3}{4} \approx 6.1370$
55. $9\pi/4$
57. $4 + 2\pi$
59. πab
61. $\frac{52}{3}$

63. $A = \int_0^{\ln\frac{3}{2}} (e^x - 1)\,dx + \int_{\ln\frac{3}{2}}^{\ln 2} (2 - e^x)\,dx,$

$A = \int_1^2 \left[\ln y - \ln\frac{1}{2}(y + 1)\right] dy;\qquad \ln\frac{32}{27} \approx 0.1699$

Ejercicios 6.3, página 338

1. $\frac{256\sqrt{3}}{3}$
3. 128
5. $10\pi/3$
7. 9
9. $\pi/2$
11. $4\pi/5$
13. $\pi/6$
15. $1\,296\pi/5$
17. $\pi/2$
19. $32\pi/5$
21. 32π
23. $7\pi/3$
25. $256\pi/15$
27. $3\pi/5$
29. 36π
31. $500\pi/3$
33. $16\pi/105$
35. $\pi\left(2e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}\right)$
37. π^2
39. $\frac{1}{4}(4\pi - \pi^2)$

Ejercicios 6.4, página 344

1. $4\pi/5$
3. $\pi/6$
5. $8\pi/15$
7. $250\pi/3$
9. $36\sqrt{3}\pi/5$
11. $3\pi/2$
13. 16π
15. $8\pi/5$
17. $21\pi/10$
19. $\pi/6$
21. $243\pi/10$
23. 4π
25. $625\pi/6$
27. $248\pi/15$
29. $\frac{1}{2}(\pi^2 - 2\pi)$
31. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
33. $\frac{4}{3}\pi r^3$
35. $\frac{4}{3}\pi ab^2$
37. $V = \pi r^2 h - \frac{\pi\omega^2 r^4}{4g}$

Ejercicios 6.5, página 347

1. $2\sqrt{2}$
3. $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8) \approx 1.4397$
5. 45
7. $\frac{10}{3}$
9. $\frac{4\,685}{288} \approx 16.2674$
11. 9
13. $\int_{-1}^{3} \sqrt{1 + 4x^2}\,dx$
15. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$
17. $\frac{1}{27}(40^{3/2} - 8) \approx 9.0734$
19. *b*) 6
21. $\pi/2$

Ejercicios 6.6, página 350

1. $208\pi/3$
3. $\frac{\pi}{27}(10^{3/2} - 1) \approx 3.5631$
5. $\frac{\pi}{6}(37^{3/2} - 1) \approx 117.3187$
7. $100\sqrt{5}\pi$
9. $253\pi/20$
11. ***a***) $(\pi r/6h^2)\left[(r^2 + 4h^2)^{3/2} - r^3\right]$
b) aproximadamente $0.99\% < 1\%$
13. $20\sqrt{2}\pi$

Ejercicios 6.7, página 354

1. -4 **3.** $\frac{34}{3}$
5. 3 **7.** 0
9. 2 **11.** $\frac{61}{9}$
13. 24 **15.** $\frac{1}{12}$
17. 0 **19.** $3\sqrt{3}/\pi$
21. $-1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 0.1547$ **23.** 12
25. 103° **29.** $2kt_1/3$

Ejercicios 6.8, página 360

1. 3 300 pies-lb **3.** $\frac{2}{5}$pies
5. ***a)*** 10 joules ***b)*** 27.5 joules
7. ***a)*** 7.5 pies-lb ***b)*** 37.5 pies-lb
9. 453.1×10^8 joules **11.** 127 030.9 pies-lb
13. 45 741.6 pies-lb **15.** 57 408 pies-lb
17. 64 000 pies-lb
19. ***a)*** 5 200 pies-lb ***b)*** 6 256.25 pies-lb
21. $3k/4$, donde k es la constante de proporcionalidad

Ejercicios 6.9, página 365

1. ***a)*** 196 000 N/m^2; 4 900 000πN
b) 196 000 N/m^2; 784 000πN
c) 196 000 N/m^2; 19 600 000πN
3. ***a)*** 499.2 lb/pie^2; 244 640 lb ***b)*** 59 904 lb; 29 952 lb
5. 129.59 lb **7.** 1 280 lb
9. 3 660.8 lb **11.** 13 977.6 lb
13. 9 984π lb **15.** 5 990.4 lb

Ejercicios 6.10, página 372

1. $-\frac{2}{7}$ **3.** $-\frac{13}{30}$
5. 1 **7.** $\frac{115}{36}$
9. $\frac{4}{7}$ **11.** $\frac{19}{15}$
13. $\frac{11}{10}$ **15.** $\frac{15}{2}$
17. $\bar{x} = -\frac{2}{7}, \bar{y} = \frac{17}{7}$ **19.** $\bar{x} = \frac{17}{11}, \bar{y} = -\frac{20}{11}$
21. $\bar{x} = \frac{10}{9}, \bar{y} = \frac{28}{9}$ **23.** $\bar{x} = \frac{3}{4}, \bar{y} = \frac{3}{10}$
25. $\bar{x} = \frac{12}{5}, \bar{y} = \frac{54}{7}$ **27.** $\bar{x} = \frac{93}{35}, \bar{y} = \frac{45}{56}$
29. $\bar{x} = \frac{1}{2}, \bar{y} = \frac{8}{5}$ **31.** $\bar{x} = \frac{16}{35}, \bar{y} = \frac{16}{35}$
33. $\bar{x} = \frac{3}{2}, \bar{y} = \frac{121}{540}$ **35.** $\bar{x} = -\frac{7}{10}, \bar{y} = \frac{7}{8}$
37. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 2$ **39.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{1}{8}(\pi + 8)$

Revisión del capítulo 6, página 373

A. 1. falso **3.** verdadero
5. verdadero **7.** verdadero
9. verdadero **11.** falso

B. 1. joule **3.** 2 500 pies-lb
5. 6 **7.** suave

C. 1. $-\int_0^a f(x)\,dx$ **3.** $\int_0^a \left[f(x) - \frac{f(a)}{a}x\right] dx$
5. $-\int_a^b 2f(x)\,dx + \int_b^c 2f(x)\,dx$
7. $\int_b^c [a - f(y)]\,dy + \int_c^d [f(y) - a]\,dy$
9. $\frac{1}{4}a^2 + b^2$
11. $\bar{x} = \dfrac{\int_0^2 x\,[f(x) - g(x)]\,dx}{\int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx}, \bar{y} = \dfrac{\frac{1}{2}\int_0^2 \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx}{\int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx}$
13. $2\pi\int_0^2 x[f(x) - g(x)]\,dx$
15. $2\pi\int_0^2 (2 - x)[f(x) - g(x)]\,dx$
17. $\frac{5}{2}$ **19.** ***a)*** 4 ***b)*** π
21. $\frac{315\sqrt{41}}{16}\pi$ pies$^2 \approx 396.03$ pies^2 **23.** $\frac{256}{45}$
25. 37.5 joules **27.** 624 000 pies-lb
29. 2 040 pies-lb **31.** 691 612.83 pies-lb
33. $\frac{1}{27}(40^{3/2} - 8) \approx 9.07$ **35.** 17 066.7 N
37. $\frac{3}{4}$ m desde la izquierda sobre la barra de 1 m y $\frac{6}{5}$ m desde la izquierda en la barra de 2 m

Ejercicios 7.1, página 382

1. $-\frac{5^{-5x}}{5 \ln 5} + C$ **3.** $-2 \cos \sqrt{1 + x} + C$
5. $-\frac{1}{4}\sqrt{25 - 4x^2} + C$ **7.** $\frac{1}{5}\sec^{-1}\left|\frac{2}{5}x\right| + C$
9. $\frac{1}{10}\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}x\right) + C$ **11.** $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{2x - 5}{2x + 5}\right| + C$
13. $\frac{1}{10}\ln|\text{sen } 10x| + C$ **15.** $(3 - 5t)^{-1.2} + C$
17. $\frac{1}{3}\ln|\sec 3x + \tan 3x| + C$ **19.** $\frac{1}{2}(\text{sen}^{-1} x)^2 + C$
21. $-\tan^{-1}(\cos x) + C$ **23.** $\frac{1}{4}\tanh x^4 + C$
25. $\frac{1}{2}\sec 2x + C$ **27.** $\csc(\cos x) + C$
29. $\frac{1}{3}(1 + \tan x)^3 + C$ **31.** $\frac{1}{2}\ln(1 + e^{2x}) + C$

Ejercicios 7.2, página 385

1. $\frac{1}{5}(x+1)^5 - \frac{1}{4}(x+1)^4 + C$

3. $\frac{4}{5}(x-5)^{5/2} + \frac{22}{3}(x-5)^{3/2} + C$

5. $\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + 2(x-1)^{1/2} + C$

7. $\frac{2}{9}(3x-4)^{1/2} - \frac{26}{9}(3x-4)^{-1/2} + C$

9. $2\sqrt{x} - 2\tan^{-1}\sqrt{x} + C$

11. $(\sqrt{t}+1)^2 - 10(\sqrt{t}+1) + 8\ln(\sqrt{t}+1) + C$

13. $\frac{3}{10}(x^2+1)^{5/3} - \frac{3}{4}(x^2+1)^{2/3} + C$

15. $-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + C$

17. $2\sqrt{e^x-1} - 2\tan^{-1}\sqrt{e^x-1} + C$

19. $\frac{4}{5}(1-\sqrt{v})^{5/2} - \frac{4}{3}(1-\sqrt{v})^{3/2} + C$

21. $\frac{4}{3}(1+\sqrt{t})^{3/2} + C$

23. $\ln(x^2+2x+5) + \frac{5}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

25. $-2\sqrt{16-6x-x^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x+3}{5}\right) + C$

27. $2x^{1/2} + 3x^{1/3} + 6x^{1/6} + 6\ln|x^{1/6}-1| + C$

29. $\frac{506}{375}$ **31.** $6 + 20\ln\frac{11}{14}$

33. $\frac{177}{2}$ **35.** $\frac{1}{1\,326}$

37. $3 + 3\ln\frac{2}{3}$ **39.** $\frac{1}{168}$

43. $-\frac{3}{2} + 3\ln 2$ **45.** $\frac{32\pi}{3} - 4\pi\ln 3$

47. $\frac{232}{15}$

Ejercicios 7.3, página 392

1. $\frac{2}{3}x(x+3)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+3)^{5/2} + C$

3. $x\ln 4x - x + C$ **5.** $\frac{1}{2}x^2\ln 2x - \frac{1}{4}x^2 + C$

7. $-x^{-1}\ln x - x^{-1} + C$ **9.** $t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t + C$

11. $x\operatorname{sen}^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$ **13.** $\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$

15. $-\frac{1}{4}x^3e^{-4x} - \frac{3}{16}x^2e^{-4x} - \frac{3}{32}xe^{-4x} - \frac{3}{128}e^{-4x} + C$

17. $\frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$ **19.** $\frac{1}{8}t\operatorname{sen}8t + \frac{1}{64}\cos 8t + C$

21. $-x^2\cos x + 2x\operatorname{sen}x + 2\cos x + C$

23. $\frac{1}{3}x^3\operatorname{sen}3x + \frac{1}{3}x^2\cos 3x - \frac{2}{9}x\operatorname{sen}3x - \frac{2}{27}\cos 3x + C$

25. $\frac{1}{17}e^x(\operatorname{sen}4x - 4\cos 4x) + C$ **27.** $\frac{1}{5}e^{-2\theta}(\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta) + C$

29. $\theta\sec\theta - \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$

31. $\frac{1}{3}\cos x\cos 2x + \frac{2}{3}\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x + C$

33. $\frac{1}{3}x^2(x^2+4)^{3/2} - \frac{2}{15}(x^2+4)^{5/2} + C$

35. $\frac{1}{2}x\operatorname{sen}(\ln x) - \frac{1}{2}x\cos(\ln x) + C$

37. $-\frac{1}{2}\csc x\cot x + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| + C$

39. $x\tan x + \ln|\cos x| + C$ **41.** $\frac{3}{2}\ln 3$

43. $-12e^{-2} + 8e^{-1}$ **45.** $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

47. $3\ln 3 + e^{-1}$

49. $5\pi(\ln 5)^2 - 10\pi\ln 5 + 8\pi$

51. $2\pi^2$ **53.** $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

55. $v(t) = -te^{-t} - e^{-t} + 2;\quad s(t) = te^{-t} + 2e^{-t} + 2t - 3$

57. $(124.8)\cdot\frac{8(\pi-2)}{\pi^2} \approx 115.48$ lb

59. $4\tan^{-1}2 - \pi/2 - \ln\frac{5}{2}$

61. $-2\sqrt{x+2}\cos\sqrt{x+2} + 2\operatorname{sen}\sqrt{x+2} + C$

67. $-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x\cos x - \frac{2}{3}\cos x + C$

69. $\frac{1}{30}\cos^2 10x\operatorname{sen}10x + \frac{1}{15}\operatorname{sen}10x + C$

73. $\frac{35\pi}{256}$ **83.** *b)* $\frac{17\pi}{4}$

Ejercicios 7.4, página 398

1. $\frac{2}{3}(\operatorname{sen}x)^{3/2} + C$ **3.** $\operatorname{sen}x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$

5. $-\cos t + \frac{2}{3}\cos^3 t - \frac{1}{5}\cos^5 t + C$ **7.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x + C$

9. $\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2t + \frac{1}{32}\operatorname{sen}4t + C$

11. $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen}4x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C$

13. $\frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\operatorname{sen}4x + \frac{1}{1\,024}\operatorname{sen}8x + C$

15. $\frac{1}{8}\tan^4 2t + \frac{1}{12}\tan^6 2t + C$

17. $\frac{1}{4}\tan x\sec^3 x - \frac{1}{8}\sec x\tan x - \frac{1}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$

19. $\frac{2}{3}(\sec x)^{3/2} + 2(\sec x)^{-1/2} + C$ **21.** $\frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{1}{5}\sec^5 x + C$

23. $\frac{1}{4}\tan x\sec^3 x + \frac{3}{8}\sec x\tan x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$

25. $\ln|\operatorname{sen}x| + \frac{1}{2}\cos^2 x + C$

27. $-\frac{1}{11}\cot^{11}x - \frac{1}{13}\cot^{13}x + C$

29. $\frac{1}{7\tan^7(1-t)} + \frac{1}{5\tan^5(1-t)} + C$

31. $\frac{1}{2}\sec x\tan x + 2\sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$

33. $\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$ **35.** $-\frac{1}{2}\csc^2 t - \ln|\operatorname{sen} t| + C$

37. $\frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + C$ **39.** $-\frac{1}{2}\cos x^2 + \frac{1}{6}\cos^3 x^2 + C$

41. $\frac{25\sqrt{2}}{168}$ **43.** 0

45. $\frac{3}{4}$ **47.** $-\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + C$

49. $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + C$ **51.** $\frac{5}{12}$

55. $\frac{16\pi}{3}$ **57.** $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

Ejercicios 7.5, página 405

1. $-\operatorname{sen}^{-1} x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$ **3.** $\ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - 36}}{6}\right| + C$

5. $\frac{1}{3}(x^2 + 7)^{3/2} + C$

7. $-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} + \frac{1}{5}(1 - x^2)^{5/2} + C$

9. $-\frac{x}{4\sqrt{x^2 - 4}} + C$

11. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 4} + 2\ln x\left|\frac{\sqrt{x^2 + 4} + x}{2}\right| + C$

13. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + C$

15. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{4 - \sqrt{16 - x^2}}{x}\right| + C$

17. $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}\right| + C$ **19.** $-\frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3x^3} + C$

21. $\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

23. $\frac{1}{2}\tan^{-1} x + \frac{x}{2(1 + x^2)} + C$

25. $\frac{x}{16\sqrt{4 + x^2}} - \frac{x^3}{48(4 + x^2)^{3/2}} + C$

27. $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 10} + x + 1}{3}\right| + C$

29. $\frac{1}{16}\tan^{-1}\left(\frac{x + 3}{2}\right) + \frac{x + 3}{8(x^2 + 6x + 13)} + C$

31. $\frac{-5x - 1}{9\sqrt{5 - 4x - x^2}} + C$ **33.** $\ln(x^2 + 4x + 13) + C$

35. $x - 4\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + C$

37. $\frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - 3}{3}\right) + \frac{1}{2}(x - 3)\sqrt{9 - (x - 3)^2} + C$

39. $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$ **41.** $\frac{\sqrt{2}}{50}$

43. $2\sqrt{3} - \frac{172}{81}$

45. $\frac{1}{3}x^3\operatorname{sen}^{-1} x + \frac{1}{3}\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{9}(1 - x^2)^{3/2} + C$

47. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{3}}\right)$ **51.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\left(\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}\right)$

53. $12\pi\sqrt{2} - 4\pi\ln(\sqrt{2} + 1)$

55. $2 - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{6} - \sqrt{3})$

57. *b*) $y = -10\ln\left(\frac{10 - \sqrt{100 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{100 - x^2}$

59. $15.6\pi \approx 49.01$ lb

Ejercicios 7.6, página 413

1. $\frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1}$

3. $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{(x + 2)^2} + \frac{D}{(x + 2)^3}$

5. $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx + E}{x^2 + 3}$

7. $\frac{Ax + B}{x^2 + 9} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 9)^2}$

9. $-\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x - 2| + C$

11. $-2\ln|x| + \frac{5}{2}\ln|2x - 1| + C$

13. $\frac{5}{8}\ln|x - 4| + \frac{3}{8}\ln|x + 4| + C$

15. $-\frac{1}{6}\ln|2x + 1| + \frac{2}{3}\ln|x + 2| + C$

17. $6\ln|x| - \frac{7}{2}\ln|x + 1| - \frac{3}{2}\ln|x - 1| + C$

19. $\frac{1}{2}\ln|x + 1| - \ln|x + 2| + \frac{1}{2}\ln|x + 3| + C$

21. $-2\ln|t| - t^{-1} + 6\ln|t - 1| + C$

23. $\ln|x| - \ln|x + 1| + (x + 1)^{-1} + C$

25. $-2(x + 1)^{-1} + \frac{3}{2}(x + 1)^{-2} + C$

27. $-\frac{1}{32}\ln|x + 1| - \frac{1}{16}(x + 1)^{-1} + \frac{1}{32}\ln|x + 5|$
$- \frac{1}{16}(x + 5)^{-1} + C$

29. $-\frac{19}{16}\ln|x| - \frac{19}{8}x^{-1} + \frac{11}{8}x^{-2} - \frac{3}{2}x^{-3} + \frac{35}{16}\ln|x + 2| + C$

31. $-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \tan^{-1} x + C$

33. $\frac{1}{2}(x + 1)^{-1} + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C$

35. $\frac{1}{3}\tan^{-1} x - \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

37. $\frac{1}{3}\ln|x - 1| - \frac{1}{6}\ln|x^2 + x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C$

39. $5\ln|x + 1| - \ln(x^2 + 2x + 2) - 7\tan^{-1}(x + 1) + C$

41. $\frac{1}{2(x^2 + 4)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

43. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - \frac{11}{16}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5x + 12}{8(x^2 + 4)} + C$

45. $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 6x - 10\ln|x + 1| - 8(x + 1)^{-1} + C$

47. $-\frac{1}{2}\ln 3$ **49.** $2\ln\frac{5}{3}-\frac{14}{15}$

51. $\frac{1}{6}\ln\frac{8}{3}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+C$ **53.** 0

55. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2}+C$

57. $3(x+1)^{1/3}+\ln|(x+1)^{1/3}-1|-\frac{1}{2}\ln|(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1|-\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2(x+1)^{1/3}+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

59. $\frac{1}{4}\ln\frac{15}{7}\approx 0.191$

61. $7\ln 2-8\ln 3+3\ln 4\approx 0.222$

63. $8\pi\ln\frac{2}{3}+\frac{11\pi}{3}\approx 1.329$

65. $8\pi\ln 2-4\pi\approx 4.854$

Ejercicios 7.7, página 421

1. $\frac{1}{81}$ **3.** diverge

5. $\frac{1}{2}e^6$ **7.** diverge

9. $\frac{1}{2}$ **11.** 0

13. $-\frac{1}{18}$ **15.** $3e^{-2}$

17. 1 **19.** $\frac{\pi}{2}$

21. $\frac{1}{2}$ **23.** 4

25. $\ln 2$ **27.** $\frac{1}{4}\ln\frac{7}{3}$

29. $\frac{1}{21}$ **31.** diverge

33. 100 **35.** $2\sqrt{2}$

37. diverge **39.** 6

41. $-\frac{1}{4}$ **43.** diverge

45. diverge **47.** $-\frac{4}{3}$

49. $\frac{\pi}{4}$ **51.** $\frac{\pi}{2}$

53. $\frac{\pi}{6}$ **55.** $\frac{1}{6}$

57. 2 **59.** 8

61. $\frac{1}{2}\ln 2$ **63.** 2.86×10^{10} joules

65. $\frac{1}{s}$, $s>0$ **67.** $\frac{1}{s-1}$, $s>1$

69. $\frac{1}{s^2+1}$, $s>0$ **71.** $\frac{e^{-s}}{s}$, $s>0$

Ejercicios 7.8, página 430

1. 78; $M_3=77.25$ **3.** 22; $T_3=22.5$

5. 1.7564; 1.8667 **7.** 1.1475; 1.1484

9. 0.4393; 0.4228 **11.** 0.4470; 0.4900

13. $\frac{26}{3}$; $S_4=8.6611$ **15.** 1.6222

17. 0.7854 **19.** 0.4339

21. 11.1053 **23.** $n\geq 8$

25. 1.11

27. la regla de Simpson: $n\geq 26$; la regla trapezoidal: $n\geq 366$

29. la regla trapezoidal resulta en 1.10

31. para $n=2$ y $n=4$, la regla del punto medio proporciona el valor exacto del entero: 36

33. ***a)*** $\frac{2}{3}$ ***b)*** $M_8=\frac{21}{22}$ ***c)*** $T_8=\frac{11}{16}$

d) $E_8=\frac{1}{96}$ para la regla del punto medio y $E_8=\frac{1}{48}$ para la regla trapezoidal. El error de la regla del punto medio es la mitad del error de la regla trapezoidal.

37. 7.0667 **39.** aproximadamente 4 975 gal

41. 41.4028 **43.** ***b)*** 1.2460

45. 1.4804 **47.** 14.9772

Revisión del capítulo 7, página 433

A. **1.** verdadero **3.** verdadero

5. verdadero **7.** falso

9. falso **11.** verdadero

13. verdadero **15.** falso

17. verdadero **19.** falso

B. **1.** $\frac{1}{5}$ **3.** $\sqrt{\pi}$

5. $\ln\sqrt{2}$

C. **1.** $2\sqrt{x}-18\ln(\sqrt{x}+9)+C$

3. $(x^2+4)^{1/2}+C$

5. $\frac{3}{256}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{32(x^2+4)}+\frac{x}{32(x^2+4)^2}-\frac{x^3}{128(x^2+4)^2}+C$

7. $x-\frac{4}{x}+C$

9. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\frac{5}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

11. $\frac{1}{10}(\ln x)^{10}+C$

13. $\frac{1}{2}t^2\,\text{sen}^{-1}t-\frac{1}{4}\text{sen}^{-1}t+\frac{1}{4}t\sqrt{1-t^2}+C$

15. $\frac{1}{5}(x+1)^5-\frac{3}{4}(x+1)^4+C$

17. $x\ln(x^2+4)-2x+4\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

19. $-\frac{2}{125}\ln|x|-\frac{1}{25}x^{-1}+\frac{2}{125}\ln|x+5|-\frac{1}{25}(x+5)^{-1}+C$

21. $-\frac{1}{12}\ln|x+3|-\frac{1}{2}(x+3)^{-1}+\frac{1}{12}\ln|x-3|+C$

23. $\tan t - t + C$ **25.** $\frac{1}{13}\tan^{13} t + \frac{1}{11}\tan^{11} t + C$

27. $y \operatorname{sen} y + \cos y + C$ **29.** $\operatorname{sen} t - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 t + C$

31. $\frac{1}{6}(1 + e^w)^6 + C$

33. $-\frac{1}{8}\csc^2 4x - \frac{1}{4}\ln|\operatorname{sen} 4x| + C$

35. $\frac{1}{4}$ **37.** $\sec x - \tan x + x + C$

39. $\frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$ **41.** $\frac{1}{10}e^x(\cos 3x + 3\operatorname{sen} 3x) + C$

43. $\frac{1}{2}t\cos(\ln t) + \frac{1}{2}t\operatorname{sen}(\ln t) + C$

45. $2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$

47. $-\frac{2}{3}\cos^3 x + C$

49. $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1}{2}\right| + C$

51. $\frac{1}{7}\tan^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C$

53. $\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\ln(1 + t^2) + C$

55. $\frac{5}{2}\ln(x^2 + 1) + \tan^{-1} x - \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1} + C$

57. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$

59. $2(\operatorname{sen} x)e^{\operatorname{sen} x} - 2e^{\operatorname{sen} x} + C$ **61.** $\sqrt{6} - 2$

63. $t\operatorname{senh}^{-1} t - \sqrt{t^2 + 1} + C$ **65.** $\ln\frac{3}{2}$

67. $\frac{1}{39}\tan^{13} 3u + \frac{1}{45}\tan^{15} 3u + C$

69. $3\tan x + \sec x + C$

71. $\frac{1}{2}x^2(1 + \ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2(1 + \ln x) + \frac{1}{4}x^2 + C$

73. $e^{e^x} + C$ **75.** $t^2 - \ln(1 + e^{t^2}) + C$

77. $\frac{1}{5}\operatorname{sen}^{-1}(5x + 2) + C$ **79.** $(\operatorname{sen} x)\ln|\operatorname{sen} x| - \operatorname{sen} x + C$

81. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$ **83.** 0

85. diverge **87.** 0

89. diverge **91.** $2 - 2e^{-1}$

95. $\frac{1}{2}$ **97.** $\frac{2}{3}$

99. ***a)*** 2π ***b)*** las áreas son infinitas

101. 126 joules

Ejercicios 8.1, página 444

1. $y = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$ **3.** $y^{-2} = 2x^{-1} + C$

5. $y + y^2 + \frac{1}{3}y^3 = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C$

7. $\cos y = x^{-1} - 5x + C$ **9.** $y = Cx^4$

11. $-3e^{-2y} = 2e^{3x} + C$

13. $\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 = \frac{1}{2}y^2 + 2y + \ln|y| + C$

15. $\ln|N| = te^{t+2} - e^{t+2} - t + C$

17. $P = \frac{5}{1 + Ce^{-5t}}$ **19.** $(y + 3)^5 e^x = C(x + 4)^5 e^y$

21. $y^3 = -3x^{-1} + 30$ **23.** $x = \tan\left(4t - \frac{3}{4}\pi\right)$

25. $y = \frac{e^{-(1+1/x)}}{x}$ **27.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - x^2}$

29. $y = 3$ **31.** $y = -4,\ y = 5$

33. ***a)*** $y = \frac{1}{1 + Cx}$ ***b)*** $y = 0$ ***c)*** $y = \frac{1}{1 + 2x}$

Ejercicios 8.2, página 448

1. $y = Ce^{4x}$ **3.** $y = \frac{1}{10} + Ce^{-5x}$

5. $y = \frac{1}{4}e^{3t} + Ce^{-t}$ **7.** $y = \frac{1}{3} + Ce^{-x^3}$

9. $y = \frac{\ln}{x} + \frac{C}{x}$ **11.** $y = \frac{C}{1 + e^x}$

13. $y = -x\cos x + Cx$ **15.** $y = \operatorname{sen} x + C\cos x$

17. $y = \operatorname{sen} x + C\csc x$

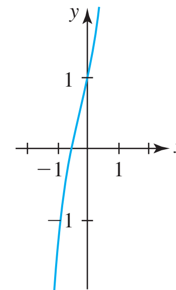
19. $y = \frac{5}{3}(x + 2)^{-1} + C(x + 2)^{-4}$

21. $y = \frac{e^x}{2x^2} + C\frac{e^{-x}}{x^2}$ **23.** $y = -x - 1 - 3e^x$

25. $y = \frac{e^x + 2 - e}{x}$ **27.** $y = 2x^2 - \frac{49}{5}x$

29. $(t + 1)x = t\ln t - t + 21$ **31.** $i = \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-Rt/L}$

33. ***a)*** $y = e^{x^2}[1 + \sqrt{\pi}\operatorname{erf}(x)]$ ***b)*** $y(2) = 150.92$;



Ejercicios 8.3, página 455

1. 7.9 años; 10 años **3.** 760

5. aproximadamente 11 h **7.** 136.5 h

9. $0.00098I_0$ **11.** 15 600 años

13. 36.67°; aproximadamente 3.06 min

15. $A(t) = 200 - 170e^{-t/50}$ **17.** $A(t) = 1\,000 - 1\,000\,e^{-t/100}$

19. 100 min

21. $s(t) = \frac{mg}{k}t - \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m} + \frac{mv_0}{k} - \frac{m^2g}{k^2}$

23. $X(t) = \frac{A}{B} - \frac{A}{B}e^{-Bt}$; $X(t) \to \frac{A}{B}$ cuando $t \to \infty$; $t = (\ln 2)/B$

25. $E(t) = E_0 e^{-(t - t_1)/RC}$

27. $i(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-500t}$; $i(t) \to \frac{3}{5}$ cuando $t \to \infty$

31. 276

Ejercicios 8.4, página 465

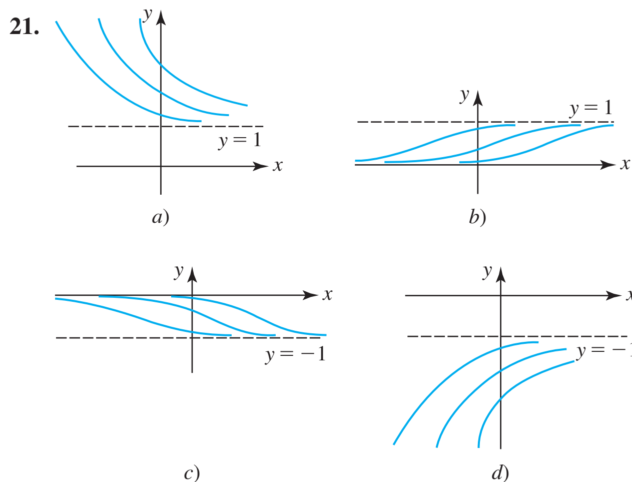
13. 0 es estable asintóticamente, 3 no es estable

15. 2 es semiestable

17. -2 no es estable, 0 es semiestable; 2 es estable asintóticamente

19. -1 es estable asintóticamente, 0 no es estable

21.



25. mg/k

27. $i = E/R$ es una solución de equilibrio y E/R es asintóticamente estable

Ejercicios 8.5, página 470

1. $y_2 = 2.9800,\ y_4 = 3.1151$

3. $y_{10} = 2.5937,\ y_{20} = 2.6533;\quad y = e^x$

5. $y_5 = 0.4198,\ y_{10} = 0.4124$

7. $y_5 = 0.5639,\ y_{10} = 0.5565$

9. $y_5 = 1.2194,\ y_{10} = 1.2696$

Revisión del capítulo 8, página 471

A. 1. verdadero

3. verdadero

B. 1. $y = x - 3x^2 + 4e^{3x} + C$

3. e^{-x}

5. vida media

7. $dP/dt = 0.16P,\ P(0) = P_0$

C. 1. $y = C \csc x$

3. $y = -\frac{1}{4}t + Ct^5$

5. $y = \frac{1}{4} + C(x^2 + 4)^{-4}$

7. $y = \operatorname{sen}(x^2 + C)$

9. $y = xe^{3x} - e^{3x} - \frac{1}{2}x^2e^{2x} + Ce^{2x}$

11. $P(t) = 1\,000e^{0.05t}$

13. $y = \frac{1}{25}t^{-1} + \frac{1}{25}t^4(-1 + 5 \ln t)$

15. $y = \dfrac{6}{5e^{-2x} - 3}$

17. $y = \tan(x - 7\pi/12)$

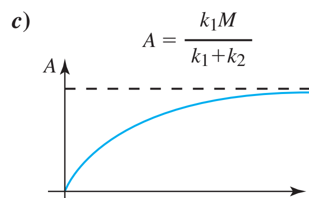
19. $y = \dfrac{1}{2(1 + x^4)}$

21. $3y^4 = 4x^2 + 48$

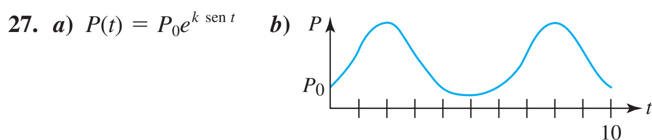
25. ***a)*** $A(t) = \dfrac{k_1M}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)t})$

b) $A \to \dfrac{k_1M}{k_1 + k_2}$ cuando $t \to \infty$, el material nunca se memorizará completamente

c)



27. ***a)*** $P(t) = P_0e^{k \operatorname{sen} t}$ ***b)***



31. 1.3214

Ejercicios 9.1, página 483

1. $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$

3. $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

5. 10, 100, 1 000, 10 000, . . .

7. 2, 4, 12, 48, . . .

9. $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \ldots$

15. 0

17. 0

19. $\frac{1}{2}$

21. la secuencia diverge

23. la secuencia diverge

25. 0

27. 0

29. la secuencia diverge

31. 0

33. $\frac{5}{7}$

35. 1

37. 6

39. 1

41. 1

43. $\ln \frac{4}{3}$

45. 0

47. $\left\{\dfrac{2n}{2n - 1}\right\}$, converge a 1

49. $\{(-1)^{n+1}(2n + 1)\}$, diverge

51. $\left\{\dfrac{2}{3^{n-1}}\right\}$, converge a 0

53. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

55. $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$

57. 8

59. $a_{n+1} = \dfrac{5}{n + 1}a_n,\ a_1 = 5$

61. converge a 0

63. converge a 0

67. $\frac{40}{9}$ pie; $\quad 15\left(\frac{2}{3}\right)^n$ pies

69. 15, 18, 18.6, 18.72, 18.744, 18.7488, . . .

71. 32

Ejercicios 9.2, página 489

1. creciente

3. no monotónica

5. creciente

7. no creciente

9. creciente

11. no monotónica

13. acotada y creciente

15. acotada y creciente

17. acotada y decreciente

19. acotada y decreciente

21. acotada y creciente

23. acotada y decreciente

25. 10

27. 7

Ejercicios 9.3, página 498

1. $3 + \frac{5}{2} + \frac{7}{3} + + \frac{9}{4} + \cdots$
3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \cdots$
5. $1 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \cdots$
7. $2 + \frac{8}{3} + \frac{16}{5} + \frac{128}{35} + \cdots$
9. $-\frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots$
11. 1
13. $\frac{1}{2}$
15. $\frac{15}{4}$
17. $\frac{2}{3}$
19. diverge
21. 9 000
23. diverge
25. $\frac{2}{9}$
27. $\frac{61}{99}$
29. $\frac{1\,313}{999}$
31. $\frac{17}{6}$
43. $-2 < x < 2$
45. $-2 < x < 0$
47. 75 pies
49. $\frac{N_0}{1 - s}$; 1 000
51. 18.75 mg

Ejercicios 9.4, página 503

1. converge
3. converge
5. diverge
7. converge
9. converge
11. converge
13. diverge
15. converge
17. converge
19. diverge
21. converge
23. diverge
25. converge
27. converge
29. converge
31. diverge
33. converge
35. converge para $p > 1$, diverge para $p \leq 1$

Ejercicios 9.5, página 507

1. converge
3. diverge
5. diverge
7. diverge
9. converge
11. converge
13. converge
15. diverge
17. converge
19. converge
21. converge
23. converge
25. diverge
27. converge
29. diverge
31. diverge
33. converge
35. diverge
37. converge
39. diverge

Ejercicios 9.6, página 511

1. converge
3. diverge
5. converge
7. diverge
9. converge
11. converge
13. converge
15. diverge
17. converge
19. diverge
21. converge
23. converge
25. diverge
27. converge
29. diverge
31. converge
33. converge para $0 \leq p < 1$
35. converge para todos los valores reales de p
39. utilice la prueba del cociente

Ejercicios 9.7, página 517

1. converge
3. diverge
5. converge
7. converge
9. converge
11. converge
13. diverge
15. condicionalmente convergente
17. absolutamente convergente
19. absolutamente convergente
21. absolutamente convergente
23. divergente
25. condicionalmente convergente
27. divergente
29. condicionalmente convergente
31. absolutamente convergente
33. divergente
35. 0.84147
37. 5
39. 0.9492
41. menor que $\frac{1}{101} \approx 0.009901$
43. la serie contiene signos algebraicos mixtos pero los signos no se alternan; converge
45. los signos algebraicos no se alternan; converge
47. $a_{k+1} \leq a_k$ no se satisface para k suficientemente grande. La sucesión de las sumas parciales $\{S_{2n}\}$ es la misma que la sucesión de las sumas parciales para la serie armónica. Lo anterior implica que la serie diverge.
49. diverge
51. converge

Ejercicios 9.8, página 522

1. $(-1, 1]$; 1
3. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\frac{1}{2}$
5. $[2, 4]$; 1
7. $(-5, 15)$; 10
9. $\{0\}$; 0
11. $\left[0, \frac{2}{3}\right]$; $\frac{1}{3}$
13. $[-1, 1)$; 1
15. $(-16, 2)$; 9
17. $\left(-\frac{75}{32}, \frac{75}{32}\right)$; $\frac{75}{32}$
19. $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$; $\frac{1}{3}$
21. $(-\infty, \infty)$; ∞
23. $(-3, N)$; 3
25. $(-\infty, \infty)$; ∞
27. $\left(-\frac{15}{4}, -\frac{9}{4}\right)$; $\frac{3}{4}$
29. 4
31. $x > 1$ o $x < -1$
33. $x < -\frac{1}{2}$
35. $-2 < x < 2$
37. $x < 0$
39. $0 \leq x < \pi/3, 2\pi/3 < x < 4\pi/3, 5\pi/3 < x \leq 2\pi$
41. ***a)*** $(-\infty, \infty)$

Ejercicios 9.9, página 528

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3^{k+1}}$; $(-3, 3)$
3. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k x^k$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

5. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$; $(-1, 1)$

7. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^{k+1}}x^{2k}$; $(-2, 2)$

9. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^{k+1}}x^{k-1}$; $(-3, 3)$

11. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k k(k-1)2^{k-3}}{5^{k+1}}x^{k-2}$; $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

13. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}kx^{2k-1}$; $(-1, 1)$

15. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$; $[-1, 1]$

17. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{2k+2}$; $[-1, 1]$

19. $\ln 4 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)4^{k+1}}x^{k+1}$; $(-4, 4]$

21. $1 + \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2x)^k$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

23. $\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k k(k-1)x^k$; $(-1, 1)$

25. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{2k+3}$; $[-1, 1]$

27. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)}x^{2k+2}$; $[-1, 1]$

29. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{5^{k+1}}(x-6)^k$; $(1, 11)$

31. $-1 + 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x+1)^{k+1}$; $(-2, 0)$

33. $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{4^k} - \frac{1}{3^k}\right]x^k$; $(-3, 3)$

35. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \cdots$

37. $(-3, 3]$

39. 0.0953

41. 0.4854

43. 0.0088

Ejercicios 9.10, página 539

1. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^{k+1}}$

3. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$

5. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

7. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$

9. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

11. $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$

13. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{5^{k+1}}(x-4)^k$

15. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k$

17. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots$

19. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2\cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$

21. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e}{k!}(x-1)^k$

23. $\ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k2^k}(x-2)^k$

25. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}x^{2k}$

27. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k+1}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{k}x^k$

31. $1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + \cdots$

33. 6

35. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$

37. $1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4 + \cdots$

39. $1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \cdots$

43. $\frac{\pi}{4}$

45. -1

47. 0.71934; cuatro lugares decimales

49. 1.34983; cuatro lugares decimales

55. ***c)*** $y = 7.92$ pulg ***d)*** $y = 7.92000021$ pulg

Ejercicios 9.11, página 543

1. $1 + \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3 - \cdots$; 1

3. $3 - \frac{3}{2\cdot 9}x - \frac{3\cdot 1}{2^2\cdot 2!\cdot 9^2}x^2 - \frac{3\cdot 1\cdot 3}{2^3\cdot 3!\cdot 9^3}x^3 - \cdots$; 9

5. $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 + \cdots$; 1

7. $8 + \frac{8\cdot 3}{2\cdot 4}x + \frac{8\cdot 3\cdot 1}{2^2\cdot 2!\cdot 4^2}x^2 - \frac{8\cdot 3\cdot 1}{2^3\cdot 3!\cdot 4^3}x^3 + \cdots$; 4

9. $\frac{1}{4}x - \frac{2}{4\cdot 2}x^2 + \frac{2\cdot 3}{4\cdot 2!\cdot 2^2}x^3 - \frac{2\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 3!\cdot 2^3}x^4 + \cdots$; 2

11. $|S_2 - S| < a_3 = \frac{1}{9}x^2$

13. $x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k k!(2k+1)}x^{2k+1}$

17. $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

19. $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^2}(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{2^4\cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{2}\cdot 1\cdot 3}{2^6\cdot 3!}(x-1)^3 - \cdots$

Revisión del capítulo 9, página 544

A. 1. falso

3. falso

5. verdadero

7. falso

9. verdadero

11. falso

13. verdadero

15. falso

17. verdadero

19. falso

21. falso

23. falso

25. falso

27. verdadero

29. verdadero

B. 1. 20; 9; $\frac{4}{5}$; 16

3. 4

5. $n/9$; $22/9$ **7.** e^x

9. $x < -5$ o $x > 5$ **11.** $(-1, 1]$

C. 1. converge **3.** converge

5. converge **7.** diverge

9. diverge **11.** converge

13. $\dfrac{61\,004}{201}$ **15.** $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

17. $\{-5\}$ **19.** $\dfrac{4}{3}$

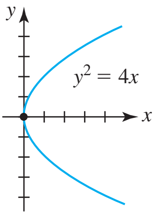
21. $\dfrac{1}{\alpha - 1}$ **23.** $1 - \dfrac{1}{3}x^5 + \dfrac{2}{9}x^{10} - \cdots$

25. $x - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 - \cdots$

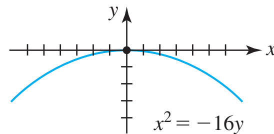
27. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}(x - \pi/2)^{2k+1}$ **29.** \$6 millones

Ejercicios 10.1, página 558

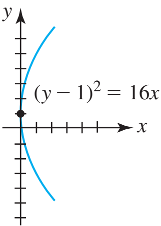
1. vértice: $(0, 0)$; foco: $(1, 0)$; directriz: $x = -1$; eje: $y = 0$;



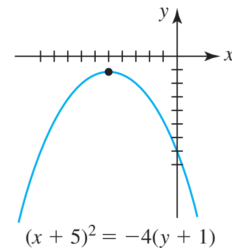
3. vértice: $(0, 0)$; foco: $(0, -4)$; directriz: $y = 4$; eje: $x = 0$;



5. vértice: $(0, 1)$; foco: $(4, 1)$; directriz: $x = -4$; eje: $y = 1$;

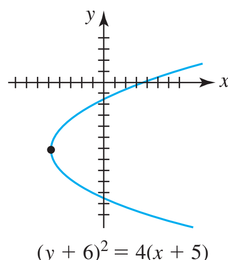


7. vértice: $(-5, -1)$; foco: $(-5, -2)$; directriz: $y = 0$; eje: $x = -5$;



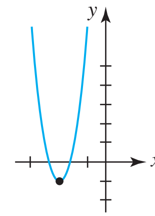
$(x + 5)^2 = -4(y + 1)$

9. vértice: $(-5, -6)$; foco: $(-4, -6)$; directriz: $x = -6$; eje: $y = -6$



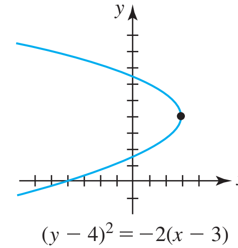
$(y + 6)^2 = 4(x + 5)$

11. vértice: $\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$; foco: $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{15}{16}\right)$; directriz: $y = -\frac{17}{16}$; eje: $x = -\frac{5}{2}$;



$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(y + 1)$

13. vértice: $(3, 4)$; foco: $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$; directriz: $x = \frac{7}{2}$; eje: $y = 4$;



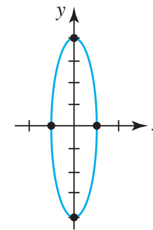
$(y - 4)^2 = -2(x - 3)$

15. $x^2 = 28y$ **17.** $y^2 = 10x$

19. $(y + 7)^2 = 12(x + 2)$ **21.** $x^2 = \dfrac{1}{2}y$

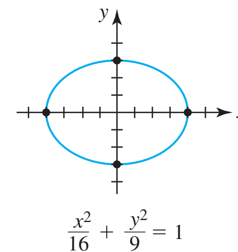
23. $(3, 0)$, $(0, -2)$, $(0, -6)$

25. centro: $(0, 0)$; focos: $(0, \pm\sqrt{15})$; vértices: $(0, \pm 4)$; puntos terminales del eje menor: $(\pm 1, 0)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{15}}{4}$;



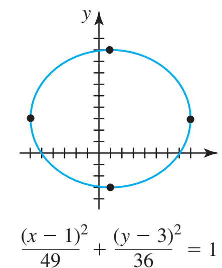
$\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

27. centro: $(0, 0)$; focos: $(\pm\sqrt{7}, 0)$; vértices: $(\pm 4, 0)$; puntos terminales del eje menor: $(0, \pm 3)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{7}}{4}$



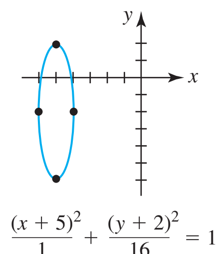
$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

29. centro: $(1, 3)$; focos: $(1 \pm \sqrt{13}, 3)$; vértices: $(-6, 3)$, $(8, 3)$; puntos terminales del eje menor: $(1, -3)$, $(1, 9)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{13}}{7}$;



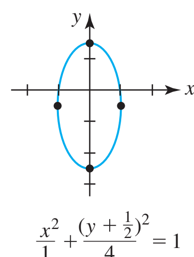
$\dfrac{(x - 1)^2}{49} + \dfrac{(y - 3)^2}{36} = 1$

31. centro: $(-5, -2)$; focos: $\left(-5, -2 \pm \sqrt{15}\right)$; vértices: $(-5, -6)$; $(-5, 2)$; puntos terminales del eje menor: $(-6, -2)$, $(-4, -2)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{15}}{4}$;



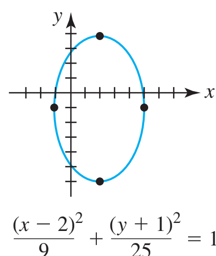
$$\frac{(x+5)^2}{1} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

33. centro: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$; focos: $\left(0, -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}\right)$; vértices: $\left(0, -\frac{5}{2}\right), \left(0, \frac{3}{2}\right)$; puntos terminales del eje menor: $\left(-1, -\frac{1}{2}\right), \left(1, -\frac{1}{2}\right)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{3}}{2}$;



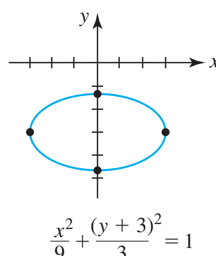
$$\frac{x^2}{1} + \frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{4} = 1$$

35. centro: $(2, -1)$; focos: $(2, -5)$, $(2, 3)$; vértices: $(2, -6)$, $(2, 4)$; puntos terminales del eje menor: $(-1, -1)$, $(5, -1)$; excentricidad: $\frac{4}{5}$;



$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$$

37. centro: $(0, -3)$; focos: $\left(\pm\sqrt{6}, -3\right)$; vértices: $(-3, -3)$, $(3, -3)$; puntos terminales del eje menor: $\left(0, -3 \pm \sqrt{3}\right)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{6}}{3}$;



$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1$$

39. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

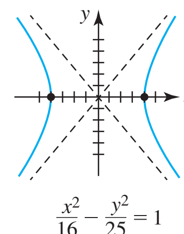
41. $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

43. $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{9} = 1$

45. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$

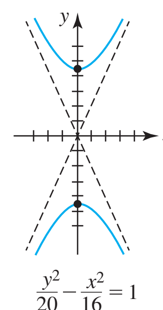
47. $\frac{(x-1)^2}{7} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

49. centro: $(0, 0)$; focos: $\left(\pm\sqrt{41}, 0\right)$; vértices: $(\pm 4, 0)$; asíntotas: $y = \pm\frac{5}{4}x$; excentricidad: $\frac{\sqrt{41}}{4}$;



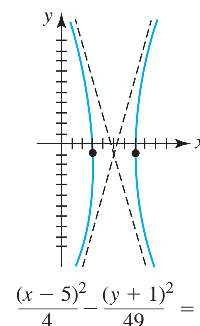
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$$

51. centro: $(0, 0)$; focos: $\left(0, \pm 2\sqrt{6}\right)$; vértices: $\left(0, \pm 2\sqrt{5}\right)$; asíntotas: $y = \pm\sqrt{5}x$; excentricidad: $\sqrt{\frac{6}{5}}$;



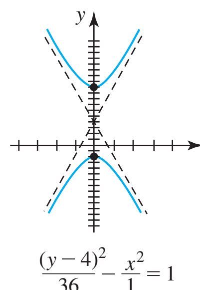
$$\frac{y^2}{20} - \frac{x^2}{16} = 1$$

53. centro: $(5, -1)$; focos: $\left(5 \pm \sqrt{53}, -1\right)$; vértices: $(3, -1)$ $(7, -1)$; asíntotas: $y = -1 \pm \frac{7}{2}(x-5)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{53}}{2}$;



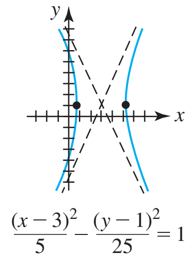
$$\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{49} = 1$$

55. centro: $(0, 4)$; focos: $\left(0, 4 \pm \sqrt{37}\right)$; vértices: $(0, -2)$, $(0, 10)$; asíntotas: $y = 4 \pm 6x$; excentricidad: $\frac{\sqrt{37}}{6}$;



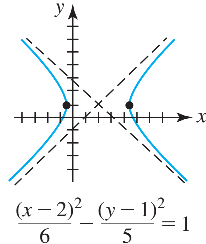
$$\frac{(y-4)^2}{36} - \frac{x^2}{1} = 1$$

57. centro: $(3, 1)$; focos: $(3 \pm \sqrt{30}, 1)$; vértices: $(3 \pm \sqrt{5}, 1)$; asíntotas: $y = 1 \pm \sqrt{5}\,(x - 3)$; excentricidad: $\sqrt{6}$;



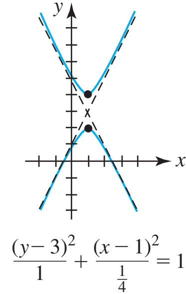
$$\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

59. centro: $(2, 1)$; focos: $(2 \pm \sqrt{11}, 1)$; vértices: $(2 \pm \sqrt{6}, 1)$; asíntotas: $y = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{6}}(x - 2)$; excentricidad: $\sqrt{\frac{11}{6}}$;



$$\frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$$

61. centro: $(1, 3)$; focos: $\left(1, 3 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$; vértices: $(1, 2)$, $(1, 4)$; asíntotas: $y = 3 \pm 2(x - 1)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{5}}{2}$;



$$\frac{(y-3)^2}{1} + \frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

63. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$ **65.** $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1$

67. $(y-3)^2 - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$ **69.** $(y-4)^2 - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$

71. en el foco a 6 pulg del vértice

73. 76.5625 pies

75. 12.65 m del punto en el suelo directamente abajo del final del tubo

77. la distancia mínima es 28.5 millones de millas; la máxima es 43.5 millones de millas

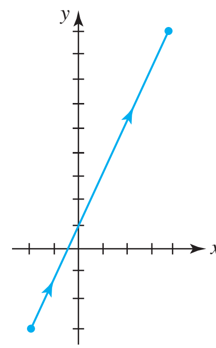
79. 0.97 aproximadamente **81.** 12 pies

Ejercicios 10.2, página 564

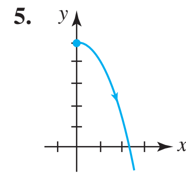
1.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-5	-3	-1	1	3	5	7
y	6	2	0	0	2	6	12

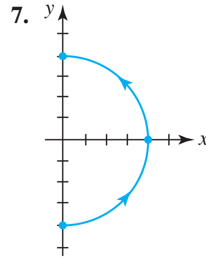
3.



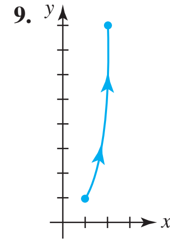
5.



7.



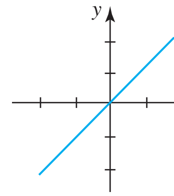
9.

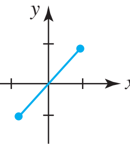


11. $y = x^2 + 3x - 1,\ x \geq 0$

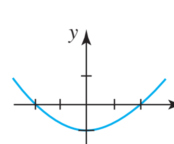
13. $x = -1 + 2y^2,\ -1 \leq x \leq 0$ **15.** $y = \ln x,\ x > 0$

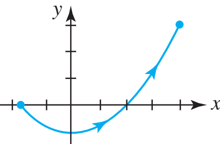
17.



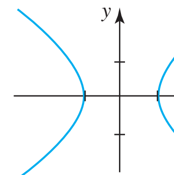


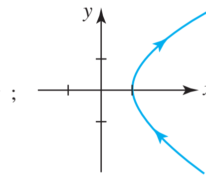
19.



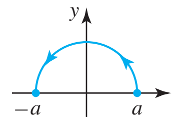


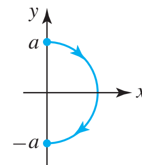
21.



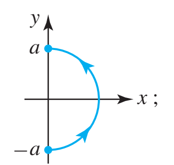


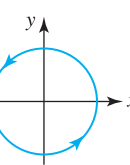
23.



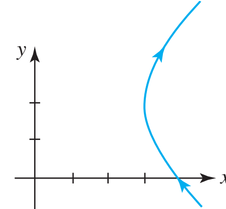


25.





27.



29. sí

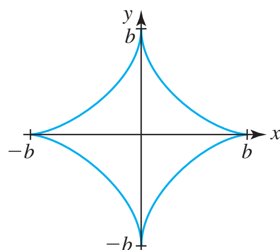
31. no

33. no

35. $x = \pm\sqrt{r^2 - L^2 \operatorname{sen}^2 \phi},\ y = L \operatorname{sen} \phi$

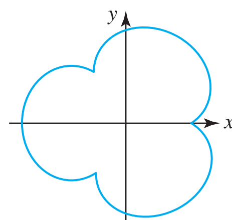
37. $x = a(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta),\ y = a(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$

39. ***b)***



c) $x^{2/3} + y^{2/3} = b^{2/3}$

41. ***b)***



Ejercicios 10.3, página 572

1. $\frac{3}{5}$

3. 24

5. −1

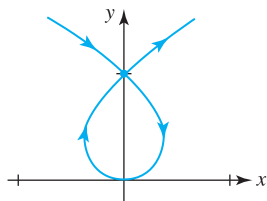
7. $y = -2x - 1$

9. $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$

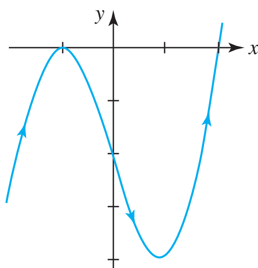
11. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

13. $y = 3x - 7$

15. tangente horizontal en (0, 0), tangente vertical en $\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)$ y en $\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)$;



17. tangentes horizontales en (−1, 0) y (1, −4), no hay tangentes verticales;



19. $3t$; $1/(2t)$; $-1/(12t^3)$

21. $-2e^{3t} - 3e^{4t}$; $6e^{4t} + 12e^{5t}$; $-24e^{5t} - 60e^{6t}$

23. cóncava hacia arriba para $0 < t < 2$, cóncava hacia abajo para $t < 0$ y $t > 2$

25. $\frac{104}{3}$

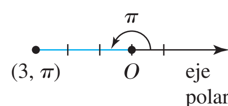
27. $\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$

29. $\frac{3}{2}|b|$

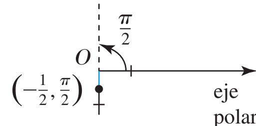
31. ***a)*** −0.6551 ***b)*** −5.9991, 1.0446, 9.7361

Ejercicios 10.4, página 576

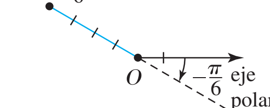
1.



3.



5. $\left(-4, -\frac{\pi}{6}\right)$



7. ***a)*** $(2, -5\pi/4)$ ***b)*** $(2, 11\pi/4)$ ***c)*** $(-2, 7\pi/4)$ ***d)*** $(-2, -\pi/4)$

9. ***a)*** $(4, -5\pi/3)$ ***b)*** $(4, 7\pi/3)$ ***c)*** $(-4, 4\pi/3)$ ***d)*** $(-4, -2\pi/3)$

11. ***a)*** $(1, -11\pi/6)$ ***b)*** $(1, 13\pi/6)$ ***c)*** $(-1, 7\pi/6)$ ***d)*** $(-1, -5\pi/6)$

13. $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

15. $\left(-3, 3\sqrt{3}\right)$

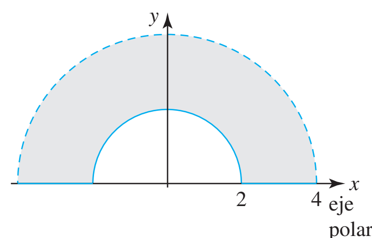
17. $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

19. ***a)*** $(2\sqrt{2}, -3\pi/4)$ ***b)*** $(-2\sqrt{2}, \pi/4)$

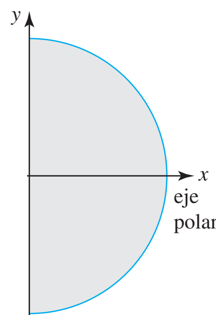
21. ***a)*** $(2, -\pi/3)$ ***b)*** $(-2, 2\pi/3)$

23. ***a)*** $(7, 0)$ ***b)*** $(-7, \pi)$

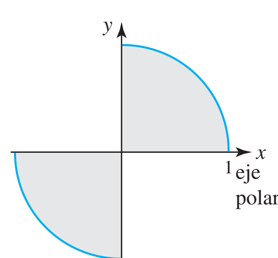
25.



27.



29.



31. $r = 5\csc\theta$

33. $\theta = \tan^{-1} 7$

35. $r = 2/(1 + \cos\theta)$

37. $r = 6$

39. $r = 1 - \cos\theta$

41. $x = 2$

43. $(x^2 + y^2)^3 = 144x^2y^2$

45. $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$

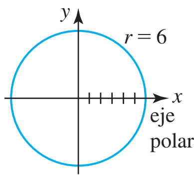
47. $x^2 + y^2 + 5y = 0$

49. $8x^2 - 12x - y^2 + 4 = 0$

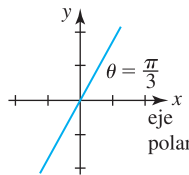
51. $3x + 8y = 5$

Ejercicios 10.5, página 583

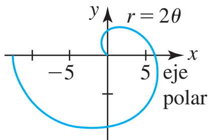
1. círculo;



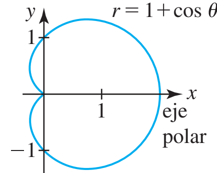
3. recta por el origen;



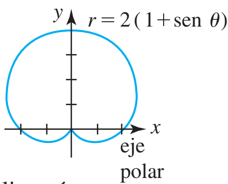
5. espiral;



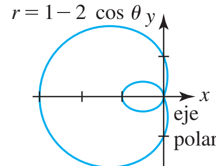
7. cardioide;



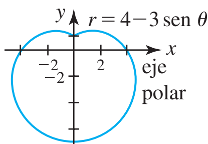
9. cardioide;



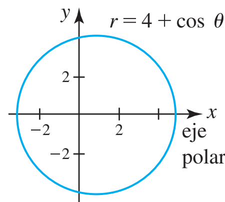
11. limacón con un lazo interior;



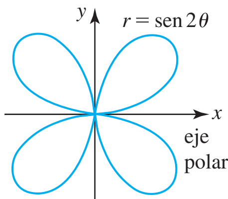
13. limacón;



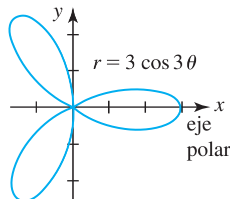
15. limacón convexa;



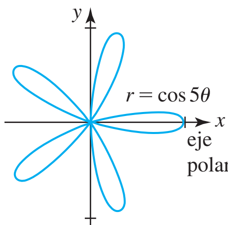
17. curva de la rosa;



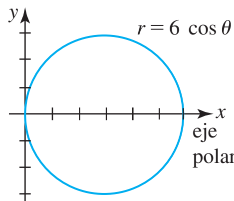
19. curva de la rosa;



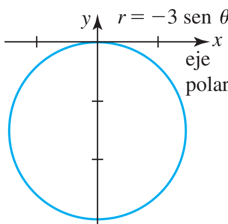
21. curva de la rosa;



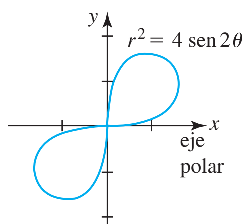
23. círculo con centro sobre el eje x;



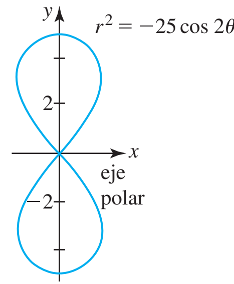
25. círculo con centro sobre el eje y;



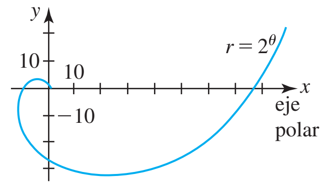
27. lemniscata;



29. lemniscata;



31.



33. $r = \frac{5}{2}$ **35.** $r = 4 - 3\cos\theta$

37. $r = 2\cos 4\theta$ **39.** $(2, \pi/6), (2, 5\pi/6)$

41. $(1, \pi/2), (1, 3\pi/2)$, origen

43. $(3, \pi/12), (3, 5\pi/12), (3, 13\pi/12), (3, 17\pi/12), (3, -\pi/12), (3, -5\pi/12), (3, -13\pi/12), (3, -17\pi/12)$

45. $(0, 0), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi/3\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\pi/3\right)$ **49.** ***d*)**

51. ***b*)**

Ejercicios 10.6, página 590

1. $-2/\pi$ **3.** $\dfrac{\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{3} - 1}$

5. $\sqrt{3}$

7. tangente horizontal en $(3, \pi/3)$ y $(3, 5\pi/3)$, tangente vertical en $(4, 0)$, $(1, 2\pi/3)$ y $(1, 4\pi/3)$

9. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \dfrac{8}{\sqrt{3}}, y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x - \dfrac{8}{\sqrt{3}}$

11. $\theta = 0$ **13.** $\theta = 5\pi/4, \theta = 7\pi/4$

15. $\theta = \pi/10, \theta = 3\pi/10, \theta = \pi/2, \theta = 7\pi/10, \theta = 9\pi/10$

17. π **19.** 24π

21. 11π **23.** $\frac{9}{2}\pi$

25. $\frac{9}{4}\pi^3$ **27.** $\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)$

29. $\frac{1}{8}(4 - \pi)$ **31.** $\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

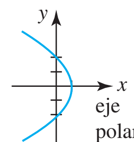
33. $\frac{1}{6}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$ **35.** $\pi + 6\sqrt{3}$

37. $18\sqrt{3} - 4\pi$ **39.** 6π

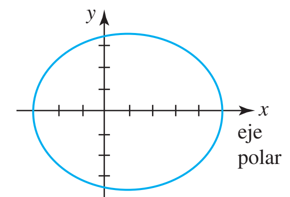
41. $\sqrt{5}(e^2 - 1)$ **43.** 24

Ejercicios 10.7, página 596

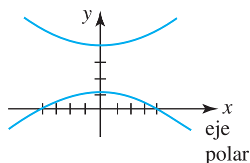
1. $e = 1$; parábola;



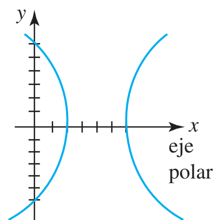
3. $e = \frac{1}{4}$; elipse;



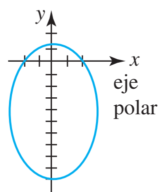
5. $e = 2$; hipérbola



7. $e = 2$; hipérbola



9. $e = \frac{4}{5}$; elipse;



11. $e = 2$; $\dfrac{(y-4)^2}{4} - \dfrac{x^2}{12} = 1$

13. $e = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{\left(x - \frac{24}{5}\right)^2}{\frac{1\,296}{25}} + \dfrac{y^2}{\frac{144}{5}} = 1$

15. $r = \dfrac{3}{1 + \cos\theta}$

17. $r = \dfrac{4}{3 - 2\,\text{sen}\,\theta}$

19. $r = \dfrac{12}{1 + 2\cos\theta}$

21. $r = \dfrac{3}{1 + \cos(\theta + 2\pi/3)}$

23. $r = \dfrac{3}{1 - \text{sen}\,\theta}$

25. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$

27. $r = \dfrac{1}{2 - 2\,\text{sen}\,\theta}$

29. vértice: $(2, \pi/4)$

31. vértices: $(10, \pi/3)$ y $\left(\frac{10}{3}, 4\pi/3\right)$

33. $r_p = 8\,000$ km

35. $r = \dfrac{1.495 \times 10^8}{1 - 0.0167\cos\theta}$

Revisión del capítulo 10, página 597

A. **1.** verdadero **3.** verdadero **5.** verdadero **7.** falso **9.** verdadero **11.** verdadero **13.** falso **15.** verdadero **17.** verdadero **19.** falso **21.** verdadero **23.** verdadero **25.** falso

B. **1.** $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ **3.** $(0, -3)$

5. $y = -5$ **7.** $(-10, -2)$

9. $(2, -1), (6, -1)$ **11.** $(4, -3)$

13. $(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$ **15.** recta que pasa por el origen

17. círculo que pasa por el origen **19.** $\theta = 0, \theta = \pi/3, \theta = 2\pi/3$

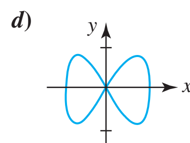
21. $(0, 0), (5, 3\pi/2)$

C. **1.** $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$ **3.** $(8, -26)$

5. ***b)*** $x = \text{sen}\,t,\ y = \text{sen}\,2t,\ 0 \le t \le 2\pi$

c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$

d)



7. $5\pi/4$

9. ***a)*** $x + y = 2\sqrt{2}$

b) $r = 2\sqrt{2}/(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)$

11. $x^2 + y^2 = x + y$

13. $r^2 = 5\csc 2\theta$

15. $r = 1/(1 - \cos\theta)$

17. $r = 3\,\text{sen}\,10\theta$

19. $\dfrac{y^2}{100} - \dfrac{x^2}{36} = 1$

21. $x = \dfrac{3at}{1 + t^3},\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}$

23. ***a)*** $r = \dfrac{3a\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{\cos^3\theta + \text{sen}^3\theta}$

b) $\dfrac{3}{2}a^2$

25. $\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

27. ***a)*** $r = 2\cos(\theta - \pi/4)$

b) $x^2 + y^2 = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$

29. 10^8 m; 9×10^8 m

Ejercicios 11.1, página 606

1. ***a)*** $6\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ ***b)*** $\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ ***c)*** $3\mathbf{i}$ ***d)*** $\sqrt{65}$ ***e)*** 3

3. ***a)*** $\langle 12, 0\rangle$ ***b)*** $\langle 4, -5\rangle$ ***c)*** $\langle 4, 5\rangle$ ***d)*** $\sqrt{41}$ ***e)*** $\sqrt{41}$

5. ***a)*** $-9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ ***b)*** $-3\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ ***c)*** $-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$
d) $3\sqrt{10}$ ***e)*** $\sqrt{34}$

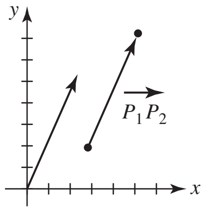
7. ***a)*** $-6\mathbf{i} + 27\mathbf{j}$ ***b)*** $\mathbf{0}$ ***c)*** $-4\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$ ***d)*** 0 ***e)*** $2\sqrt{85}$

9. ***a)*** $\langle 6, -14\rangle$ ***b)*** $\langle 2, 4\rangle$

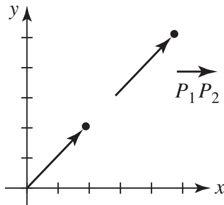
11. ***a)*** $10\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ ***b)*** $12\mathbf{i} - 17\mathbf{j}$

13. ***a)*** $\langle 20, 52\rangle$ ***b)*** $\langle -2, 0\rangle$

15. $2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$



17. $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$



19. (1, 18)

21. ***a)***, ***b)***, ***c)***, ***e)***, ***f)***

23. $\langle 6, 15\rangle$

25. ***a)*** $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$ ***b)*** $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$

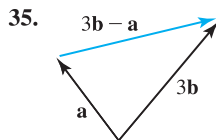
27. ***a)*** $\langle 0, -1\rangle$ ***b)*** $\langle 0, 1\rangle$

29. $\left\langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right\rangle$

31. $\dfrac{6}{\sqrt{58}}\mathbf{i} + \dfrac{14}{\sqrt{58}}\mathbf{j}$

33. $\left\langle -3, -\frac{15}{2}\right\rangle$

35.



37. $-(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

41. $\mathbf{a} = \dfrac{5}{2}\mathbf{b} - \dfrac{1}{2}\mathbf{c}$

43. $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

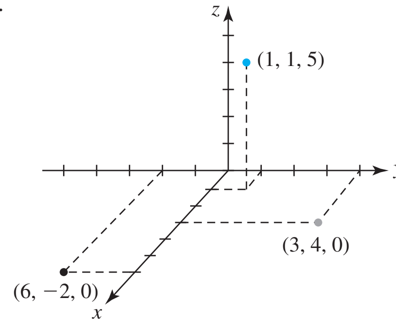
45. ***a)*** $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
b) cuando P_1, P_2 y P_3 son colineales y P_2 yace entre P_1 y P_3

47. ***b)*** 31° aproximadamente

49. 153 libras, aproximadamente

Ejercicios 11.2, página 612

1, 3, 5.



7. El conjunto $\{(x, y, 5)|x, y$ números reales$\}$ es un plano perpendicular al eje z, 5 unidades arriba del plano xy.

9. El conjunto $\{(2, 3, z)|z$ un número real$\}$ es la recta perpendicular al plano xy en (2, 3, 0).

11. (2, 0, 0), (2, 5, 0), (2, 0, 8), (2, 5, 8), (0, 5, 0), (0, 5, 8), (0, 0, 8), (0, 0, 0)

13. ***a)*** (−2, 5, 0), (−2, 0, 4), (0, 5, 4)
b) (−2, 5, −2) ***c)*** (3, 5, 4)

15. la unión de los planos de coordenadas

17. el punto (−1, 2, −3)

19. la unión de los planos $z = 5$ y $z = -5$

21. $\sqrt{70}$

23. ***a)*** 7 ***b)*** 5

25. triángulo recto

27. triángulo isósceles

29. colineal

31. no colineal

33. 6 o −2

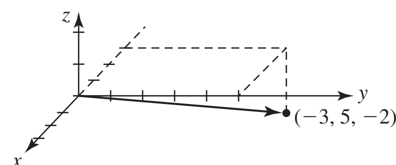
35. $\left(4, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

37. (−4, −11, 10)

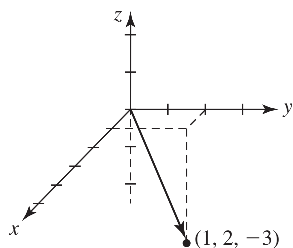
39. $\langle -3, -6, 1\rangle$

41. $\langle 2, 1, 1\rangle$

43.



45.



47. plano *xy**

49. eje *z* positivo, plano *xz*, plano *yz*

51. $\langle 2, 4, 12\rangle$

53. $\langle -11, -41, -49\rangle$

55. $\sqrt{139}$

57. 6

59. $\left\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\rangle$

61. $4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

Ejercicios 11.3, página 620

1. 12

3. -16

5. 48

7. 29

9. 25

11. $\left\langle -\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 2\right\rangle$

13. $25\sqrt{2}$

15. -3

17. 1.11 radianes o 63.43°

19. 1.89 radianes o 108.4°

21. ***a*)** y ***f*)**, ***c*)** y ***d*)**, ***b*)** y ***e*)**

23. $\left\langle \frac{4}{9}, -\frac{1}{3}, 1\right\rangle$

27. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{14}}, \cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \cos\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{14}};$

$\alpha = 74.5°, \beta = 57.69°, \gamma = 36.7°$

29. $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}, \cos\beta = 0, \cos\gamma = -\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

$\alpha = 60°, \beta = 90°, \gamma = 150°$

31. 0.9553 radián o 57.74°; 0.6155 radián o 35.26°

33. $\dfrac{5}{7}$

35. $-\dfrac{6}{\sqrt{11}}$

37. $\dfrac{72}{\sqrt{109}}$

39. ***a*)** $-\dfrac{21}{5}\mathbf{i} + \dfrac{28}{5}\mathbf{j}$ ***b*)** $-\dfrac{4}{5}\mathbf{i} - \dfrac{3}{5}\mathbf{j}$

41. ***a*)** $\left\langle -\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7}\right\rangle$ ***b*)** $\left\langle \frac{5}{7}, -\frac{20}{7}, \frac{45}{7}\right\rangle$

43. $\dfrac{72}{25}\mathbf{i} + \dfrac{96}{25}\mathbf{j}$

45. 1 000 pies-lb

47. 45 N-m

49. $\dfrac{78}{5}$ pie-lb

Ejercicios 11.4, página 628

1. $-5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

3. $\langle -12, -2, 6\rangle$

5. $-5\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

7. $\langle -3, 2, 3\rangle$

9. $\mathbf{0}$

11. $6\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

13. $-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, o cualquier múltiplo distinto de cero de este vector

17. ***a*)** $\mathbf{j} - \mathbf{k}$; $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. $2\mathbf{k}$

21. $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

23. $-24\mathbf{k}$

25. $5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$

27. 0

29. $\sqrt{41}$

31. $-\mathbf{j}$

33. $\mathbf{0}$

35. 6

37. $12\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$

39. $-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

41. $-21\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$

43. -10

45. ***b*)** 14

47. $\dfrac{1}{2}$

49. $\dfrac{7}{2}$

51. 10

53. Los vectores son coplanares.

55. Los puntos son coplanares.

57. ***a*)** 32 ***b*)** 30° del eje *x* positivo en la dirección del eje *y* negativo ***c*)** $16\sqrt{3}\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$

Ejercicios 11.5, página 633

1. $\langle x, y, z\rangle = \langle 4, 6, -7\rangle + t\left\langle 3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$

3. $\langle x, y, z\rangle = t\langle 5, 9, 4\rangle$

5. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 1\rangle + t\langle 2, 3, -3\rangle$

7. $\langle x, y, z\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right\rangle + t\left\langle -2, 3, -\frac{3}{2}\right\rangle$

9. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, -1\rangle + t\langle 5, 0, 0\rangle$

11. $x = 2 + 4t, y = 3 - 4t, z = 5 + 3t$

13. $x = 1 + 2t, y = -2t, z = -7t$

15. $x = 4 + 10t, y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}t, z = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}t$

17. $\dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y-4}{10} = \dfrac{z+9}{7}$

19. $\dfrac{x+7}{11} = \dfrac{z-5}{-4}, y = 2$

21. $x = 5, \dfrac{y-10}{9} = \dfrac{z+2}{12}$

23. $x = 6 + 2t, y = 4 - 3t, z = -2 + 6t$

25. $x = 2 + t, y = -2, z = 15$

27. Las dos rectas pasan por el origen y tienen vectores direccionales paralelos.

29. ***a*)** $t = -5$ ***b*)** $s = 12$

31. $(0, 5, 15), \left(5, 0, \frac{15}{2}\right), (10, -5, 0)$

33. $(2, 3, -5)$

35. Las rectas no se intersecan.

37. sí

39. $x = 2 + 4t, y = 5 - 6t, z = 9 - 6t, 0 \le t \le 1$

41. 40.37°

43. $x = 4 - 6t, y = 1 + 3t, z = 6 + 3t$

45. Las rectas no son paralelas y no se intersecan.

Ejercicios 11.6, página 638

1. $2x - 3y + 4z = 19$

3. $5x - 3z = 51$

5. $6x + 8y - 4z = 11$

7. $5x - 3y + z = 2$

9. $3x - 4y + z = 0$

11. Los puntos son colineales.

13. $x + y - 4z = 25$

15. $z = 12$

17. $-3x + y + 10z = 18$

19. $9x - 7y + 5z = 17$

21. $6x - 2y + z = 12$

23. perpendicular: ***a*)** y ***d*)**, ***b*)** y ***c*)**, ***d*)** y ***f*)**, ***b*)** y ***e*)**; paralelo: ***a*)** y ***f*)**, ***c*)** y ***e*)**

25. ***c*)**, ***d*)**

27. $x = 2 + t, y = \dfrac{1}{2} - t, z = t$

29. $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t,\ y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t,\ z = t$

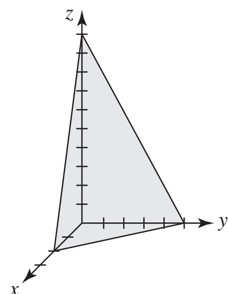
31. $(-5, 5, 9)$

33. $(1, 2, -5)$

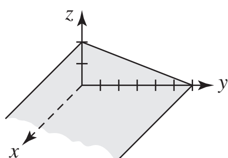
35. $x = 5 + t,\ y = 6 + 3t,\ z = -12 + t$

37. $3x - y - 2z = 10$

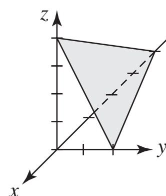
39.



41.



43.

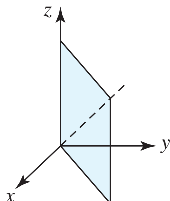


47. $\frac{3}{\sqrt{11}}$

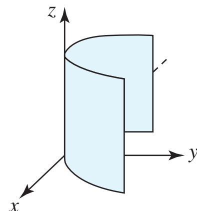
49. 107.98°

Ejercicios 11.7, página 642

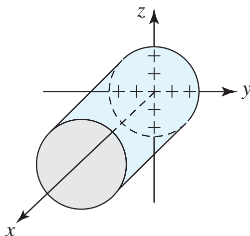
1.



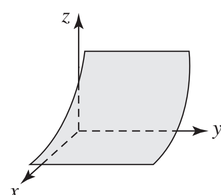
3.



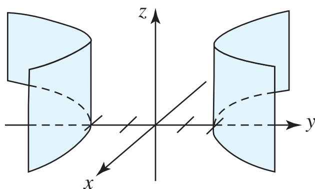
5.



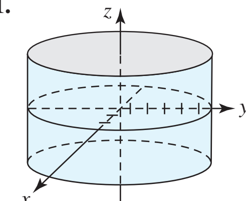
7.



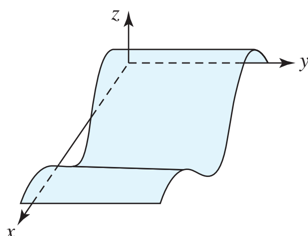
9.



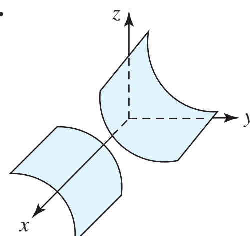
11.



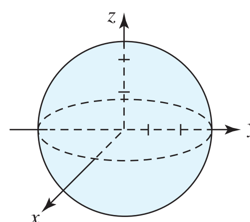
13.



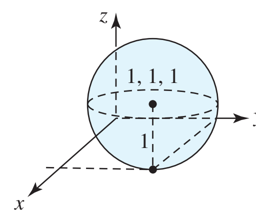
15.



17.



19.



21. centro $(-4, 3, 2)$; radio 6

23. centro $(0, 0, 8)$; radio 8

25. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 6)^2 = 3$

27. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 16$

29. $x^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 4$ o $x^2 + (y - 8)^2 + z^2 = 4$

31. $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 90$

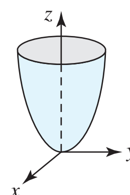
33. todos los puntos en la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$ (hemisferio superior)

35. todos los puntos sobre o en el exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

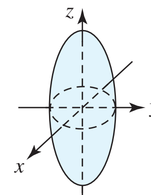
37. todos los puntos sobre y entre esferas concéntricas de radio 1 y radio 3 centradas en el origen

Ejercicios 11.8, página 649

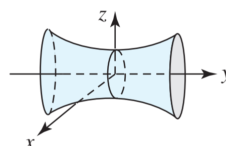
1. paraboloide;



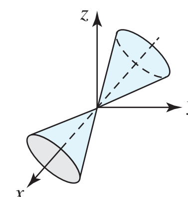
3. elipsoide;



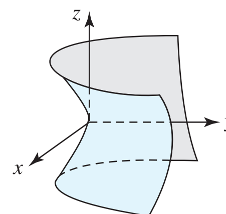
5. hiperboloide de una hoja;



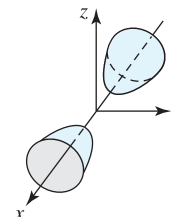
7. cono elíptico;



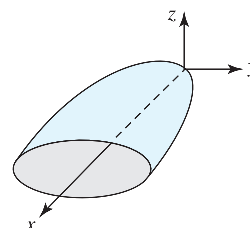
9. paraboloide hiperbólico;



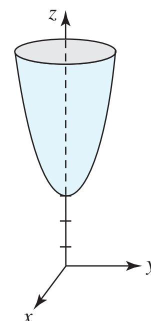
11. hiperboloide de dos hojas;



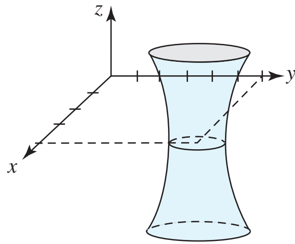
13. paraboloide elíptico;



15.



17.



19. una posibilidad es $y^2 + z^2 = 1$; eje z

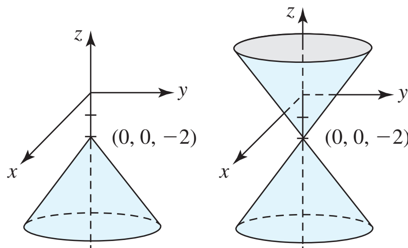
21. una posibilidad es $y = e^{x^2}$; eje y

23. $y^2 = 4(x^2 + z^2)$ **25.** $y^2 + z^2 = (9 - x^2)^2, x \geq 0$

27. $x^2 - y^2 - z^2 = 4$ **29.** $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

31. Las superficies en los problemas 1, 4, 6, 10 y 14 son superficies de revolución alrededor del eje z. La superficie en el problema 2 es la superficie de revolución alrededor del eje y. La superficie en el problema 11 es la superficie de revolución alrededor del eje x.

33.



35. ***a***) área de una sección transversal es $\pi ab(c - z)$ ***b***) $\frac{1}{2}\pi abc^2$

37. $(2, -2, 6), (-2, 4, 3)$

Revisión del capítulo 11, página 650

A. 1. verdadero **3.** falso

5. verdadero **7.** verdadero

9. verdadero **11.** verdadero

13. verdadero **15.** falso

17. falso **19.** verdadero

B. 1. $9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ **3.** $5\mathbf{i}$

5. 14 **7.** 26

9. $-6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ **11.** $(4, 7, 5)$

13. $(5, 6, 3)$ **15.** $-36\sqrt{2}$

17. $(12, 0, 0), (0, -8, 0), (0, 0, 6)$ **19.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

21. 2 **23.** elipsoide

C. 1. $\dfrac{1}{\sqrt{11}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$ **3.** 2

5. $\left\langle \frac{16}{5}, \frac{12}{5}, 0 \right\rangle$ **7.** cilindro elíptico

9. hiperboloide de dos hojas **11.** paraboloide hiperbólico

13. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, hiperboloide de una hoja; $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, hiperboloide de dos hojas

15. ***a***) esfera ***b***) plano

17. $\dfrac{x - 7}{4} = \dfrac{y - 3}{-2} = \dfrac{z + 5}{6}$

19. Los vectores direccionales son ortogonales y el punto de intersección es $(3, -3, 0)$.

21. $14x - 5y - 3z = 0$ **23.** $-6x - 3y + 4z = 5$

27. ***a***) $-qvB\mathbf{k}$ ***b***) $\mathbf{v} = \dfrac{1}{m|\mathbf{r}|^2}(\mathbf{L} \times \mathbf{r})$

29. 192.4 N-m aproximadamente

Ejercicios 12.1, página 659

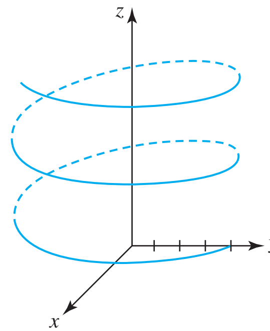
1. $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ **3.** $[-1, 1]$

5. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} \pi t\mathbf{i} + \cos \pi t\mathbf{j} - \cos^2 \pi t\mathbf{k}$

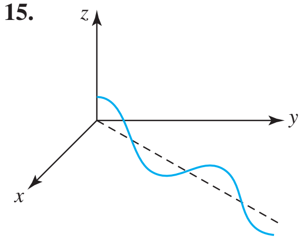
7. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} + e^{3t}\mathbf{k}$ **9.** $x = t^2, y = \operatorname{sen} t, z = \cos t$

11. $x = \ln t, y = 1 + t, z = t^3$

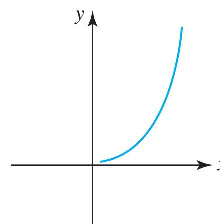
13.



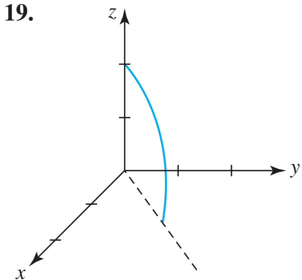
15.



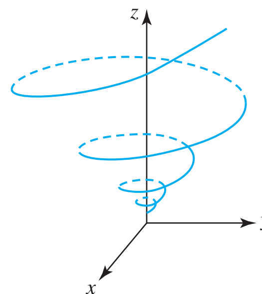
17.



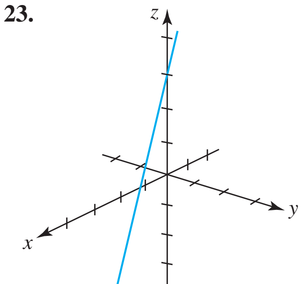
19.



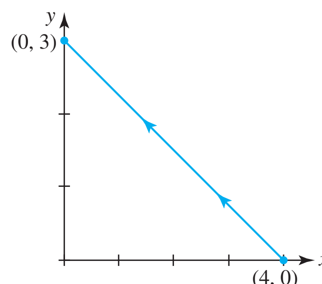
21.



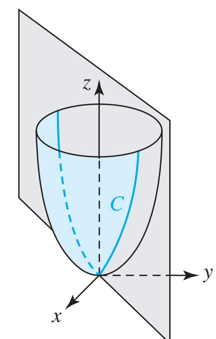
23.



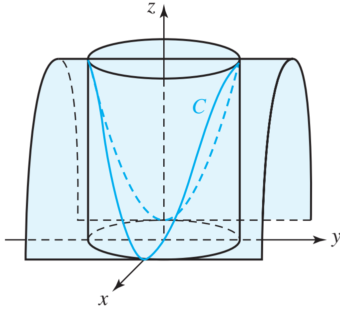
25. $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 4, 0\rangle + t\langle 0, 3\rangle$, $0 \leq t \leq 1$;



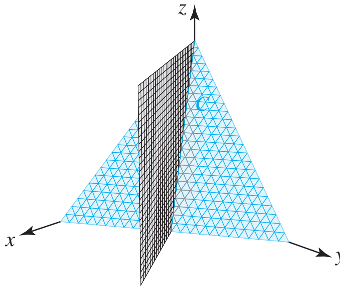
27. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$;



29. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + 9\,\text{sen}^2 t\mathbf{k}$;

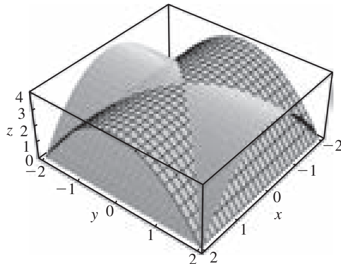


31. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (1 - 2t)\mathbf{k}$;



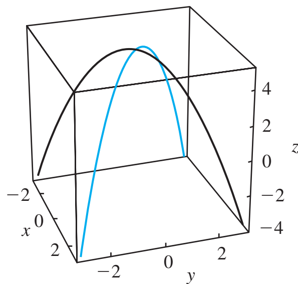
33. *b)* **35.** *d)*

43. *a)*



b) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}$

c)



Ejercicios 12.2, página 667

1. $8\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 32\mathbf{k}$

3. $\langle 2, 2, 2\rangle$

5. $2\mathbf{i} + 23\mathbf{j} + 17\mathbf{k}$

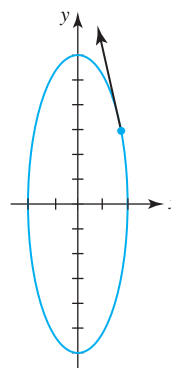
7. discontinua

9. $3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$; $3\mathbf{i} + 8.4\mathbf{j} + 9.5\mathbf{k}$

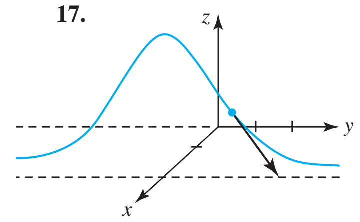
11. $(1/t)\mathbf{i} - (1/t^2)\mathbf{j}$; $-(1/t^2)\mathbf{i} + (2/t^3)\mathbf{j}$

13. $\langle 2te^{2t} + e^{2t}, 3t^2, 8t - 1\rangle$; $\langle 4te^{2t} + 4e^{2t}, 6t, 8\rangle$

15.



17.



19. $x = 2 + t, y = 2 + 2t, z = \dfrac{8}{3} + 4t$

21. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \dfrac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$; $x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}t, y = \dfrac{2}{\sqrt{6}}t, z = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}t$

23. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}t, \pi/3 + t\right\rangle$

25. $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$

27. $\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t))$

29. $2\mathbf{r}_1'(2t) - (1/t^2)\mathbf{r}_2'(1/t)$

31. $\dfrac{3}{2}\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$

33. $(te^t - e^t)\mathbf{i} + \dfrac{1}{2}e^{-2t}\mathbf{j} + \dfrac{1}{2}e^{t^2}\mathbf{k} + \mathbf{C}$

35. $(6t + 1)\mathbf{i} + (3t^2 - 2)\mathbf{j} + (t^3 + 1)\mathbf{k}$

37. $(2t^3 - 6t + 6)\mathbf{i} + (7t - 4t^{3/2} - 3)\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\mathbf{k}$

39. $2\pi\sqrt{a^2 + c^2}$

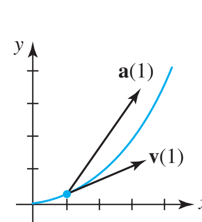
41. $\sqrt{6}(e^{3\pi} - 1)$

43. $\mathbf{r}(s) = 9\cos(s/9)\mathbf{i} + 9\,\text{sen}(s/9)\mathbf{j}$

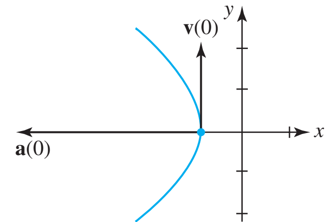
45. $\mathbf{r}(s) = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{i} + \left(5 - \frac{3}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{j} + \left(2 + \frac{4}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{k}$

Ejercicios 12.3, página 671

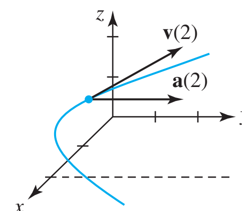
1. La rapidez es $\sqrt{5}$;



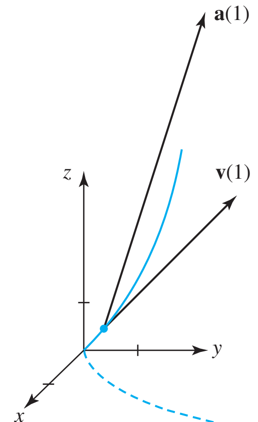
3. La rapidez es 2;



5. La rapidez es $\sqrt{5}$;



7. La rapidez es $\sqrt{14}$;



9. ***a)*** (0, 0, 0) y (25, 115, 0)

b) $\mathbf{v}(0) = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(0) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$;

$\mathbf{v}(5) = 10\mathbf{i} + 73\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(5) = 2\mathbf{i} + 30\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

11. ***a)*** $\mathbf{r}(t) = 240\sqrt{3}t\mathbf{i} + (-16t^2 + 240t)\mathbf{j}$;

$x(t) = 240\sqrt{3}t$, $y(t) = -16t^2 + 240t$

b) 900 pies

c) aproximadamente 6 235 pies

d) 480 pies/s

13. 72.11 pies/s **15.** 97.98 pies/s

19. Suponga que (x_0, y_0) son las coordenadas del centro del blanco en el tiempo $t = 0$. Entonces $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_t$ cuando $t = x_0/(v_0 \cos\theta) = y_0/(v_0 \operatorname{sen}\theta)$. Lo que implica que $\tan\theta = y_0/x_0$. En otras palabras, apunte directamente al blanco en $t = 0$.

21. 191.33 libras aproximadamente

25. $\mathbf{r}(t) = k_1 e^{2t^3}\mathbf{i} + \dfrac{1}{2t^2 + k_2}\mathbf{j} + (k_3 e^{t^2} - 1)\mathbf{k}$

27. Puesto que $\mathbf{F}$ está dirigido a lo largo de $\mathbf{r}$, es necesario tener $\mathbf{F} = c\mathbf{r}$ para alguna constante c. En consecuencia, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times (c\mathbf{r}) = c(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Si $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$, entonces $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{0}$. Lo anterior implica que $\mathbf{L}$ es una constante.

Ejercicios 12.4, página 678

1. $\mathbf{T} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

3. $\mathbf{T} = (a^2 + b^2)^{-1/2}(-a \operatorname{sen} t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + c\mathbf{k})$;
$\mathbf{N} = -\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$;
$\mathbf{B} = (a^2 + b^2)^{-1/2}(c \operatorname{sen} t\mathbf{i} - c\cos t\mathbf{j} + a\mathbf{k})$; $\kappa = a/(a^2 + c^2)$

5. ***a)*** $3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 4z = 3\pi$

b) $-4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y + 12z = 9\pi$

c) $x + y = 2\sqrt{2}$

7. $a_T = 4t/\sqrt{1 + 4t^2}$; $a_N = 2/\sqrt{1 + 4t^2}$

9. $a_T = 2\sqrt{6}$; $a_N = 0$, $t > 0$

11. $a_T = 2t/\sqrt{1 + t^2}$; $a_N = 2/\sqrt{1 + t^2}$

13. $a_T = 0$; $a_N = 5$

15. $a_T = -\sqrt{3}e^{-t}$; $a_N = 0$

17. $\kappa = \dfrac{\sqrt{b^2c^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2c^2\cos^2 t + a^2b^2}}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t + c^2)^{3/2}}$

23. $\kappa = 2$, $\rho = \frac{1}{2}$; $\kappa = 2/\sqrt{125} \approx 0.18$, $\rho = \sqrt{125}/2 \approx 5.59$; la curva es más pronunciada en (0, 0)

25. ; para valores mayores que $|x|$ la gráfica de $y = x^2$ se comporta como una recta puesto que $\kappa(x) \to 0$.

Revisión del capítulo 12, página 679

A. **1.** verdadero **3.** verdadero **5.** verdadero **7.** verdadero **9.** falso

B. **1.** $y = 4$ **3.** $\langle 1, 2, 1\rangle$

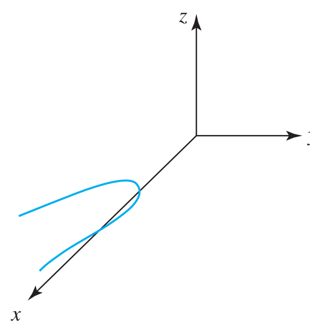
5. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ **7.** $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$

9. $3x + 6y + 3z = 10$

C. **1.** $\sqrt{2}\pi$

3. $x = -27 - 18t$, $y = 8 + t$, $z = 1 + t$

5.



7. $-t^2 \operatorname{sen} t + 2t\cos t - 2\operatorname{sen} t\cos t + 8t^3e^{2t} + 12t^2e^{2t}$

9. $(t + 1)\mathbf{i} + \left(\dfrac{1}{m}t^2 + t + 1\right)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$;

$x = t + 1$, $y = \dfrac{1}{m}t^2 + t + 1$, $z = t$

11. $\mathbf{v}(1) = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(4) = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$,
$\mathbf{a}(1) = 2\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(4) = 2\mathbf{k}$

13. $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (3\pi/4)\mathbf{k}$

15. $\mathbf{T} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\tanh 1\mathbf{i} + \mathbf{j} + \operatorname{sech} 1\mathbf{k})$;

$\mathbf{N} = \operatorname{sech} 1\mathbf{i} - \tanh 1\mathbf{k}$;

$\mathbf{B} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\tanh 1\mathbf{i} + \mathbf{j} - \operatorname{sech} 1\mathbf{k})$;

$\kappa = \dfrac{1}{2}\operatorname{sech}^2 1$

Ejercicios 13.1, página 686

1. $\{(x, y) | (x, y) \neq (0, 0)\}$ **3.** $\{(x, y) | y \neq -x^2\}$

5. $\{(s, t) | s, t$ cualesquiera números reales$\}$

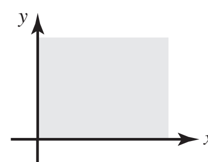
7. $\{(r, s) | r$ cualquier número real, $|s| \geq 1\}$

9. $\{(u, v, w) | u^2 + v^2 + w^2 \geq 16\}$

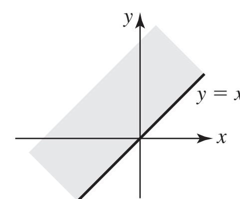
11. ***c)*** **13.** ***b)***

15. ***d)*** **17.** ***f)***

19.



21.



23. $\{z | z \geq 10\}$ **25.** $\{w | -1 \leq w \leq 1\}$

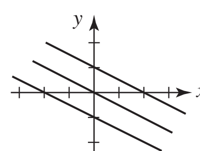
27. 10, −2 **29.** 4, 4

31. plano por el origen perpendicular al plano xz

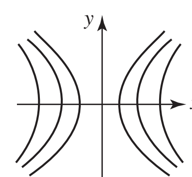
33. manto superior de un cono circular

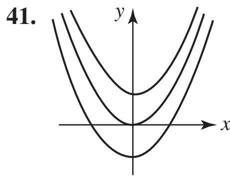
35. mitad superior de un elipsoide

37.



39.

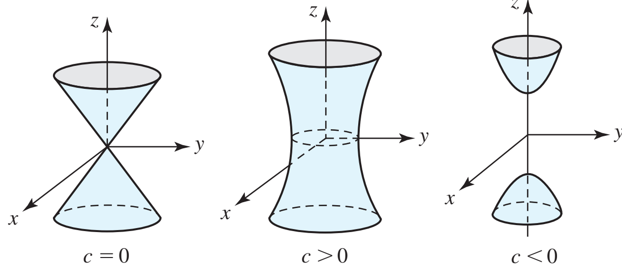


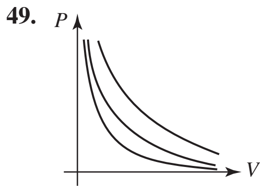
41. 

43. cilindro elíptico

45. elipsoides

47.



49. 

51. $C(r, h) = 2.8\pi r^2 + 4.6\pi rh$

53. $V = \frac{11}{9}\pi r^2 h$

55. 15 600 cm^2

Ejercicios 13.2, página 694

1. 26

3. no existe

5. 1

7. no existe

9. 108

11. 1

13. $\frac{1}{3}$

15. $-\frac{1}{3}$

17. 360

19. no existe

21. -3

23. 0

25. 0

27. 0

29. 0

31. $\{(x, y)|x \geq 0 \text{ y } y \geq -x\}$

33. $\{(x, y)|y \neq 0 \text{ y } x/y \neq (2n + 1)\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

35. ***a)*** continua ***b)*** no continua ***c)*** no continua

37. f es continua en (0, 0).

Ejercicios 13.3, página 701

1. $\partial z/\partial x = 7, \partial z/\partial y = 16y$

3. $\partial z/\partial x = 6xy + 4y^2, \partial z/\partial y = 3x^2 + 8xy$

5. $\partial z/\partial x = 2x - y^2, \partial z/\partial y = -2xy + 20y^4$

7. $\partial z/\partial x = 20x^3y^3 - 2xy^6 + 30x^4, \partial z/\partial y = 15x^4y^2 - 6x^2y^5 - 4$

9. $\partial z/\partial x = 2x^{-1/2}/(3y^2 + 1), \partial z/\partial y = -24y\sqrt{x}/(3y^2 + 1)^2$

11. $\partial z/\partial x = -3x^2(x^3 - y^2)^{-2}, \partial z/\partial y = 2y(x^3 - y^2)^{-2}$

13. $\partial z/\partial x = -10 \cos 5x \text{ sen } 5x, \partial z/\partial y = 10 \text{ sen } 5y \cos 5y$

15. $f_x = (3x^3y + 1)e^{x^3y}, f_y = x^4e^{x^3y}$

17. $f_x = 7y/(x + 2y)^2, f_y = -7x/(x + 2y)^2$

19. $g_u = 8u/(4u^2 + 5v^3), g_v = 15v^2/(4u^2 + 5v^3)$

21. $w_x = x^{-1/2}y, w_y = 2\sqrt{x} - (y/z)e^{y/z} - e^{y/z}, w_z = (y^2/z^2)e^{y/z}$

23. $F_u = 2uw^2 - v^3 - vwt^2 \text{ sen}(ut^2), F_v = -3uv^2 + w \cos(ut^2),$
$F_x = 128x^7t^4, F_t = -2uvwt \text{ sen}(ut^2) + 64x^8t^3$

25. -16

27. $x = -1, y = 4 + t, z = -24 + 2t$

29. -2

31. $\partial^2 z/\partial x^2 = y^2e^{xy}$

33. $f_{xy} = 20xy - 6y^2$

35. $w_{tuv} = 18uv^2t^2$

37. $F_{r\theta r} = -2e^{r^2}(2r^2 + 1) \text{ sen } \theta$

39. $-60x^3y^2 + 8y$

41. $-48uvt^2$

43. $\partial z/\partial x = -x/z, \partial z/\partial y = -y/z$

45. $\partial z/\partial u = (vz - 2uv^3)/(2z - uv), \partial z/\partial v = (uz - 3u^2v^2)/(2z - uv)$

47. $A_x = y \text{ sen } \theta, A_y = x \text{ sen } \theta, A_\theta = xy \cos \theta$

59. ***a)*** $\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{cases} -gx/a, & 0 \leq x \leq at \\ -gt, & x > at \end{cases}$; para $x > at$ el movimiento es de caída libre

b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} (-g/a^2)(at - x), & 0 \leq x \leq at \\ 0, & x > at \end{cases}$; para $x > at$ el movimiento es horizontal

Ejercicios 13.4, página 709

1. $L(x, y) = 2 - 2(x - 1) + 6(y - 1)$

3. $L(x, y) = 136 + \frac{353}{17}(x - 8) + \frac{120}{17}(y - 15)$

5. $L(x, y) = \ln 2 - (x + 1) + \frac{3}{2}(y - 1)$

7. 13.0907

9. 61.44

11. $dz = 2x \text{ sen } 4y\, dx + 4x^2 \cos 4y\, dy$

13. $dz = 2x(2x^2 - 4y^3)^{-1/2}\, dx - 6y^2(2x^2 - 4y^3)^{-1/2}\, dy$

15. $df = 7t(s + 3t)^{-2}\, ds - 7s(s + 3t)^{-2}\, dt$

17. $dw = 2xy^4z^{-5}\, dx + 4x^2y^3z^{-5}\, dy - 5x^2y^4z^{-6}\, dz$

19. $dF = 3r^2\, dr - 2s^{-3}\, ds - 2t^{-1/2}\, dt$

21. $dw = du/u + dv/v - ds/s - dt/t$

23. $\Delta z = 0.2, dz = 0.2$

25. $\Delta z = -0.79, dz = -0.8$

27. $\varepsilon_1 = 5\Delta x, \varepsilon_2 = -\Delta x$

29. $\varepsilon_1 = y^2\Delta x + 4xy\Delta y + 2y\Delta x\Delta y,$
$\varepsilon_2 = x^2\Delta y + 2x\Delta x\Delta y + (\Delta x)^2\Delta y$

31. 0.9%

33. $-mg(0.009)$; decrece

35. 15%

37. 4.9%

Ejercicios 13.5, página 716

1. $\frac{dz}{dt} = \frac{4xt - 4yt^{-3}}{x^2 + y^2}$

3. $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\pi} = -2$

5. $\frac{dp}{du} = \frac{2u}{2s + t} + \frac{4r}{u^3(2s + t)^2} - \frac{r}{2\sqrt{u}(2s + t)^2}$

7. $\partial z/\partial u = 3u^2y^2e^{xy^2} + 2xye^{xy^2}, \partial z/\partial v = -4vxye^{xy^2}$

9. $\partial z/\partial u = 16u^3 - 40y(2u - v), \partial z/\partial v = -96v^2 + 20y(2u - v)$

11. $\partial w/\partial t = -3u(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t} \text{ sen } \theta - 3v(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t} \cos \theta,$
$\partial w/\partial \theta = 3u(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t} \cos \theta - 3v(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t} \text{ sen } \theta$

13. $\partial R/\partial u = s^2t^4e^{v^2} - 4rst^4uve^{-u^2} + 8rs^2t^3uv^2e^{u^2v^2},$
$\partial R/\partial v = 2s^2t^4uve^{v^2} + 2rst^4e^{-u^2} + 8rs^2t^3u^2ve^{u^2v^2}$

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{xu}{\sqrt{x^2+y^2}(rs+tu)} + \dfrac{y\cosh rs}{u\sqrt{x^2+y^2}}$,
$\dfrac{\partial w}{\partial r} = \dfrac{xs}{\sqrt{x^2+y^2}(rs+tu)} + \dfrac{sty\,\text{senh}\,rs}{u\sqrt{x^2+y^2}}$,
$\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{xt}{\sqrt{x^2+y^2}(rs+tu)} - \dfrac{ty\cosh rs}{u^2\sqrt{x^2+y^2}}$

17. $dy/dx = (4xy^2 - 3x^2)/(1 - 4x^2y)$

19. $dy/dx = y\cos xy/(1 - x\cos xy)$

21. $\partial z/\partial x = x/z$, $\partial z/\partial y = y/z$

23. $\partial z/\partial x = (2x + y^2z^3)/(10z - 3xy^2z^2)$,
$\partial z/\partial y = (2xyz^3 - 2y)/(10z - 3xy^2z^2)$

33. 5.31 cm^2/s **35.** 0.5976 pulg^2/año

39. ***a***) aproximadamente 380 ciclos por segundo ***b***) decreciente

Ejercicios 13.6, página 723

1. $(2x - 3x^2y^2)\mathbf{i} + (-2x^3y + 4y^3)\mathbf{j}$

3. $(y^2/z^3)\mathbf{i} + (2xy/z^3)\mathbf{j} - (3xy^2/z^4)\mathbf{k}$

5. $4\mathbf{i} - 32\mathbf{j}$ **7.** $2\sqrt{3}\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 4\sqrt{3}\mathbf{k}$

9. $\sqrt{3}x + y$ **11.** $\dfrac{15}{2}(\sqrt{3} - 2)$

13. $-\dfrac{1}{2\sqrt{10}}$ **15.** $\dfrac{98}{\sqrt{5}}$

17. $-3\sqrt{2}$ **19.** -1

21. $-\dfrac{12}{\sqrt{17}}$ **23.** $\sqrt{2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$; $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

25. $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; $2\sqrt{6}$

27. $-8\sqrt{\pi/6}\,\mathbf{i} - 8\sqrt{\pi/6}\,\mathbf{j}$; $-8\sqrt{\pi/3}$

29. $-\dfrac{3}{8}\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - \dfrac{2}{3}\mathbf{k}$; $-\dfrac{\sqrt{83\,281}}{24}$

31. $\pm\dfrac{31}{\sqrt{17}}$

33. ***a***) $\mathbf{u} = \dfrac{3}{5}\mathbf{i} - \dfrac{4}{5}\mathbf{j}$ ***b***) $\mathbf{u} = \dfrac{4}{5}\mathbf{i} + \dfrac{3}{5}\mathbf{j}$ ***c***) $\mathbf{u} = -\dfrac{4}{5}\mathbf{i} - \dfrac{3}{5}\mathbf{j}$

35. ***a***) $D_{\mathbf{u}}f = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(9x^2 + 3y^2 - 18xy^2 - 6x^2y)$

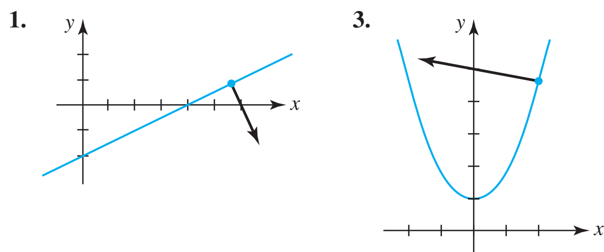
b) $D_{\mathbf{u}}F = \dfrac{1}{5}(-3x^2 - 27y^2 + 27x + 3y - 36xy)$

37. $(2, 5), (-2, 5)$ **39.** $-16\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

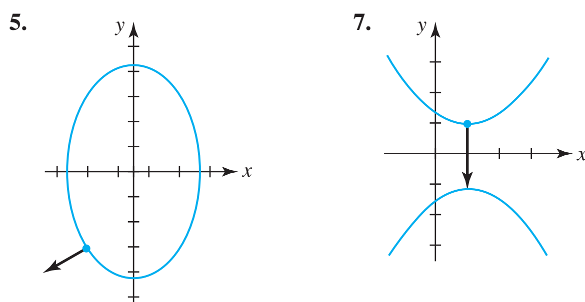
41. $x = 3e^{-4t}$, $y = 4e^{-2t}$ o $16x = 3y^2$, $y \geq 0$

Ejercicios 13.7, página 727

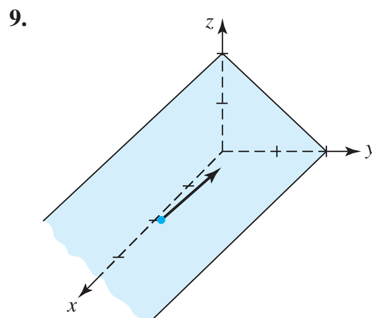
1. **3.**



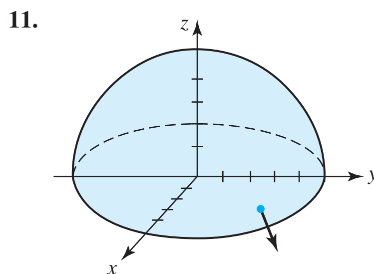
5. **7.**



9.



11.



13. $(-4, -1, 17)$ **15.** $-2x + 2y + z = 9$

17. $6x - 2y - 9z = 5$ **19.** $6x - 8y + z = 50$

21. $2x + y - \sqrt{2}z = 1 + \dfrac{5}{4}\pi$ **23.** $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - z = 2$

25. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

27. $(-2, 0, 5), (-2, 0, -3)$

31. $x = 1 + 2t$, $y = -1 - 4t$, $z = 1 + 2t$

33. $\dfrac{x - \frac{1}{2}}{4} = \dfrac{y - \frac{1}{3}}{6} = \dfrac{z - 3}{-1}$

Ejercicios 13.8, página 734

1. mín. rel. $f(0, 0) = 5$

3. máx. rel. $f(4, 3) = 25$

5. mín. rel. $f(-2, 1) = 15$

7. máx. rel. $f(-1, -1) = 10$; mín. rel. $f(1, 1) = -10$

9. mín. rel. $f(3, 1) = -14$

11. no extrema

13. máx. rel. $f(1, 1) = 12$

15. mín. rel. $f(-1, -2) = 14$

17. máx. rel. $f(-1, (2n + 1)\pi/2) = e^{-1}$, n impar;
mín. rel. $f(-1, (2n + 1)\pi/2) = -e^{-1}$, n par

19. máx. rel. $f((2m + 1)\pi/2, (2n + 1)\pi/2) = 2$, m y n pares;
mín. rel. $f((2m + 1)\pi/2, (2n + 1)\pi/2) = -2$, m y n impares

21. $x = 7, y = 7, z = 7$

23. $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

25. $(2, 2, 2), (2, -2, -2), (-2, 2, -2), (-2, -2, 2)$; en estos puntos la distancia mínima es $2\sqrt{3}$

27. $\frac{8}{9}\sqrt{3}abc$

29. $x = P/(4 + 2\sqrt{3}), y = P(\sqrt{3} - 1)/(2\sqrt{3}), \theta = 30°$

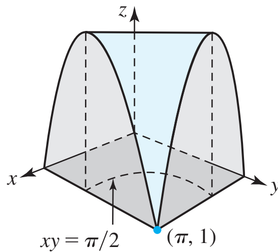
31. máx. abs. $f(0, 0) = 16$ **33.** mín. abs. $f(0, 0) = -8$

35. máx. abs. $f\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2$; mín. abs. $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2$

37. máx. abs. $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2}$;
mín. abs. $f(0, 0) = 0$

39. máx. abs. $f\left(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right) = 10$; mín. abs. $f\left(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right) = -10$

41. ***a***) $(0, 0)$ y todos los puntos $(x, 2\pi/x)$ para $0 < x \le \pi$
b) máx. abs. $f(x, \pi/2x) = 1, 0 < x \le \pi$;
mín. abs. $f(0, 0) = f(0, y) = f(x, 0) = f(\pi, 1) = 0$
c)



43. $x = 2, y = 2, z = 15$

Ejercicios 13.9, página 737

1. $y = 0.4x + 0.6$

3. $y = 1.1x - 0.3$

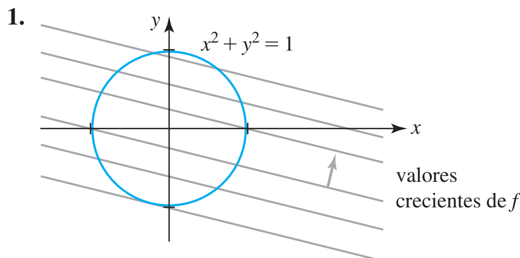
5. $y = 1.3571x + 1.9286$

7. $v = -0.8357T + 234.333$; 117.335, 100.621

9. ***a***) $y = 0.5996x + 4.3665$;
$y = -0.0232x^2 + 0.5618x + 4.5942$;
$y = 0.00079x^3 - 0.0212x^2 + 0.5498x + 4.5840$

Ejercicios 13.10, página 743

1.



f parece tener un máximo restringido y un mínimo restringido

3. máx. $f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{10}$;
mín. $f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\sqrt{10}$

5. máx. $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$;
mín. $f(1, -1) = f(-1, 1) = -1$

7. mín. $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{2}$

9. máx. $f(1/\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2}) = f(-1/\sqrt[4]{2}, -1/\sqrt[4]{2}) =$
$f(1/\sqrt[4]{2}, -1/\sqrt[4]{2}) = f(-1/\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2}) = \sqrt{2}$;
mín. $f(0, 1) = f(0, -1) = f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$

11. máx. $f\left(\frac{9}{16}, \frac{1}{16}\right) = \frac{729}{65\,536}$; mín. $f(0, 1) = f(1, 0) = 0$

13. máx. $f(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, \sqrt{5}) = 6\sqrt{5}$;
mín. $f(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, -\sqrt{5}) = -6\sqrt{5}$

15. máx. $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

17. mín. $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$

19. mín. $f\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{15}, -\frac{11}{15}\right) = \frac{134}{75}$

21. máx. $A\left(\dfrac{4}{2 + \sqrt{2}}, \dfrac{4}{2 + \sqrt{2}}\right) = \dfrac{4}{3 + 2\sqrt{2}}$

23. $x = 12 - \dfrac{9}{2\sqrt{5}}$ m, $y = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$ m

25. $z = P + \dfrac{4}{\sqrt{27k}}(2 - \sqrt{4 + P\sqrt{27k}})$

Revisión del capítulo 13, página 744

A. **1.** falso **3.** verdadero
5. falso **7.** falso
9. verdadero

B. **1.** $-\dfrac{1}{4}$ **3.** $3x^2 + y^2 = 28$

5. $\dfrac{\partial F}{\partial r}g'(w) + \dfrac{\partial F}{\partial s}h'(w)$ **7.** f_{yyzx}

9. $F(y); -F(x)$

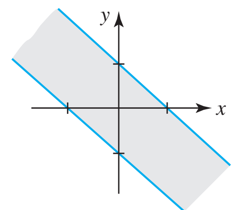
11. $f_x(x, y)g'(y)h'(z) + f_{xy}(x, y)g(y)h'(z)$

C. **1.** $e^{-x^3y}(-x^3y + 1)$ **3.** $-\dfrac{3}{2}r^2\theta(r^3 + \theta^2)^{-3/2}$

5. $6x^2y \operatorname{senh}(x^2y^3) + 9x^4y^4 \cosh(x^2y^3)$

7. $-60s^2t^4v^{-5}$ **9.** $\dfrac{1}{2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{2}\mathbf{j}$

11. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x^2 - y^2 - 4xy)$ **13.**



15. $2x\Delta y + 2y\Delta x + 2\Delta x\Delta y - 2y\Delta y - (\Delta y)^2$

17. $dz = 11y\,dx/(4x + 3y)^2 - 11x\,dy/(4x + 3y)^2$

19. $x = -\sqrt{5}, \dfrac{z - 3}{4} = \dfrac{y - 1}{3}$

21. ***a***) 2 ***b***) $-\sqrt{2}$ ***c***) 4

23. $4\pi x + 3y - 12z = 4\pi - 6\sqrt{3}$

25. $3x + 4y = 25$ **27.** $x = 2, y = 1, z = 2$

29. aproximadamente -8.77 cm/s **33.** no un extremo

35. máximo relativo **37.** $A = \frac{1}{2}L^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta$

39. $A = 2xz + 2yz - 5z^2$ **41.** $V = 16xy - 4xy\sqrt{x^2 + y^2}$

Ejercicios 14.1, página 752

1. 52 **3.** *a)* 8 *b)* 8

5. 60 **7.** 10π

9. No. El integrando $f(x, y) = x + 5y$ no es no negativo sobre la región R.

11. 80 **13.** 34

15. 66 **17.** 18

Ejercicios 14.2, página 756

1. $y + c_1(x)$ **3.** $2x^3y - \frac{3}{2}x^2\sqrt{y} + c_2(y)$

5. $\dfrac{\ln|y + 1|}{x} + c_1(x)$ **7.** $3y \operatorname{sen} 4x - 3x \operatorname{sen} y + c_2(y)$

9. $y(2x + 3y)^{1/2} + c_2(y)$ **11.** $24y - 20e^y$

13. $x^2e^{3x^2} - x^2e^x$ **15.** $\frac{1}{2}x \ln 5$

17. $2 - \operatorname{sen} y$ **19.** $\cos^2 x - \frac{1}{3}\cos^4 x$

21. 37 **23.** $-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

25. $-\dfrac{4}{21}$ **27.** $18 - e^3 + 3e$

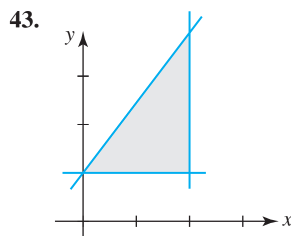
29. $\dfrac{10}{3}$ **31.** $\dfrac{\pi}{4}\ln 9$

33. $\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$ **35.** π

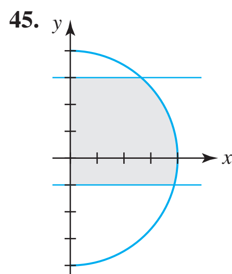
37. e^{-1} **39.** $2 - \pi$

41. $\frac{1}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$

43.



45.



47. Ambas integrales iguales $\frac{32}{5}$. **49.** Ambas integrales iguales 9.

51. Ambas integrales iguales $13\pi^2 - 16$.

Ejercicios 14.3, página 762

1. $\dfrac{1}{21}$ **3.** $\dfrac{25}{84}$

5. 96 **7.** $2 \ln 2 - 1$

9. $\dfrac{14}{3}$ **11.** 40

13. $\dfrac{9}{2}$ **15.** $e^4 - e + 3 - 4 \ln 4$

17. $\dfrac{63}{4}$ **19.** el volumen es 16π

21. 18 **23.** 2π

25. 4 **27.** $30 \ln 6$

29. $\dfrac{15\pi}{4}$ **31.** $\dfrac{16}{9}$

33. $\dfrac{35}{6}$ **35.** $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y)\, dy\, dx$

37. $\displaystyle\int_1^{e^3}\int_{\ln y}^3 f(x, y)\, dx\, dy$ **39.** $\displaystyle\int_0^1\int_{y^3}^{2-y} f(x, y)\, dx\, dy$

41. $\frac{1}{18}(2\sqrt{2} - 1)$ **43.** $\frac{2}{3}\operatorname{sen} 8$

45. $\dfrac{\pi}{8}$ **47.** $\dfrac{a + b}{2} \cdot \dfrac{c + d}{2}$

Ejercicios 14.4, página 767

1. $\bar{x} = \frac{8}{3}, \bar{y} = 2$ **3.** $\bar{x} = 3, \bar{y} = \frac{3}{2}$

5. $\bar{x} = \frac{17}{21}, \bar{y} = \frac{55}{147}$ **7.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4}{7}$

9. $\bar{x} = \dfrac{3e^4 + 1}{4(e^4 - 1)}, \bar{y} = \dfrac{16(e^5 - 1)}{25(e^4 - 1)}$ **11.** $\dfrac{1}{105}$

13. $\frac{4}{9}k$ **15.** $\dfrac{256}{21}$

17. $\dfrac{941}{10}$ **19.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}a$

21. *a)* $\frac{1}{4}ab^3\pi$ *b)* $\frac{1}{4}a^3b\pi$ *c)* $\frac{1}{2}b$ *d)* $\frac{1}{2}a$

23. $\frac{1}{6}ka^4$ **25.** $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}k$

27. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}a$

Ejercicios 14.5, página 771

1. $\frac{27}{2}\pi$ **3.** $\frac{1}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})$

5. $\frac{25}{3}\pi$ **7.** $\frac{2}{3}\pi(15\sqrt{15} - 7\sqrt{7})$

9. $\dfrac{5}{4}$ **11.** $\bar{x} = \dfrac{13}{3\pi}, \bar{y} = \dfrac{13}{3\pi}$

13. $\bar{x} = \dfrac{12}{5}, \bar{y} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ **15.** $\bar{x} = \frac{1}{6}(4 + 3\pi), \bar{y} = \frac{4}{3}$

17. $\frac{1}{4}\pi a^4k$ **19.** $\frac{1}{12}ak(15\sqrt{3} - 4\pi)$

21. $\frac{1}{2}\pi a^4k$ **23.** $4k$

25. 9π **27.** $\frac{1}{4}\pi(e - 1)$

29. $\frac{3}{8}\pi$ **31.** 250

33. $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

35. aproximadamente 1 450 m^3

37. ***a)*** $2\pi d D_0[d - (R + d)e^{-R/d}]$

b) $\dfrac{2d^2 - (R^2 + 2dR + 2d^2)e^{-R/d}}{d - (R + d)e^{-R/d}}$

c) $2\pi d^2 D_0,\ 2d$

Ejercicios 14.6, página 775

1. $3\sqrt{29}$

3. $\frac{10}{3}\pi$

5. $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1)$

7. $\frac{25}{6}\pi$

9. $2a^2(\pi - 2)$

11. $8a^2$

13. $2\pi a(c_2 - c_1)$

Ejercicios 14.7, página 782

1. 48

3. 36

5. $\pi - 2$

7. $\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2}e$

9. 50

11. $\int_0^4\int_0^{2-(x/2)}\int_{x+2y}^4 f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx,\ \int_0^2\int_{2y}^4\int_0^{z-2y} f(x, y, z)\,dx\,dz\,dy,$

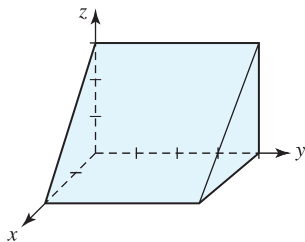
$\int_0^4\int_0^{z/2}\int_0^{z-2y} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,\ \int_0^4\int_x^4\int_0^{(z-x)/2} f(x, y, z)\,dy\,dz\,dx,$

$\int_0^4\int_0^{z}\int_0^{(z-x)/2} f(x, y, z)\,dy\,dx\,dz$

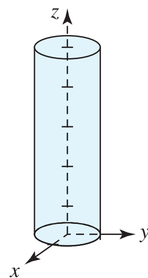
13. ***a)*** $\int_0^2\int_{x^3}^8\int_0^4 dz\,dy\,dx$ ***b)*** $\int_0^8\int_0^4\int_0^{\sqrt[3]{y}} dx\,dz\,dy$

c) $\int_0^4\int_0^2\int_{x^3}^8 dy\,dx\,dz$

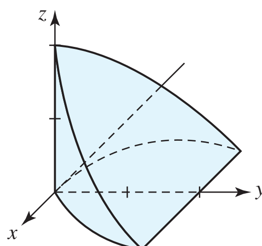
15.



17.



19.



21. $16\sqrt{2}$

23. 16π

25. $\bar{x} = \frac{4}{5}, \bar{y} = \frac{32}{7}, \bar{z} = \frac{8}{3}$

27. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 2, \bar{z} = 0$

29. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{2y+2}^{8-y}(x + y + 4)\,dz\,dy\,dx$

31. $\frac{2\,560}{3}k,\ \frac{4}{3}\sqrt{5}$

33. $\frac{1}{30}k$

35. $k\int_{-5}^{5}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{5}(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dz\,dy\,dx$

Ejercicios 14.8, página 789

1. $(-5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 5)$

3. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -4\right)$

5. $(0, 5, 1)$

7. $(\sqrt{2}, -\pi/4, -9)$

9. $(2\sqrt{2}, 2\pi/3, 2)$

11. $(4, -\pi/2, 0)$

13. $r^2 + z^2 = 25$

15. $r^2 - z^2 = 1$

17. $z = x^2 + y^2$

19. $x = 5$

21. $\frac{2}{3}\pi(64 - 24\sqrt{3})$

23. $\frac{625}{2}\pi$

25. $\left(0, 0, \frac{3}{8}a\right)$

27. $\frac{8}{3}\pi k$

29. ***a)*** $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ ***b)*** $\left(\frac{2}{3}, \pi/6, 0\right)$

31. ***a)*** $(-4, 4, 4\sqrt{2})$ ***b)*** $(4\sqrt{2}, 3\pi/4, 4\sqrt{2})$

33. ***a)*** $(2\sqrt{2}, 0, -2\sqrt{2})$ ***b)*** $(2\sqrt{2}, 0, -2\sqrt{2})$

35. $(5\sqrt{2}, \pi/2, 5\pi/4)$

37. $(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/6)$

39. $(6, \pi/4, -\pi/4)$

41. $\rho = 8$

43. $\phi = \pi/6, \phi = 5\pi/6$

45. $x^2 + y^2 + z^2 = 100$

47. $z = 2$

49. $9\pi(2 - \sqrt{2})$

51. $\frac{2}{9}\pi$

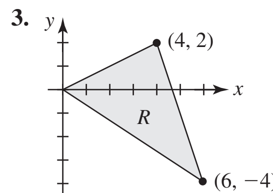
53. $\left(0, 0, \frac{7}{6}\right)$

55. πk

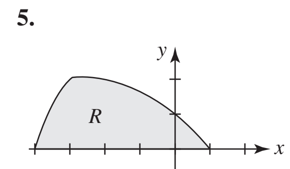
Ejercicios 14.9, página 795

1. (0, 0), (−2, 8), (16, 20), (14, 28)

3.



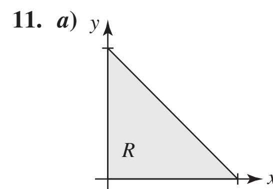
5.



7. $-2v$

9. $-\frac{1}{3u^2}$

11. ***a)***



b) (0, 0) es la imagen de todo punto sobre la frontera $u = 0$.

13. 16

15. $\frac{1}{2}$

17. $\frac{1}{4}(b - a)(d - c)$

19. $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$

21. $\frac{315}{4}$ **23.** $\frac{1}{4}(e - e^{-1})$

25. 126 **27.** $\frac{15}{2}\pi$

Revisión del capítulo 14, página 796

A. 1. verdadero **3.** verdadero

5. falso

B. 1. $32y^3 - 8y^5 + 5y\ln(y^2 + 1) - 5y\ln 5$

3. región cuadrada **5.** $f(x, 4) - f(x, 2)$

7. $\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy\, dx$ **9.** $(\sqrt{2}, 2\pi/3, \sqrt{2})$

11. $z = r^2$; $\rho = \csc\phi \cot\phi$

C. 1. $-3xe^{-4xy} - 5xy + y + c_1(x)$

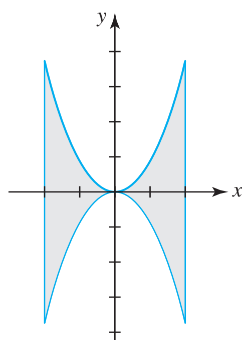
3. $-y\cos y^2 + y\cos y^4$ **5.** $e^2 - e^{-2} + 4$

7. $1 - \text{sen } 1$ **9.** $\frac{10}{3}$

11. 320π **13.** $\frac{37}{60}$

15. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{x^2 + y^2}\, dy\, dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

17.



19. $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$

21. $\frac{5}{8}\pi$ **23.** $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$

25. ***a***) $\int_0^1 \int_x^{2x} \sqrt{1 - x^2}\, dy\, dx$

b) $\int_0^1 \int_{y/2}^{y} \sqrt{1 - x^2}\, dx\, dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx\, dy$

c) $\frac{1}{3}$

27. $\frac{41}{1\,512}k$ **29.** 8π

31. 0

Ejercicios 15.1, página 807

1. $-\frac{125\sqrt{2}}{6}$; $\frac{125}{6}(4 - \sqrt{2})$; $\frac{125}{2}$

3. 3; 6; $3\sqrt{5}$ **5.** 0

7. -1; $\frac{1}{2}(\pi - 2)$; $\frac{1}{8}\pi^2$; $\frac{1}{8}\pi^2\sqrt{2}$

9. 21 **11.** 30

13. 1 **15.** 1

17. 460 **19.** $\frac{26}{9}$

21. $-\frac{64}{3}$ **23.** $-\frac{8}{3}$

25. 6π **27.** $\frac{123}{2}$

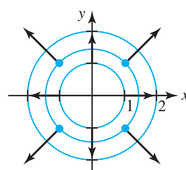
29. 70 **31.** 7

33. Sobre cada curva la integral de línea tiene el valor $\frac{208}{3}$.

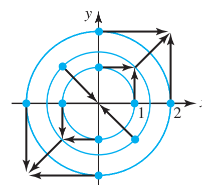
35. $k\pi$

Ejercicios 15.2, página 813

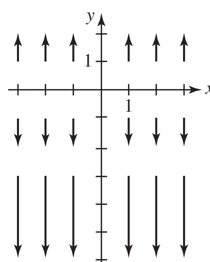
1.



3.



5.



7. ***b***)

9. ***d***) **11.** ***d***)

13. ***a***) **15.** $-\frac{19}{8}$

17. 16 **19.** $9\pi^2 + 6\pi$

21. e **23.** -4

25. 0 **27.** 0

29. aproximadamente 21.5 lb

31. $\nabla f = (3x - 6y)\mathbf{i} + (12y - 6x)\mathbf{j}$

33. $\nabla f = \tan^{-1} yz\,\mathbf{i} + \frac{xz}{1 + y^2z^2}\mathbf{j} + \frac{xy}{1 + y^2z^2}\mathbf{k}$

35. $\nabla f = -e^{-y^2}\mathbf{i} + (1 + 2xye^{-y^2})\mathbf{j} + \mathbf{k}$

37. ***b***) **39.** ***d***)

41. $\phi(x, y) = y + \cos y + \text{sen } x$ **43.** $\phi(x, y, z) = x + y^2 - 4z^3$

Ejercicios 15.3, página 823

1. $\frac{16}{3}$ **3.** 14

5. 3 **7.** 330

9. 1 096 **11.** $\phi = x^4y^3 + 3x + y + K$

13. no es un campo conservativo **15.** $\phi = \frac{1}{4}x^4 + xy + \frac{1}{4}y^4 + K$

17. $\phi(x, y, z) = x^2 + y^3 - yz + K$ **19.** $3 + e^{-1}$

21. 63 **23.** $8 + 2e^3$

25. 16 **27.** $\pi - 4$

29. $\phi = (Gm_1m_2)/|\mathbf{r}|$

Ejercicios 15.4, página 829

1. 3 **3.** 0

5. 75π **7.** 48π

9. $\frac{56}{3}$ **11.** $\frac{2}{3}$

13. $\frac{1}{8}$

15. $(b-a) \times$ (área de la región acotada por C)

19. $\frac{3}{8}a^2\pi$ **23.** $\frac{45}{2}\pi$

25. π **27.** $\frac{27}{2}\pi$

29. $\frac{3}{2}\pi$

Ejercicios 15.5, página 837

1. $x = u, y = v, z = 4u + 3v - 2$

3. $x = u, y = -\sqrt{1 + u^2 + v^2}, z = v$

5. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (1 - v^2)\mathbf{k}, -2 \le u \le 2, -3 \le v \le 3$

7. $x^2 + y^2 = 1$, cilindro circular

9. $x^2 = y^2 + z^2$, porción de un cono circular

11. dominio del parámetro definido por $0 \le u \le 4, 0 \le v \le \pi/2$

13. dominio del parámetro definido por $0 \le \theta \le 2\pi, \pi/2 \le \phi \le \pi$

15. $x + \sqrt{3}y = 20$ **17.** $-6x + 10y + z = 9$

19. $3x + 3y - z = 9$ **21.** $x + 3y + 2z = 4$

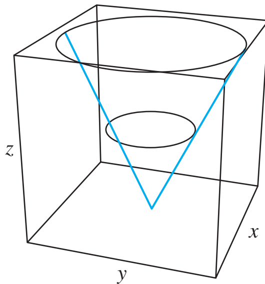
23. $8x + 6x - 5z = 25$ **25.** $4\sqrt{11}$

27. $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1)$ **29.** $2\sqrt{5}\pi + \pi \ln(2 + \sqrt{5})$

31. $x = 2$ sen ϕ cos θ, $y = 2$ sen ϕ sen θ, $z = 2$ cos ϕ, $\pi/3 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$; 12π

33. $x = 2$ sen ϕ cos θ, $y = 2$ sen ϕ sen θ, $z = 2$ cos ϕ, $0 \le \phi \le \pi/4, 0 \le \theta \le 2\pi$; $4\pi(2 - \sqrt{2})$

35.



Ejercicios 15.6, página 844

1. $\frac{26}{3}$ **3.** 0

5. 972π **7.** $\frac{1}{15}(3^{5/2} - 2^{7/2} + 1)$

9. $9(17^{3/2} - 1)$ **11.** $12\sqrt{14}$

13. $\frac{\sqrt{3}}{12}k$ **15.** 18

17. 28π **19.** 8π

21. $\frac{5}{2}\pi$ **23.** $-8\pi a^3$

25. $4\pi kq$ **27.** $\left(1, \frac{2}{3}, 2\right)$

29. ***a***) $\left(0, 0, \frac{4}{3}\right)$ ***b***) $128\sqrt{2}\pi k$

Ejercicios 15.7, página 849

1. $(x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$; $2z$ **3.** $\mathbf{0}$; $4y + 8z$

5. $(4y^3 - 6xz^2)\mathbf{i} + (2z^3 - 3x^2)\mathbf{k}$; $6xy$

7. $(3e^{-z} - 8yz)\mathbf{i} - xe^{-z}\mathbf{j}$; $e^{-z} + 4z^2 - 3ye^{-z}$

9. $(xy^2e^y + 2xye^y + x^3yze^z + x^3ye^z)\mathbf{i} - y^2e^y\mathbf{j} + (-3x^2yze^z - xe^x)\mathbf{k}$; $xye^x + ye^x - x^3ze^z$

27. $2\mathbf{i} + (1 - 8y)\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}$ **37.** 6

Ejercicios 15.8, página 855

1. -40π **3.** $\frac{45}{2}$

5. $\frac{3}{2}$ **7.** -3

9. $-\frac{3}{2}\pi$ **11.** π

13. -152π **15.** 112

17. considere la superficie como $z = 0$; $\frac{81}{4}\pi$

Ejercicios 15.9, página 862

1. $\frac{3}{2}$ **3.** $\frac{12}{5}a^5\pi$

5. 256π **7.** $\frac{62}{5}\pi$

9. $4\pi(b - a)$ **11.** 128

13. $\frac{1}{2}\pi$

Revisión del capítulo 15, página 863

A. **1.** verdadero **3.** falso

5. falso **7.** verdadero

9. verdadero **11.** verdadero

B. **1.** $\nabla\phi = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j}$

3. $6xy$ **5.** 0

7. 0 **9.** $4x + y - 2z = 0$

C. **1.** $\frac{56}{3}\sqrt{2}\pi^3$ **3.** 12

5. $2 + \frac{2}{3\pi}$ **7.** $\frac{1}{2}\pi^2$

9. 5π **11.** 180π

13. $\frac{1}{12}(\ln 3)(17^{3/2} - 5^{3/2})$ **15.** $6(e^{-3} - 1)$

17. $-4\pi c$ **19.** 0

21. 125π

23. 3π

25. $\frac{5}{3}$

27. $z = x^2 - y^2$; paraboloide hiperbólico

29. $y = x^2$; cilindro parabólico

Ejercicios 16.1, página 871

1. $x^2 + 4x + \frac{3}{2}y^2 - y = C$

3. $\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = C$

5. $x^2y^2 - 3x + 4y = C$

7. no exacta

9. $xy^3 + y^2 \cos x - \frac{1}{2}x^2 = C$

11. no exacta

13. $xy - 2xe^x + 2e^x - 2x^3 = C$

15. $x^3y^3 - \tan^{-1}(3x) = C$

17. $-\ln|\cos x| + \cos x \operatorname{sen} y = C$

19. $t^4y - 5t^3 - ty + y^3 = C$

21. $xy^2 + x^2y - y + \frac{1}{3}x^3 = \frac{4}{3}$

23. $4ty + t^2 - 5t + 3y^2 - y = 8$

25. $k = 10$

Ejercicios 16.2, página 877

1. $y = C_1 + C_2e^{x/3}$

3. $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x}$

5. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x$

7. $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

9. $y = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$

11. $y = C_1e^{(-3/2+\sqrt{29}/2)x} + C_2e^{(-3/2-\sqrt{29}/2)x}$

13. $y = C_1e^{2x/3} + C_2e^{-x/4}$

15. $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$

17. $y = e^{-x/3}\left(C_1 \cos\dfrac{\sqrt{2}}{3}x + C_2 \operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{2}}{3}x\right)$

19. $y = C_1e^{-x/3} + C_2xe^{-x/3}$

21. $y = 2\cos 4x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x$

23. $y = -\dfrac{3}{4}e^{-5x} + \dfrac{3}{4}e^{-x}$

25. $y = e^{x/2}\left(-\cos\dfrac{1}{2}x + \operatorname{sen}\dfrac{1}{2}x\right)$

27. $y = 0$

29. $y = e^{2(x-1)} - e^{x-1}$

31. $y'' + y' - 20y = 0$

33. $y = C_2 \operatorname{sen} x$

35. $y = -2\cos x$

37. ninguna solución

39. $y = xe^{2(x-1)}$

Ejercicios 16.3, página 882

1. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x} - 6$

3. $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{1}{2}x + 1$

5. $y = C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{sen} 5x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} x$

7. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \dfrac{4}{3}e^{2x} - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{4}{3}x^2 - \dfrac{28}{9}x + \dfrac{80}{27}$

9. $y = e^{4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x) + \dfrac{1}{10}e^{3x} - \dfrac{126}{697}\cos 2x + \dfrac{96}{697}\operatorname{sen} 2x$

11. $y = \dfrac{5}{8}e^{-8x} + \dfrac{5}{8}e^{8x} - \dfrac{1}{4}$

13. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + \cos x \ln|\cos x|$

15. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{2}x \cos x$

$= C_1 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{2}x \cos x$

17. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}\cos 2x$

19. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \dfrac{1}{4}xe^x - \dfrac{1}{4}xe^{-x} = C_1e^x + C_2e^{-x} + \dfrac{1}{2}x \operatorname{senh} x$

21. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + \dfrac{1}{4}e^{2x}\ln|x| - \dfrac{1}{4}e^{-2x}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{e^{4t}}{t}\,dt,\ x_0 > 0$

23. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + (e^{-2x} + e^{-x})\ln(1 + e^x)$

25. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} - e^{-2x}\operatorname{sen} e^x$

27. $y = C_1e^x + C_2xe^x - \frac{1}{2}e^x \ln(1 + x^2) + xe^x \tan^{-1} x$

29. $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}\ln x - \frac{3}{4}x^2e^{-x}$

31. $y = C_1e^{x/2} + C_2xe^{x/2} + \frac{8}{9}e^{-x} + x + 4$

33. $y = \dfrac{3}{8}e^{-x} + \dfrac{5}{8}e^x + \dfrac{1}{4}x^2e^x - \dfrac{1}{4}xe^x$

35. $y = C_1x + C_2x\ln x + \dfrac{2}{3}x(\ln x)^3$

37. $C(x) = C(\infty)(1 - e^{-x/\lambda})$

Ejercicios 16.4, página 890

1. Una masa que pesa 4 lb $\left(\frac{1}{8}\text{ slug}\right)$ sujeta a un resorte se libera desde un punto 3 unidades arriba de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 2 pies/s. La constante del resorte es de 3 lb/pies.

3. $x(t) = \dfrac{1}{2}\cos 2t + \dfrac{3}{4}\operatorname{sen} 2t$

5. $x(t) = -5\operatorname{sen} 2t$

7. Una masa que pesa 2 lb $\left(\frac{1}{16}\text{ slug}\right)$ sujeta a un resorte cuya constante es 1 lb/pie. El sistema se amortigua con una fuerza resistente equivalente numéricamente a dos veces la velocidad instantánea. La masa empieza de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 1.5 pies/s.

9. $\dfrac{1}{4}$ s, $\dfrac{1}{2}$ s, $x\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-2} \approx 0.14$

11. $x(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}(\cos 4t + \operatorname{sen} 4t)$

13. ***a)*** $\beta > \dfrac{5}{2}$ ***b)*** $\beta = \dfrac{5}{2}$ ***c)*** $0 < \beta < \dfrac{5}{2}$

15. $x(t) = \dfrac{1}{625}e^{-4t}(24 + 100t) - \dfrac{1}{625}e^{-t}(24\cos 4t + 7\operatorname{sen} 4t)$;

$x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

17. 4.568 C; 0.0509 s

19. $q(t) = 10 - 10e^{-3t}(\cos 3t + \operatorname{sen} 3t)$; $i(t) = 60e^{-3t}\operatorname{sen} 3t$; 10.432 C

Ejercicios 16.5, página 895

1. $y_1(x) = c_0\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\ y_2(x) = c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

3. $y_1(x) = c_0,\ y_2(x) = c_1\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$

5. $$y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 + \frac{1}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^9 + \cdots\right],$$

$$y_2(x) = c_1\left[x + \frac{1}{4\cdot 3}x^4 + \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 + \frac{1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^{10} + \cdots\right]$$

7. $$y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{7\cdot 3}{6!}x^6 - \cdots\right],$$

$$y_2(x) = c_1\left[x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{5}{5!}x^5 + \frac{9\cdot 5}{7!}x^7 + \cdots\right]$$

9. $y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4^2}{6!}x^6 - \frac{7^2 \cdot 4^2}{9!}x^9 + \cdots\right],$

$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{2^2}{4!}x^4 + \frac{5^2 \cdot 2^2}{7!}x^7 - \frac{8^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2}{10!}x^{10} + \cdots\right]$

11. $y_1(x) = c_0, \; y_2(x) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n$

13. $y_1(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \; y_2(x) = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$

15. $y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{4 \cdot 4!}x^4 + \frac{23 \cdot 7}{8 \cdot 6!}x^6 - \cdots\right],$

$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{14}{2 \cdot 5!}x^5 - \frac{34 \cdot 14}{4 \cdot 7!}x^7 + \cdots\right]$

17. $y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots\right],$

$y_2(x) = c_1\left[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right]$

19. $y = 6x - 2\left[1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right]$

Revisión del capítulo 16, página 895

A. **1.** verdadero **3.** falso

5. verdadero **7.** verdadero

B. **1.** $y = 0$ **3.** 8 pies

5. $y_p = Ax^2 + Bx + C + Dxe^{2x} + Ee^{2x}$

C. **1.** $x^2 \cos y^3 - y = C$ **3.** $\frac{1}{4}x^2y^{-4} - \frac{3}{2}y^{-2} = -\frac{5}{4}$

5. $y = C_1e^{(1-\sqrt{3})x} + C_2e^{(1+\sqrt{3})x}$ **7.** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{5x}$

9. $y = C_1 \cos\frac{1}{3}x + C_2 \operatorname{sen}\frac{1}{3}x$ **11.** $y = -24 \cos 6x + 3 \operatorname{sen} 6x$

13. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{4x} - \frac{1}{10}xe^{2x} - \frac{13}{100}e^{2x}$

15. $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) - e^x \cos x \ln|\sec x + \tan x|$

17. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sec x$

19. $y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{3 \cdot 2}x^3 + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}x^6 - \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}x^9 + \cdots\right],$

$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{1}{4 \cdot 3}x^4 + \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}x^7 - \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}x^{10} + \cdots\right]$

21. $0 < m \le 2$

23. $x(t) = e^{-4t}\left(\frac{26}{17} \cos 2\sqrt{2}t + \frac{28}{17}\sqrt{2} \operatorname{sen} 2\sqrt{2}t\right) + \frac{8}{17}e^{-t}$

25. $x\left(\frac{1}{10}\right) = 5e^{-0.2} \approx 4.0937$

ÍNDICE ANALÍTICO

ÍNDICE ANALÍTICO

E

ÍNDICE ANALÍTICO

ÍNDICE ANALÍTICO

G

H

I

J

L

ÍNDICE ANALÍTICO

ÍNDICE ANALÍTICO

R

ÍNDICE ANALÍTICO

T

U

V

W

Créditos de fotografías

Tabla de contenido

Página ix (arriba) © Pavel Kapish/ShutterStock, Inc.; **página ix (abajo)** Polka Dot Images/age footstock; **página x (arriba)** © Jose Gil/ShutterStock, Inc.; **página x (en medio)** © coko/ShutterStock, Inc.; **página x (abajo)** © RubberBall/age footstock; **página xi (arriba)** © Kim Steele/Alamy Images; **página xi (en medio)** © Joy Brown/ShutterStock, Inc.; **página xi (abajo)** © siloto/ShutterStock, Inc.; **página xii (arriba)** © Suzanne Tucker/ShutterStock, Inc.; **página xii (abajo)** Cortesía de The Observatories of the Carnegie Institution of Washington; **página xiii (en medio)** © Corbis/age footstock; **página xiii (abajo)** © Brand X Pictures/age footstock; **página xiv (arriba)** © GraphEast/age footstock; **página xiv (en medio)** © Netfalls/ShutterStock, Inc.; **página xiv (abajo)** © Nancy A. Thiele/ShutterStock, Inc.

Capítulo 1

Entrada de capítulo (izquierda) © Pavel Kapish/ShutterStock, Inc.; **entrada de capítulo (en medio)** © Design Pics/age footstock; **página 2** © PhotoCreate/ShutterStock, Inc.; **página 15** Cortesía de Joanna Lee, Flickr.com

Capítulo 2

Entrada de capítulo (izquierda) © Polka Dot Images/age fotostock

Capítulo 3

Entrada de capítulo (izquierda) © Jose Gil/ShutterStock, Inc.; **entrada de capítulo (en medio)** © ImageSource/age footstock; **página 179** © Marcy J. Levinson/ShutterStock, Inc.

Capítulo 4

Entrada de capítulo (izquierda) © coko/ShutterStock, Inc.; **entrada de capítulo (en medio)** © Corbis/age fotostock

Capítulo 5

Entrada de capítulo (en medio) © RubberBall/age footstock

Capítulo 6

Entrada de capítulo (izquierda) © Tomasz Trojanowski/ShutterStock, Inc.; **entrada de capítulo (en medio)** © Kim Steele/Alamy Images; **página 333** © Photoeuphoria/ Dreamstime.com; **página 340** Cortesía de Vernon Byrd/U.S. Fish and Wildlife Service; **página 350** © Sergei Chumakov/ShutterStock, Inc.

Capítulo 7

Entrada de capítulo (izquierda) © Joy Brown/ShutterStock, Inc.; **página 399** © SlavaK/ ShutterStock, Inc.

Capítulo 8

Entrada de capítulo (izquierda) Cortesía de Christine Myaskovsky; **entrada de capítulo (en medio)** © siloto/ShutterStock, Inc.

Capítulo 9

Entrada de capítulo (en medio, izquierda) © E.A. Janes/age footstock; **entrada de capítulo (en medio, derecha)** © Suzanne Tucker/ShutterStock, Inc.; **página 494** Cortesía de Michael Maggs; **página 499** © Andrjuss/ShutterStock, Inc.

Capítulo 10

Entrada de capítulo (en medio) Cortesía de The Observatories of the Carnegie Institution of Washington; **página 556 (izquierda)** © Dennis Donohue/ShutterStock, Inc.; **página 556 (derecha)** Cortesía de The Palomar Observatory, California Institute of Technology; **página 557** © Architect of the Capital; **página 564** © Jan Kliciak/ShutterStock, Inc.; **página 577** © Mircea Bezergheanu/ShutterStock, Inc.; **página 578** © Jgroup/Dreamstime.com; **página 595** Cortesía de Mariner 10, Astrogeology Team, and USGS

Capítulo 11

Página 649 (izquierda) © Martin Mette/ShutterStock, Inc.; **página 649 (en medio)** Cortesía de The North Carolina State Archives; **página 649 (derecha)** © Marcie Fowler — Shining Hope Images/ShutterStock, Inc.

Capítulo 12

Entrada de capítulo (en medio) © Corbis/age footstock

Capítulo 13

Entrada de capítulo (en medio) © Brand X Pictures/age footstock

Capítulo 14

Entrada de capítulo (en medio) © GraphEast/age footstock

Capítulo 15

Entrada de capítulo (izquierda) © Netfalls/ShutterStock, Inc.; **entrada de capítulo (arriba, derecha)** Cortesía de NOAA; **entrada de capítulo (abajo, derecha)** Imagen de Liu, Hu y Yeuh, NASA Jet Propulsion Laboratory; **página 808 (arriba)** Cortesía de NOAA; **página 808 (abajo)** Imagen de Liu, Hu y Yeuh, NASA Jet Propulsion Laboratory

Capítulo 16

Entrada de capítulo (en medio) © Nancy A. Thiele/ShutterStock, Inc.; **página 890** © Kameel4u/Dreamstime.com

A menos que se indique lo contrario, todas las fotografías y las ilustraciones están bajo el registro de Jones and Bartlett Publishers, LLC. El retrato de los matemáticos fue obra de Diana Coe.